

SOAL-SOAL DAN PENYELESAIAN

- (1.) Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dan relasi R dari A ke B diberikan oleh $R = \{(1,5), (4,5), (1,4), (4,6), (3,7), (7,6)\}$

Carilah: Domain, range (jangkauan) dan R^{-1}

Jawab:

$$\begin{aligned}\text{Domain dari } R = D &= \{a / a \in A \text{ dan } (a,b) \in R, b \in B\} \\ &= \{1, 3, 4, 7\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Range dari } R = E &= \{b / b \in B \text{ dan } (a,b) \in R, a \in A\} \\ &= \{4, 5, 6, 7\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R^{-1} &= \{(b,a) / (a,b) \in R\} \\ &= \{(5,1), (5,4), (4,1), (6,4), (7,3), (6,7)\}\end{aligned}$$

2. Misalkan R suatu relasi pada himpunan bilangan asli N yang didefinisikan oleh $R = \{(x,y) / x,y \in N, x+3y = 12\}$. Tentukan:

- (a) Tulis R dalam bentuk himpunan pasangan terurut.
(b) Carilah domain, range dan invers dari R

Jawab:

- a). R sebagai himpunan pasangan terurut

$$R = \{(2,3), (6,2), (9,1)\}$$

- b). Domain dari $R = D = \{3, 6, 9\}$

$$\text{Range dari } R = E = \{1, 2, 3\}$$

$$R^{-1} = \{(b,a) / (a,b) \in R\} = \{(3,3), (2,6), (1,9)\}$$

- (3.) Suatu relasi R dari himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke himpunan $B = \{1, 3, 5\}$, yang didefinisikan oleh " x lebih kecil dari y "

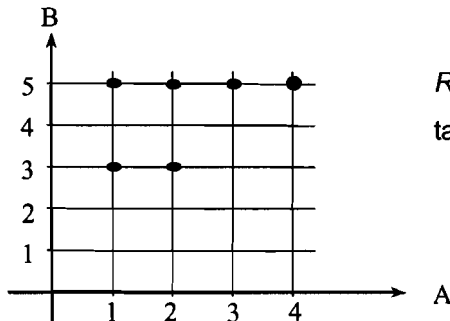
- (c) Tulis R sebagai himpunan pasangan terurut.
(d) Gambarkan R pada diagram koordinat $A \times B$
(e) Tentukan relasi invers R^{-1}

Jawab:

(a) $x R y$ dibaca x lebih kecil y ditulis $x < y$.

$$R = \{(x, y) / x < y\} = \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,5), (4,5)\}$$

(b) Diagram koordinat $A \times B$ dari relasi R sebagai berikut :



R merupakan himpunan titik-titik yang tampak pada diagram koordinat $A \times B$.

(c) $R^{-1} = \{(y, x) / (x, y) \in R\}$

$$= \{(3, 1) (5, 1) (3, 2) (5, 2) (5, 3) (5, 4)\}$$

4. Suatu relasi R yang didefinisikan sebagai " x pembagi y " dari himpunan $C = \{2, 3, 4, 5\}$ ke himpunan $D = \{3, 6, 7, 10\}$

(a) Tentukan R sebagai himpunan pasangan terurut

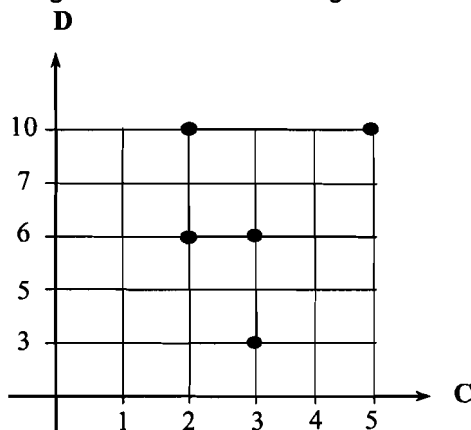
(b) Gambar R pada diagram koordinat $C \times D$

(c) Tentukan relasi invers R^{-1}

Jawab :

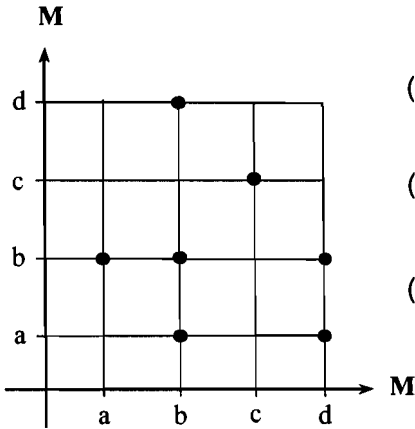
(a) $R = \{(2, 6), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (5, 10)\}$

(b) Diagram koordinat R sebagai berikut :



(c). $R^{-1} = \{(6, 2), (10, 2), (3, 3), (6, 3), (10, 5)\}$

5. Misalkan $M = \{a, b, c, d\}$ dan suatu relasi R pada M yang memuat titik-titik yang tampak pada diagram koordinat berikut ini.



- (a) Tentukan semua unsur di M yang berelasi dengan b , atau $\{x / \{x, b\} \in R\}$
- (b) Tentukan semua unsur di M sehingga d merupakan relasinya, atau $\{x / \{d, x\} \in R\}$
- (c) Tentukan relasi invers R^{-1}

Jawab :

- (a) Dari (a, b) , (b, b) dan (d, b) diperoleh unsur-unsur pada M yang berelasi dengan b yaitu $\{a, b, d\}$
- (b) Dari (d, a) dan (d, b) , diperoleh unsur-unsur di M yang memenuhi $\{x / \{x, b\} \in R\}$ yaitu $\{a, b\}$
- (c) Karena $R = \{(a, b), (b, a), (b, b), (b, d), (c, c), (d, a), (d, b)\}$ maka

$$R^{-1} = \{(b, a), (a, b), (b, b), (d, b), (c, c), (a, d), (b, d)\}$$

6. Misalkan R suatu relasi yang didefinisikan sebagai relasi " \leq " pada himpunan $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Yaitu $(a, b) \in R$ jika dan hanya jika $a \leq b$. Tentukan apakah R :
 (a) refleksif, (b) simetris, (c) transitif, ataukah (d) ekivalensi.

Jawab :

- (a) R refleksif, sebab $(\forall a \in N) a \leq a$
- (b) R tidak simetris, sebab $(\exists a, b \in N) 3 \leq 5$, tetapi $5 \not\leq 3$
- (c) R transitif, sebab $(\forall a, b, c \in N) a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c$.
- (d) R tidak ekivalensi sebab R tidak simetris. R akan ekivalensi jika R bersifat refleksif, simetris dan sekaligus transitif.

7.

Misalkan R adalah relasi pada himpunan $A = \{2, 8, 32, 4\}$ dimana xRy menyatakan bahwa "x membagi y" untuk setiap $x, y \in A$.

