Fractales : Les ensembles de Mandelbrot de dimensions supérieures

Pierre-Olivier Parisé & Dominic Rochon
Département de Mathématiques et d'Informatique, UQTR

CRSNG NSERC

UQTR Université du Québec à Trois-Rivières

Introduction

En 1980, le mathématicien Benoît Mandelbrot visualise pour la première fois sur un ordinateur des objets mathématiques qu'il nomme *fractales*.

L'une des fractales les plus populaires est l'ensemble de Mandelbrot, obtenue par l'itération successive de la fonction polynomiale $z^2 + c$. Quelques années plus tard, les images des fractales issues de la dynamique des polynômes de la forme $z^p + c$ sont apparues.

Ces fractales étant en deux dimensions (2D), les mathématiciens se sont intéressés à les explorer dans l'espace (3D).

C'est seulement en 2000 que D. Rochon publie une méthode efficace permettant de voir les objets fractals en 3D. Sa méthode fait appel à une structure de nombres bien particulière : les nombres bicomplexes.

Ensuite, V. Garant-Pelletier et D. Rochon ont étudié l'ensemble de Mandelbrot dans l'espace des nombres tricomplexes et même multicomplexes. Ils ont généralisé plusieurs résultats connus sur l'ensemble de Mandelbrot du plan pour ces nouvelles structures.

Dans ce travail, les résultats de l'étude de V. Garant-Pelletier et D. Rochon sont généralisés. Il est question des ensembles de Mandelbrot générés par les polynômes de la forme $z^p + c$.

Questions

- À quoi ressemble les images générées par un polynôme de la forme $z^p + c$ avec z et c des nombres complexes et p une puissance entière plus grande que 2 ?
- Quelles sont les propriétés de ces ensembles ?
- Peuvent-ils se visualiser dans l'espace à l'aide d'une structure de nombres adéquate ?
- Quels sont les algorithmes qui permettent de générer les images ?

Définitions

1. **Les nombres complexes :** On définit un nombre complexe $\mathbb{C} \simeq \mathbb{M}(1)$ comme suit :
$$z = a + b\mathbf{i_1} \tag{1}$$
où $\mathbf{i_1}^2 = -1$ et a, b sont deux nombres réels.
2. **Les nombres bicomplexes :** On définit un nombre bicomplexe $\mathbb{M}(2)$ comme un quadruplet de nombres réels :
$$\zeta = x_1 + x_2\mathbf{i_1} + x_3\mathbf{i_2} + x_4\mathbf{j_1} \tag{2}$$
où $\mathbf{i_1}^2 = \mathbf{i_2}^2 = -1$, $\mathbf{j_1}^2 = 1$ et $x_i \in \mathbb{R}$.
3. **Les nombres tricomplexes :** On définit un nombre tricomplexe $\mathbb{M}(3)$ à l'aide de huit nombres réels :
$$\eta = x_1 + x_2\mathbf{i_1} + x_3\mathbf{i_2} + x_4\mathbf{i_3} + x_5\mathbf{i_4} + x_6\mathbf{j_1} + x_7\mathbf{j_2} + x_8\mathbf{j_3} \tag{3}$$
où $\mathbf{i_4} = \mathbf{i_1}\mathbf{i_2}\mathbf{i_3}$, $\mathbf{i_3}^2 = \mathbf{i_4}^2 = -1$ et $\mathbf{j_1}^2 = \mathbf{j_2}^2 = \mathbf{j_3}^2 = 1$.

Définitions (suite...)

Les ensembles de Mandelbrot : Les ensembles de Mandelbrot, aussi appelés Multibrots, sont définis à partir d'une équation polynomiale simple :

$$Q_{p,c}(z) = z^p + c \tag{4}$$

itérée plusieurs fois à partir du point de départ $z = 0$. La variable z et le nombre fixe c sont des nombres complexes, des nombres bicomplexes ou des nombres tricomplexes et la puissance p est un nombre entier plus grand que 2. Précisément, la définition de l'ensemble de Mandelbrot est

$$\mathcal{M}_i^p := \left\{ c \in \mathbb{M}(i) : \left\{ Q_{p,c}^n(0) \right\}_{n=1}^{\infty} \text{ est bornée,} \right\} \tag{5}$$

où $i = 1, 2$ ou 3.

Méthodologie

Pour visualiser les ensembles de Mandelbrot en deux dimensions et en trois dimensions, deux résultats s'avèrent capitaux.

