Obliczanie wskaźnika uwarunkowania trójprzekątniowej, symetrycznej i rzeczywistej macierzy A.
Wskaźnik uwarunkowania definiujemy jako:

$$\mathrm{cond(A)} = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$$

Do obliczenia λ_{max} stosujemy metodę potęgową, a do obliczenia λ_{min} - odwrotną metodę potęgową.
Odpowiednie układy równań rozwiązujemy używając odbić Householdera.
Program ma działać poprawnie dla macierzy o rozmiarze do 200000.

Stosowane oznaczenia:

A - macierz, $A \in R^{n \times n}$
λ_{max} - wartość własna macierzy A,
wyznaczona przy pomocy metody potęgowej
λ_{min} - wartość własna macierzy A,
wyznaczona przy pomocy odwrotnej metody potęgowej
v - wektor własny macierzy A
$\tilde{x}$ - wektor unormowany
$||x||$ - norma wektora x
x^* - sprzężenie hermitowskie wektora x
A^{-1} - macierz odwrotna do nieosobliwej macierzy A
H - macierz Householdera, $H \in R^{n \times n}$
I - macierz jednostkowa, $I \in R^{n \times n}$

Idea zaimplementowanych metod numerycznych

Metoda Potęgowa

Założenia:

- Macierz A posiada dominującą wartość własną λ_1, czyli $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.
- Macierz A posiada n liniowo niezależnych wektorów własnych $v^{[1]}, v^{[2]}, \ldots, v^{[n]}$.
- Dla wektora początkowego $x_0 = c_1^{(0)} v^{[1]} + \ldots + c_n^{(0)} v^{[n]}$ zachodzi $c_1^{(0)} \neq 0$.

Krok iteracyjny:

$$x_0 = c_1^{(0)} v^{[1]} + \ldots + c_n^{(0)} v^{[n]}, \qquad c_1^{(0)} \neq 0$$

$$\begin{cases} \tilde{x}^{(k)} = \dfrac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} \\ x^{(k+1)} = \mathrm{A}\tilde{x}^{(k)} \end{cases}$$

$$\lambda_1 \approx \left(\tilde{x}^{(k)}\right)^* x^{(k+1)}$$

Warunek stopu:

$$\frac{\left\| x^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)} \tilde{x}^{(k)} \right\|}{\left| \lambda_1^{(k)} \right|} < d$$

gdzie:

$\lambda_1^{(k)}$ - przybliżenie wartości własnej w k-tym kroku

d - parametr określający dokładność

Własności:

- Szybkość zbieżności metody potęgowej zależy od ilorazu $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$.
- Błąd przybliżenia maleje tak szybko, jak $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$.
- Metoda potęgowa jest bardzo wolno zbieżna, jeżeli $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \approx 1$.

Odwrotna Metoda Potęgowa

Założenia:

- Macierz A jest nieosobliwa, czyli $\det(A) \neq 0$.
- Macierz A posiada najmniejszą co do modułu wartość własną λ_n, czyli $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0$.
- Macierz A posiada n liniowo niezależnych wektorów własnych $v^{[1]}, v^{[2]}, \ldots, v^{[n]}$.

Krok iteracyjny:

$$x_0 = c_1^{(0)} v^{[1]} + \ldots + c_n^{(0)} v^{[n]}$$

$$\begin{cases} \tilde{x}^{(k)} = \dfrac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|} \\ A x^{(k+1)} = \tilde{x}^{(k)} \end{cases}$$

$$\lambda_n^{-1} \approx \left(\tilde{x}^{(k)}\right)^{*} x^{(k+1)}$$

Do rozwiązywania układów równań liniowych wykorzystujemy metody oparte na rozkładach macierzy na czynniki lub przekształceniach ortogonalnych takich jak na przykład transformacje Householdera lub rozkład LU.

Warunek stopu:

$$\frac{\left\| x^{(k+1)} - \lambda_n^{(k)} \tilde{x}^{(k)} \right\|}{\left| \lambda_n^{(k)} \right|} < d$$

gdzie:

$\lambda_n^{(k)}$ - przybliżenie wartości własnej w k-tym kroku

d - parametr określający dokładność

Własności:

- Odwrotna metoda potęgowa korzysta ze znanej własności mówiącej, że jeżeli λ jest wartością własną nieosobliwej macierzy A, to λ^{-1} jest wartością własną macierzy A^{-1}.
- Szybkość zbieżności metody potęgowej zależy od ilorazu $\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right|$.
- Błąd przybliżenia maleje tak szybko, jak $\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right|^k$.
- Metoda potęgowa jest bardzo wolno zbieżna, jeżeli $\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \approx 1$.