- Tulis R sebagai pasangan terurut
- Buatlah relasi R dalam bentuk matriks
- Selidiki apakah R mempunyai sifat refleksif, simetris dan transitif.
- Buatlah graf untuk R

Jawab:

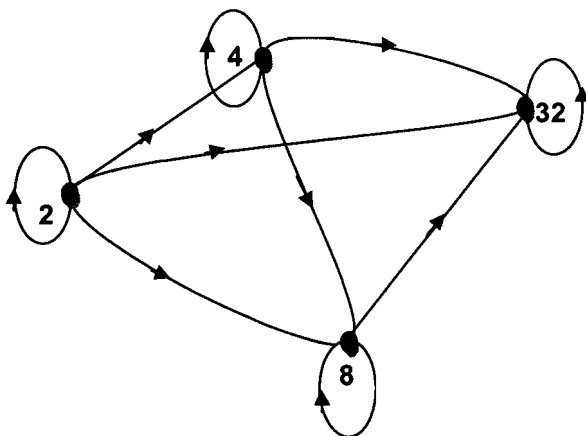
a. $R = \{(2,2), (2,8), (2,32), (2,4), (8,8), (8,32), (32,32), (4,4), (4,8), (4,32)\}$

b. R dalam bentuk matriks

M	2	8	32	4
2	1	1	1	1
8	0	1	1	0
32	0	0	1	0
4	0	1	1	1

- Karena semua elemen-elemen diagonalnya 1, maka R bersifat refleksif. yaitu $(2,2) \in R$, $(8,8) \in R$, $(32,32) \in R$, dan $(4,4) \in R$
 - Dari matriks diatas tampak bahwa R mempunyai sifat Transitif, sebab untuk setiap $i, j, k = 1, 2, 3, 4$, berlaku $m_{ij} = 1$ dan $m_{jk} = 1$ maka $m_{ik} = 1$
 - Matriks M diatas tidak simetris, karena $m_{ij} \neq m_{ji}$. Jadi R tidak mempunyai sifat simetris, dan R bersifat anti-simetris

d.



8. Misalkan $W = \{1, 2, 3, 4\}$. Perhatikan relasi-relasi R_1 , R_2 , dan R_3 pada W berikut ini :

$$R_1 = \{(1, 2), (4, 3), (2, 2), (2, 1), (3, 1)\}$$

$$R_2 = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$$

$$R_3 = \{(1, 3)\}$$

Tentukan relasi mana yang (a) Simetris, (b) Transitif.

Jawab:

(a) Simetris:

$$R \text{ dikatakan simetris} \iff (\forall a, b \in W) (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R$$

R_1 tidak simetris, sebab $(\exists 3, 4 \in W) (4, 3) \in R_1$, tetapi $(3, 4) \notin R_1$.

R_2 Simetris, sebab $(\forall 2, 3 \in W) (2, 3) \in R_2 \rightarrow (3, 2) \in R_2$ $(2, 2) \in R_2 \rightarrow (2, 2) \in R_2$

R_3 tidak simetris, sebab $(\forall 1, 3 \in W) (1, 3) \in R_3 \wedge (3, 1) \notin R_3$

(b) Transitif:

$$R \text{ dikatakan transitif jika dan hanya jika } (\forall a, b, c \in W) (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R$$

R_1 tidak transitif, sebab $(\exists 1, 3, 4 \in W) (4, 3) \in R_1 \wedge (3, 1) \in R_1 \rightarrow (4, 1) \notin R_1$

R_2 tidak transitif, sebab $(\exists 2, 3 \in W) (3, 2) \in R_2 \wedge (2, 3) \in R_2 \rightarrow (3, 3) \notin R_2$

R_3 tidak transitif, sebab R_3 hanya mempunyai satu unsur yaitu $(1, 3) \in R_3$

9. Suatu relasi $R = \{(1,1), (2, 3), (3, 2)\}$ pada $X = \{1, 2, 3\}$. Tentukan apakah R mempunyai sifat (a) refleksif (b) Simetris, ataukah (c) transitif.

Jawab:

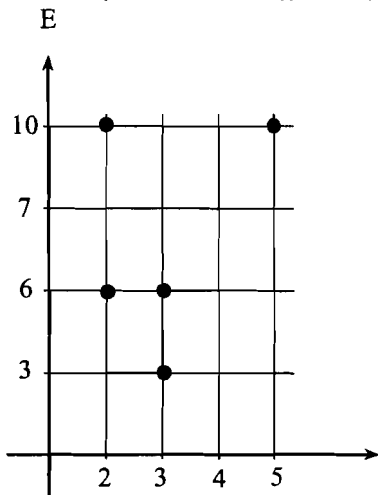
- (a) R tidak refleksif, sebab $2 \in X$, tetapi $(2, 2) \notin R$
 (b) R Simetris, sebab $R^{-1} = \{(1, 1), (3, 2), (2, 3)\} = R$
 (c) R tidak transitif, sebab $(3, 2) \in R$ dan $(2, 3) \in R$, tetapi $(3, 3) \notin R$

10. Misalkan R adalah suatu relasi dari himpunan $E = \{2, 3, 4, 5\}$ ke himpunan $F = \{3, 6, 7, 10\}$ yang didefinisikan oleh kalimat terbuka "y habis dibagi oleh x".

- (a) Tuliskan R sebagai himpunan pasangan-pasangan terurut, yaitu carilah himpunan jawab dari R .
 (b) Buatlah sketsa dari R pada diagram koordinat $E \times F$.

Jawab:

- (a) Pandang keenam belas elemen dalam $E \times F$ dan pilihlah pasangan-pasangan terurut dimana elemen keduanya habis dibagi oleh elemen pertamanya; maka $R = \{(2, 6), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (5, 10)\}$



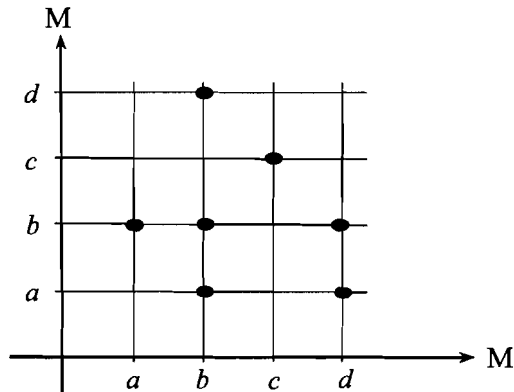
- (b). Sketsa dari R pada diagram koordinat $E \times F$ diperlihatkan pada tabel berikut

11. Diketahui $M = \{a, b, c, d\}$ dan relasi R pada M didefinisikan sebagai himpunan titik-titik yang diperlihatkan pada diagram koordinat $M \times M$ dibawah ini.

