

Lista de Exercícios 2

Disciplina: Inferência Estatística
Monitores: Eduardo Adame & Ezequiel Braga

Agosto 2023

Cap. 7.6 (Invariância e Consistência do MLE)

1. **(DeGroot:2014)** Suponha que X_1, \dots, X_n formem uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial para a qual o valor do parâmetro β é desconhecido. Determine o Estimador de Máxima Verossimilhança (MLE) da mediana da distribuição.
2. **(DeGroot:2014)** Suponha que a vida útil de um certo tipo de lâmpada siga uma distribuição exponencial para a qual o valor do parâmetro β é desconhecido. Uma amostra aleatória de n lâmpadas desse tipo é testada por um período de T horas e o número X de lâmpadas que falham durante esse período é observado, mas os momentos em que as falhas ocorreram não são registrados. Determine o Estimador de Máxima Verossimilhança (MLE) de β com base no valor observado de X .
3. **(DeGroot:2014)** Suponha que X_1, \dots, X_n formem uma amostra aleatória da distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$, onde ambos os pontos finais a e b são desconhecidos. Encontre o Estimador de Máxima Verossimilhança (MLE) da média da distribuição.
4. **(DeGroot:2014)** Suponha que X_1, \dots, X_n formem uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição uniforme no intervalo $[0, \theta]$, onde o valor de θ é desconhecido. Mostre que a sequência de Estimadores de Máxima Verossimilhança (MLE) de θ é uma sequência consistente.
5. **(DeGroot:2014)** Suponha que X_1, \dots, X_n formem uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição exponencial com parâmetro desconhecido β . Mostre que a sequência de Estimadores de Máxima Verossimilhança (MLE) de β é uma sequência consistente.
6. **(DeGroot:2014)** Suponha que X_1, \dots, X_n formem uma amostra aleatória de uma distribuição para a qual a função de densidade de probabilidade é especificada a seguir:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{para } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostre que a sequência dos Estimadores de Máxima Verossimilhança (MLE) de θ é uma sequência consistente.

Cap. 8.8 (Informação de Fisher)

7. **(DeGroot:2014)** Suponha que uma variável aleatória X possui a distribuição normal com média 0 e variância desconhecida $\sigma^2 > 0$. Encontre a informação de Fisher $I(\sigma^2)$ em X .
8. **(Zheng:2020)** A distribuição de Rayleigh é definida como:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} \exp(-\frac{x^2}{2\theta^2}) & \text{para } x \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Suponha que X_1, \dots, X_n formem uma amostra aleatória dessa distribuição. Encontre a variância assintótica do Estimador de Máxima Verossimilhança (MLE) de θ .

9. **(Zheng:2020)** Suponha que X_1, \dots, X_n formem uma amostra aleatória da distribuição exponencial com f.d.p

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\tau} \exp(-\frac{x}{\tau}), \quad x \geq 0, \quad \tau > 0.$$

- (a) Encontre o MLE de τ .
- (b) Encontre a distribuição assintótica do MLE.