

## Lomené výrazy

- sú výrazy v tvare zlomku,
- pracujeme s nimi rovnako ako so zlomkami

$$\text{lomený výraz} = \frac{\text{mnohočlen}}{\text{mnohočlen}}$$

- **!!! podmienky !!!**

$\frac{1}{b}$	○	○	$b \neq -1$
$\frac{b}{b+1}$	○	○	$b \neq 1$ a $b \neq -1$
$\frac{b+1}{(b-4)(b+2)}$	○	○	$b \neq 0$
$\frac{1}{b^2-1}$	○	○	$b \neq 1$ a $b \neq -1$

**Úloha:** Určte podmienky lomených výrazov

$$\frac{x-2}{x^2+1}$$

$$\frac{\frac{3x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x-3}}$$

$$\frac{3}{x \cdot (x-4)}$$

## Krátenie a rozširovanie lomených výrazov

- krátenie zlomku  $\frac{12}{36} = \frac{4.3}{4.9} = \frac{1}{3}$
- krátenie výrazu  $\frac{4x^2y}{32xy^2} = \frac{x}{8y}$
- rozšírenie zlomku  $\frac{7}{5} = \frac{7.3}{5.3} = \frac{21}{15}$
- rozšírenie výrazu  $\frac{4x^2}{5x} \cdot \frac{y}{y} = \frac{4x^2y}{5xy}$

(využívame pri sčítaní a odčítaní zlomkov)

Pre ľubovoľné výrazy  $V_1, V_2, V_3$  pre ktoré platí, že  $V_2, V_3 \neq 0$  je

$$\frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_3} = \frac{V_1}{V_2}$$

→ krátenie  
← rozširovanie

- **!!! upraviť na súčin !!!**

### Úloha: Vykráťte lomené výrazy

- $\frac{15b^2xy^2}{20b^2x^2y}$
- $\frac{(x+1)^2(x-1)}{(x-1)^3(x+1)}$
- $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$
- $\frac{6r^2(p^2-4)(x+y)^2}{9r^2(p+2)(x^2-y^2)}$
- $\frac{x^2+6x+5}{x+1}$
- $\frac{y^2-y-6}{y^2-4y+3}$
- $\frac{9p^2+1}{9p^2-1}$

### Násobenie a delenie lomených výrazov

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{12}{15} \quad \text{alebo} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5} : \frac{6}{10} = \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{6} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

výrazy neroznásobujeme, ale snažíme sa ich čo najviac pokratiť

$\frac{x}{y^3} \cdot y$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/> $\frac{y(x-1)}{x}, x \neq 0, x \neq -1, y \neq 0$
$\frac{x^2}{y} \cdot \frac{yx}{x^3}$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/> $\frac{x(x+1)}{(x+2)^2}, x \neq -1, x \neq -2, x \neq 2$
$\frac{x^2-1}{xy} \cdot \frac{y^2}{x+1}$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/> $1, x \neq 0, y \neq 0$
$\frac{12xy^3}{25x^2y^2} : \frac{18x^2y}{15xy^2}$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/> $\frac{x}{y^2}, y \neq 0$
$\frac{x^2-2x}{x+2} : \frac{x^2-4}{x+1}$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/> $\frac{2y^2}{5x^2}, x \neq 0, y \neq 0$

### Úloha: Vynásobte a vydeľte výrazy

- $\frac{5x^2}{2y^3} \cdot \frac{4y^2}{15x}$
- $\frac{3y-6}{3x} : \frac{6x^2}{5y-10}$

- $\frac{x^2-1}{x^2+xy} \cdot \frac{x^2+2xy+y^2}{(x+1)^2} \cdot \frac{x^2+x}{yx-y}$
- $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \left(\frac{y}{x-1}\right)^2 \left(\frac{x^2-1}{2xy}\right)^2$
- $\frac{12a^2b^2}{14x^2y^3} \cdot \frac{18a^2b}{21x^3y^2}$
- $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$

