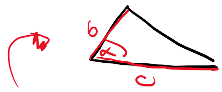
ZHODNOSŤ A PODOBNOSŤ TROJUHOLNÍKOV

- dva útvary sú **zhodné**, ak je možné ich premiestnením stotožniť – v praxi ťažko realizovateľné, preto hľadáme iné možnosti overenia zhodnosti
- ozn.: $U_1 \simeq U_2$
- vety o zhodnosti trojuholníkov

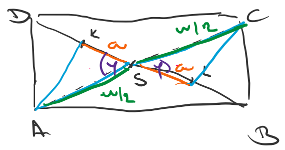


(sus) Trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a uhle nimi zovretom sú zhodné.
(sss) Trojuholníky, ktoré sa zhodujú v troch stranách sú zhodné.

(usu) Ak sa dva trojuholníky zhodujú v jednej strane a v dvoch uhloch priľahlých, tak sú zhodné.
(Ssu) Ak sa dva trojuholníky zhodujú v dvoch stranách a v uhle oproti väčšej strane, tak sú zhodné.

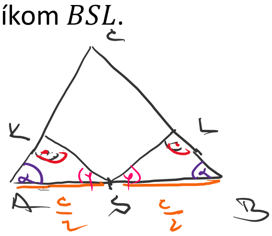
Úlohy

1. Je daný obdĺžnik $ABCD$. Nech body K, L sú bodmi uhlopriečky BD, pre ktoré platí $|SK| = |SL|$. Dokážte, že trojuholníky $\triangle ASK$, $\triangle CSL$ sú zhodné.



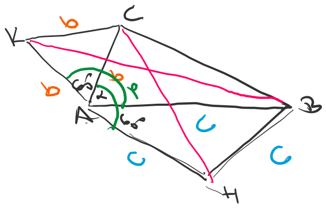
$|KS| = |SL| = a$ (zadanie)
$|\sphericalangle CSB| = |\sphericalangle KSA| = \varphi$ (vrcholové)
$|AS| = |SC| = \frac{w}{2}$ (uhlopr. v obdĺž. sa rozpoľujú)
$\triangle ASK \simeq \triangle CSL$ (sus) ✓ QED

2. Bod S je stredom základne AB rovnoramenného trojuholníka ABC. Bodom S veďte kolmice k ramenám AC a BC. Päty týchto kolmíc označte K, L. Dokážte, že trojuholník ASK je zhodný s trojuholníkom BSL.



$|\sphericalangle AKS| = |\sphericalangle BLS| = 90°$ (zadanie)
$|\sphericalangle CAS| = |\sphericalangle CBS| = \alpha$ (rovnoram. △)
$|AS| = |BS| = \frac{c}{2}$ (zadanie)
$\triangle ASK \simeq \triangle BSL$ (usu)

3. Nad stranami AB, AC trojuholníka ABC sú zostrojené rovnostranné trojuholníky ABH, ACK tak, že $\Delta ABH \cap \Delta ABC = AB, \Delta ACK \cap \Delta ABC = AC$. Dokážte, že $|CH| = |BK|$.



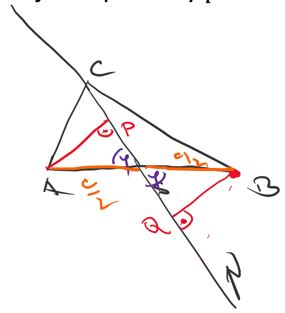
? $\triangle AHC \simeq \triangle KAB$?
$|AC| = |KA| = b$ (rovnostr. △)
$|AH| = |AB| = c$ (rovnostr. △)
$|\sphericalangle CAH| = |\sphericalangle KAB| = \varphi = \alpha + 60°$
$\triangle AHC \simeq KAB$ (sus) → $|KB| = |HC|$
QED

DÚ

4. Na stranami AB, BC trojuholníka ABC sú zostrojené štvorce ABPQ a BCRT tak, že s daným trojuholníkom majú spoločné len úsečky AB a BC. Dokážte, že $|CP| = |AT|$.
5. Narysujte konvexný uhol AVB a jeho os označte o. Zvoľte ľubovoľný bod M na osi o. Zostrojte kolmicu k_1 bodom M na $\overrightarrow{VA}$, označte body X_1, X_2 tak, aby $X_1 \in \overrightarrow{VA} \cap k_1$; $X_2 \in \overrightarrow{VB} \cap k_1$. Zostrojte kolmicu k_2 bodom M na $\overrightarrow{VB}$, označte body Y_1, Y_2 tak, aby $Y_1 \in \overrightarrow{VA} \cap k_2$; $Y_2 \in \overrightarrow{VB} \cap k_2$. Dokážte:
   a. $\Delta MX_1V \cong \Delta MY_2V$ b. $\Delta MX_1Y_1 \cong \Delta MY_2X_2$

DU

6. Je daná kružnica $k(S; r)$ a bod A, ktorý leží mimo kružnice k. Zostrojte dotyčnice kružnice k z bodu A a body dotyku označte T_1, T_2. Dokážte, že $|AT_1| = |AT_2|$
7. Je daný trojuholník ABC a priamka p, na ktorej leží ťažnica t_c tohto trojuholníka. Dokážte, že body A, B majú od priamky p rovnakú vzdialenosť.



