Övning 1

Idag (1.1-2.4)

- Statistiska modeller
- Mängdlära
- Kolmogorovs axiom

Användbar teori

De morgans lagar

$$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^* = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^*$$
$$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^* = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^*$$

Kolmogorovs axiom
För sannolikhetsmåttet $P : \Omega \to \mathbb{R}$ ska följande axiom gälla:
1. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Om $(A_i)_{i \in I}$ är en ändlig eller uppräknelig mängd av parvis oförenliga händelser i utfallsrummet gäller att:

$$P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

Additionssatsen
För godtyckliga händelser A och B gäller

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Den klassiska sannolikhetsdefinitionen
Om det föreligger ett likformigt sannolikhetsmått i ett diskret ändligt utfallsrum, d.v.s om $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{m}$ och $P(\omega_i) = 1/m, \forall i$, så gäller att för en händelse A att:

$$P(A) = g/m$$

Där g är antalet gynsamma utfall.

Uppgift 1 (2.3 i boken)

a) Vi kan skriva ner utfallsrummet som

$$\Omega = \{KKK, DDD, KDD, DKD, DDK, KKD, DKK, KDK\}$$

Man kan kontrollera att Ω har åtta element vilket vi förväntar oss då vi för varje enhet har två möjligheter K, D och därför förväntar vi oss $2^3 = 8$ möjliga utfall. Händelsen ”Exakt två defekta enheter” ges av $A = \{DDK, DKD, KDD\}$.

b) Utfallsrummet blir nu $\Omega = 0, 1, 2, 3$. Och händelsen ”Exakt två defekta enheter blir helt enkelt $A = \{2\}$.
c) 1. Vi antar för enkelhet att hållfastheten för ett material är ett reellt tal. Utfallsrummet blir då $\Omega = \mathbb{R}$, och händelsen ”Hållfastheten större än a men mindre än b” blir helt enkelt delmängden $A = \{x : a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$. 2. Utfallen är par av reella tal så vi kan sätta $\Omega = \mathbb{R}^2$ och får händelsen ”Båda har hållfastheten större än a” som $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x, a < y\}$. 3. I enlighet med tidigare uppgifter blir här $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Uppgift 2 (2.5 i boken)

Det uppmuntras här att rita upp utfallsrummet.
a) Låt A vara händelsen "Poängsumman mindre än sex". Vi får då A som
$A = \{(1,4),(1,3),(1,2),(1,1),(2,3),(2,2),(2,1),(3,2),(3,1),(4,1)\}$. I enlighet med den klassiska sannolihetsdefinitionen har vi $|A| = 10$ gynnsamma utfall och totalt 36 möjliga utfall, vi får därför $P(A) = 10/36$.
b) Låt A vara händelsen "samma poäng vid båda kasten". Vi har sex olika par (x, y) där $x = y$ och enligt den klassiska sannolikhetsdefinitionen får vi därför $P(A) = 6/36 = 1/6$.
c) Låt A vara händelsen "Åtminstone ett av kasten ger precis 2 poäng". Vi kan här använda att om A_1 är händelsen att man slår en 2:a på första kastet och A_2 är händelsen att man slår en 2:a på andra kastet så är $A = A_1 \cup A_2$ och $A_1 \cap A_2 = \{(2,2)\}$. Vi kan enkelt beräkna $|A_1| = |A_2| = 6$ och får därför av additionssatsen samt den klassiska sannolikhetsdefinitionen att $P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A \cap B) = (6 + 6 - 1)/36 = 11/36$
d) Låt A vara händelsen "Åtminstone ett av kasten ger minst 5 poäng". Vi gör samma lösningsförfarande som i (c). Låt A_1 vara händelsen att vi slår minst en 5:a (dvs 5:a eller 6:a) på första kastet och A_2 händelsen att vi slår minst en 5:a (dvs 5:a eller 6:a) på andra kastet. A_1 och A_2 har då 12 element vardera. Vi får också $A_1 \cap A_2 = \{(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$, och enl. additionssatsen och den klassiska sannolikhetsdefinitionen har vi att $P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = (12 + 12 - 4)/36 = 20/36$.

Uppgift 3 (2.8 i boken)

Vi använder lösningsförfarandet att först beskriva händelsen i termer av A och B och sedan använder additionssatsen och/eller komplementsatsen. Personligen rekommenderar jag att rita upp ett venndiagram för situationen.
a) Händelsen är $A \cup B$ och vi har $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.25$.
b) Händelsen är $A \cap B^*$. Genom att rita ett venndiagram kan man enkelt se att $P(A \cap B^*) = P(A) - P(A \cap B) = 0.05$.
c) Händelsen är likt (b) $B \cap A^*$ och vi har $P(B) - P(B \cap A) = 0.15$.
d) Det är återigen enklast att rita ett venndiagram över sitationen, rent formellt får vi dock händelsen som $(A \cap B^*) \cup (B \cap A^*)$ och då vi vet att dessa händelser (de i parantes) är oberoende får vi sannolikheten för denna händelse som $P((A \cap B^*) \cup (B \cap A^*)) = 0.05 + 0.15 = 0.2$.

Uppgift 4 (2.12 i boken)

a) Vi har $P(A_1 \cup A_2 ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2 \cup ... \cup A_n) - P(A_1 \cap (A_2 \cup ... \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2 \cup ... \cup A_n)$ och med upprepad användning av metoden ovan, nu på $(A_2 \cup ... \cup A_n)$ fås olikheten.
b) Av de morgans lagar fås $P(\bigcap_i A_i) = P((\bigcup_i A_i^*)^*) = 1 - P(\bigcup_i A_i^*)$, och med (a) fås nu $P(\bigcap_i A_i) = 1 - P(\bigcup_i A_i^*) \geq 1 - \sum_i P(A_i^*) = 1 - \sum_i (1 - P(A_i))$.