- (a) Nyatakan apakah masing-masing berikut ini benar atau salah:

- (a) $c R b$, (b) $d \not R a$, (c) $a \not R c$, (d) $b \not R b$

- (b) Carilah $\{x \mid (x, b) \in R\}$, yaitu semua elemen-elemen dalam M yang berelasi dengan b .
- (c) Carilah $\{x \mid (d, x) \in R\}$, yaitu semua elemen-elemen dalam M yang berelasi dengan d .



Jawab:

- (1) Perhatikan bahwa $x R y$ benar jika dan hanya jika (x, y) termasuk dalam R .
- (a) Salah, karena $(c, b) \notin R$. (c) Benar, karena $(a, c) \notin R$
- (b) Salah, karena $(d, a) \in R$. (d) Salah, karena $(b, b) \in R$.
- (2) Garis horizontal yang melalui b memuat semua titik dari R di mana b muncul sebagai elemen kedua; ia memuat pasangan-pasangan terurut (a, b) , (b, b) dan (d, b) dari R .
- Oleh karena itu $\{x \mid (x, b) \in R\} = \{a, b, d\}$
- (3) Garis vertikal yang melalui d memuat semua titik dari R dengan d muncul sebagai elemen pertama; yaitu titik-titik (d, a) dan (d, b) dari R . Jadi $\{x \mid (d, x) \in R\} = \{a, b\}$.

12. Masing-masing kalimat terbuka berikut ini mendefinisikan suatu relasi dalam bilangan-bilangan riil. Buatlah sketsa dari masing-masing relasi pada suatu diagram koordinat dari $R^{\#} \times R^{\#}$.

- | | |
|------------------|---------------------|
| (1) $y = x^2$ | (4) $y \geq \sin x$ |
| (2) $y \leq x^2$ | (5) $y \geq x^3$ |
| (3) $y < 3 - x$ | (6) $y > x^3$ |

Jawab:

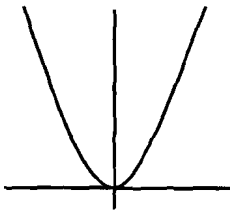
Untuk membuat sketsa suatu relasi pada bilangan-bilangan riil yang didefinisikan oleh kalimat terbuka berbentuk

- (a) $y = f(x)$
- (b) $y > f(x)$
- (c) $y \geq f(x)$
- (d) $y < f(x)$
- (e) $y \leq f(x)$

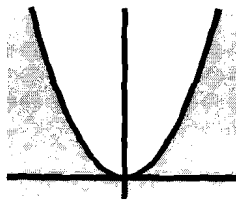
Pertama-tama gambarkan kurva $y = f(x)$. Maka relasinya, akan terdiri atas titik-titik.

- (a) pada $y = f(x)$
- (b) di atas $y = f(x)$
- (c) di atas dan pada $y = f(x)$
- (d) di bawah $y = f(x)$
- (e) di bawah dan pada $y = f(x)$

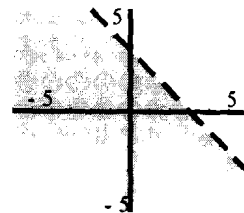
(f) Jadi gambar-gambar berikut ini adalah sketsa-sketsa dari relasi-relasi di atas:



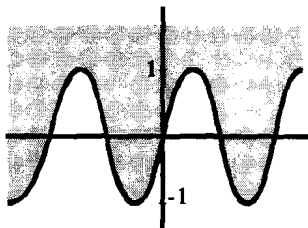
(1) $y = x^2$



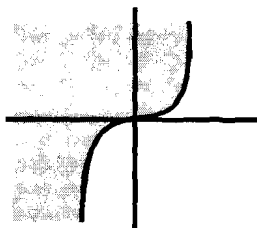
(2) $y \leq x^2$



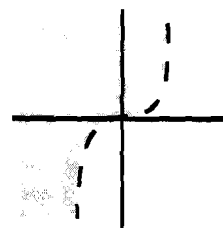
(3) $y < x^2 - x$



(4) $y \geq \sin x$



(5) $y \geq x^3$



(6) $y > x^3$

Perhatikan bahwa, kurva $y = f(x)$ digambarkan dengan garis terputus-putus jika titik-titik pada $y = f(x)$ tidak termasuk dalam relasi.

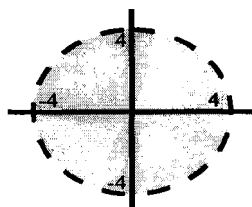
13. Masing-masing kalimat terbuka berikut ini mendefinisikan suatu relasi dalam bilangan-bilangan riil. Buat sketsa masing-masing relasi pada di koordinat $R \times R$

Jawab:

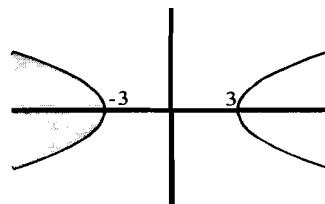
Untuk membuat sketsa suatu relasi dalam bilangan-bilangan riil yang didefinisikan oleh kalimat terbuka berbentuk $f(x, y) < 0$ (atau $\leq, >, \geq$), maka gambarkan $f(x, y) = 0$. Kurva $f(x, y) = 0$, akan membagi bidang dalam berbagai daerah-daerah. Relasi ini akan terdiri dari semua titik-titik dalam satu atau mungkin lebih daerah-daerah.

Ujilah satu atau lebih titik-titik dalam tiap-tiap daerah untuk menentukan apakah semua titik dalam daerah itu termasuk dalam relasi atau tidak.

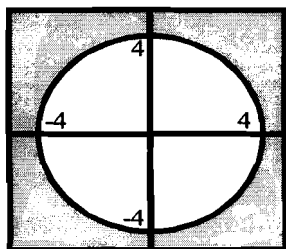
Sketsa dari masing-masing relasi di atas hasilnya adalah sebagai berikut



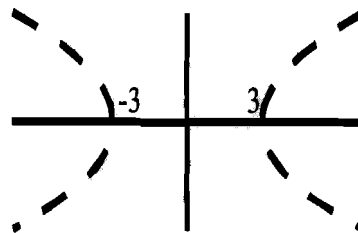
$$x^2 + y^2 - 16 < 0$$



$$x^2 - 4y^2 - 9 \leq 0$$



$$x^2 + y^2 \geq 16$$



$$x^2 - 4y^2 < 9$$

14. Pandang relasi $R = \{(1, 5), (4, 5), (1, 4), (4, 6), (3, 7), (7, 6)\}$. Carilah (1) Domain dari R , (2) Jangkauan dari R , (3) invers dari R .

