Övning 5

Idag (3.10, 4.1-4.7)

- Funktioner av s.v.
- Flerdimensionella s.v.
- Faltning

Användbar teori

Tvådimensionell stokastisk variabel
En tvådimensionell s.v. är en funktion (X, Y) från Ω till $\mathbb{R}^2$. Om (X, Y) är kontinuerlig och har täthetsfunktionen f_{XY} respektive om den är diskret med sannolikhetsfunktionen $p_{XY}(j, k)$ gäller.

$$P((X, Y) \in A) = \iint_A f_{XY}(x, y)dxdy \qquad P((X, Y) \in A) = \sum_{(j,k)\in A} p_{XY}(j, k)$$

Det gäller att:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x, y)dy$$
$$p_X(j) = \sum_k p_{XY}(j, k)$$

Faltning Om $Z = X + Y$ där X, Y är oberoende, och vi i det diskreta fallet låter $X, Y \in \mathbb{N}$, har vi:

$$p_Z(k) = \sum_{i=0}^{k} p_X(i)p_Y(k - i)$$
$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)f_Y(z - x)dx$$

Uppgift 1 (4.1)

a) Vi vill beräkna $P(X \le 1, Y \le 3)$. Vi har:

$$P(X \le 1, Y \le 3) = \sum_{j=0}^{1}\sum_{k=1}^{3} p_{XY}(j, k) = \sum_{j=0}^{1} p(j, 1) + p(j, 2) + p(j, 3) =$$
$$p(0, 1) + p(0, 2) + p(0, 3) + p(1, 1) + p(1, 2) + p(1, 3) = 0.11 + 0.09 + 0.07 + 0.07 + 0.12 + 0.12 = 0.58$$

b) Vi söker $P(X + 2 > 2Y) = P(X > 2Y - 2) =$

$$= \sum_{j=1}^{4} p_{XY}(j, 1) + \sum_{j=3}^{4} p_{XY}(j, 2) = 0.07 + 0.02 + 0 + 0 + 0.02 + 0 = 0.11$$

c) $p_X(j) =$ radsummor, $p_Y(k) =$ kolonnsummor

Uppgift 2 (4.7)

Vi vill veta $P(X < Y) = P(X - Y < 0)$. Vi använder att då X och Y är oberoende är $f_{X,Y} = f_X f_Y$. Vi får:

$$P(X - Y < 0) = \iint_{x-y<0} f_{X,Y}(x, y)dxdy = \int_0^4\int_x^6 f_X(x)f_Y(y)dydx = \int_0^4\int_x^6 \frac{1}{4}\frac{1}{6}dydx =$$
$$= \frac{1}{24}\int_0^4 (6 - x)dx = -\frac{1}{24}\left[\frac{x^2}{2} - 6x\right]_0^4 = \frac{24 - 8}{24} = 2/3$$

Uppgift 3 (4.15)

Vi kommer göra ett liknande lösningsförfarande för båda problemen. Det viktiga att notera här är att $P(max(X,Y) < z) = P(X < z \cap Y < z)$ och $P(min(X,Y) < z) = 1 - P(min(X,Y) > z) = P(X > z \cap Y > z)$. VI noterar också att $Z_+, Z_- \in [0,a]$ och $F_Z(0) = 0, F_Z(a) = 1$ för båda variablerna. Vi får:

$$F_{Z_+}(z) = P(max(X,Y) < z) = P(X < z \cap Y < z) = P(X < z)P(Y < z) = (z/a)^2$$

$$F_{Z_-}(z) = P(min(X,Y) < z) = 1 - P(min(X,Y) > z) = 1 - P(X > z \cap Y > z) = 1 - P(X > z)P(Y > z) =$$

$$= 1 - (1 - P(X < z))(1 - P(Y < z) = 1 - (1 - z/a)^2 = 1 - \frac{(z-a)^2}{a^2}$$

Notera här $F_{Z_+}(0) = 0, F_{Z_+}(a) = 1$ samt $F_{Z_-}(0) = 0, F_{Z_-}(a) = 1$ som vi ville.

Uppgift 4 (4.25)

Vi har att:

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x) dy$$

f_X är nollskild då $x > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x) dy = \int_0^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dy$$

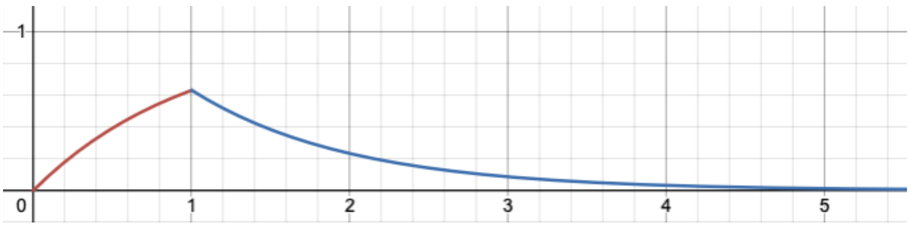
f_Y är 1 då $0 < z - x < 1 \implies z - 1 < x < z$. Vi har här två fall. När $z \in [0,1]$ blir detta $0 < x < z$ ty $x > 0$ och när $z > 1$ blir detta det som vi skrev. Vi får alltså:

$$z \in [0,1]:$$

$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-x} dx = 1 - e^{-z}$$

$$z > 1:$$

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^z e^- x dx = -e^{-z} + e^{-(z-1)} = (e-1)e^{-z}$$



Uppgift 5

Vi vill undersöker om ett mynt är rättvis eller inte. Vi vet att sannolikheten att få krona är tvåpunktsfördelad med parameter p, det vill säga sannolikheten att få krona är något tal $p \in [0,1]$. Vi gör n kast och får krona i m av kasten. Vi tänker oss att det rimligaste värdet att gissa att p är är det som ger vårat utfall störst sannolikhet. Vilket värde på p är det? (Ledning: använd logaritmen)

Lösning:
Sannolikheten (L, *likelihood*) att få vårat utfall är:

$$L(p) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

Vi vill hitta för vilket p som detta uttrycket är maximerat. Vi använder ett logaritmen:

$$ln(L(p)) = ln(\binom{n}{m}) + m \cdot ln(p) + (n-m) \cdot ln(1-p)$$

Vi deriverar och sätter till noll:

$$\frac{m}{p} = \frac{n-m}{1-p} \implies m - mp = pn - pm \implies p = m/n$$