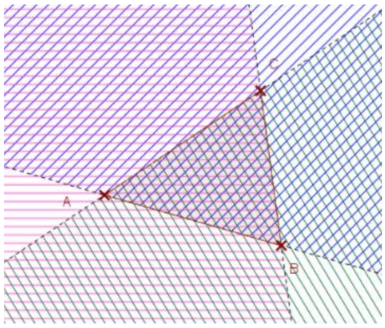
TROJUHOLNÍK

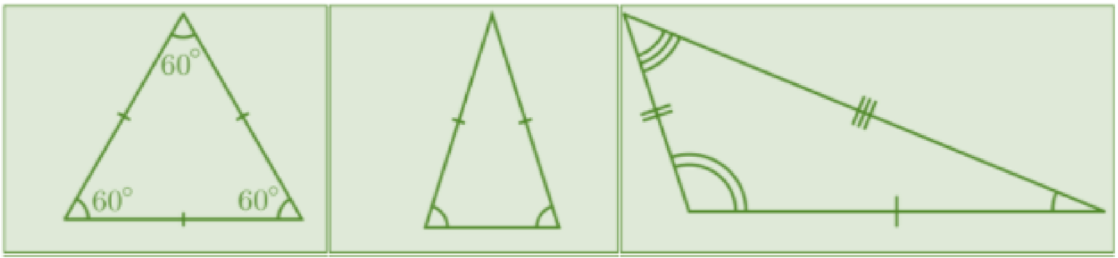
Čo je trojuholník?



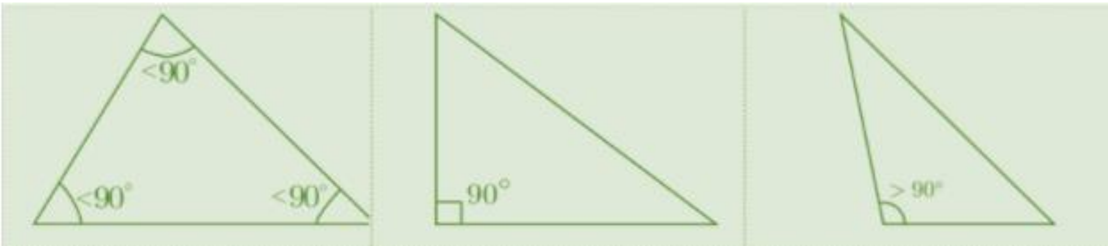
označenie:

Delenie trojuholníkov

- podľa strán



- podľa uhlov



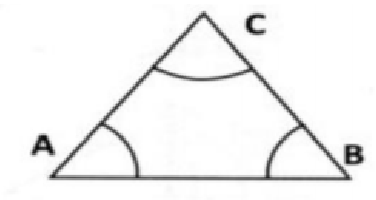
Základné vety trojuholníka

- trojuholníková nerovnosť

- súčet uhlov v trojuholníku

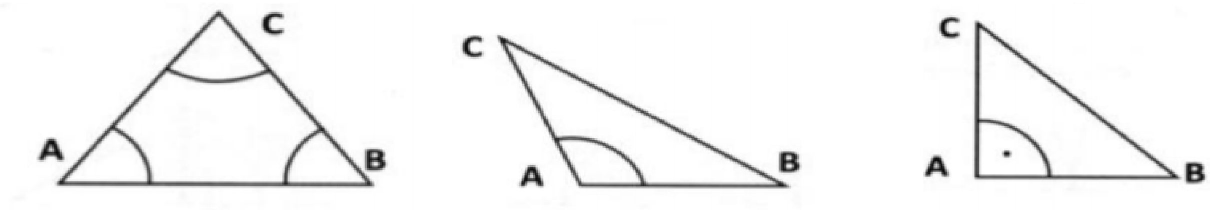
Významné prvky trojuholníka

- **ťažnice (ťažisko)**



Úloha: Dokážte, že každý trojuholník rozdeľujú ťažnice na 6 trojuholníkov s rovnakým obsahom

- **výšky (ortocentrum)**



Úloha: Dokážte, že sa výšky pretínajú v jednom bode.