### Sčítanie a odčítanie lomených výrazov

$$\frac{2}{21} + \frac{7}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{2}{21} + \frac{1}{3} = \frac{2+1 \cdot 7}{21} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{x+3}{x-1} + \frac{x}{x-1} = \frac{x + \boxed{\phantom{00}} + x}{x - \boxed{\phantom{00}}} = \frac{\boxed{\phantom{00}}x + \boxed{\phantom{00}}}{x - \boxed{\phantom{00}}}, x \neq 1$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x + \boxed{\phantom{00}}}{x(x + \boxed{\phantom{00}})} - \frac{x}{x(x + \boxed{\phantom{00}})} = \frac{x + \boxed{\phantom{00}} - x}{x(x + \boxed{\phantom{00}})} = \frac{\boxed{\phantom{00}}}{x(x + \boxed{\phantom{00}})}, x \neq 0, x \neq -1$$

**Úloha:** Rozšírte lomené výrazy tak, aby mali rovnakého menovateľa

- $\frac{1}{2x}$
- $\frac{x}{x+2}$
- $\frac{3}{2x-4}$

**Úloha:** Rozšírte výraz

- $\frac{x-1}{2-x}$  tak, aby sa jeho menovateľ rovnal  $x^2 - 4$
- $\frac{1}{x+3}$  tak, aby sa jeho menovateľ rovnal  $x^2 - 4$

**Úloha:** Rozšírte lomené výrazy tak, aby sa v ich menovateli vyskytoval výraz uvedený v zátvorke

- $\frac{x-1}{x+2} \{x^2 + 2x\}$
- $\frac{x-2}{1-x} \{x - 1\}$
- $\frac{x-1}{x^2-1} \{(x+1)^2\}$

Úloha: Sčítajte, odčítajte lomené výrazy

$$\bullet \frac{2\cancel{3} + \frac{x}{\cancel{3}}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \frac{6 + \frac{x^2}{3}}{3 \cdot 3} = \frac{x^2 + 6}{9} \quad | \quad x \neq 0$$

$$\bullet \frac{\frac{3}{x} + \frac{y}{3x} + \frac{4}{y+1}}{1} = \frac{3 \cdot 3(y+1) + y(y+1) + 4 \cdot 3x}{3x(y+1)} = \frac{9y+9+y^2+y+12x}{3x(y+1)} = \frac{y^2+10y+12x+9}{3x(y+1)} \quad | \quad x \neq 0, y \neq -1$$

$$\bullet \frac{\frac{x+1}{x} + \frac{x}{x+1}}{1} = \frac{(x+1)^2 + x^2}{x(x+1)} = \frac{x^2+2x+1+x^2}{x(x+1)} = \frac{2x^2+2x+1}{x^2+x} \quad | \quad x \neq 0, x \neq -1$$

$$\bullet \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1} + \frac{3-x^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x+1) + x(x-1) + 3-x^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1+x^2-x+3-x^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{4}{(x+1)(x-1)} \quad | \quad x \neq 1, x \neq -1$$

$$\bullet \frac{x}{3} - \frac{x}{x+2} - 2 = \frac{x(x+2) - 3x - 2 \cdot 3(x+2)}{3(x+2)} = \frac{x^2+2x-3x-6x-12}{3(x+2)} = \frac{x^2-7x-12}{3(x+2)} \quad | \quad x \neq -2$$

$$\rightarrow \bullet \frac{\frac{x+1}{x} + \frac{x-2}{2x} - 2x + 1}{1} = \frac{2x+2+x-2-4x^2+2x}{2x} = \frac{-4x^2+5x}{2x} = \frac{x(5-4x)}{2x} = \frac{5-4x}{2} \quad | \quad x \neq 0$$

$$\bullet \frac{\frac{y}{y^2-x^2} - \frac{x}{x-y}}{1} = \frac{\frac{y}{(y+x)(y-x)} + \frac{x}{x-y}}{1} = \frac{y+x(y+x)}{(y+x)(y-x)} \quad | \quad y \neq x, y \neq -x$$

