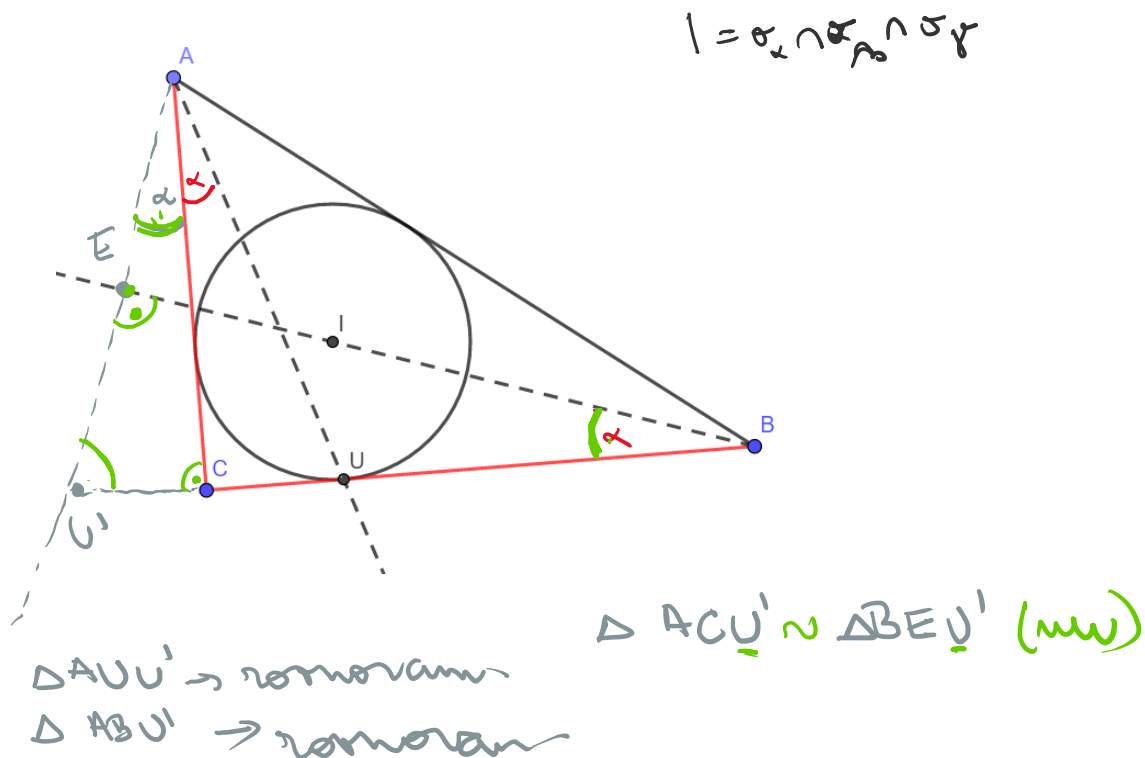
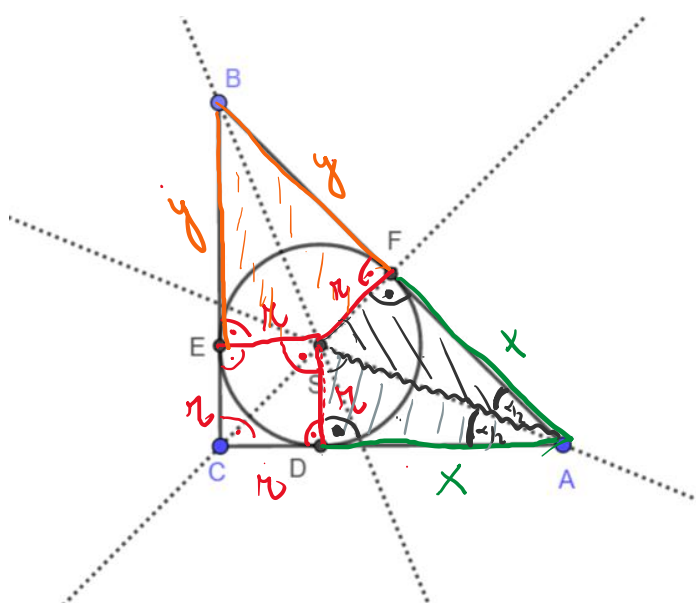


3. V pravouhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme postupně I a U střed kružnice vepsané a dotykový bod této kružnice s odvesnou BC . Určete, aký je poměr $|AC| : |BC|$, ak sú uhly CAU a CBI zhodné. (Jaroslav Zhouf)



Ú1

Nech D, E, F sú dotykové body kružnice vpísanej trojuholníku ABC postupne so stranami BC, CA, AB . Pomocou ich dĺžok a, b, c vyjadrite dĺžky úsekov, na ktoré body D, E, F rozdeľujú jednotlivé strany.