Úloha: Nájdite vzťah medzi výškami a stranami trojuholníka a pomocou tohto vzťahu rozhodnite, či existuje trojuholník, ktorého výšky majú veľkosť $\underbrace{1, \sqrt{5}, 1+\sqrt{5}}$ $\rightarrow a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}$ (*)

$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$

(*)

$v_a = 1 \rightarrow \boxed{a}$

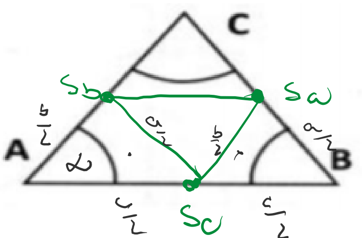
$v_b = \sqrt{5} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} a$

$v_c = 1 + \sqrt{5} \rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{5}} a$

$\frac{1}{\sqrt{5}} a + \frac{1}{1+\sqrt{5}} a = a\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{1+\sqrt{5}}\right) = \boxed{a \cdot 0{,}76} < a$

$\triangle$ ~~nerovnosť~~ $\Leftarrow$

- **stredné priečky**



$\rightarrow S_aS_b \parallel AB$

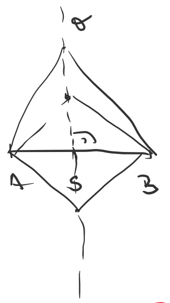
$\rightarrow |S_aS_b| = \frac{1}{2}|AB|$

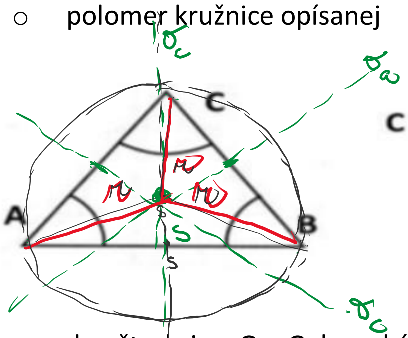
Úloha: Na koľko trojuholníkov rozdelia trojuholník jeho stredné priečky – aké sú takto vzniknuté trojuholníky?

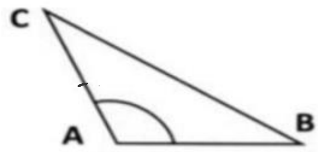
$\triangle AS_cS_b \cong \triangle BS_cS_a \cong \triangle S_bS_aC \cong \triangle S_bS_aS_c$ (sss)

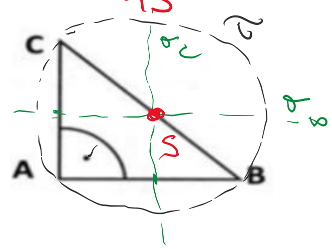
$\triangle AS_cS_b \sim \triangle ABC$ (sus)

- **kružnica opísaná**
    - stred opísanej kružnice → $o_a \cap o_b \cap o_c = \{S\}$
    - polomer kružnice opísanej r ; $r = \frac{a}{2\sin\alpha}$; $r = \frac{abc}{4S}$









Úloha: Pomocou konštrukcie v GeoGebre ukážte, že platia nasledujúce vety:

DÚ. vybrať jednu vetu a overiť v GeoGebre

? **Nagelova veta**: Spojnica stredu opísanej kružnice a vrcholu trojuholníka je kolmá k strane jeho ortického trojuholníka (trojuholník, ktorý je tvorený spojnicami piat výšok trojuholníka)

? **Simsonova priamka**: Ak z ľubovoľného bodu X opísanej kružnice zostrojíme kolmice k jednotlivým stranám trojuholníka, päty týchto kolmíc budú ležať na jednej priamke. Pokiaľ tento bod X spojíme s ortocentrom (priesečník výšok trojuholníka), potom Simsonova priamka prechádza stredom tejto úsečky.

