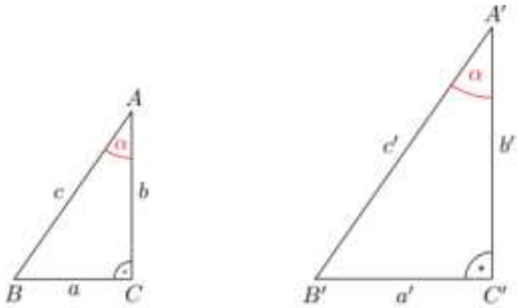
PRAVOUHLÝ TROJUHOLNÍK

- Pytagorova veta
- Goniometrické funkcie
- Euklidove vety

Goniometrické funkcie

- Koľko pravouhlých trojuholníkov, ktorých jeden vnútorný uhol má veľkosť 35°, existuje?



$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

- pomer dĺžok konkrétnych dvoch strán daného pravouhlého trojuholníka je číslo, ktoré závisí iba od veľkosti uhla α a je pre ktorýkoľvek z podobných pravouhlých trojuholníkov rovnaké

$\sin\alpha = —$

$\cos\alpha = —$

$\mathrm{tg}\,\alpha = —$

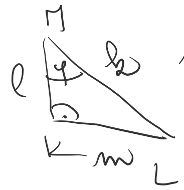
$\mathrm{cotg}\,\alpha = —$

Úlohy

1. V pravouhlom trojuholníku ABC s pravým uhlom pri vrchole C platí $c = 6\,cm$ a $\sin\alpha = \frac{3}{4}$. Určte dĺžku strany a.

2. Dĺžka ramena rovnoramenného trojuholníka je trojnásobkom dĺžky jeho základne. Vypočítajte veľkosti jeho vnútorných uhlov

3. Vypočítajte hodnoty goniometrických funkcií pre uhly 30°, 45°, 60°

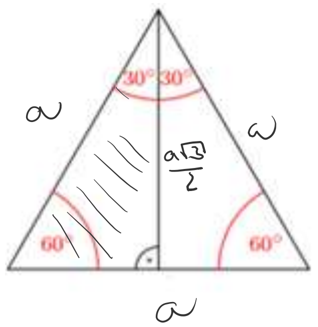


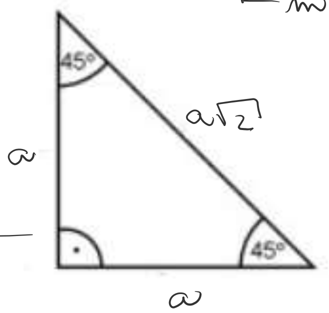
$\sin\varphi = \frac{m}{k}$

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{m}{l}$

$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{l}{m}$

$\cos\varphi = \frac{l}{k}$





	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{cotg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sqrt{1}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{tg}45° = \frac{\sin 45}{\cos 45}$

$\operatorname{tg}60° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

4. V pravouhlom trojuholníku ABC sa $\alpha = 60°, \gamma = 30°$ a $c = 3$. Na strane BC leží bod D tak, že platí $2|BD| = |CD|$. Vypočítajte dĺžku strany AD.

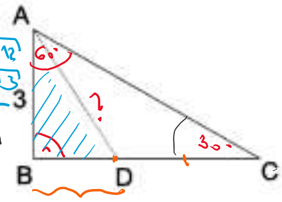
! $R-\triangle BDA: |AD|^2 = 3^2 + |BD|^2 = 9 + 3 = 12 \to |AD| = \sqrt{12}$

$|AD| = 2\sqrt{3}$

! $R-\triangle ABC$:

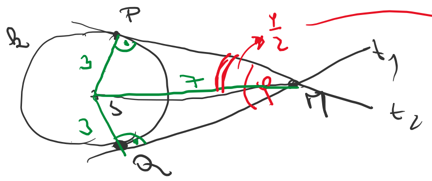
$\operatorname{tg}30° = \frac{3}{|BC|} \Rightarrow |BC| = \frac{3}{\operatorname{tg}30°} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3}$

$|BC| = 3\sqrt{3}$



$\to \frac{1}{3}|BC| = \sqrt{3}$

5. Daná je kružnica $k(S;\ 3\ cm)$. Vypočítajte veľkosť uhla, ktorý zvierajú dotyčnice ku kružnici vedené jej vonkajším bodom M; $|MS| = 7\ cm$.



