1. ESTYMACJA PUNKTOWA, WŁASNOŚCI ESTYMATORÓW

1. Wygenerować $N = 10000$ obserwacji $X_1, X_2, \ldots, X_N$ z rozkładu

   a) dwupunktowego $binom(1, 1/4)$

   b) wykładniczego $\mathcal{E}xp(1/3)$

   c) Cauchy'ego $\mathcal{C}(0, 1)$,

   Dla każdego z powyższych przypadków wyznaczyć wykres ciągu $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_N$ gdzie $\bar{X}_n$ oznacza średnią z pierwszych n obserwacji, $n = 1, 2, \ldots, N$, czyli

   $$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

   Wyciągnąć wnioski dotyczące zachowania się uzyskanych ciągów średnich.

2. Wygenerować próbę $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, $n = 500$ z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu = 4, \sigma = 2)$. Utworzyć podpróby $X_i = (Y_1, \ldots, Y_i)$, $i = 1, \ldots, n$ i wyznaczyć ciągi średnich: $\{\bar{X}_i : \quad i = 1, \ldots, n\}$, median: $\{Med_i : \quad i = 1, \ldots, n\}$, odchyleń standardowych $\{S_i : \quad i = 2, \ldots, n\}$ oraz rozstępów międzykwartylowych podzielonych przez 1,35: $\{D_i = IQR_i/1{,}35 : \quad i = 2, \ldots, n\}$.

   a) Narysować na wspólnym wykresie ciągi średnich i median. Przeanalizować wpływ liczności próby na zachowanie się średniej i mediany z próby. Czy statystyki te wydają się być sensownymi estymatorami parametru położenia μ w tym modelu?

   b) Narysować na wspólnym wykresie ciągi odchyleń standardowych i rozstępów międzykwartylowych podzielonych przez 1,35. Przeanalizować wpływ liczności próby na zachowanie się tych statystyk. Czy wydają się one być sensownymi estymatorami parametru rozproszenia σ w tym modelu?

3. Wygenerować próbę $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$, $n = 500$ z rozkładu Cauchy'ego $\mathcal{C}(a = 20, d = 1)$. Utworzyć podpróby $X_i = (Y_1, \ldots, Y_i)$, $i = 1, \ldots, n$ i wyznaczyć ciągi średnich: $\{\bar{X}_i : \quad i = 1, \ldots, n\}$, median: $\{Med_i : \quad i = 1, \ldots, n\}$, odchyleń standardowych $\{S_i : \quad i = 2, \ldots, n\}$ oraz odchyleń ćwiartkowych: $\{SQR_i = IQR_i/2 : \quad i = 2, \ldots, n\}$.

   a) Narysować na wspólnym wykresie ciągi średnich i median. Przeanalizować wpływ liczności próby na zachowanie się średniej i mediany z próby. Czy statystyki te wydają się być sensownymi estymatorami parametru położenia a w tym modelu?

   b) Narysować na wspólnym wykresie ciągi odchyleń standardowych i ćwiartkowych. Przeanalizować wpływ liczności próby na zachowanie się tych statystyk. Czy wydają się one być sensownymi estymatorami parametru rozproszenia d w tym modelu?

4. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_n$ będzie prostą próbą losową z rozkładu wykładniczego $\mathcal{E}xp(\lambda)$, czyli rozkładu o gęstości

   $$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases},$$

   gdzie $\lambda > 0$.

   a) W celu oszacowania czasu działania pewnych bateryjek, dział kontroli jakości zmierzył czas pracy 8 losowo wybranych bateryjek i otrzymał następujące wyniki (w godz.):

   483, 705, 2623, 347, 620, 2719, 1035, 421.

   Wiadomo, że czas pracy tych bateryjek ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$ z nieznaną $\lambda > 0$. Dla danych zebranych przez dział kontroli jakości, podać wartość estymatora największej wiarygodności parametru λ.

b) Dla danych z pkt. a) wyznaczyć estymator największej wiarygodności dla

(i) średniego czasu działania bateryjki,

(ii) prawdopodobieństwa, że bateryjka będzie działać krócej niż 1000 godz.

5. Niech $Gamma(a, \beta)$ oznacza rozkład gamma z parametrem kształtu a i drugim parametrem β, tzn. rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-\beta x) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}, \; a > 0, \beta > 0.$$

Wygenerować $n = 100$ obserwacji z rozkładu $Gamma(3, 2)$.

Następnie przyjąć, że zapomnieliśmy wartości parametrów rozkładu gamma, z którego wygenerowaliśmy dane i, używając R, oszacować te parametry stosując metodę największej wiarygodności.

6. Wybrać $\theta > 0$. Wygenerować $N = 10000$ k-elementowych próbek ($k = 20$) z rozkładu jednostajnego $\mathcal{U}([0, \theta])$. Porównać empirycznie obciążenie estymatora metody momentów i ENW parametru θ.