LINEÁRNE ROVNICE S PARAMETROM

$\left\{ \frac{4+a}{5-a} \right\}$

$5x - 2 = 2x + 4$	$3x = 6$	$x = 2$	$\xrightarrow{a=2}$ $\frac{4+2}{5-2} = \frac{6}{3} = 2$
$5x - 3 = 3x + 4$	$2x = 7$	$x = \frac{7}{2}$	
$5x - 5 = 5x + 4$	$0x = 9$	$x \in \emptyset$	
$5x + 1 = -x + 4$	$6x = 3$	$x = \frac{1}{2}$	$\xrightarrow{a=-1}$ $\frac{4-1}{5+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
$5x \quad = \quad 4$	$5x = 4$	$x = \frac{4}{5}$	https://www.desmos.com/calculator/3unqlpp3ev

parameter

$5x - a = ax + 4$; $a \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $a = \sqrt{2}$ ..... $5x - \sqrt{2} = \sqrt{2}x + 4$

$a = \frac{3}{5}$ ..... $5x - \frac{3}{5} = \frac{3}{5}x + 4$

- rovnice (nerovnice), ktoré okrem neznámych, obsahujú aj ďalšie premenné, ktoré nazývame parametre
- parametrickú rovnicu (nerovnice) považujeme za zápis všetkých rovníc (nerovníc), ktoré získame dosadením konštánt za parameter z jeho číselného oboru
- pomocou jedného zápisu – rovnice (nerovnice) s parametrom, vieme zapísať veľké množstvo rovníc
- **riešiť rovnicu** (nerovnicu) s parametrom znamená určiť pre každú prípustnú hodnotu parametra z jeho číselného oboru prislúchajúcu množinu koreňov
  - rovnicu upravíme na tvar $\boxed{x.A(p) = B(p)}$, kde x - neznáma, $A(p), B(p)$ - sú výrazy s parametrom p, bez neznámej x (osamostatniť x)

    $5x - a = ax + 4 \quad | -ax \; ; +a$

    $5x - ax = 4 + a$

    $x \cdot (5 - a) = 4 + a$

    $x \cdot A(a) = B(a)$
  - vykonáme diskusiu vzhľadom na $A(p)$:
    - ak $A(p) = 0$ - vyriešime rovnicu pre parameter, ktorý spĺňa túto podmienku,
    - ak $A(p) \neq 0$ - rovnicu môžeme deliť výrazom $A(p)$, takže $x = \frac{B(p)}{A(p)}$

$x \cdot (5 - a) = 4 + a \quad | : (5 - a)$!!

$5 - a = 0$

$\boxed{a = 5}$

$x \cdot (5 - 5) = 4 + 5$

$x \cdot 0 = 9$

$0 = 9$

$x \in \emptyset$

$5 - a \neq 0$

$\boxed{a \neq 5}$

$x \cdot (5 - a) = 4 + a \quad | : 5 - a$;

$x = \frac{4+a}{5-a}$

a	5	$\mathbb{R} - \{5\}$
x	$\emptyset$	$\left\{ \frac{4+a}{5-a} \right\}$

Riešte v R rovnice s neznámou x a parametrom p; $p \in \mathbb{R}$

a. $xp + 2p = 1 + x \quad / -x, -2p$

$xp - x = 1 - 2p$

$x(p-1) = 1 - 2p$

$p - 1 = 0$, $\boxed{p = 1}$

$x \cdot (1-1) = 1 - 2 \cdot 1$

$0 = -1$

$x \in \emptyset$

$p - 1 \neq 0$, $p \neq 1$

$x(p-1) = 1 - 2p \quad / : (p-1)$

$x = \dfrac{1-2p}{p-1}$

p	1	$\mathbb{R} - \{1\}$
x	$\emptyset$	$\left\{\dfrac{1-2p}{p-1}\right\}$

b. $2p(xp + 1) - (p^2 + 1)x = 2$

- Určte všetky hodnoty parametra p tak, aby riešením rovnice bolo kladné reálne číslo

$x > 0$

$-\dfrac{2}{p+1} > 0 \Leftrightarrow p + 1 < 0$

$\boxed{p < -1}$

$2p^2x + 2p - p^2x - x = 2$

$x(2p^2 - p^2 - 1) = 2 - 2p$

$x(p^2 - 1) = 2 - 2p$

$x(p+1)(p-1) = -2(-1+p)$

$(p+1)(p-1) = 0$

$\boxed{p = -1}$

$x \cdot 0 \cdot (-2) = -2(-2)$

$0 = 4$

$x \in \emptyset$

$\boxed{p = 1}$

$x \cdot 2 \cdot 0 = -2 \cdot (-1+1)$

$0 = 0$

$x \in \mathbb{R}$

$(p+1) \cdot (p-1) \neq 0$

$p \neq 1 \quad p \neq -1$

$x = \dfrac{-2\cancel{(p-1)}}{(p+1)\cancel{(p-1)}} = -\dfrac{2}{p+1}$

p	1	-1	$\mathbb{R} - \{1, -1\}$
x	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$\left\{-\dfrac{2}{p+1}\right\}$