Jawab :

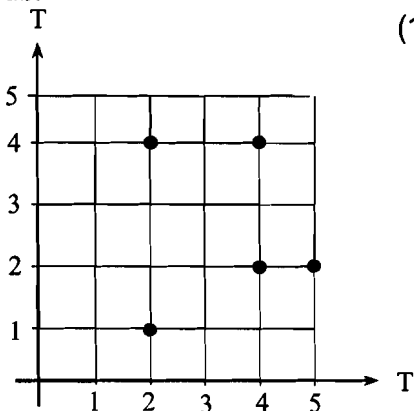
- (1) Domain dari R terdiri atas himpunan dari elemen-elemen pertama dalam R ; oleh karena itu domain dari R adalah $\{1, 4, 3, 7\}$
- (2) Jangkauan dari R terdiri dari himpunan dari elemen-elemen kedua dalam R ; oleh karena itu domain dari R adalah $\{5, 4, 6, 7\}$
- (3) Invers dari R terdiri dari pasangan elemen dalam R dengan urutannya di balik.

$$\text{Jadi } R^{-1} = \{(5, 1), (5, 4), (4, 1), (6, 4), (7, 3), (6, 7)\}$$

15. Misalkan $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan R suatu relasi dalam T merupakan himpunan titik-titik yang diperlihatkan dalam diagram koordinat $T \times T$ berikut ini:

- (1) Carilah domain dari R
- (2) Tentukan jangkauan dari R
- (3) Cari invers dari R .
- (4) Buatlah sketsa R^{-1} pada diagram koordinat $T \times T$.

Jawab:



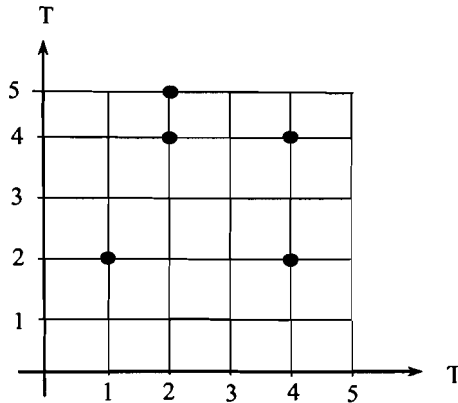
- (1) Elemen $x \in T$ berada dalam domain R jika dan hanya jika garis vertikal yang melalui x memuat sebuah titik dari R . Jadi domain dari R adalah himpunan $\{2, 4, 5\}$; karena garis vertikal yang melalui tiap-tiap elemen ini dan hanyalah elemen-elemen ini yang mengandung titik-titik dalam R .

- (2) Elemen $x \in T$ berada dalam jangkauan R jika dan hanya jika garis horizontal yang melalui x memuat sebuah titik dari R . Jadi jangkauan dari R adalah himpunan $\{1, 2, 4\}$, karena garis horizontal yang melalui tiap-

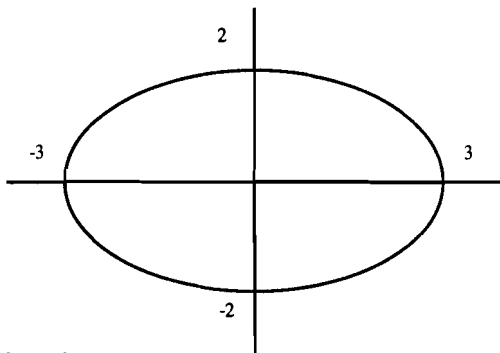
tiap elemen ini, dan hanyalah elemen-elemen ini yang memuat sekurang-kurangnya satu titik dari R . Karena $R = \{(2, 1), (2, 4), (4, 2), (4, 4), (5, 2)\}$

(3) $R^{-1} = \{(1, 2), (4, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 5)\}$

(4) R^{-1} diperlihatkan pada diagram koordinat $T \times T$ sebagai berikut:



16. Misalkan $R = \{(x, y) \mid x \in R^{\#}, y \in R^{\#}, 4x^2 + y^2 = 36\}$. Sketsa dari R pada diagram koordinat $R^{\#} \times R^{\#}$ adalah sebagai berikut:



Carilah:

- (1) Domain dari R ,
- (2) jangkauan dari R ,
- (3) R^{-1}

Jawab:

- (1) Domain dari R adalah selang $[-3, 3]$ karena garis vertikal yang melalui tiap-tiap bilangan ini dan hanyalah bilangan-bilangan ini, yang memuat sekurang-kurangnya satu titik dari R .
- (2) Jangkauan dari R adalah selang $[-2, 2]$, karena garis horizontal yang melalui tiap-tiap elemen dan hanyalah elemen-elemen ini, yang memuat sekurang-kurangnya satu titik dari R .

- (3) Menurut definisi invers dari R diperoleh R^{-1} dengan mempertukarkan x dan y dalam kalimat terbuka yang mendefinisikan R ; yaitu:

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid x \in R^{\#}, y \in R^{\#}, 9x^2 + 4y^2 = 36\}$$

17. Apakah ada hubungan antara domain-jangkauan dari suatu relasi R , dan domain-jangkauan dari R^{-1} ?

Jawab:

Karena R^{-1} terdiri dari pasangan-pasangan yang sama seperti dalam R kecuali dalam urutan terbalik maka tiap-tiap elemen pertama dalam R akan menjadi elemen kedua dalam R^{-1} dan tiap-tiap elemen kedua dalam R akan menjadi elemen pertama dalam R^{-1} . Maka domain R adalah jangkauan R^{-1} dan jangkauan dari R adalah domain R^{-1} .

18. Misalkan R adalah relasi dalam bilangan-bilangan asli $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ yang didefinisikan oleh kalimat terbuka " $2x + y = 10$ ", yaitu $R = \{(x, y) \mid x \in N, y \in N, 2x + y = 10\}$; Carilah : (1) domain dari R , (2) jangkauan dari R , (3) R^{-1}

Jawab:

Pertama perhatikan bahwa himpunan jawaban dari $2x + y = 10$ adalah

$R = \{(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)\}$ meskipun terdapat tak-berhingga elemen-elemen dalam N .

(1) Domain dari R yang terdiri dari elemen-elemen pertama dari R adalah $\{1, 2, 3, 4\}$.

(2) Jangkauan dari R yang terdiri dari elemen-elemen kedua dari R adalah $\{8, 6, 4, 2\}$.

(3) R^{-1} diperoleh dengan mempertukarkan x dan y dalam kalimat terbuka yang mendefinisikan R ; jadi $R^{-1} = \{(x, y) \mid x \in N, y \in N, x + 2y = 10\}$

Juga karena R^{-1} terdiri dari pasangan-pasangan yang sama dalam R kecuali dalam urutan terbalik, maka R^{-1} dapat didefinisikan sebagai:

$$R^{-1} = \{(8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4)\}$$

19. Misalkan $W = \{1, 2, 3, 4\}$ dan relasi $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 4)\}$.

Apakah R refleksif ?

