EDP 1

Exemples d'EDP
Transformat° de Fourier
Distribut°
Espace de Sobolev, injec° de Sobolev
Formulat° variationnelle, EDP
Régularité
Principe du maximum et décomp spectrale

Chap 1 — EDP : qq exemples

I) Notations

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$
Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on note :

$$\boxed{\partial^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}}$$

où $\dfrac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$ est la dérivée partielle d'ordre α_j par rapp à la j ème var

Pour une fonct° $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) régulière

$$\boxed{\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} (x)}$$

On note également $f^{(\alpha)} = \partial^\alpha f$.

Pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) régulière, on déf le gradient

$$\boxed{\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}}$$

... que $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$, donc 1 vect.
Si $n = 1$, $\nabla f(x) = f'(x)$.

Pour une fonct° $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$
$g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$
fonct° vectorielle régulière
les g_i sont ses fonct° coord.

On définit sa <u>divergence</u> :

$$\boxed{\operatorname{div}(g)(x) = \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_n}}$$

Pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$ régulière, on déf le <u>laplacien</u> de f :

$$\boxed{\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x)}$$

<u>Rq</u> $\Delta = \operatorname{div}(\nabla)$

<u>EDO</u> une équat° diff ordinaire est 1 équat° de la forme

$$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(k)}(x)) = 0 \qquad (*)$$

où $x \in \mathbb{R}$ (ou 1 partie de $\mathbb{R}$), F est 1 fonct° de $k+1$ variables (qui est donné) et u est la fonct° inconnue.

<u>Résoudre</u> $(*)$ consiste à <u>trouver un ensemble I</u> de $\mathbb{R}$ et une fonct° $u : I \to \mathbb{R}$ ayant (au $\ominus$) <u>k dérivées</u> sur I et vérif $(*)$ $\forall$...

<u>Ex</u> Équa diff lin d'ordre k à coeffs const.

$$a_k u^{(k)}(x) + \dots + a_1 u'(x) + a_0 u(x) = f(x)$$

Cette équat° s'écrit sous la forme (*) avec
$$F(x,y) = \sum_{j=0}^{k} a_j y_j - f(x) \qquad (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1}.$$

EDP ume équat° aux dérivées partielles est 1 équat° mettant en jeu les ≠ dérivées partielles $\partial^\alpha f$ pour certains $\alpha \in \mathbb{N}^k$. (EDP d'ordre k si $|\alpha| \leq k$).

Si $n=2$, ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$), 1 EDP d'ordre 1, s'écrit sous la forme:

$(x,y) \in \Omega$
$$F\left(x,y,u(x,y),\frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) = 0$$

et celle d'ordre 2:

$$F\left(x,y,u(x,y),\frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y)\right) = 0.$$

Résoudre 1 EDP consiste à trouver un ouvert $\Omega' \subseteq \Omega$ et 1 fonct° $u : \Omega' \to \mathbb{R}$ suffi régu et vérif l'équat° $\forall x \in \Omega'$

Dans certains cas la var $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ et consiste en $x=(t,x')$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $x' \in \mathbb{R}^n$.
la var t désigne le tps et x' la var espace

L'EDP ainsi obtenue corresp à l'évolut° d'1 syst dans le temps et dans l'espace

Problème de Cauchy consiste à trouver 1 solut° de l'EDP qui vérif en ⊕ 1 donnée initiale

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta_x u(t,x) & t \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \quad = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(t,x) + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(t,x) \\ u(0,x) = f(x) \\ u(t,x) = 0 \ \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

(sur un bord, sur 1 plaque

- **L'équat° de Schrodinger dans $\mathbb{R}^n$:**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = i \Delta_x u(t,x) & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

- **L'équat° de transport dans $\mathbb{R}^n$:**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

où c est 1 cst (ex: écoulement d'1 fluide dans 1 tube, $u(t,x)$ la concentrat° d'1 polluant dans 1 fluide à l'instant t et au pt x, c la vitesse du fluide)

- **L'équat° des ondes dans $\mathbb{R}^n$**

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \Delta_x u(t,x) & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x) \end{cases}$$

$\frac{d}{dt} U(t,x)$

$U = \begin{pmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix}$

→ pb d'ordre 1 à

(f et g sont les données)

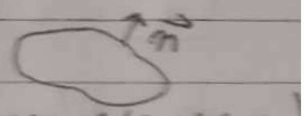
On peut aussi considérer ces équat° dans 1 domaine Ω (au lieu de $\mathbb{R}^n$). La solut° recherchée doit alors satisfaire certaines condit° lorsque x s'approche du bord de Ω (appelées condit° au bord ou condit° aux lim)

Par ex, * $u(t,x)=0$, $x \in \underbrace{\partial\Omega}_{\text{bord de } \Omega}$ et $t \geq 0$.