Théorème 1 *Si un nombre c appartient à un multibrot $\mathcal{M}_i^p$, alors son module est plus petit que $2^{1/(p-1)}$.*

Théorème 2 *Un nombre c est dans un multibrot ssi le module de ces itérés $|Q_{p,c}^n(0)|$ n'excède pas $2^{1/(p-1)}$ pour tout entier $n \geq 1$.*

Le théorème 1 dit que les ensembles de Mandelbrot sont contenus dans un disque (en 2D) ou dans une boule (en 3D) de rayon $2^{1/(p-1)}$. Ceci permet de restreindre la zone d'exploration pour le test d'appartenance à un multibrot. Ce dernier test est décrit dans l'énoncé du théorème 2 : pour chaque point c du plan complexe, il faut effectuer les calculs de $Q_{p,c}(0) = c$, puis ceux de $Q_{p,c}^2(0) = Q_{p,c}(Q_{p,c}(0)) = Q_{p,c}(c) = c^p + c$, etc. et vérifier si son module est plus petit que $2^{1/(p-1)}$.

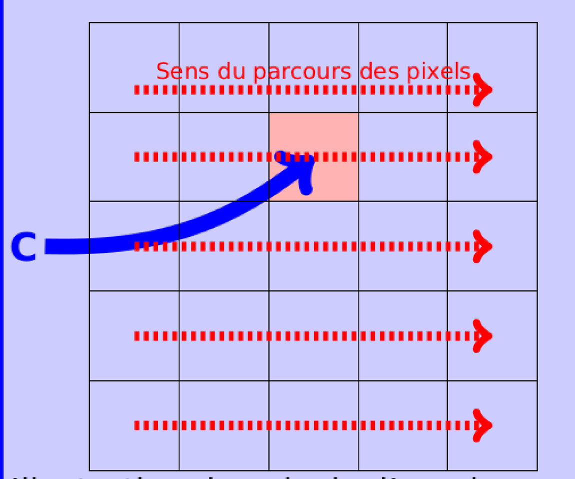

Illustration des pixels d'une image

Pour réaliser ce test dans le plan en 2D, il faut se fixer un domaine d'exploration des points du plan. Ces points du plan sont associés à chacun des pixels du domaine d'exploration choisi (le carré en rose de la figure de gauche). Pour faciliter la programmation, un carré de côté $2 \cdot 2^{1/(p-1)}$ est choisi comme domaine.

Puis, il faut fixer un nombre d'itérations maximal à partir duquel on acceptera que le nombre est dans l'ensemble multibrot.

Si les calculs mentionnés ci-haut sont vérifiés jusqu'au nombre d'itérations maximal accepté, alors on colorie le pixel d'une couleur de notre goût.

Pour les multibrots en 3D, la technique est similaire. Il faut choisir trois composantes du nombre bicomplexe ou tricomplexe et fixer les composantes restantes à 0. Par la suite, au lieu de prendre un carré, on utilise un domaine d'exploration cubique de côté $2 \cdot 2^{1/(p-1)}$. Puis, on exécute les mêmes étapes que le cas 2D adapté à un domaine en 3D.

Résultats en 2D

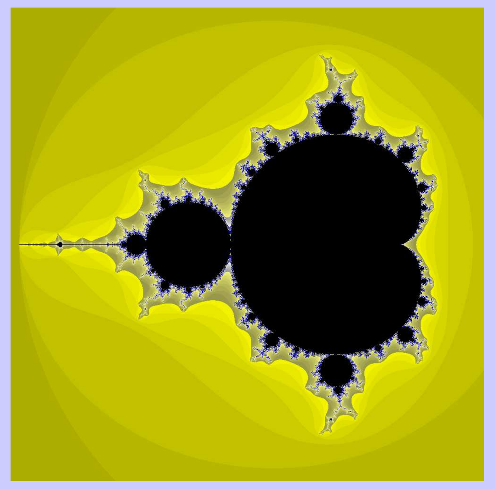

Figure 1 – $\mathcal{M}^2$: $[-2, 0.3] \times [-1.2, 1.2]$

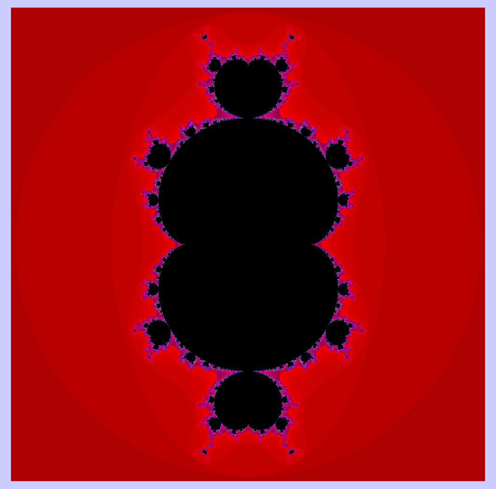

Figure 2 – $\mathcal{M}^3$: $[-\sqrt[2]{2}, \sqrt[2]{2}] \times [-\sqrt[2]{2}, \sqrt[2]{2}]$