$$\bullet \frac{\frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} + \frac{b^2}{a^2-ab}}{1} = \frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} + \frac{b^2}{a(a-b)} = \frac{a^2-b^2-a^2+b^2}{a(a-b)} = 0 \quad | \quad a \neq 0, a \neq b$$

$$\bullet \frac{\frac{-8+5x}{8+2x-x^2} - \frac{2x+2}{x^2-3x-4}}{1} = \frac{5x-8}{(x-4)(x+2)} - \frac{2x+2}{(x-4)(x+1)} = \frac{5x-8}{(x-4)(x+2)} - \frac{2(x+1)}{(x-4)(x+2)} = \frac{5x-8-2(x+1)}{(x-4)(x+2)} = \frac{5x-8-2x-2}{(x-4)(x+2)} = \frac{3x-10}{(x-4)(x+2)} = \frac{3(x-10)}{(x-4)(x+2)} = \frac{3}{x+2} \quad | \quad x \neq -2, x \neq 4, x \neq -1$$

$$-x^2+2x+8 = -(x^2-2x-8)$$

$$x^2-2x-8 = (x-4)(x+2)$$

## Na precvičenie

### 1. Vykráťte lomené výrazy

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{72abx}{84aby} & \text{b) } \frac{p^2 - 2pq + q^2}{p^2 - q^2} & \text{c) } \frac{4a^2 - 1}{4a^2 - 4a + 1} \\ \text{d) } \frac{16 - 8a + a^2}{ab - 4b} & \text{e) } \frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{a^2 + 2ac + c^2 - b^2} & \text{f) } \frac{ab + 2b - ac - 2c}{ab - 2b - ac + 2c} \\ \text{g) } \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} & \text{h) } \frac{3uv + 9v - 2u - 6}{3uv - 2u - 9v + 6} & \text{i) } \frac{a^2 + 2a - 15}{3a + 15} \\ \text{j) } \frac{a^2 - a - 20}{a^2 + a - 30} & \text{k) } \frac{3x^2 + x - 10}{4x^2 + x - 14} & \text{l) } \frac{x^3 + x^2y + xy^2}{x^3y - y^4} \end{array}$$

### 2. Rozšírte lomené výrazy tak, aby sa v ich menovateli vyskytoval výraz uvedený v zátvorke

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{x}{y-2} \{(2-y)\} & \text{b) } \frac{x+3}{2-x} \{(x^2-4)\} & \text{c) } \frac{y-1}{x+1} \{(x^3+1)\} \\ \text{d) } \frac{(a+1)}{(a+1)^2} \{(a^2-1)\} & \text{e) } \frac{x-1}{x^2-1} \{(x+1)^3\} & \end{array}$$

Handwritten notes for problem 2c:  $\frac{y-1}{x+1} \{(x^3+1)\} = \frac{(y-1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(y-1)(x^2-x+1)}{x^3+1}$

Handwritten notes for problem 2d:  $\frac{(a+1)}{(a+1)^2} \{(a^2-1)\} = \frac{a-1}{(a+1)(a-1)} = \frac{a-1}{a^2-1}$

### 3. Upravte a určte podmienky

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{2m-n}{m-n} + \frac{m}{n-m} & \text{b) } \frac{x-y}{xy} - \frac{z-y}{zy} + \frac{x+z}{xz} & \text{c) } \frac{u^2+1}{u+1} - u \\ \text{d) } \frac{4mn}{m-n} + (m-n) & \text{e) } 1 - \frac{2p}{q} + \frac{p^2}{q^2} - \frac{(q-p)^2}{q^2} & \text{f) } \frac{7v-1}{2v^2+6v} + \frac{5-3v}{v^2-9} \\ \text{g) } \frac{2p+q}{p^2+pq} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p+q} & \text{h) } \frac{a-2b}{a+b} - \frac{2a-b}{b-a} - \frac{2a^2}{a^2-b^2} & \\ \text{i) } \frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x} - \frac{x(4-x)}{1-x^2} & \text{j) } \frac{4}{3m-3n} - \frac{3m-4n}{2m^2-4mn+2n^2} & \end{array}$$