$\triangle PSM \cong \triangle QSM$ (Ssu)

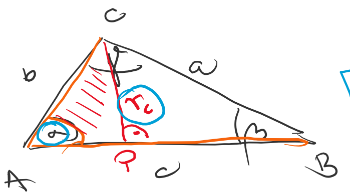
$R-\triangle PSM: \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{3}{7}$

$\frac{\varphi}{2} = \sin^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)$

$\frac{\varphi}{2} \doteq 25{,}4°$

$\varphi \doteq 50°$

6. Odvoďte vzorec pre výpočet obsahu trojuholníka $S = \frac{1}{2}b.c.\sin\alpha = \frac{1}{2}a.c.\sin\beta = \frac{1}{2}a.b.\sin\gamma$



$S = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$ ✓

QED

$R-\triangle APC \to \sin\alpha = \frac{v_c}{b} \quad | \cdot b$

$v_c = b \cdot \sin\alpha$

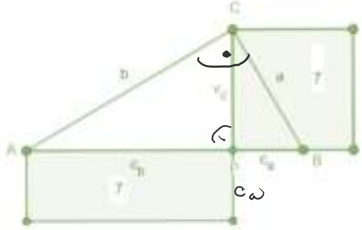
Euklidove vety

- **o výške**

v P-Δ:

Obsah štvorca zostrojeného nad výškou pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu obdĺžnika zostrojeného z oboch úsekov prepony

$\boldsymbol{v_c^2 = c_a . c_b}$



https://www.geogebra.org/geometry/vwdhrruv

Dôkaz: nech je Δ pravouhlý $(\gamma = 90°)$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

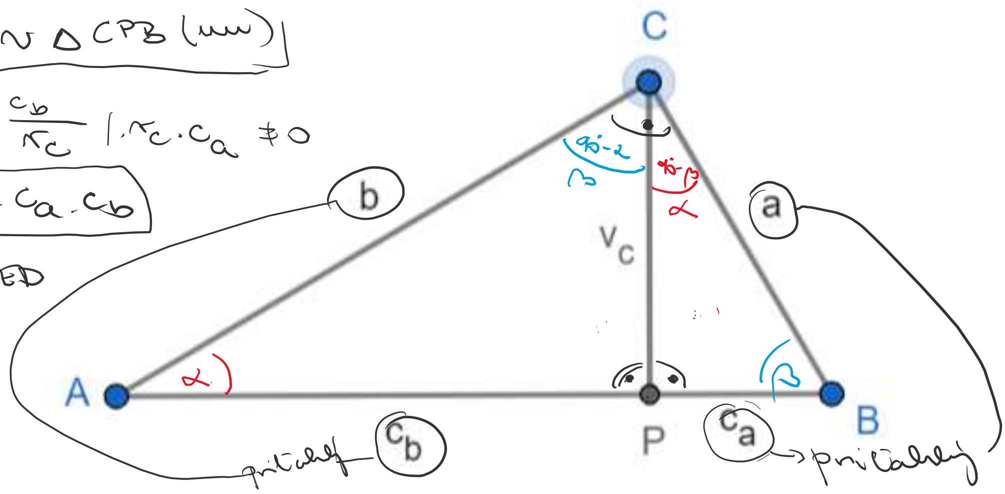
$\alpha + \beta = 90°$ → $\boxed{\alpha = 90° - \beta}$ → $\boxed{\beta = 90° - \alpha}$

$\boxed{\Delta APC \sim \Delta CPB \ (uu)}$

$\frac{v_c}{c_a} = \frac{c_b}{v_c} \quad | \cdot v_c \cdot c_a \neq 0$

$\boxed{v_c^2 = c_a . c_b}$

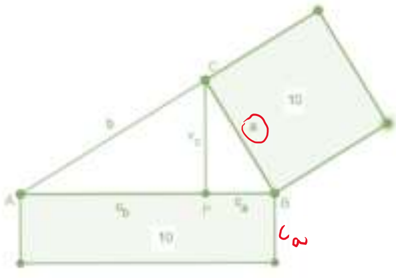
QED



- **o odvesne**

v R-Δ

Obsah štvorca zostrojeného nad odvesnou pravouhlého trojuholníka sa rovná obsahu obdĺžnika zostrojeného z prepony a priľahlého úseku $a^2 = c.c_a;\ b^2 = c.c_b$.



https://www.geogebra.org/geometry/nkjszd8y

Dôkaz: nech R-ΔABC ($\gamma = 90°$)

ΔABC ~ Δ ACP (uu)

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{c_b} \quad | \cdot b, c_b$$