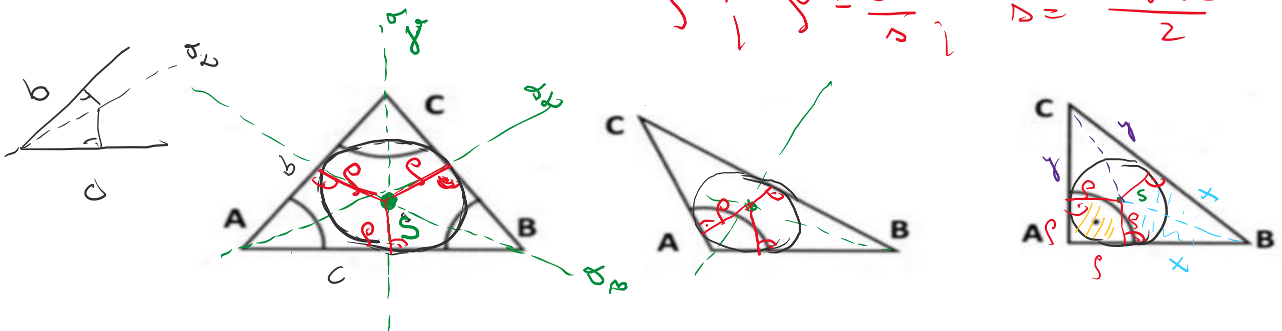
? Je daný všeobecný trojuholník ABC. Označme A´, B´, C´ postupne obrazy ortocentra v osovej súmernosti podľa strán trojuholníka BC, CA, AB. Dokážte, že body A´, B´, C´ ležia na kružnici opísanej trojuholníku ABC.

? Kružnica 9 bodov = Feuerbachova kružnica

? Eulerova priamka

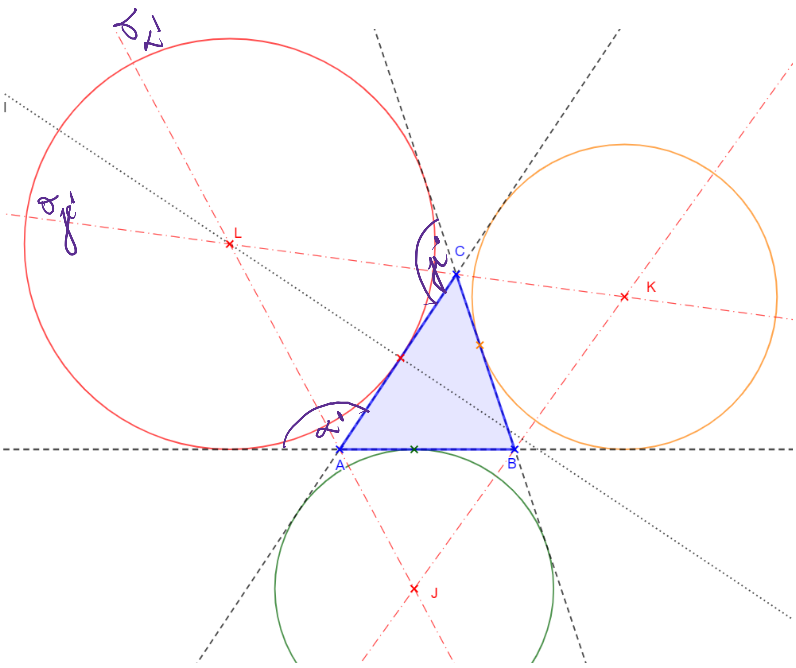
? Pomocou konštrukcie v GeoGebre ukážte, že platí: Ortocentrum ostrouhlého trojuholníka je stredom kružnice vpísanej jeho ortického trojuholníka

- **kružnica vpísaná**
    - stred vpísanej kružnice $o_\alpha \cap o_\beta \cap o_\gamma = \{S_v\}$
    - polomer vpísanej kružnice ρ ; $\rho = \frac{S}{s}$; $s = \frac{a+b+c}{2}$



Úloha: Pomocou konštrukcie v GeoGebre ukážte, že platí: Ortocentrum ostrouhlého trojuholníka je stredom kružnice vpísanej jeho ortického trojuholníka.