Jawab:

R tidak refleksif karena $3 \in W$ dan $(3,3) \notin R$.

20. Misalkan $E = \{1, 2, 3\}$. Pandang relasi-relasi berikut dalam E .

$$R_1 = \{(1, 2), (3, 2), (2, 2), (2, 3)\} \quad R_4 = \{(1, 2)\}$$

$$R_2 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\} \quad R_5 = E \times E$$

$$R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

Nyatakan apakah masing-masing relasi berikut adalah refleksif atau tidak.

Jawab:

Jika suatu relasi dalam E adalah refleksif maka $(1, 1)$, $(2, 2)$ dan $(3, 3)$ harus termasuk relasi R .

Dengan demikian R_3 dan R_5 bersifat refleksif.

21. Misalkan $V = \{1, 2, 3, 4\}$ dan relasi R pada V yang didefinisikan sebagai $R = \{(1,2), (3, 4), (2, 1), (3, 3)\}$. Apakah R simetris?

Jawab:

R tidaklah simetris, karena $3 \in V$, $4 \in V$, $(3,4) \in R$ dan $(4, 3) \notin R$.

22. Misalkan $E = \{1, 2, 3\}$. Pandang relasi-relasi berikut dalam E :

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 1), (2,2), (3,2), (2,3)\} \quad R_2 = \{(1, 1)\}$$

$$R_3 = \{(1, 2)\} \quad R_4 = \{(1, 1), (3, 2), (2, 3)\}$$

$$R_5 = E \times E$$

Nyatakan apakah relasi-relasi ini simetris atau tidak?

Jawab:

(1) R_1 tidaklah simetris karena $(2, 1) \in R_1$ tetapi $(1, 2) \notin R_1$

(2) R_2 simetris.

(3) R_3 tidaklah simetris karena $(1, 2) \in R_3$ tetapi $(2, 1) \notin R_3$

(4) R_4 Simetris

(5) R_5 Simetris

23. Bilamana suatu relasi R dalam himpunan A tidak anti-simetris?

Jawab:

R tidaklah anti-simetris jika terdapat elemen-elemen $a \in A$, $b \in A$, $a \neq b$ sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$.

24. Misalkan $W = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $R = \{(1, 2), (3, 4), (2, 2), (3, 3), (2, 1)\}$. Apakah R anti-simetris?

Jawab:

R tidaklah anti-simetris karena $1 \in W$, $2 \in W$, $1 \neq 2$, $(1, 2) \in R$ dan $(2, 1) \in R$.

25. Misalkan $E = \{1, 2, 3\}$. Pandang relasi-relasi berikut dalam E :

$$R_1 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (2,3)\}$$

$$R_2 = \{(1, 1)\}$$

$$R_3 = \{(1, 2)\}$$

$$R_4 = \{(1,1), (2,3), (3,2)\}$$

$$R_5 = E \times E$$

Nyatakan apakah masing-masing relasi ini anti-simetris atau tidak.

Jawab:

(1) R_1 tidaklah anti-simetris karena $(3,2) \in R$, dan $(2,3) \in R_1$.

(2) R_2 anti-simetris

(3) R_3 anti-simetris.

(4) R_4 tidaklah anti-simetris karena $(2,3) \in R_4$ dan $(3, 2) \in R_4$

(5) R_5 tidak anti-simetris berdasarkan alasan yang sama sebagaimana untuk R_4

26. Misalkan $E = \{1, 2, 3\}$. Berikan sebuah contoh dari suatu relasi R dalam E di mana R tidaklah simetris dan anti-simetris.

Jawab:

Relasi $R = \{(1,2), (2,1), (2,3)\}$ tidak simetris karena $(2,3) \in R$ tetapi $(3,2) \notin R$.

R juga tidak anti-simetris karena $(1, 2) \in R$ dan $(2, 1) \in R$.

27. Misalkan himpunan $W = \{1, 2, 3, 4\}$ dan relasi $R = \{(1, 2), (4, 3), (2, 2), (2, 1), (3, 1)\}$. Apakah R transitif ?

Jawab:

R tidaklah transitif karena $(4, 3) \in R$, $(3, 1) \in R$ tetapi $(4, 1) \notin R$.

28. Misalkan $W = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $R = \{(2, 2), (2, 3), (1, 4), (3, 2)\}$.

Apakah R transitif?

Jawab:

R tidaklah transitif karena $(3,2) \in R$, $(2,3) \in R$ tetapi $(3,3) \notin R$.

29. Misalkan $E = \{1, 2, 3\}$. Pandang relasi-relasi berikut dalam E :

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 2)\}$$

$$R_4 = \{(1, 1)\}$$

$$R_2 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 1), (1, 1)\}$$

$$R_5 = E \times E$$

$$R_3 = \{(1,2)\}$$

Nyatakan apakah relasi-relasi ini transitif atau tidak.

Jawab:

Masing-masing relasi ini transitif kecuali R_2 , R_2 tidak transitif karena

$$(2,1) \in R_2, (1,2) \in R_2, \text{ tetapi } (2,2) \notin R_2$$

30. Masing-masing kalimat terbuka berikut mendefinisikan suatu relasi R data bilangan-bilangan asli N . Nyatakan apakah masing-masingnya adalah suatu relasi refleksif atau tidak

- (1) lebih kecil atau sama dengan y
- (2) " y habis dibagi oleh x "
- (3) " $z + y = 10$ "
- (4) " x dan y secara relatif bilangan prima".

Jawab:

- (1) Karena $a \leq a$ untuk setiap $a \in N$ maka $(a, a) \in R$. Oleh karena itu R adalah refleksif.
- (2) Karena setiap bilangan habis dibagi oleh dirinya sendiri maka relasi ini refleksif.
- (3) Karena $3 + 3 \neq 10$ maka 3 tidaklah berhubungan dengan dirinya sendiri. Oleh karena itu R tidaklah refleksif.
- (4) Pembagi terbesar untuk 5 dan 5 adalah 5; jadi $(6, 5) \in R$. Oleh karena itu R tidaklah refleksif.

31. Masing-masing kalimat terbuka berikut mendefinisikan suatu relasi R dalam bilangan-bilangan asli A . Nyatakan apakah masing-masingnya adalah relasi simetris atau tidak.

- (1) " x lebih kecil daripada atau sama dengan y "
- (2) " x habis dibagi oleh y "
- (3) " $x + y = 10$ "
- (4) " $x + 2y = 10$ "

Jawab:

- (1) Karena $3 \leq 5$ tetapi $5 \leq 3$, maka $(3,5) \in R$ dan $(5,3) \notin R$.
Jadi R tidaklah simetris.
- (2) Karena 4 habis dibagi oleh 2 tetapi 2 tidak habis dibagi oleh 4, maka $(2,4) \in R$ dan $(4,2) \notin R$. Oleh karena itu R tidaklah simetris.
- (3) Jika $a + b = 10$ maka $b + a = 10$; atau dengan perkataan lain, jika $(a, b) \in R$ maka $(b, a) \in R$. Oleh karena itu R adalah simetris.
- (4) Perhatikan bahwa $(2, 4) \in R$, tetapi $(4, 2) \notin R$, yakni $2 + 2(4) = 10$ tetapi $4 + 2(2) \neq 10$. Jadi R tidaklah simetris.

