Avaliação A2 - Inferência Estatística

Professor: Philip Thompson
Monitores: Eduardo Adame & Ezequiel Braga

Instruções

- A prova vale **10 pontos**. Verifique a pontuação de cada questão e trace sua estratégia para resolvê-las.
- Respostas sem justificativas serão **desconsideradas**;
- Demarque com clareza sua **resposta final** para cada questão. Sugerimos que circule ou desenhe um retângulo em volta desses resultados;
- Apenas **uma folha de "cola"** de tamanho A4 frente e verso poderá ser trazida e utilizada como consulta durante a avaliação. A mesma deverá ser **entregue** junto de suas soluções.

Questões

Questão 1 (2 pontos). Suponha que $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ seja uma amostra de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, \theta]$. Queremos testar as hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \theta \geq 2 \\ H_1: &\quad \theta < 2. \end{aligned}$$

Seja $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ e considere o teste δ em que

$\delta(\boldsymbol{X})$ rejeita H_0 sse $Y_n \leq 1.5$.

a) Determine a função poder do teste δ.

b) Compute o tamanho do teste δ.

Questão 2 (2.5 pontos). Suponha que tenhamos uma amostra $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ de uma distribuição normal $\mathcal{N}(\mu, 1)$. Queremos testar as hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \mu \leq \mu_0 \\ H_1: &\quad \mu > \mu_0. \end{aligned}$$

Seja $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)$ e considere os testes

$\delta(\boldsymbol{X})$ rejeita H_0 sse $Z \geq c$.

Mostre que

a) Mostre que a função poder $\pi_\delta(\mu) = \mathbb{P}_\mu(Z \geq c)$ é crescente.

b) Ache o valor crítico c tal que o teste tenha tamanho α_0.

c) Justificando, ache uma fórmula para o valor-p do teste numa realização onde $Z = z$.

Questão 3 (2.5 pontos). Suponha que tenhamos duas amostras independentes, $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_{16})$ de uma distribuição normal $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \dots, Y_{10})$ de uma distribuição normal $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Queremos testar as hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \\ H_1 &: \quad \sigma_1^2 > \sigma_2^2. \end{aligned}$$

Dado $\alpha_0 \in (0, 1)$, recorde o teste do livro texto tal que

$\delta(\boldsymbol{X})$ rejeita H_0 sse $V \geq c$,

onde $c = G_{15,9}^{-1}(1 - \alpha_0)$ e

$$V = \frac{S_X^2/15}{S_Y^2/9}.$$

Suponha que observamos $\sum_{i=1}^{16} X_i = 84$, $\sum_{i=1}^{16} X_i^2 = 563$, $\sum_{i=1}^{10} Y_i = 18$, $\sum_{i=1}^{10} Y_i^2 = 72$. Tomando $\alpha_0 = 0.05$, qual a conclusão do teste?

OBS: $G_{15,9}^{-1}(0.95) = 3$.

Questão 4 (1 ponto). Considere o problema de regressão linear visto em aula. Queremos testar as hipóteses com nível de significância 0.10:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \beta_1 = 5\beta_0 \\ H_1 &: \quad \beta_1 \neq 5\beta_0. \end{aligned}$$

Para uma amostra de tamanho 10 sabe-se que:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 0.42, \\ \bar{y} &= 0.33, \\ \sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) &= 1.7959, \\ \sum (x_i - \bar{x})^2 &= 2.8975, \\ \sum (y_i - \bar{y})^2 &= 1.4286. \end{aligned}$$

Usando que $T_8^{-1}(0.95) = 1.859548$, qual a conclusão do teste?

OBS: Você pode usar que

$$\begin{aligned} S^2 &= \sum (y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i))^2 \\ &= \sum (y_i - \bar{y})^2 - 2\hat{\beta}_1 \sum (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) + \hat{\beta}_1^2 \sum (x_i - \bar{x})^2. \end{aligned}$$

Questão 5 (2 pontos). Suponha que tenhamos uma amostra $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ de uma distribuição normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ com (μ, σ^2) desconhecidos. Construa um intervalo de confiança para σ^2 com nível de confiança $1 - \alpha$ com $\alpha \in (0, 1)$.

OBS: Você pode usar que

$$\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$