- **pripísaná kružnica**



Obvod a obsah trojuholníka

$$\boxed{o = a + b + c \qquad S = \frac{a.v_a}{2} = \frac{b.v_b}{2} = \frac{c.v_c}{2}}$$

ale aj ďalšie:

$S = \frac{1}{2}a.b.\sin\gamma = \frac{1}{2}b.c\sin\alpha = \frac{1}{2}a.c.\sin\beta$

$S = \frac{abc}{4r}$ → $r = \frac{abc}{4S}$

$S = \rho.s$ Dôkaz:

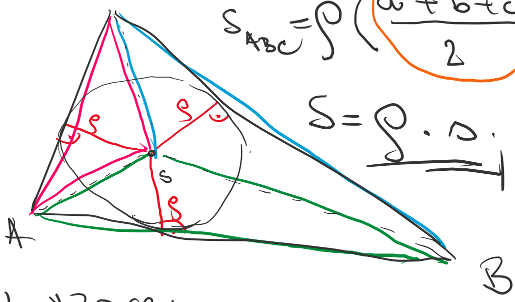
$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}; s = \frac{a+b+c}{2}$; Heronov vzorec

$S_{\triangle ABC} = S_{ABS} + S_{BCS} + S_{ACS}$

$S_{ABC} = \frac{c.\rho}{2} + \frac{a.\rho}{2} + \frac{b.\rho}{2}$.

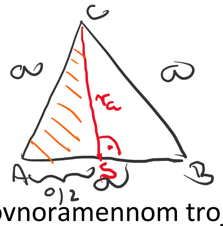
$S_{ABC} = \rho\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$

$S = \rho . s$ QED.



Úlohy

1. Odvoďte výšku v rovnostrannom trojuholníku. → $\boxed{v_a = \frac{\sqrt{3}}{2}a}$ (*)



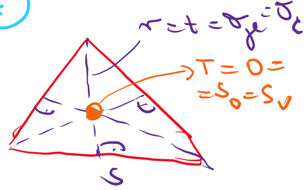
R − Δ ASC: $v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

$v_a = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}}$

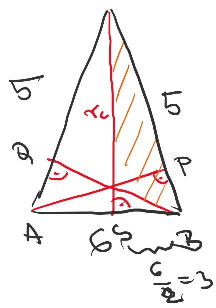
$v_a = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

$v = t = o_{je} = o_c$

T = O = $S_o = S_v$



2. V rovnoramennom trojuholníku ABC je $c = 6\ cm, a = 5\ cm$. Vypočítajte výšky v_a, v_b, v_c.



R − SBC: $v_c = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9}$

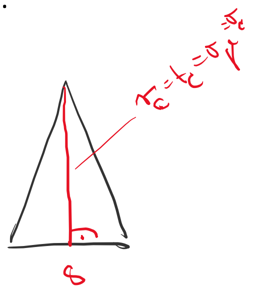
$v_c = 4$ cm

$\boxed{v_a = v_b}$

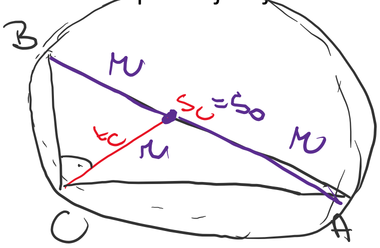
↳ $S = \frac{c.v_c}{2} = \frac{a.v_a}{2}$!!

$v_b = v_a = \frac{c.v_c}{a} = \frac{6.4}{5} = \frac{24}{5}$ cm

$v_c = t_c = o$



3. V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C je $t_c = 5\ cm$. Určte polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC.