32. Buktikan: Misalkan R dan S adalah relasi-relasi simetris dalam himpunan A ; maka $R \cap S$ adalah suatu relasi simetris dalam A .

Jawab:

Pertama perhatikan bahwa R dan S adalah subhimpunan dari $A \times A$; oleh karena itu $R \cap S$ adalah juga subhimpunan dari $A \times A$ dan dengan demikian adalah suatu relasi dalam A .

Misalkan (a, b) termasuk $R \cap S$. Maka $(a, b) \in R$. dan $(a, b) \in S$. Karena R dan S adalah simetris, maka (b, a) juga termasuk R dan (b, a) juga termasuk S ; oleh karena itu $(b, a) \in R \cap S$.

Dengan memperlihatkan bahwa jika $(a, b) \in R \cap S$ maka $(b, a) \in R \cap S$. oleh karena itu $R \cap S$ adalah simetris.

33. Masing-masing kalimat terbuka berikut mendefinisikan suatu relasi R dalam bilangan-bilangan asli N . Nyatakan apakah masing-masing relasi ini anti-simetris atau tidak.

- (1) " x lebih kecil daripada atau sama dengan y "
- (2) " x lebih kecil daripada y "
- (3) " $x + 2y = 10$ "
- (4) " x habis dibagi oleh y "

Jawab:

- (1) Karena $a \leq b$ dan $b \leq a$ menyatakan bahwa $a = b$, maka R anti-simetris.
- (2) Jika $a \neq b$, maka $a < b$ atau $b < a$; oleh karena itu R anti-simetris.
- (3) Himpunan jawab adalah $R = \{(2,4), (4,3), (6,2), (8,1)\}$. Perhatikan bahwa $R \cap R^{-1} = \emptyset$, yang mana adalah subhimpunan dari "garis diagonal" $N \times N$. Oleh karena itu R anti-simetris.
- (4) Karena b habis dibagi oleh a dan a habis dibagi oleh b menyatakan bahwa $a = b$, maka R anti-simetris.

34. Masing-masing kalimat terbuka berikut mendefinisikan suatu relasi R dalam bilangan-bilangan asli N . Nyatakan apakah masing-masing relasi ini transitif atau tidak.

- (1) " x lebih kecil daripada atau sama dengan y "
- (2) " y habis dibagi oleh x "

(3) " $x + y = 10$ "

(4) " $x + 2y = 5$ "

Jawab:

(1) Karena $a \leq b$ dan $b \leq c$ menyatakan bahwa $a \leq c$, maka relasi ini transitif.

(2) Jika y habis dibagi oleh x dan z habis dibagi oleh y , maka z habis dibagi oleh x , yaitu;

$$(x, y) \in R, (y, z) \in R \text{ menyatakan bahwa } (x, z) \in R.$$

Oleh karena itu R transitif

(3) Perhatikan bahwa $2 + 8 = 10$, $8 + 2 = 10$ dan $2 + 2 \neq 10$; Yaitu,

$$(2, 8) \in R, (8, 2) \in R \text{ tetapi } (2, 2) \notin R$$

Oleh karena itu R tidak transitif.

(4) R tidak transitif, karena $(3, 1) \in R, (1, 2) \in R$ tetapi $(3, 2) \notin R$; Yaitu,

$$3 + 2(1) = 5, 1 + 2(2) = 5 \text{ tetapi } 3 + 2(2) \neq 5$$

35. Buktikan jika suatu relasi R transitif, maka relasi invers R^{-1} juga transitif

Jawab:

Misalkan (a, b) dan (b, c) termasuk R^{-1} ; maka $(c, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$. Karena transitif maka (c, a) juga termasuk R ; oleh karena itu $(a, c) \in R^{-1}$.

Kita telah memperlihatkan bahwa jika $(a, b) \in R^{-1}, (b, c) \in R^{-1}$ maka $(a, c) \in R^{-1}$; oleh karena itu R^{-1} transitif.

36. Misalkan R adalah relasi dalam bilangan-bilangan asli N yang didefinisikan oleh kalimat terbuka " $(x - y)$ dapat dibagi oleh 5"; yaitu misalkan

$$R = \{(x, y) \mid x \in N, y \in N, (x - y) \text{ dapat dibagi oleh } 5\}$$

Buktikan bahwa R suatu relasi ekuivalen.

Jawab:

Misalkan $a \in N$; maka $(a - a) = 0$ dapat dibagi oleh 5, dan oleh karena itu $(a, a) \in R$. Jadi R refleksif.

Misalkan $(a, b) \in R$; maka $(a - b)$ dapat dibagi oleh 5, dan oleh karena itu $(b - a) = -(a - b)$ juga dapat dibagi oleh 5. Jadi (b, a) termasuk R . Karena jika $(a, b) \in R$ maka $(b, a) \in R$. Jadi R simetris,

Misalkan $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$; maka $(a - b)$ dan $(b - c)$ masing-masing dapat dibagi oleh 5. Oleh karena itu $(a - c) - (a - b) + (b - c)$ juga dapat dibagi oleh 5, yang berarti (a, c) termasuk R . Karena jika, $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ maka $(a, c) \in R$. Jadi R adalah transitif.

Karena R refleksif, simetris dan transitif maka menurut definisi R suatu relasi ekuivalen.

37. Misalkan R dan S adalah relasi-relasi dalam himpunan A . Buktikan kedua pernyataan berikut:

- (1) Jika R dan S simetris maka $R \cup S$ simetris.
- (2) Jika R refleksif dan S sebarang relasi maka $R \cup S$ refleksif.

Jawab:

- (1) Jika $(a, b) \in R \cup S$, maka (a, b) termasuk R atau S , yang mana adalah simetris. Oleh karena itu (b, a) juga termasuk R atau S . Maka $(b, a) \in R \cup S$ dan dengan demikian $R \cup S$ simetris.
- (2) R refleksif jika dan hanya jika R memuat "garis diagonal" D dari $A \times A$. Tetapi $D \subset R$ dan $R \subset R \cup S$ maka $D \subset R \cup S$. Dengan demikian $R \cup S$ refleksif.

38. Misalkan R dan S adalah relasi-relasi dalam himpunan A . Perhatikan bahwa masing-masing pernyataan berikut salah dengan memberikan contoh berlawanannya yaitu suatu contoh di mana pernyataan ini tidak benar.

