Övning 2

Idag (2.5-2.7)

- Kombinatorik
- Betingade sannolikheter
- Bayes sats
- Oberoende händelser

Användbar teori

Kombinatorik, olika fall (Gå igenom)
Antag att vi ska dra k element ur n st. total. Beroende på om vi bryr oss om ordning eller ej får vi följande möjligheter.

Återläggning	**Ordning**	**Antal möjligheter**
Ja	Ja	n^k
Nej	Ja	$n!/(n-k)!$
Nej	Nej	$n!/[(n-k)!k!] = \binom{n}{k}$
Ja	Nej	$\binom{k+n-1}{k}$

Den sista av dessa är den som är svårast att härleda och ett sätt att se på det följer här. Antag att vi har $k = 3$ och $n = 5$. Vi ska då se det som att vi ska dela upp 3 element i 5 kategorier. För att dela upp, säg 4 element i två kategorier behöver vi endast dra ett sträck enligt nedan, eftersom vi ej bryr oss om ordning:

$$**|**$$

Dvs för $n = 5$ kategorier krävs $n - 1 = 4$ sträck. Ett exempel på uppdelningen i vårat fall kan vara

$$|||*|**$$

Vi kan nu tänka att vi har k element $*$ och vi undrar på hur många sätt vi kan placera detta i $k+n-1$ platser (antal | plus antal $*$. Detta ges av binomial koefficienten $\binom{k+n-1}{k}$.

Betingad sannolikhet

$$P(A|B) := \frac{P(A\cap B)}{P(B)}, \text{ då } P(B) \neq 0$$

Bayes sats

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Oberoende händelser Om $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ så sägs A och B vara oberoende händerser.

Exempel: vid slag av två tärningar A={”slå 2:a på första tärningen”} B={”Slå tvåa på andra tärningen”}. Dessa är oberoende och man kan se detta rent geometriskt... görs ev. på tavlan.

Uppgift 1 (2.17)

Notera att vi söker sannolikheten $P(A)$ att ”minst två” har samma födelsedag, d.v.s. ≥ 1 par delar födelsedag. Den komplementära händelsen är A^*, att **inga** delar födelsedag. Detta är lättare att beräkna.

$$g = 365\cdot 364\cdots 343 = \frac{365!}{342!}$$
$$m = 365^{23}$$
$$P(A^*) = g/m$$
$$P(A) = 1 - P(A^*) = 1 - g/m \approx 0.5073 = 50.73\%$$

Uppgift 2 (2.27)

Vi använder definitionen av betingad sannolikhet.

$$P(\text{"röd på andra"}|\text{"röd på första"}) = \frac{P(\text{"röd på andra"} \cap \text{"röd på första"})}{P(\text{"röd på första"})}$$

Då endast ett kort kan vara rött på på båda sidor är täljaren 1/3 medans sannolikheten i nämnaren är 1/2 då hälften av alla kortsidor är röda. Vi får:

$$P(\text{"röd på andra"}|\text{"röd på första"}) = 2/3$$

Alternativt kan man beräkna nämnaren genom att tänka sig att korten i urnan ligger antingen som RRV eller RVV och dessa sker med lika stor sannolikhet. Om vi plockar upp korten utan att vända på dem har vi i det första fallet har vi 2/3 att plocka en röd och i det andra 1/3 att plocka en röd. Vi får

$$P(\text{"röd på första"}) = \frac{1}{2}\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} = 1/2$$

Uppgift 3 (2.31)

Läs uppgiften noga. Vi använder bayes sats.

$$P(1 \text{ skickats}|1 \text{ tas emot}) = \frac{P(1 \text{ tas emot}|1 \text{ skickat})P(1 \text{ skickat})}{P(1 \text{ tas emot})} = \frac{0.98 \cdot 0.6}{0.6 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.01} \approx 0.9932$$

Där vi använt lagen om total sannolikhet i nämnaren.

Ev. extrauppgift

Vi ska undersöka ett test som ett medicin bolag har tagit fram för att avgöra om någon har en viss sjukdom eller inte. Låt S, F vara händelserna att en person är sjuk eller frisk, och S_t, F_t vara händelserna att en person ger utslaget sjuk respektive frisk på testet. Företaget har givit oss följande information:

$$P(F_t|F) = 0.89$$
$$P(S_t|S) = 0.85$$

Beräkna $P(F|F_t)$ i de två fallen nedan:
a) $P(S) = 0.1, P(F) = 0.9$
b) $P(S) = 0.4, P(F) = 0.6$

Lösning:
Vi använder bayes sats och lagen om total sannolikhet.

$$P(F|F_t) = \frac{P(F_t|F)P(F)}{P(F_t)} = \frac{P(F_t|F)P(F)}{P(F_t|F)P(F) + P(F_t|S)P(S)}$$

a)

$$P(F|F_t) = \frac{0.89 \cdot 0.9}{0.89 \cdot 0.9 + (1 - 0.85) \cdot 0.1} \approx 0.982$$

b)

$$P(F|F_t) = \frac{0.89 \cdot 0.6}{0.89 \cdot 0.6 + (1 - 0.85) \cdot 0.4} \approx 0.899$$

Det som är intressant med uppgiften är att sannolikheten för att vara frisk, givet att man testar friskt sjunker när sjukdomen blir vanligare.