$$\triangle ADS \cong \triangle AFS \text{ (ms)} \quad \rightarrow$$

$$a = x + y \Rightarrow x = a - y$$

$$b = x + y \Rightarrow y = b - x = b - a + y$$

$$c = x + y \Rightarrow y = c - x = c - b + a - y$$

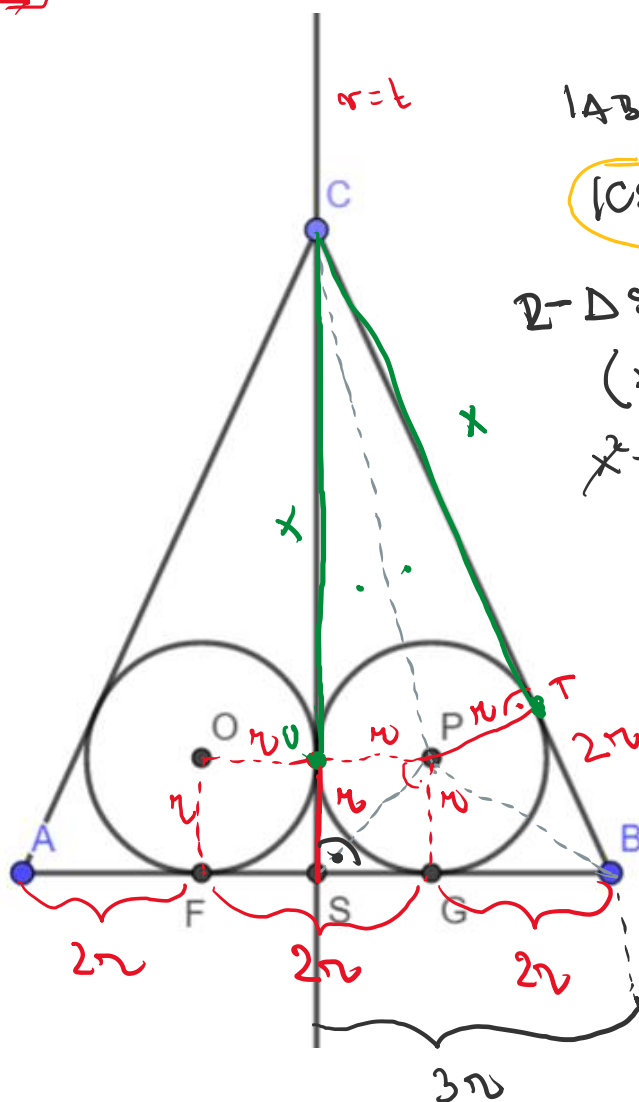
$$y = c - b + a - y$$

$$2y = c - b + a$$

$$y = \frac{c - b + a}{2}$$

Ú2

Označme S stred základne AB daného rovnoramenného trojuholníka ABC. Predpokladajme, že kružnice vpísané trojuholníkom ACS, BCS sa dotýkajú priamky AB v bodoch, ktoré delia základňu AB na tri zhodné diely. Vypočítajte pomer $|AB| : |CS|$.



$$|AB| = 6v, \quad |BS| = 3v$$

$$|CS| = x + r = 4r$$

2- D SBC :

$$(x+ru)^2 + (zu)^2 = (x+2u)^2$$

$$\cancel{x^2} + \underbrace{2 \times r}_{+6r} + \underbrace{r^2}_{+9r^2} = \cancel{x^2} + \underbrace{4 \times r}_{+12r} + \underbrace{4r^2}_{+16r^2}$$

$$62 = 2 \times 2 \mid : 2n^{+2}$$

$$3\pi = x$$

$$\frac{|AB|}{|CS|} = \frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$$

4. Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz

$$\frac{a+bc}{a+b} + \frac{b+ca}{b+c} + \frac{c+ab}{c+a},$$

ak sú a, b, c kladné reálne čísla so súčtom 1.

(Michal Rolínek, Pavel Calábek)

Ú1

$$(a+b)^2 + 2(a+b) \cdot c + c^2 = 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a+b+c)^2 = 0$$

$$a+b+c = 0$$

Nech a, b, c sú nenulové reálne čísla, ktorých súčet je rovný 0. Určte, aké hodnoty môže nadobúdať výraz

$$\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{3(ab+bc+ca)} = \frac{a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2}{3(ab+bc+ca)}$$

$$= \frac{2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab+bc+ca)}{3(ab+bc+ca)} = \frac{2(-2ab-2ac-2bc) - 2(ab+bc+ca)}{3(ab+bc+ca)}$$

$$= \frac{-4(ab+bc+ca) - 2(ab+bc+ca)}{3(ab+bc+ca)} = \frac{-6(ab+bc+ca)}{3(ab+bc+ca)} = -2$$

Ú2

Nech x, y, z sú kladné reálne čísla, ktorých súčin je rovný 1. Dokážte, že platí rovnosť

$$\frac{1}{1+x+\frac{1}{yz}} + \frac{1}{1+y+\frac{1}{zx}} + \frac{1}{1+z+\frac{1}{xy}} = 1$$

$$x \cdot y \cdot z = 1$$