Avaliação A1 - Inferência Estatística

Professor: Philip Thompson
Monitores: Eduardo Adame & Ezequiel Braga

6 de outubro de 2023

Instruções

- A prova vale **10 pontos**. Verifique a pontuação de cada questão e trace sua estratégia para resolvê-las.
- Respostas sem justificativas serão **desconsideradas**;
- Demarque com clareza sua **resposta final** para cada questão. Sugerimos que circule ou desenhe um retângulo em volta desses resultados;
- A questão bônus é um **desafio**. Deixe-a para o final;
- Apenas **uma folha de "cola"** de tamanho A4 frente e verso poderá ser trazida e utilizada como consulta durante a avaliação. A mesma deverá ser **entregue** junto de suas soluções.

Dados úteis

- Se $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, então
  - $f_X(x \mid \alpha, \beta) = \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}$, $x \in (0,1)$, $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$
  - $\mathbb{E}[X] = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$
- Se $X \sim \text{Pareto}(\theta_0, \alpha)$ com parâmetros $\theta_0 > 0$, $\alpha > 0$, mostre que

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \dfrac{\alpha\theta_0}{\alpha-1}, & \text{se } \alpha > 1 \\ \infty, & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

- Se necessário, você pode usar o resultado de que a composição de função bijetora com uma estatística suficiente também é uma estatística suficiente.

Questões

Questão 1 (2 pontos). Uma variável aleatória θ seguindo a distribuição de Pareto com parâmetros θ_0, α positivos tem densidade

$$f(\theta \mid \theta_0, \alpha) := \begin{cases} \dfrac{\alpha\theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}, & \theta \geq \theta_0, \\ 0, & \theta < \theta_0. \end{cases}$$

a) Mostre que a distribuição de Pareto é a *priori* conjugada para amostras seguindo a distribuição Uniforme no intervalo $[0, \theta]$, onde o parâmetro θ é desconhecido.

b) Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra iid de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, \theta]$, onde o parâmetro θ é desconhecido. Tomando como distribuição *a priori* $\xi(\theta)$ a distribuição de Pareto com parâmetros θ_0, α e a função custo quadrática, determine o estimador de Bayes para o parâmetro θ.

Questão 2 (2 pontos). Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra iid de uma distribuição Bernoulli com parâmetro p desconhecido. Tome uma distribuição *a priori* para p sendo a distribuição Beta(α, β) com parâmetros α, β positivos.

a) Determine o estimador de Bayes $\hat{p}$ usando o custo quadrático.

a) Justifique afirmativamente ou negativamente: $\hat{p}$ é uma estatística suficiente mínima?

Questão 3 (1 ponto). Uma distribuição pertence a família exponencial com parâmetro unidimensional $\theta \in \mathbb{R}$ se a densidade tem forma

$$f(x \mid \theta) = b(\theta)h(x)\exp\{\eta(\theta)T(x)\},$$

para funções b, h, η e T. Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra desta distribuição e considere a estatística $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^n T(X_i)$.

a) Mostre que $T(\boldsymbol{X})$ é suficiente.

b) Mostre que $T(\boldsymbol{X})$ é eficiente. *Dica*: Lembre-se que um estimador $T(\boldsymbol{X})$ é eficiente se, e somente se, existem funções de θ que permitem escrever $T(\boldsymbol{X})$ satisfazendo uma certa relação, especificada no livro texto.

Questão 4 (2.5 pontos). Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra de uma distribuição parametrizada por $\theta > 0$ com densidade

$$f(x \mid \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Determine o MLE para θ.

b) Justifique afirmativamente ou negativamente se o MLE para θ é suficiente.

c) Justifique afirmativamente ou negativamente se o MLE para θ é suficiente mínimo.

Questão 5 (2.5 pontos). Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra de uma distribuição Poisson(λ).

a) Encontre o estimador MLE para λ.

b) Compute a informação de Fisher $I(\lambda)$.

Questão 6 (**Questão bônus** - 1 ponto). O modelo "bag-of-words" é utilizado na área de processamento de linguagem natural. Neste modelo, há um alfabeto de k palavras ($k \geq 2$) e a i-ézima palavra tem probabilidade θ_i de ocorrer. Aqui, $0 \leq \theta_i \leq 1$ e $\theta_1 + \ldots + \theta_k = 1$.

Numa amostra de n palavras, denotamos por x_i o números de ocorrências da i-ézima palavra; portanto $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$. Determine o MLE desta amostra para estimar o vetor $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$.

Dica: a distribuição em questão é chamada *distribuição multinomial*. Ela generaliza a distribuição binomial ($k = 2$) onde há apenas duas palavras (por exemplo, 'cara' e 'coroa').