- (1) Jika R anti-simetris dan S anti-simetris maka $R \cup S$ anti-simetris,
- (2) Jika R transitif dan S transitif maka $R \cup S$ transitif.

Jawab:

- (1) $R = \{(1, 2)\}$ dan $S = \{(2, 1)\}$ masing-masingnya anti-simetris ; tetapi $R \cup S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ tidak anti-simetris.

- (2) $R = \{(1, 2)\}$ dan $S = \{(2, 3)\}$ masing-masingnya transitif; tetapi $R \cup S = \{(1, 2), (2, 3)\}$ tidak transitif.

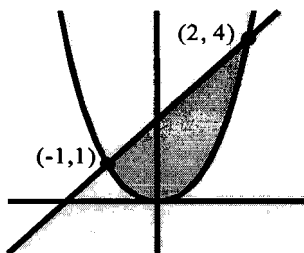
39. Misalkan dua relasi R dan S yang didefinisikan sebagai $R = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}^{\#}, y \in \mathbb{R}^{\#}, y \geq x^2\}$, dan $S = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}^{\#}, y \in \mathbb{R}^{\#}, y \leq x + 2\}$

Perhatikan bahwa R dan S kedua-duanya adalah relasi dalam bilangan-bilangan riil.

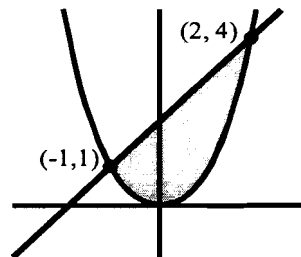
- (1) Buatlah sketsa relasi $R \cap S$ pada diagram koordinat $\mathbb{R}^{\#} \times \mathbb{R}^{\#}$
- (2) Carilah domain $R \cap S$.
- (3) Carilah jangkauan $R \cap S$.

Jawab:

(1) Buatlah sketsa R pada diagram koordinat $\mathbb{R}^{\#} \times \mathbb{R}^{\#}$, berikan R arsiran dengan garis-garis miring yang condong ke kanan ($////$); dan pada diagram koordinat yang sama, buatlah sketsa S dengan garis-garis miring yang condong ke kiri ($\\\\\\$), seperti diperlihatkan dalam Gambar 1. Maka daerah bergaris silang adalah $R \cap S$. Jadi $R \cap S$ adalah yang diperlihatkan dalam Gambar 2.



R dan S yang disketsa
Gambar 1



Gambar 2

- (2) Domain dari $R \cap S$ adalah $[-1, 2]$, karena sebuah garis vertikal yang melalui tiap-tiap titik dalam selang ini dan hanyalah titik-titik ini, akan memuat sebuah titik dari $R \cap S$.
- (3) Jangkauan dari $R \cap S$ adalah $[0, 4]$, karena sebuah garis horizontal yang melalui tiap-tiap titik dalam selang ini dan hanyalah titik-titik ini, akan memuat sekurang-kurangnya satu titik dari $R \cap S$.

40. Buktikan jika S , T , dan para R_i (untuk semua i berjalan pada himpunan index I) adalah relasi relasi pada A , maka berlaku

$$(a) \quad (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

$$(b) \quad (\cap_i R_i)^{-1} = \cap_i R_i^{-1}$$

$$(c) \quad (\cup_i R_i)^{-1} = \cup_i R_i^{-1}$$

Jawab:

Menggunakan definisi relasi sehingga diperoleh:

$$(a). \quad (a,b) \in (ST)^{-1} \text{ jika dan hanya jika } (b,a) \in ST$$

$$\Leftrightarrow (\exists c \in A) \text{ dengan } (b,c) \in S \wedge (c,a) \in T$$

$$\Leftrightarrow (\exists c \in A) \text{ dengan } (c,b) \in S^{-1} \wedge (a,c) \in T^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (\exists c \in A) \text{ dengan } (a,c) \in T^{-1} \wedge (c,b) \in S^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \in T^{-1}S^{-1}$$

$$\text{Jadi } (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

$$(b). \quad \text{Ambil index set } I = \alpha, \beta, \gamma, \dots$$

$$(a,b) \in (\cap_i R_i)^{-1} \text{ jika dan hanya jika } (b,a) \in \cap_i R_i$$

$$\Leftrightarrow (b,a) \in R_\alpha \wedge (b,a) \in R_\beta \wedge (b,a) \in R_\gamma \wedge \dots$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \in R_\alpha^{-1} \wedge (a,b) \in R_\beta^{-1} \wedge (a,b) \in R_\gamma^{-1} \wedge \dots$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \in \cap_i R_i^{-1}$$

$$\text{Jadi } (\cap_i R_i)^{-1} = \cap_i R_i^{-1}$$

$$(c). \quad \text{Ambil index set } I = \alpha, \beta, \gamma, \dots$$

$$(a,b) \in (\cup_i R_i)^{-1} \text{ jika dan hanya jika } (b,a) \in \cup_i R_i$$

$$\Leftrightarrow (b,a) \in R_\alpha \vee (b,a) \in R_\beta \vee (b,a) \in R_\gamma \vee \dots$$

$$\Leftrightarrow (a,b) \in R_\alpha^{-1} \vee (a,b) \in R_\beta^{-1} \vee (a,b) \in R_\gamma^{-1} \vee \dots$$

$$\leftrightarrow (a,b) \in \bigcup_i R_i^{-1}$$

$$\text{Jadi } (\bigcup_i R_i)^{-1} = \bigcup_i R_i^{-1}$$

SOAL SOAL LATIHAN

- Misalkan R relasi pada $A = \{2, 3, 4, 5\}$ di definisikan oleh “ x dan y ” relatif prima” yaitu pembagi bersama dari x dan y hanyalah bilangan “satu”
 - Tuliskan R sebagai himpunan pasangan terurut.
 - Gambarkan R pada diagram koordinat $A \times A$
 - Tentukan R^{-1} .
- Misalkan $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ dan R relasi di N yang didefinisikan sebagai $x + 2y = 8$, yakni $R = \{(x, y) / x, y \in N, x + 2y = 8\}$
 - Tulis R sebagai himpunan pasangan terurut.
 - Tentukan R^{-1} .
- Misalkan $W = \{1, 2, 3, 4\}$. Perhatikan relasi-relasi dalam W berikut ini :

$$R_1 = \{(1,1), (1,2)\}$$

$$R_2 = \{(1,1), (2,3), (4,1)\}$$

$$R_3 = \{(1,2), (2,4)\}$$

$$R_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

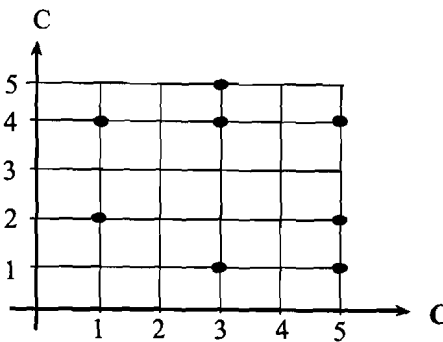
$$R_5 = W \times W$$

$$R_6 = \emptyset$$

Selidiki apakah masing-masing relasi diatas bersifat (a) refleksif (b) simetris (c) transitif
- Misalkan R relasi tegak lurus pada himpunan garis pada bidang. Tentukan apakah R : (i) refleksif (ii) Simetris (iii) transitif atau (iv) ekivalensi.
- Misalkan $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Tentukan apakah masing-masing berikut ini merupakan partisi pada W atau bukan:

- (a) $\{\{1,3,5\}, \{2,4\}, \{3,6\}\}$ (c) $\{\{1,5\}, \{2\}, \{4\}, \{1,5\}, \{3,6\}\}$
 (b) $\{\{1,5\}, \{2\}, \{3,6\}\}$ (d) $\{\{1,2,3,4,5,6\}\}$

6. Tentukan semua partisi dari $A = \{1,2,3\}$
7. Misalkan R adalah relasi dalam $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ yang didefinisikan oleh kalimat terbuka " $|x - y|$ dapat dibagi oleh 3" Tuliskan R sebagai himpunan dari pasangan-pasangan terurut.
8. Misalkan $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, dan relasi R dalam C adalah himpunan titik-titik yang diperlihatkan dalam diagram koordinat $C \times C$ berikut.



- (a) Nyatakan apakah masing-masing pernyataan benar atau salah: (a) $1 R 4$,
 (b) $2 R 5$, (c) $3 \not R 1$, (d) $5 \not R 3$.
- (b) Tuliskan masing-masing subhimpunan C berikut dalam bentuk pendaftaran:
- $\{x \mid 3 R x\}$
 $\{x \mid (4, x) \in R\}$
 $\{x \mid (x, 2) \notin R\}$
 $\{x \mid x R 5\}$
- (c) Carilah domain dari R ,
 (d) Tentukan jangkauan R ,
 (e) Definisikan R^{-1}
9. Diketahui $R = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^{\#}, y \in \mathbb{R}^{\#}, x^2 + 4y^2 \leq 16\}$.
- (a) Buatlah sketsa R pada diagram koordinat $\mathbb{R}^{\#} \times \mathbb{R}^{\#}$.

- (b) Carilah ranah dari R ,
 (c) Tentukan jangkauan R .
10. Jika $R = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^{\#}, y \in \mathbb{R}^{\#}, x^2 - y^2 \leq 4\}$, maka:
 (a) Buatlah sketsa R pada diagram koordinat $\mathbb{R}^{\#} \times \mathbb{R}^{\#}$.
 (b) Carilah ranah dari R ,
 (c) Tentukan jangkauan dari R .
 (d) Definisikan R^{-1} .
11. Suatu relasi R pada bilangan-bilangan asli N yang didefinisikan oleh kalimat terbuka " $x + 3y = 12$ " dinyatakan sebagai :

$$R = \{(x, y) \mid x \in N, y \in N, x + 3y = 12\}$$

 (a) Tuliskan R sebagai himpunan pasangan-pasangan terurut.
 (b) Carilah ranah dari R ,
 (c). Tentukan jangkauan dari R ,
 (d) Definisikan R^{-1}
12. Misalkan R suatu relasi dalam bilangan-bilangan asli N yang didefinisikan sebagai " $2x + 4y = 15$ ".
 (a) Tuliskan R sebagai himpunan pasangan-pasangan terurut.
 (b) Carilah ranah dari R ,
 (c) Tentukan jangkauan dari R ,
 (d) Definisikan relasi invers R^{-1}
13. Nyatakan masing-masing pernyataan berikut benar atau salah. Anggaplah R dan S adalah relasi-relasi dalam himpunan A .
 (a) Jika R simetris maka R^{-1} simetris.
 (b) Jika R anti-simetris, maka R^{-1} anti-simetris.
 (c) Jika R refleksif, maka $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$.
 (d) Jika R simetris, maka $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$.
 (e) Jika R transitif dan S transitif, maka $R \cup S$ transitif.
 (f) Jika R transitif dan S transitif, maka $R \cap S$ transitif.

- (g) Jika R anti-simetris dan S anti-simetris maka $R \cup S$ anti-simetris.
- (h) Jika R anti-simetris dan S anti-simetris maka $R \cap S$ anti-simetris.
- (i) Jika R refleksif dan S refleksif, maka $R \cup S$ refleksif.
- (j) Jika R refleksif dan S refleksif, maka $R \cap S$ refleksif.
14. Misalkan L adalah himpunan dari garis-garis dalam bidang Euclid dan R adalah relasi dalam L yang didefinisikan oleh " x sejajar y ". Nyatakan apakah relasi R (1) refleksif, (2) simetris, (3) anti-simetris, (4) transitif, ataukah tidak. (Anggap sebuah garis sejajar dirinya sendiri).
15. Misalkan L himpunan dari garis-garis dalam bidang Euclid dan R adalah relasi dalam L yang didefinisikan oleh " x tegak lurus y ". Nyatakan apakah R (1) refleksif, (2) simetris, (3) anti-simetris, (4) transitif.
16. Misalkan A keluarga himpunan-himpunan dan R adalah relasi dalam A yang didefinisikan oleh " x terpisah dari y ". Nyatakan apakah R (1) refleksif, (2) simetris, (3) anti-simetris, (4) transitif, ataukah tidak.
17. Masing-masing kalimat terbuka berikut mendefinisikan suatu relasi dalam bilangan-bilangan asli N .
- (a) " x lebih besar daripada y "
- (b) " x adalah kelipatan y "
- (c) " x kali y adalah kuadrat dari sebuah bilangan".
- (d) " $x + 3y = 12$ "
- Nyatakan apakah masing-masing relasi tersebut (a) refleksif, (b) simetris, (c) anti-simetris, (d) transitif, ataukah tidak.
18. Pandang relasi-relasi dalam bilangan-bilangan riil berikut ini:
- $$R = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^{\#}, y \in \mathbb{R}^{\#}, x^2 + y^2 \leq 25\}$$
- $$S = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^{\#}, y \in \mathbb{R}^{\#}, y \geq 4x^2/9\}$$
- (a) Buatlah sketsa relasi $R \cap S$ pada diagram koordinat $\mathbb{R}^{\#} \times \mathbb{R}^{\#}$.
- (b) Carilah ranah dari $R \cap S$
- (c) Tentukan jangkauan dari $R \cap S$.

- a). Tulis R sebagai pasangan terurut
 - b). Tentukan domain, range dan relasi invers dari R
23. Buatlah graf untuk R pada soal no 22