? $|AP| = |BQ|$?

$\triangle APS \cong \triangle BQS$

$|\angle APS| = |\angle BQS| = 90°$ (vzdialenosť)

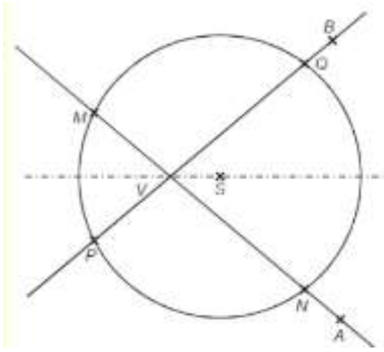
$|\angle ASP| = |\angle BSQ| = \varphi$ (vrcholové)

$|AS| = |SB|$ (ťažnica)

$\triangle APS \cong \triangle BQS$ (usu)

$\Rightarrow |AP| = |BQ|$ ✓ QED

8. Na osi o ostrého uhla AVB zostrojte vnútri uhla AVB bod S. Zostrojte kružnicu $k(S;\ r)$ tak, aby platilo $r > VS$. Označte priesečníky priamky AV s kružnicou k ako M, N a priesečníky priamky BV s kružnicou k ako P, Q . Dokážte, že úsečky MN, PQ majú rovnakú veľkosť.



- dva útvary sú **podobné**, keď majú rovnaký tvar, ale inú veľkosť
- trojuholník $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, práve vtedy keď existuje kladné číslo $\boldsymbol{k}$ také, že pre ich strany platí:
  $|AB| = k \cdot |A_1B_1|$
  $|AC| = k \cdot |A_1C_1|$
  $|BC| = k \cdot |B_1C_1|$ a pre ich uhly platí:
  $\alpha \simeq \alpha_1, \beta \simeq \beta_1 , \gamma \simeq \gamma_1$
- pomer $\boldsymbol{k}$ nazývame **koeficient podobnosti** trojuholníkov
  - $k > 1$ - zväčšenie,
  - $k < 1$- zmenšenie,
  - $k = 1$- trojuholníky sú zhodné.
- vety o podobnosti trojuholníkov
  - **uu** - každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch vnútorných uhloch sú podobné
    $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' ak\ \alpha = \alpha', \beta = \beta'.$

- **sus -** každé dva trojuholníky, ktoré majú ten istý pomer dĺžok dvoch dvojíc odpovedajúcich si strán a zhodujú sa v uhle nimi určenom, sú podobné. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ $ak\ b: b' = c: c', \alpha = \alpha'$.
- **sss** - dva trojuholníky sú podobné, ak pomery dĺžok každých dvoch odpovedajúcich si strán sa rovnajú $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'ak\ a : a' = b : b' = c : c'$

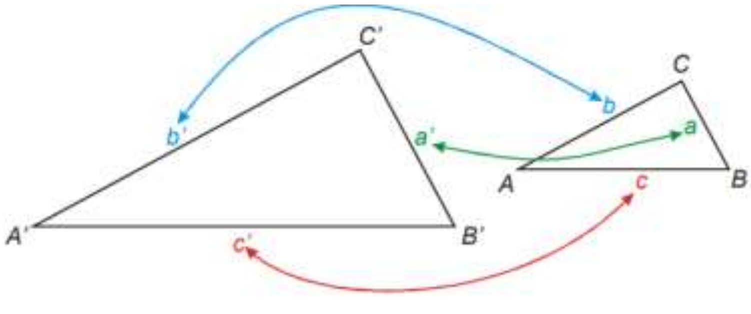
- **Podobnosť útvarov je tranzitívna**
  - ak je útvar U podobný útvaru V a útvar V zase podobný útvaru W , potom sú podobné aj útvary U a W . Zapisujeme $U \sim V \wedge V \sim W \Rightarrow U \sim W$
  - ak koeficient podobnosti $U \sim V$ je k, koeficient podobnosti $V \sim W$ je m, potom koeficient podobnosti $U \sim W$ je súčinom koeficientov podobností, t.j. $k.m$

- Ak je útvar U podobný útvaru V s koeficientom k, tak útvar V je podobný s útvarom U s koeficientom $\frac{1}{k}$

