Lista de Exercícios 2

Disciplina: Inferência Estatística
Monitores: Eduardo Adame & Ezequiel Braga

Agosto 2023

Cap. 7.6 (Invariância e Consistência do MLE)

1. **(DeGroot e Schervish 2014, ex. 3, pág. 441)** Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ formem uma amostra aleatória de uma distribuição exponencial para a qual o valor do parâmetro β é desconhecido. Determine o Estimador de Máxima Verossimilhança (MLE) da mediana da distribuição.

2. **(DeGroot e Schervish 2014, ex. 4, pág. 441)** Suponha que a vida útil de um certo tipo de lâmpada siga uma distribuição exponencial para a qual o valor do parâmetro β é desconhecido. Uma amostra aleatória de n lâmpadas desse tipo é testada por um período de T horas e o número X de lâmpadas que falham durante esse período é observado, mas os momentos em que as falhas ocorreram não são registrados. Determine o Estimador de Máxima Verossimilhança (MLE) de β com base no valor observado de X.

3. **(DeGroot e Schervish 2014, ex. 5, pág. 441)** Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ formem uma amostra aleatória da distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$, onde ambos os pontos finais a e b são desconhecidos. Encontre o Estimador de Máxima Verossimilhança (MLE) da média da distribuição.

4. **(DeGroot e Schervish 2014, ex. 11, pág. 441)** Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ formem uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição uniforme no intervalo $[0, \theta]$, onde o valor de θ é desconhecido. Mostre que a sequência de Estimadores de Máxima Verossimilhança (MLE) de θ é uma sequência consistente.

5. **(DeGroot e Schervish 2014, ex. 12, pág. 441)** Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ formem uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição exponencial com parâmetro desconhecido β. Mostre que a sequência de Estimadores de Máxima Verossimilhança (MLE) de β é uma sequência consistente.

6. **(DeGroot e Schervish 2014, ex. 13, pág. 442)** Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ formem uma amostra aleatória de uma distribuição para a qual a função de densidade de probabilidade é especificada a seguir:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta - 1} & \text{para } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   Mostre que a sequência dos Estimadores de Máxima Verossimilhança (MLE) de θ é uma sequência consistente.

Cap. 8.8 (Informação de Fisher)

7. **(DeGroot e Schervish 2014, ex. 5, pág. 527)** Suponha que uma variável aleatória X possui a distribuição normal com média 0 e variância desconhecida $\sigma^2 > 0$. Encontre a informação de Fisher $I(\sigma^2)$ em X.

8. **(Zheng 2020, ex. 4, pág 13)** A distribuição de Rayleigh é definida como:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} \exp(\frac{x^2}{2\theta^2}) & \text{para } x \geq 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ formem uma amostra aleatória dessa distribuição. Encontre a variância assintótica do Estimador de Máxima Verossimlhança (MLE) de θ.

9. **(Zheng 2020, ex. 6, pág 13)** Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ formem uma amostra aleatória da distribuição exponencial com f.d.p

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\tau} \exp(\frac{-x}{\tau}),\ x \geq 0,\ \tau > 0.$$

   (a) Encontre o MLE de τ.

   (b) Encontre a distribuição assintótica do MLE.

Referências

DeGroot, Morris H. e Mark J. Schervish (2014). *Probability and Statistics*. 4ª. Pearson Education Limited.

Zheng, Songfeng (2020). *Fisher Information and Cramér-Rao Bound*. Missouri State University.