Övning 4

Idag (3.5-3.7)

- Kontinuerliga stokastiska variabler
- Viktiga fördelningar
- Kvantiler

Användbar teori

Täthetsfunktion
Om $f(x) \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ är f en täthetsfunktion för någon stokastisk variabel.
Om det finns en täthetsfunktion $f_X(x)$ för en s.v X så att $P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx, \forall A$ så sägs X vara en kontinuerlig s.v.

Fördelningsfunktion
Fördelningsfunktionen för täthetsfunktionen $f_X(x)$ för den stokastiska variabeln X är:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Likformig fördelning

$$X \sim U(a, b)$$
$$f_X(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a < x < b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Exponentialfördelning

$$X \sim Exp(\lambda), \lambda > 0$$
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & 0 < x \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Normalfördelning

$$X \sim N(\mu, \sigma), \sigma > 0$$
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

Uppgift 1 (3.20)

a) Vi har $P(X \geq t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow F_X(t) = P(X \leq t) = 1 - P(X \geq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
b) Vi har att $f_X(t) = F'_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.
c) Vi gör detta enklast med fördelningsfunktionen:

$$P(1 < X \leq 10) = F_X(10) - F_X(1) = 1 - e^{-10\lambda} - (1 - e^{-\lambda}) = e^{-\lambda} - e^{-10\lambda} = \{\lambda = 2/3\} = 0.512$$

Uppgift 2 (3.21)

Låt X vara den s.v. som är antalet meter från bilens front till slutet på gatstumpen. Vi har $X \in [0, 8]$ och från formuleringen av frågan att $X \in U(0, 8) \implies f_X(x) = 1/8 \implies F_X(x) = x/8$. Om det är 5 meter kvar framför bilen eller om det är 5 meter fritt bakom bilen kan en till bil parkera på gatstumpen. D.v.s sannolikheten vi söker är $P(\{X \leq 3\} \cup \{X \geq 5\})$. Vi har:

$$P(\{X \leq 3\} \cup \{X \geq 5\}) = \{ \text{ Disjunkta mängder } \} =$$
$$= P(\{X \leq 3\}) + P(\{X \geq 5\}) = P(\{X \leq 3\}) + 1 - P(\{X \leq 5\}) = F_X(3) + 1 - F_X(5) =$$
$$= 3/8 + (1 - 5/8) = 6/8 = 3/4$$

Uppgift 3 (3.22)

a) Låt den s.v. X vara livslängden i timmar. Vi har $X \sim Exp(\lambda), \lambda = 10^{-4}$. Den sökta sannolikheten är $P(X \leq 6000)$. Vi har:

$$P(X \leq 6000) = \int_0^{6000} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-6000\lambda} \approx 0.45$$

b) Antalet transistorer som upphör att fungera inom 6000 timmar är har nu väsentligen inget att göra med exponentialfördelningen, utan nu har vi (pga oberoende) en binomialfördelad situation $Y \sim Bin(5, p)$ där $p = 0.45$ enligt förra uppgiften. Vi får därmed som svaret på frågan:

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{5}{0} p^0 (1-p)^5 \approx 1 - 0.55^5 \approx 0.95$$

Uppgift 4 (3.27)

Då X har en diskret fördelning kan vi göra på följande sätt. Y kan anta värdena $0, 1, 2, ..., 6$ och vi ser att exempelvis $P(Y = 1) = P(X = 4) + P(X = 2) = 2/10$ och samma gäller för $Y \in \{1, 2, 3\}$. På så sätt får vi att:

$$p_Y(k) = \begin{cases} 2/10 & k \in \{1, 2, 3\} \\ 1/10 & k \in \{0, 4, 5, 6\} \end{cases}$$