Úloha

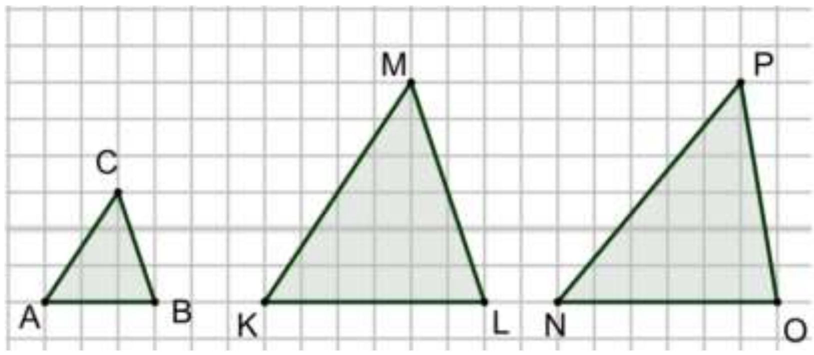
Daný je trojuholník PQR, ktorého strany majú dĺžku $p = 3\ cm, q = 4\ cm, r = 5\ cm$. Vypočítajte dĺžky strán, obvod a obsah trojuholníka STU, ktorý je podobný s trojuholníkom PQR s koeficientom podobnosti $k = 3$.

- **Obsahy podobných útvarov**
  - ak sú dva útvary $U \sim V$ podobné s koeficientom podobnosti k, potom pre ich obsahy S, S' platí $S' = k^2.S$

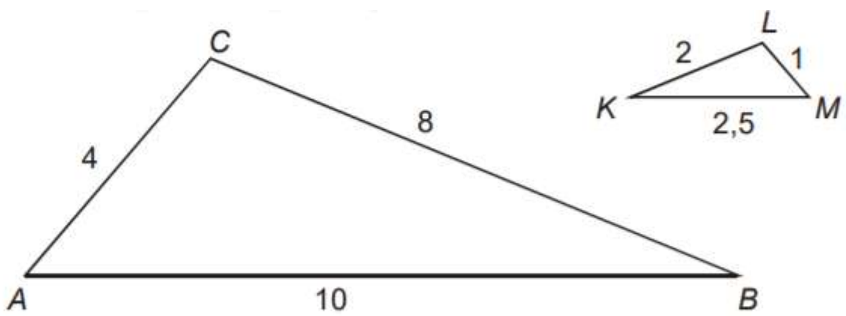


Úloha

1. Z obrázku zistite, ktoré trojuholníky sú podobné a určte koeficient podobnosti



2. Ktoré z nasledujúcich trojuholníkov sú podobné s trojuholníkom ABC, kde $a = 12, b = 15, c = 18$.
    a. trojuholník KLM: $k = 12\,, l = 10\,, m = 8$
    b. trojuholník XYZ so stranami $28;\ 24;\ 36$
    c. trojuholník EFG: $|EF\,| = 6\,, |EG\,| = 4, |FG\,| = 5$
3. Pre trojuholníky platí $\triangle ABC \sim \triangle KLM$. Určte zvyšné strany, ak viete, že platí: $a = 5\,, b = 4\,, c = 6\,, l = 6\,.$
4. Na obrázku sú dva podobné trojuholníky. Zapíšte ich podobnosť. Zapíšte pomer odpovedajúcich si strán.

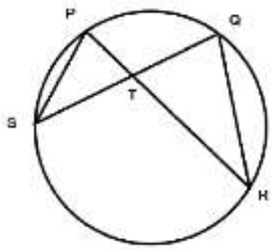


Úlohy

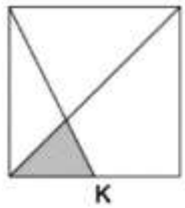
1. V lichobežníku ABCD označte S priesečník uhlopriečok AC a BD. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich tvrdení je pravdivé:
    a. $\Delta ABS \sim \Delta CDS$ b. $\Delta ABS \sim \Delta DCS$ c. $\Delta SAB \sim \Delta SCD$
2. Dokážte, že stredné priečky v trojuholníku rozdelia trojuholník na štyri trojuholníky, ktoré sú podobné s trojuholníkom ABC.
3. V ostrouhlom trojuholníku ABC veďte kolmicu z bodu B na stranu AC, jej pätu označte B_1. Pätu kolmice z bodu A na stranu BC označte A_1. Dokážte $\Delta ABS \sim \Delta A_1 B_1 C$.

