Övning 3

Idag (3.1-3.4)

- Stokastiska variabler
- Fördelningsfunktion
- Kvantiler

Användbar teori

Stokastisk variabel

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Ex från boken. X är antal tärningskast tills första 6:an. Ω är här rummet av alla oändliga sekvenser av tärningskast och X tar en sådan sekvens $\omega \in \Omega$ till antalet kast fram till första 6:an. Här är alltså $X : \Omega \to \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

För första gången fördelning

$$X \sim ffg(p)$$
$$p_X(k) = (1-p)^{k-1}p, k = 1, 2, 3...$$

Ex: X är antalet händer man behöver spela i blackjack tills man får blackjack. p är sannolikheten för att bli delad blackjack. $p_X(3)$ är sannolikheten att få blackjack först på exakt tredje handen.

Binomial fördelning

$$X \sim Bin(n, p)$$
$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ex: Du frågar dina $n = 10$ vänner om de ska gå till kons ikväll (antag att det är tisdag). Vi antar att allas beslut är oberoende (dåligt antagande). Antalet som ska dit är då den s.v. X, p är sannolikheten att en given person drar till kons (antas här vara samma för alla dina vänner) och $p_X(3)$ är sannolikheten att exakt 3 personer ska dit.

Poisson fördelning

$$X \sim Po(\mu)$$
$$p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

Ex: Antal samtal du får på en given timma är poisson fördelat. Där μ kan ses som antalet samtal du får i snitt på en timma. $p_X(3)$ är här sannolikheten att du får exakt 3 samtal på en given timma.

Uppgift 1 (3.2)

a) $X \in \{100, 20, 5, 0\}$.

b) Vi noterar att sannolikheten att få en specifik lott är 1/1000, för alla lotter. Vi kan därför här använda den klassiska sannolikhetsdefinitionen.

$$P(X = 100) = g/m = 1/1000$$
$$P(X = 20) = g/m = 5/1000$$
$$P(X = 5) = 30/1000$$
$$P(X = 0) = 1 - P(X \neq 0) = (1000 - 1 - 5 - 30)/1000 = 964/1000$$

Uppgift 2 (3.8)

a) Vi använder satsen om komplementära händelser.

$$P(X = 0) = 1 - P(X \geq 1) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_X(k) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p^k$$

b) Vi behöver $P(X = k) \in [0, 1]$. Vidare kan p omöjligt vara 1. Av detta måste $p \in [0, 1)$. Vidare kan vi från a) också se att

$$\sum_{k=1}^{\infty} p^k \leq 1$$
$$\frac{1}{1-p} - 1 = \frac{p}{1-p} \leq 1$$
$$p \leq 1 - p \implies p \leq 1/2$$

Vi har alltså $p \in [0, 1/2]$.

Man skulle kunna säga att det är lite av en tolkningsfråga om p kan vara 0 eller inte. Om $p = 0$ så är $X = 0$ med sannolikheten 1. Rent formellt är det en stokastisk variabel och uppfyller alla krav, men vi har ju ingen slumpmässighet i detta fall.

Uppgift 3 (3.9)

X är här alltså antalet kunder som anländer under tidsintervallet i fråga. Vi söker sannolikheten av händelsen $2 < X < 5$, och vill alltså att beräkna $P(2 < X < 5)$:

$$P(2 < X < 5) = P(3 \leq X \leq 4) = \sum_{k=3}^{4} p_X(k) = p_X(3) + p_X(4) = e^{-\mu}\left(\frac{\mu^3}{3!} + \frac{\mu^4}{4!}\right) = \{\mu = 4\} \approx 0.39$$

Det vill säga sannolikheten är 0.39%.

Uppgift 4 (3.10)

Vi kan börja med att notera att $X \in \{0, 1, 2, 3\}$. Låt A_1, A_2, A_3 vara händelserna att terminal 1, 2 respektive 3 används. Vi har från upg att $P(A_1) = 3/4, P(A_2) = 2/3, P(A_3) = 1/2$. Att endast terminal 1 används är händelsen $A_1 \cup A_2^* \cup A_3^*$. Då händelserna är oberoende kan vi använda att $P(A_1 \cup A_2^* \cup A_3^*) = P(A_1)P(A_2^*)P(A_3^*)$. Liknande gäller för terminal 2 och 3. Vi får därför:

$$P(X = 1) = P(A_1)P(A_2^*)P(A_3^*) + P(A_1^*)P(A_2)P(A_3^*) + P(A_1^*)P(A_2^*)P(A_3) = 1/4$$

På samma sätt är händelsen att terminal 1 och 2 används $A_1 \cup A_2 \cup A_3^*$. Och vi får:

$$P(X = 2) = P(A_1)P(A_2)P(A_3^*) + P(A_1^*)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2^*)P(A_3) = 11/24$$

Slutligen har vi:

$$P(X = 3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 1/4$$

Med satsen om komplementära händelser har vi:

$$P(X = 0) = 1 - (1/4 + 1/4 + 11/24) = 1/24$$

Extrauppgift

Visa att fördelningen för $X \sim Bin(n, \mu/n)$ går mot $X \sim Po(\mu)$ när $n \to \infty$.

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \frac{\mu^k}{n^k} (1 - \frac{\mu}{n})^{n-k} \approx \frac{n^k}{k!} \frac{\mu^k}{n^k} (1 - \frac{\mu}{n})^n \to \frac{\mu}{k!} e^{-\mu}$$