Transformacje Householdera

Macierz Householdera:

$$H = I - \frac{2}{u^* u} u u^*$$

gdzie:

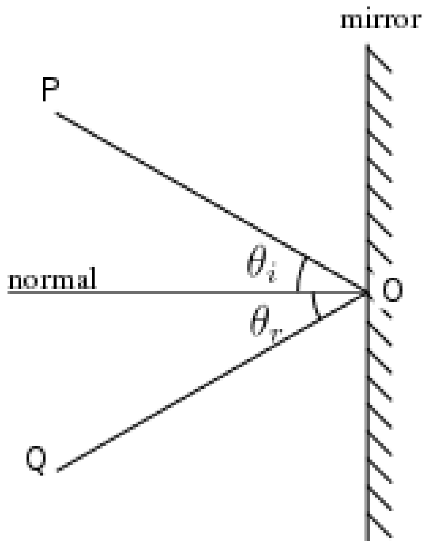
u - niezerowy wektor, ortogonalny do hiperpłaszczyzny, względem której ma nastąpić odbicie

Własności:

- Macierz H jest Hermitowska, czyli $H = H^*$.
- Macierz H jest unitarna, czyli $H^{-1} = H^*$ (tym samym odwracalna).
- Spektrum macierzy H to $\sigma(H) = \{-1, 1\}$.
- Wyznacznik macierzy H jest równy -1.
- Dla każdego wektora $x \in R^n$ mamy: $\|Hx\|_2 = \|x\|_2$.
- Dla każdej macierzy M $\in R^{n\times n}$ mamy: $\|HM\|_2 = \|M\|_2$.
- Dla każdej macierzy M $\in R^{n\times n}$ mamy: $cond_2(HM) = cond_2(M)$.

Zastosowanie:

- Macierze Householdera są często stosowane w implementacji rozkładu QR.
- Znane z geometrii optycznej (dział fizyki zajmujący się zjawiskami świetlnymi) prawo odbicia można opisać przy pomocy macierzy Householdera.



Zastosowanie dla macierzy trójdiagonalnych:

A

$$\begin{matrix} x & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$$

A_1

$$\begin{matrix} x & x & \color{red}{x} & 0 & 0 & 0 \\ \color{red}{0} & x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$$

A_2

$$\begin{matrix} x & x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & \color{red}{x} & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{0} & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$$

A_3

$$\begin{matrix} x & x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & \color{red}{x} & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{0} & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$$

A_4

$$\begin{matrix} x & x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & x & \color{red}{x} \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \end{matrix}$$

A_5

$$\begin{matrix} x & x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{0} & x \end{matrix}$$

Zastosowanie dla macierzy trójdiagonalnych:

Odbicia Householdera stosujemy w celu przekształcenia macierzy A do górnej macierzy trójkątnej (wykonujemy to w $n-1$ krokach).

$$H_1 A = A_1$$

$$H_2 A_1 = A_2$$

$$\dots$$

$$H_{n-1} A_{n-2} = A_{n-1} = R$$

$$(H_{n-1} H_2 H_1) A = R$$

$$A = (H_{n-1} H_2 H_1)^{-1} R$$

$$A = (H_{n-1} H_2 H_1)^T R$$

$$A = (H_1^T H_2^T \cdot \dots \cdot H_{n-1}^T) R$$

$$A = QR$$

Zastosowanie dla macierzy trójdiagonalnych:

W każdej iteracji odwrotnej metody potęgowej rozwiązujemy układ równań liniowych:

$$Ax^{(k+1)} = \tilde{x}^{(k)}$$

$$H_1 A x^{(k+1)} = H_1 \tilde{x}^{(k)}$$

$$H_2 A_1 x^{(k+1)} = H_2 H_1 \tilde{x}^{(k)}$$

$$\dots$$

$$Rx^{(k+1)} = Q^T \tilde{x}^{(k)}$$

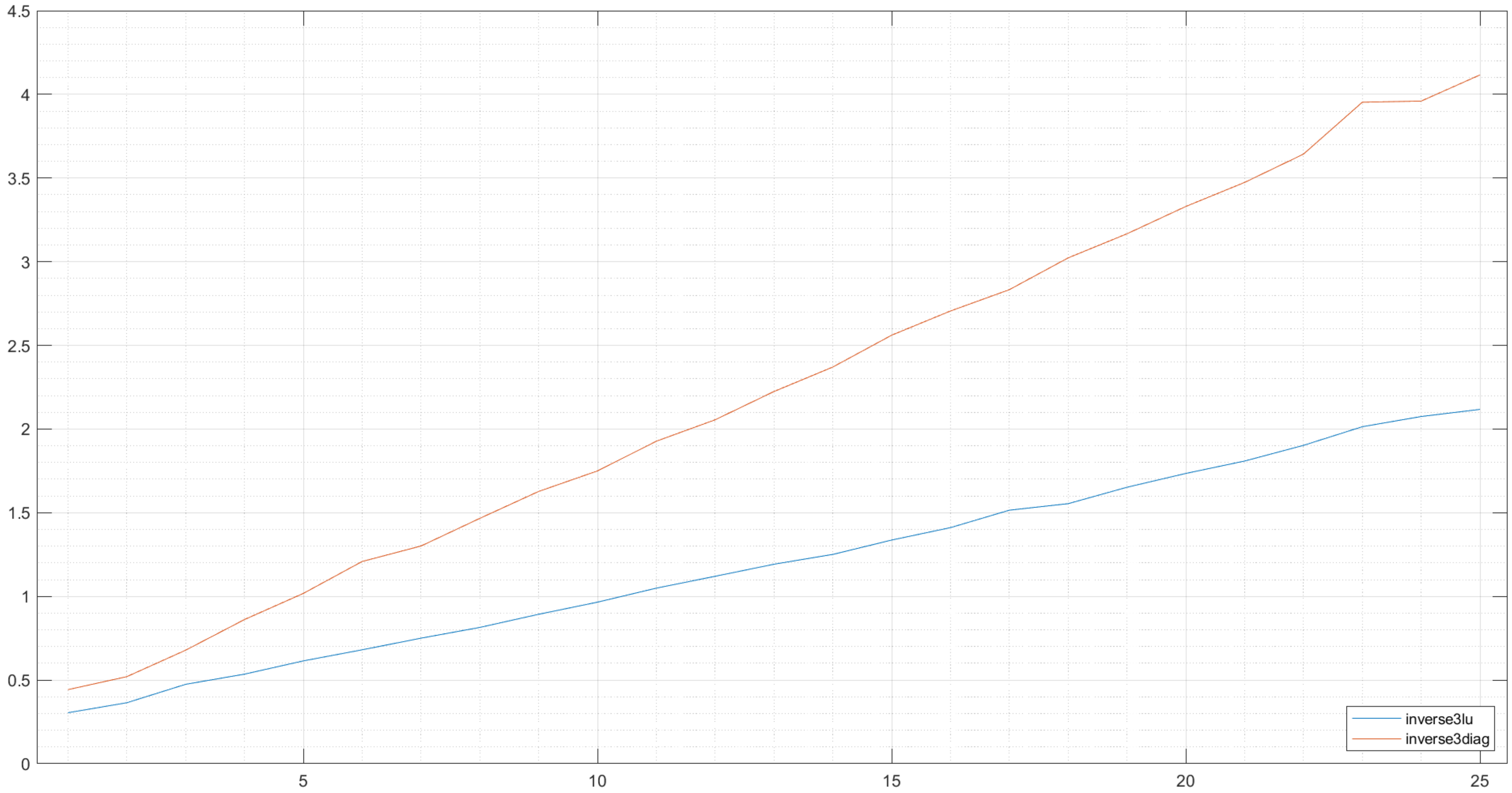
Eksperyment numeryczny

Porównanie metod rozwiązywania układów równań liniowych w odwrotnej metodzie potęgowej.

Rozkład LU:

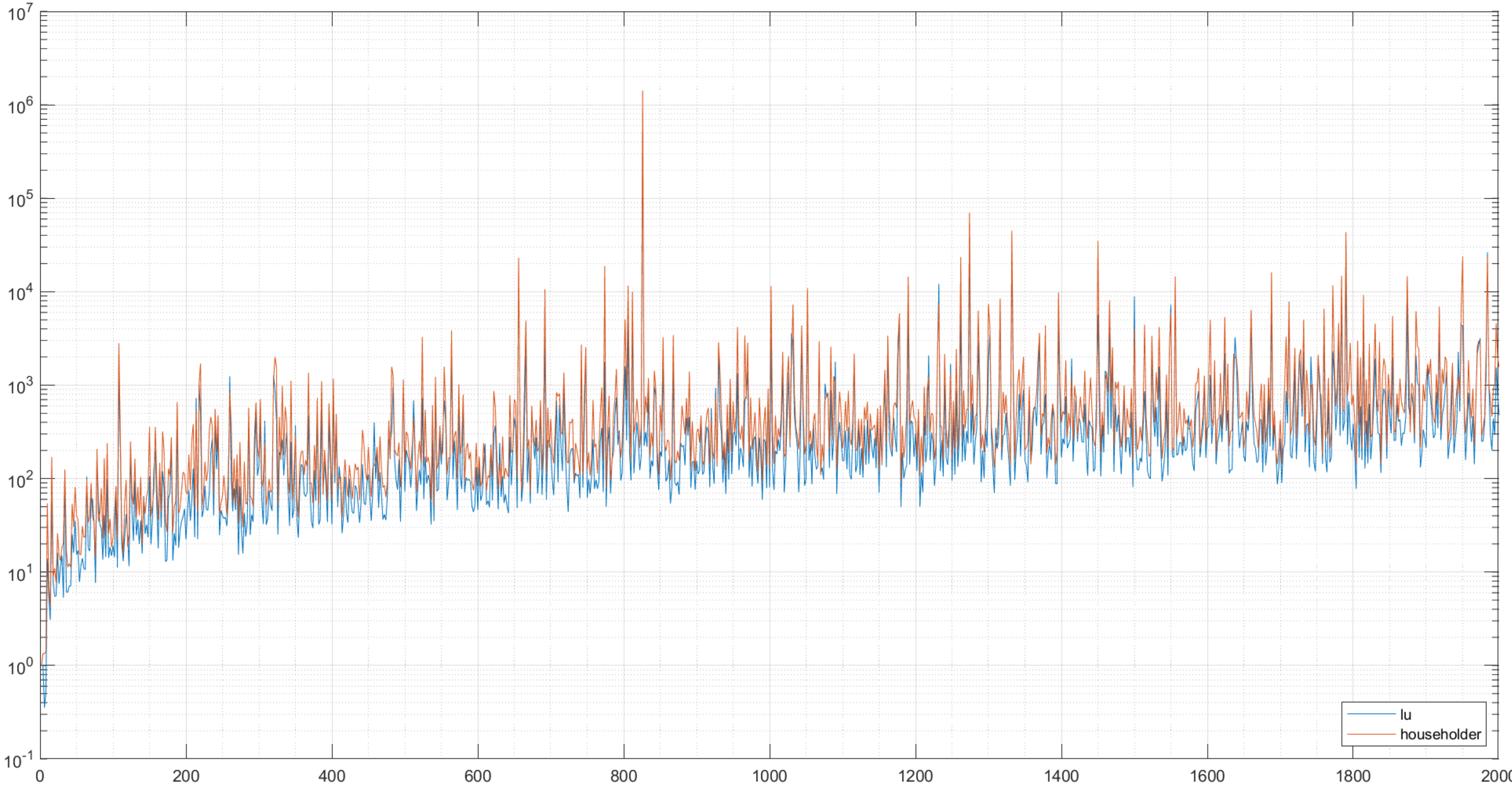
- Odwrotna metoda potęgowa zakłada, że macierz A jest nieosobliwa, czyli $\det(A) \neq 0$.
- Dzięki temu założeniu, do rozwiązywania układów równań możemy wykorzystać rozkład LU oparty na $GEPP$.
- Koszt rozkładu LU to $O(n^3)$ operacji arytmetycznych.
- Dzięki temu, rozwiązanie pojedynczego układu równań wymaga $O(n^2)$ operacji arytmetycznych.

Porównanie czasu obliczeniowego dla macierzy o rozmiarze 200000×200000:



Wykres przedstawia czas wykonania odwrotnej metody potęgowej dla macierzy o rozmiarze 200000×200000 w funkcji zadanej liczby iteracji n.

Porównanie dokładności rozwiązań poprzez obliczanie normy $||Ax - b||$:



Wykres przedstawia wartość normy $||Ax - b||$ w funkcji rozmiaru n macierzy układu dla rozkładu LU i transformacji Householdera.

Wnioski:

- Implementacja rozkładu LU była dla mnie znacząco prostsza niż implementacja transformacji Householdera.
- Czas obliczeniowy dla rozkład LU jest średnio dwukrotnie krótszy niż czas obliczeniowy transformacji Householdera.
- Rozkład LU wydaje się dawać średnio mniejszy błąd w postaci normy $||Ax - b||$.