Úlohy

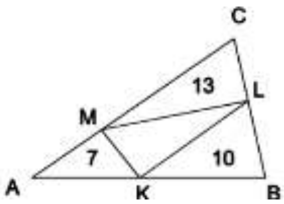
1. Úsečky PR a QS sú tetivy kružnice k, ktoré sa pretínajú v bode T. Vypočítajte dĺžku $|ST|$, ak $|PT| = 3\ cm, |TR| = 8\ cm, |QT| = 4\ cm$



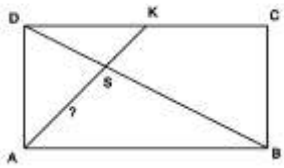
2. Na obrázku je bod K stredom strany štvorca so stranou dĺžky 18. Vypočítajte obsah vyznačeného trojuholníka.



3. V trojuholníku ABC sú body K, L, v tomto poradí, stredmi strán AB a BC. Bod M leží na strane AC. Vypočítajte obsah trojuholníka KLM, ak poznáte obsahy $S_{\triangle KBL} = 10\ cm^2, S_{\triangle AKM} = 7\ cm^2, S_{\triangle MLC} = 13\ cm^2$

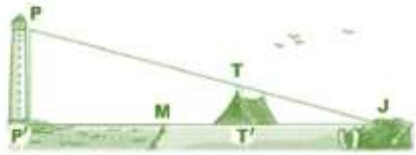


4. Do rovnostranného trojuholníka so stranou dlhou 6 cm je vpísaný štvorec. Vypočítajte dĺžku strany tohto štvorca.
5. V obdĺžniku $ABCD$ je K stred strany CD, S je priesečník úsečiek AK a BD. Vypočítajte veľkosť $|AS|$, ak $|AK| = 9$.

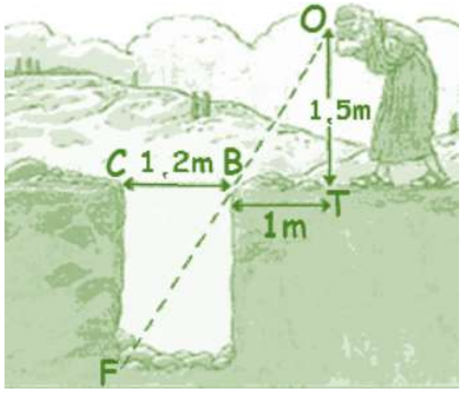


Úlohy

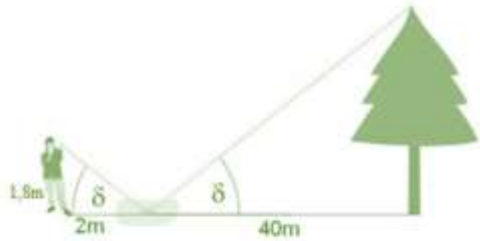
1. Marcel leží v tráve a vidí v zákryte vrchol stanu (bod T) a za ním vrchol majáka (P). $|TT'| = 1{,}2m, |PP'| = 36m, |JT'| = 5m$. Marcel leží 15 m od brehu mora (M). Vypočítajte vzdialenosť majáka od brehu mora $|P'M|$.



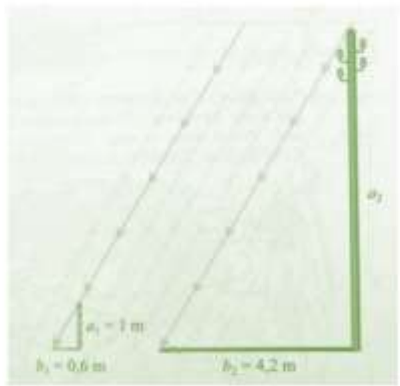
2. Táles je vzdialený 1 m od jamy. Oči má vo výške 150 cm nad zemou a pozerá do jamy s priemerom 120 cm podľa obrázka. Vypočítajte hĺbku jamy.



3. Vrch stromu sa zrkadlí v kaluži, ktorá je vzdialená 40 m. Ty stojíš od tejto kaluže 2 m. Aký vysoký je strom?



4. Zvislá tyč vysoká 1 m vrhá na vodorovnú cestu tieň dlhý 60 cm. Aký vysoký je telefónny stĺp, ktorého tieň na tejto ceste má v tú istú dobu dĺžku 4,2 m .



5. Miesta A, B na obrázku označujú umiestnenie stožiarov vysokého napätia. Ohyb rieky a močariská v ohybe nedovoľujú priamo odmerať ich vzdialenosť. Odôvodnite správnosť nasledujúceho postupu:
Zvolíme miesto O, ktorého vzdialenosti od miest A, B možno dobre odmerať. Ďalej určíme stred A´ úsečky AO a stred B´ úsečky BO, potom vzdialenosť bodov A´B´ (ktorú vieme odmerať) sa rovná polovici hľadanej vzdialenosti miest A, B .