VZŤAHY MEDZI KOREŇMI A KOEFICIENTMI KVADRATICKEJ ROVNICE

$x_1 + x_2 = -3$ $\quad x_1 \cdot x_2 = 2$

- vyriešte rovnicu $x^2 + 3x + 2 = 0$

$D = 1$

$x_{1,2} = -1;\ -2$

- zostavte kvadratickú rovnicu, ktorá má korene
  - $x_1 = 0, x_2 = -4$

    $x \cdot (x+4) = 0$

    $x^2 + 4x = 0$
  - $x_1 = 3, x_2 = -3$

    $(x-3)(x+3) = 0$

    $x^2 - 9 = 0$
  - $x_1 = -3, x_2 = 2$

    $(x+3) \cdot (x-2) = 0$

    $x^2 + x - 6 = 0$; $2x^2 + 2x - 12 = 0$;
  - $x_1,\ x_2$ $\rightarrow$ $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$; $a \neq 0$

    $x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2 = 0$

    $x^2 - x \cdot (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 0$

    $a = 1$ ..... $x^2 + px + q = 0$ $\rightarrow$ $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1 \cdot x_2$

Každú kvadratickú rovnicu $ax^2 + bx + c = 0$ s koreňmi $x_1,\ x_2$ vieme zapísať v tvare súčinu koreňových činiteľov $a \cdot (x - x_1)(x - x_2) = 0$

Pre kvadratickú rovnicu $x^2 + px + q = 0$ s koreňmi $x_1,\ x_2$ platí: $x_1 \cdot x_2 = q$

$x_1 + x_2 = -p$

Pre kvadratickú rovnicu $ax^2 + bx + c = 0$ s koreňmi $x_1,\ x_2$ platí

$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

Vietove vzťahy

Úlohy

1. Pomocou vzťahov medzi koeficientmi a koreňmi KR (metódou „kuknem vidím“) vyriešte nasledujúce rovnice

$x_1+x_2=-2 \quad x_1 \cdot x_2=-15$

$x^2+2x-15=0$ | $x^2-3x-4=0$ | $x^2+7x+12=0$

$\boxed{x_1=-5 \quad ; \quad x_2=3}$ | $\boxed{x_1=4 \quad x_2=-1}$ | $\boxed{x_1=-3 \quad x_2=-4}$

$(x+5)(x-3)=0$ | $(x-4)(x+1)=0$

$x^2+2x-15=0$ ✓ | $x^2-3x-4=0$ ✓

2. Rozhodnite, aké musia byť hodnoty koeficientov kvadratickej rovnice $x^2+px+q=0$, aby jej korene boli navzájom opačné čísla. $\to \boxed{p=0} \to x^2+q=0 \to \boxed{q<0}$

3. Rozhodnite, aké musia byť hodnoty koeficientov kvadratickej rovnice $ax^2+bx+c=0$, aby jej korene boli navzájom prevrátené čísla. Overte na konkrétnom príklade.

$x_1=x$

$x_2=\frac{1}{x}$

$ax^2+bx+c=0$

$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$

$x \cdot \frac{1}{x}=\frac{c}{a}$

$1=\frac{c}{a} \Leftrightarrow \boxed{a=c}$

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

$?\ \frac{x^2+1}{x}=-\frac{b}{a}\ ?$

$2x^2+5x+2=0$

$D=25-16=9$

$x_1=\frac{-5\pm3}{4}=\ {-2 \atop \frac{1}{2}}$

4. Rovnica $x^2+px+6=0$ má jeden koreň -2. Vypočítajte druhý koreň a koeficient $p \in R$.

$x=-2 \to (-2)^2-2p+6=0$

$2p=10$

$p=5$

$x^2+5x+6=0$

$\to x_1=-2 \quad x_2=-3$

5. Určte koeficient $q \in R$ tak, aby jeden koreň rovnice $4x^2-15x+q=0$ bol druhou mocninou druhého koreňa.

$x_1=x$

$x_2=x^2$

$4x^2-15x+q=0 \to x_1 \cdot x_2=\frac{q}{4}$

$x^3=\frac{q}{4}$

$x_1+x_2=\frac{15}{4}$

$x+x^2=\frac{15}{4} \quad /\cdot 4$

$4x^2+4x-15=0$

$D=256$

$x_{1,2}= {\frac{-20}{8}=-\frac{5}{2} \atop \frac{12}{8}=\frac{3}{2}}$

$x=-\frac{5}{2} \ \cdots \ -\frac{125}{8}=\frac{q}{4}$

$-\frac{125}{2}=q$

$x=\frac{3}{2} \ \cdots \ \frac{27}{8}=\frac{q}{4}$

$q=\frac{27}{2}$

$4x^2-15x-\frac{125}{2}=0$

$4x^2-15x+\frac{27}{2}=0$

6. Bez toho, aby ste vyriešili rovnicu $x^2+2x-5=0$, určte:
   a. súčet prevrátených hodnôt jej koreňov.
   b. súčet druhých mocnín jej koreňov.

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{\overbrace{x_2+x_1}^{-p}}{\underbrace{x_1x_2}_{q}}=\frac{-2}{-5}=\frac{2}{5}$

$(x_1^2+x_2^2) \longrightarrow (x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$

$\underbrace{(x_1+x_2)}_{-p}{}^2-2\underbrace{x_1x_2}_{q}=x_1^2+x_2^2$

$(-2)^2-2\cdot(-5)=\boxed{14=x_1^2+x_2^2}$