c. $\dfrac{x+p}{p} = px - 1 \quad / \cdot p; \quad p \neq 0$

$x + p = p^2x - p$

$x(1 - p^2) = -2p$

$x(1-p)(1+p) = -2p$

$(1-p)(1+p) = 0$

$p = 1 \Rightarrow 0 = -2 \ldots x \in \emptyset$

$p = -1 \Rightarrow 0 = 2 \ldots x \in \emptyset$

$(1-p)(1+p) \neq 0$

$x = \dfrac{-2p}{(1-p)(1+p)}$

p	0	1	-1	$\mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$
x		$\emptyset$	$\emptyset$	$\left\{\dfrac{-2p}{(1-p)(1+p)}\right\}$

$p = 2$

$p = 2$

$\dfrac{x+2}{2} = 2x - 1$

$x + 2 = 4x - 2$

$4 = 3x$

$\dfrac{4}{3} = x$

$\rightarrow x = \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$

$$\frac{x-3}{x-3} = 6 \quad \emptyset$$
$$1 = 6$$

d. $\frac{x-p}{x-3} = 2p \;\Big|\cdot(x-3)\;;\quad x \neq 3$

$$x - p = 2p(x-3)$$
$$x - p = 2px - 6p$$
$$x(1-2p) = -5p$$

$1-2p=0$: $\boxed{p=\frac{1}{2}}$, $0 = -\frac{5}{2}$, $x \in \emptyset$

$\boxed{1-2p \neq 0}$: $\boxed{x = \frac{-5p}{1-2p}}$

$$\frac{-5p}{1-2p} = 3 \;\Big|\cdot(1-2p) \neq 0$$
$$-5p = 3 - 6p$$
$$\boxed{p = 3}$$

p	$\frac{1}{2}$	3	$\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}; 3\}$
x	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{-\frac{5p}{1-2p}\}$

e. $\frac{3}{x+4} = \frac{p+1}{2p}$ $\quad p \neq 0\;;\; x \neq -4 \;\Big|\cdot 2p\cdot(x+4)$

$$6p = px + x + 4p + 4$$
$$2p - 4 = x(p+1)$$

$p+1=0$: $\boxed{p=-1}$, $-6 = 0$, $x \in \emptyset$

$p+1 \neq 0$: $x = \frac{2p-4}{p+1}$

$$\frac{2p-4}{p+1} = -4$$
$$2p - 4 = -4p - 4$$
$$6p = 0$$
$$p = 0$$

p	0	-1	~~0~~	$\mathbb{R} - \{0, -1\}$
x		$\emptyset$	~~$\emptyset$~~	$\{\frac{2p-4}{p+1}\}$

f. $\frac{p+x}{3} = \frac{x-3}{p} + 2$

g. $p = \frac{p}{x-2} + \frac{p}{p-1}$

p	0	2	1	$\mathbb{R} - \{0, 2, 1\}$
x	$\mathbb{R}$	$\emptyset$		$\{\frac{3p-5}{p-2}\}$

$$x(p^2 - 2p) = 3p^2 - 5p$$
$$x\, p(p-2) = p(3p-5)$$

$$\frac{3p-5}{p-2} = 2$$
$$\Downarrow$$
$$p = 1$$

Úlohy na precvičenie

1. Riešte v R rovnice vzhľadom na parameter. $a \in R,\ p \in R$

a) $2a(x+3) = x(a+1)+6$ b) $4x(1-a) = 2x+a+1$ c) $x(a-2) = a^2-4$

d) $xa^2 = a(1+3x)-3$ e) $\frac{x}{p+5} = \frac{x}{5}+p$ f) $2-\frac{x+3}{p+3} = x+1$

g) $\frac{x+p}{p} = px+1$ h) $px-\frac{2}{p^2} = \frac{4x+1}{p}$

2. Riešte v R rovnice vzhľadom na parameter. $a \in R,\ p \in R$

a) $1+\frac{a^2-1}{x} = a$ b) $\frac{a}{x-1} = \frac{4}{x+2}$ c) $\frac{a^2(x+1)+x(a+2)}{x+1} = 4$

d) $\frac{2-a}{a} = \frac{2}{x-1}$ e) $p-\frac{2}{p+1} = \frac{p^2-p}{x}$ f) $\frac{p}{x}-\frac{9}{px} = 1-\frac{3}{p}$

3. V rovnici $\frac{b}{x}+\frac{b-1}{3} = 4-\frac{2}{x}$ určte hodnotu parametra $b \in R$ tak, aby koreňom rovnice bolo číslo 6.

4. Nájdite všetky reálne čísla *a*, pre ktoré koreňmi rovnice $\frac{a}{2-a} = \frac{3}{x-2}$ sú kladné čísla.