

SÚSTAVY ROVNÍC

- sústava m lineárnych rovníc s n neznámymi má vo všeobecnosti tvar:

$$\begin{array}{l}
 [x, y] \leftarrow \begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ x - 4y = 7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \quad \begin{array}{l} a_{ij} \in \mathbb{R} \\ b_i \in \mathbb{R} \end{array}
 \end{array}$$

Handwritten notes: $2x + 3y + z = 5$, $x - 4y + 5z = 7$, $x - 2y = 14$. A small graph shows a line on a coordinate system with points (2, 1) and (3, 1).

- riešením sústavy rozumieme každú usporiadanú n -ticu reálnych čísel $[x_1; x_2; \dots; x_n]$, ktorá je riešením všetkých rovníc, z ktorých sústava pozostáva
- pri riešení sústav volíme také metódy, aby sme postupne znižovali počet rovníc i neznámych
 - dosadzovacia metóda
 - sčítacia metóda
 - porovnávacia metóda
 - riešenie pomocou determinantov
 - grafická metóda

Vyriešte sústavy rovníc v \mathbb{R}^2

<https://www.desmos.com/calculator/pd4ox1nejp>

dosadzovacia

$$\begin{array}{l}
 2x - y = 1 \rightarrow y = 2x - 1 \\
 4x - 3y = 3 \\
 4x - 3(2x - 1) = 3 \\
 4x - 6x + 3 = 3 \\
 -2x = 0 \\
 x = 0 \\
 y = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \\
 X = \{[0; -1]\}
 \end{array}$$

porovnávacia

$$\begin{array}{l}
 2x - y = 1 \\
 14x - 7y = 11 \quad | :7 \\
 2x - y = 1 \\
 2x - y = \frac{11}{7} \\
 \hline
 0 = \frac{10}{7} \\
 \text{neexistuje} \\
 X = \emptyset
 \end{array}$$

sčítacia

$$\begin{array}{l}
 2x - y = 1 \\
 2,5x - 1,25y = 1,25 \quad | \cdot 4 \\
 2x - y = 1 \quad | \cdot 5 \\
 -10x + 5y = -5 \\
 10x - 5y = 5 \\
 \hline
 0 = 0 \\
 X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\
 [1; 7] \dots 2 - 7 + 1 \\
 [1; 1] \rightarrow [x; y = 2x - 1] \\
 x = 2, 2 \cdot 1 - y = 1 \\
 y = 1 \\
 X = \{[x; 2x - 1] ; x \in \mathbb{R}\}
 \end{array}$$

Úloha

Vyriešte sústavy v \mathbb{R}^2 , prípadne v \mathbb{R}^3

a. $6x - 10y = 17$ $\cdot 2 \rightarrow -10y = 17 - 6x \quad | : (-10)$
 $9x - 15y = 17$ $\cdot (-3) \rightarrow -15y = 17 - 9x \quad | : (-15)$
 $3x - 5y = \frac{17}{3}$
 $-3x + 5y = -\frac{17}{3}$
 $y = -\frac{17}{10} + \frac{3}{5}x$
 $y = -\frac{17}{15} + \frac{3}{5}x$ $\Rightarrow -\frac{17}{10} + \frac{3}{5}x = -\frac{17}{15} + \frac{3}{5}x$
 $-\frac{17}{10} = -\frac{17}{15} \rightarrow x = \emptyset$

b. $4x + 3y = 6$
 $2x + y = 4 \rightarrow y = 4 - 2x$
 $4x + 3(4 - 2x) = 6$
 $4x + 12 - 6x = 6$
 $-2x = -6$
 $x = 3$
 $y = 4 - 2 \cdot 3 = -2$
 $x = \{3, -2\}$

c. $2x - y + 2z = 9$ $\rightarrow y = 2x + 2z - 9$
 $x - 4y + 3z = 5$
 $3x - 5y + z = 6$
 $x - 4(2x + 2z - 9) + 3z = 5$
 $3x - 5(2x + 2z - 9) + z = 6$
 $x - 8x - 8z + 36 + 3z = 5$
 $3x - 10x - 10z + 45 + z = 6$
 $-7x - 9z = -39 \quad | \cdot (-1) \oplus$
 $7x + 9z = 39$
 $4z = 8 \rightarrow z = 2$
 $x + 2y = \frac{7}{4}$
 $y + 3z = 2,5$
 $4x + z = \frac{11}{3}$

Do sa do viača
situácia
 $2x - y + 2z = 9$
 $x - 4y + 3z = 5$
 $3x - 5y + z = 6$
 $-4x + 9y = -3 \quad | : (-4)$
 $-8x + 11y = -13 \quad | : 8$
 $x + \frac{9}{8}y = \frac{3}{4}$
 $-x + \frac{11}{8}y = -\frac{13}{8}$
 $2 = 2$
 $x = \{3, 1, 2\}$

$2x - y + 2z = 9 \quad | \cdot (-1) \oplus$
 $x - 4y + 3z = 5 \quad | \cdot (-1) \oplus$
 $3x - 5y + z = 6$
 $-4z = -8$
 $z = 2$
 $2x - y + 4 = 9$
 $x - 4y + 6 = 5 \quad | \cdot (-2) \oplus$
 $3x - 5y + 2 = 6$
 $7y - 8 = -1$
 $7y = 7$
 $y = 1$
 $2x - 1 + 4 = 9$
 $2x = 6$
 $x = 3$

db $x + 2y + z = 1$
 (e) $5x + y - z = 2$
 $x - y - z = 0$

f. $2x + 3y - z = 0$
 $x - y + 3z = 10$
 $3x + 7y - 5z = 0$

$$\text{g. } \begin{aligned} x^2 + 2y^2 + 12x - 20y + 29 &= 0 \\ 8x - y &= 1 \end{aligned}$$

Všetky doteraz riešené sústavy mali spoločnú vlastnosť – tvorilo ich toľko rovníc, koľko sa v sústave vyskytovalo neznámych. Ako riešiť sústavy, v ktorých to neplatí?

Vyriešte sústavu v \mathbb{R}^5

$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{3} + t \\ y &= 2 - t \\ z &= 3 + 2t \\ x &= 4 - 2u \\ y &= u \\ z &= 5 + u \end{aligned}$$

Vyriešte sústavu v \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} x + y + 4z &= 2 \\ x - y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Úloha

Vyriešte sústavy v \mathbb{R}^2 , prípadne v \mathbb{R}^3

a.
$$\begin{aligned}x + y + z &= 5 \\x - 2y - z &= 4\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}2x - 3y &= 16 \\x + y &= 3 \\x - 2y &= 9\end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned}x - y &= 0 \\2x - y &= 6 \\x + 2y &= 13\end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned}2x - y + 2z &= 0 \\x - y + z &= 1\end{aligned}$$