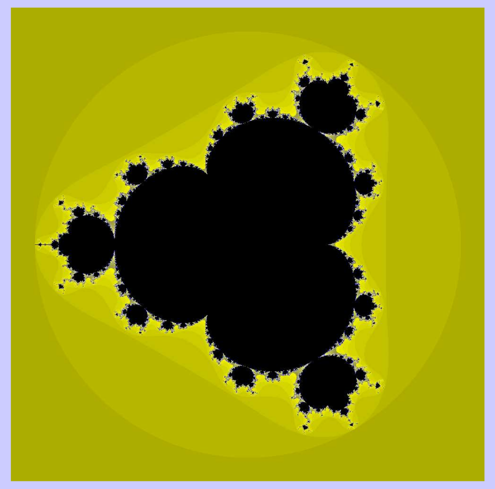

Figure 3 – $\mathcal{M}^4$: $[-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}] \times [-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$

Résultats en 3D

Plusieurs coupes 3D des multibrots sont possibles en choisissant trois composantes des huit composantes d'un nombre tricomplexe. Les images suivantes présentent quelques exemples.

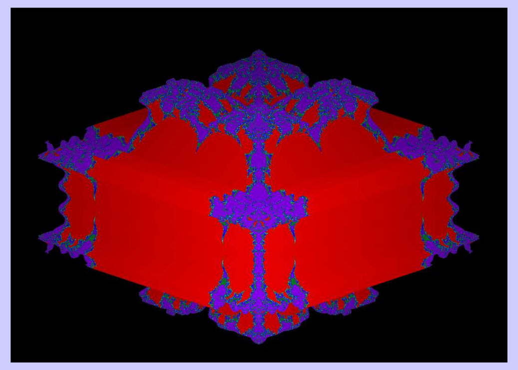

Figure 4 – $\mathcal{M}_3^3$: coupe $(1, \mathbf{i_1}, \mathbf{i_2})$

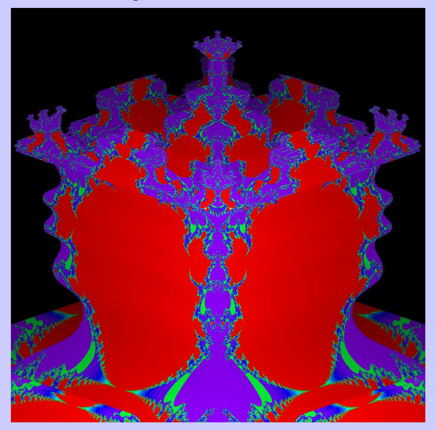

Figure 5 – $\mathcal{M}_3^4$: coupe $(1, \mathbf{i_1}, \mathbf{i_2})$

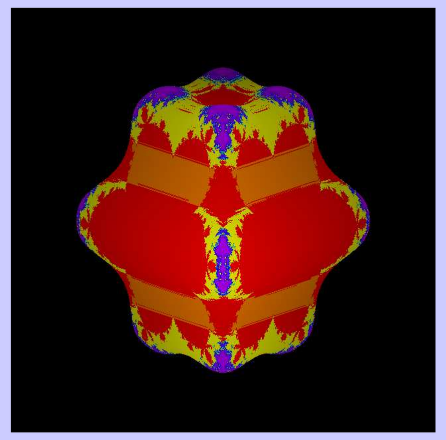

Figure 6 – $\mathcal{M}^4$: coupe $(\mathbf{i_1}, \mathbf{j_2}, \mathbf{j_3})$

Conclusion

En conclusion, les ensembles de Mandelbrot généralisés ont une structure riche qui ne demande qu'à être explorée davantage. Dans un travail futur, un des objectifs serait de classer les coupes tridimensionnelles des multibrots dans l'espace des nombres tricomplexes.

Référence

[1] Baley Price, G. : An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions. *Monographs and textbooks on pure and applied mathematics* (1991)

[2] Garant-Pelletier, V. & Rochon, D. : On a Generalized Fatou-Julia Theorem in Multicomplex spaces. *Fractals* **17**(3), 241-255 (2009)

[3] Parisé. P.-O. & Rochon, D. : A Study of The Dynamics of the Tricomplex Polynomial $\eta^p + c$. *Non Linear Dynam.*. (à paraître)

[4] Rochon, D. : A Generalized Mandelbrot Set for Bicomplex Numbers. *Fractals*. **8**(4), 355-368 (2000)