(cela consiste à maintenir la chaleur égale à 0 sur le bord) appelée la cond au bord de Dirichlet.

* la dérivée normale de u est nulle sur le bord.

$$\frac{\partial u}{\partial n}(t,x) = \nabla u(t,x) \cdot \vec{n}(x) = 0$$



$\vec{n}$ le vect normal extérieur à Ω

(correspond au fait qu'il n'y ait pas d'échange avec l'extérieur)
appelée la condit° au bord de Neumann

Il existe aussi des EDP importantes dans lesquelles il n'y a pas de var "temps" t.

Il existe essentiellement 3 catégories d'EDP:

* EDP elliptiques : pas d'évolut° en tps (modélisat° de phénomènes stationnaires)
  ex : équat° de Laplace : $-\Delta u(x) = f(x)$, u est l'inconnue, f est donnée, $(x \in \mathbb{R}^n)$.
* EDP paraboliques : évolut° en tps qui "ressemble" à l'évolut° de la chaleur.
  ex : équat° de la chaleur
* EDP hyperboliques : évolut° en tps
  ex : équat° des ondes ou transport

Chap 2 Transformat° de Fourier

I) Rappels sur les espaces de Lebesgue

(Ω, μ) un esp mesuré
μ mesure $\oplus$

* μ est finie si $\mu(\Omega) < \infty$
* μ est σ finie si $\exists$ $\Omega_n \subseteq \Omega$ tous mesurables

$\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ et $\mu(\Omega_n) < \infty$ $\forall n$

Ex $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, μ mesure de Lebesgue.

* On déf $\int_\Omega f \, d\mu$ ou $\int_\Omega f(x) d\mu(x)$ l'intégrale de $f : \Omega \to \mathbb{R}$ par rapp à la mesure μ.

* Espace $L^p(\Omega, \mu)$

$1 \leq p < \infty$ $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$: espace des fonct° $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ou ($\mathbb{C}$) mesurables

Pour $p \in [1;+\infty[$ et $f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)$, on déf :
$$\boxed{\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p}}$$
Pour $p = +\infty$, $\boxed{\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} \text{ess} |f(x)|}$ (= sup sur Ω privé des ens négli).

$\forall p \in [1;+\infty]$, $f,g \in \mathcal{L}^p$, on a :

- $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
- $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$
- $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ p.p ($p<\infty$)

Du coup $\|.\|_p$ n'est pas tout à fait 1 norme.

$f \, R \, g \Leftrightarrow f = g$ μ pp.

R est 1 relat° d'équi sur $\mathcal{L}^p$

$\dot{f}$ = classe d'équi de f. $g \in \dot{f} \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} f = g$ μ p.p.

$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow \dot{f} = \dot{0}$

$\|.\|_p$ est 1 norme sur $L^p(\Omega,\mu) = \mathcal{L}^p(\Omega,\mu)/R$

Dans la pratique $L^p(\Omega,\mu)$ est 1 espace de Banach

Pour $p \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$, on déf :

$$\boxed{\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}}$$

Pour $p = +\infty$, $\boxed{\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |f(x)|}$ (= sup sur Ω privé des négli).

$\forall p \in [1; +\infty]$, $f, g \in \mathcal{L}^p$, on a :

- $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$
- $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p$
- $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ p.p ($p < \infty$)

Du coup $\|.\|_p$ n'est pas tout à fait 1 norme.

$f \, R \, g \Leftrightarrow f = g$ μ pp.

R est 1 relat° d'équi sur $\mathcal{L}^p$

$\dot{f}$ = classe d'équi de f. $g \in \dot{f} \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} f = g$ μ p.p

$\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow \dot{f} = \dot{0}$

$\|.\|_p$ est 1 norme sur $L^p(\Omega, \mu) = \mathcal{L}^p(\Omega, \mu) / R$

Dans la pratique $L^p(\Omega, \mu)$ est 1 espace de Banach

On confond $\dot{f}$ et f (ou n'imp quel $g \in \dot{f}$)

$f \in L^p$, $g \in L^q$ $\quad \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$

On a

$$\boxed{\left| \int f g \, d\mu \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q}$$ Inég Hölder

$p = 2$ $\quad L^2$ est 1 esp de Hilbert

$(f, g) = \int_\Omega f(x) \overline{g(x)} \, d\mu(x)$