$r = 5$ cm

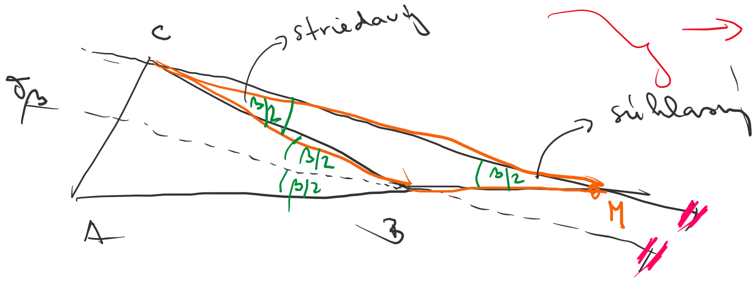
4. Označme S obsah rovnostranného trojuholníka a o jeho obvod. Aké je vyjadrenie obvodu o ako funkcie premennej S ?

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \rightarrow a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4S\sqrt{3}}{3}}$$

$$o = 3a = 3\sqrt{\frac{4S\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{9 \cdot \frac{4S\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{12S\sqrt{3}}$$

5. Existuje pre každý trojuholník ABC bod, ktorý má rovnakú vzdialenosť od všetkých troch jeho vrcholov A, B, C? → ANO ; S_o

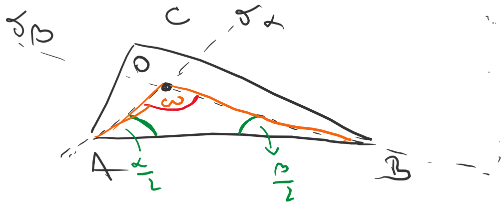
6. Je daný trojuholník ABC. Vrcholom C veďte rovnobežku s osou uhla β, jej priesečník s priamkou AB označme M. Dokážte, že trojuholník MBC je rovnoramenný.



→ je rovnoramenný !

QED

7. Priesečník osi uhlov α, β v trojuholníku ABC označme O. Dokážte, že $\boxed{|\measuredangle AOB| = 90° + \frac{\gamma}{2}.} = \omega$



ΔABO: $\omega = 180° - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) =$

$= 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta) =$

ΔABC: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

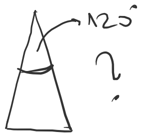
$\alpha + \beta = 180° - \gamma$

$= 180° - \frac{1}{2}(180° - \gamma)$

$= 180° - 90° + \frac{\gamma}{2}$

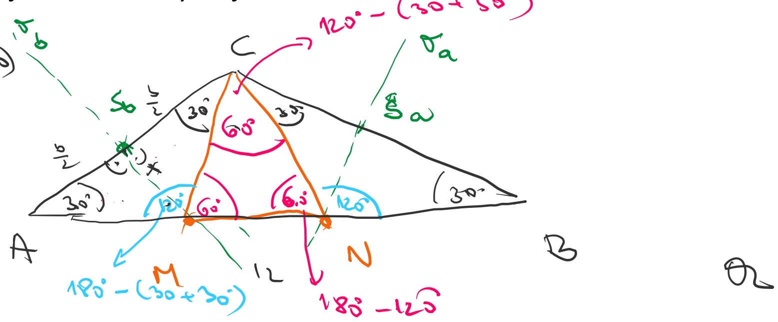
$\boxed{\omega = 90° + \frac{\gamma}{2}}$ ✓

QED



8. V rovnoramennom trojuholníku ABC so základňou AB je dané: $|AB| = 12cm, |\sphericalangle CAB| = 30°$. Osi strán AC, BC pretnú základňu AB v bodoch M, N. Dokážte, že trojuholník MNC je rovnostranný. Vypočítajte dĺžku strany trojuholníka MNC.

$\triangle AS_bM \cong \triangle CS_bM$ (sus)



$\left.\begin{matrix}\triangle ABC \\ \triangle CNB\end{matrix}\right\}$ rovnoram. $\Rightarrow |\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle BCN| = 30°$