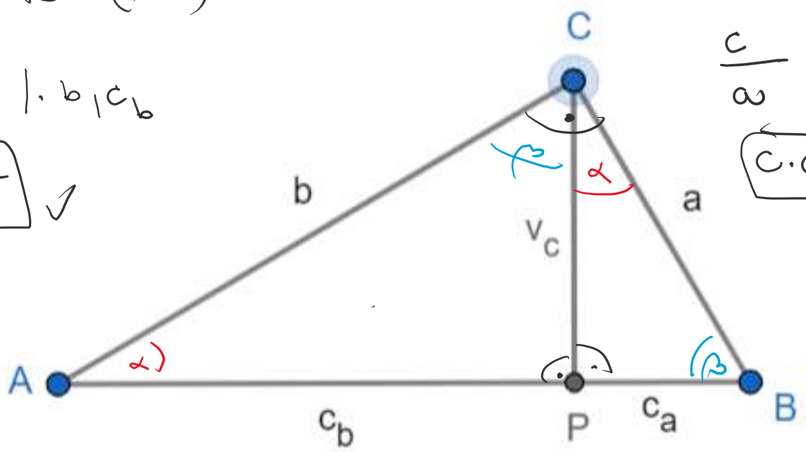
$$\boxed{c \cdot c_b = b^2} \ ✓$$

ΔABC ~ CBP (uu)

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{c_a}$$

$$\boxed{c \cdot c_a = a^2} \ ✓$$

QED



Pytagorova veta R-ΔABC ($\gamma = 90°$) $\Leftrightarrow$ PV ($c^2 = a^2 + b^2$)

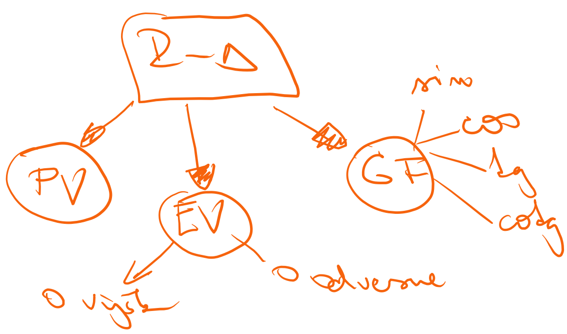
Dôkaz:

EV:
$$\left.\begin{aligned} a^2 &= c \cdot c_a \\ b^2 &= c \cdot c_b \end{aligned}\right\} (+)$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot c_a + c \cdot c_b$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot (\underbrace{c_a + c_b}_{c}) = c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \ ✓ \quad \text{QED}$$

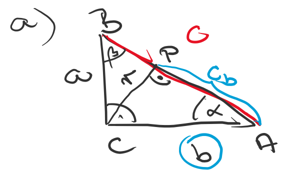


Úlohy

Riešte R-Δ (2 údaje)

1. Vypočítajte strany a uhly v pravouhlom trojuholníku ABC ($\gamma = 90°$), ak je dané:
   a. $c = 10$, $c_b = 6$
   DÚ b. $a = 3, v = \sqrt{5}$

a)



R-ΔABC: $b^2 = c \cdot c_b$

$b = \sqrt{c \cdot c_b}$

$b = \sqrt{10 \cdot 6}$

$b = 2\sqrt{15}$

R-ΔABC: $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

$a = \sqrt{100 - 60}$

$a = \sqrt{40}$

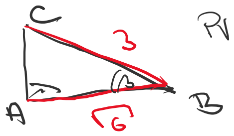
$a = 2\sqrt{10}$

R-ΔABC: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{10}}{2\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{10}\sqrt{15}}{15} = \frac{\sqrt{150}}{15} = \frac{5\sqrt{6}}{15} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\alpha \doteq 39{,}2°$

$\beta = 180° - (\alpha + \gamma) =$

2. Vypočítajte strany a uhly v pravouhlom trojuholníku ABC ($\alpha = 90°$), ak je dané:
   a. $c = \sqrt{6}$, $a = 3$

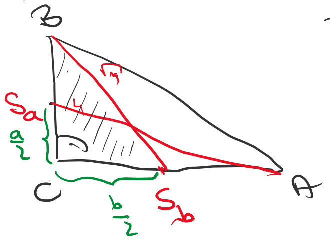


PV → $b = \sqrt{3}$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{3} \rightarrow \beta \doteq 35{,}26$

$\gamma = 180° - (\beta + \alpha) \doteq 54{,}74°$

3. V pravouhlom trojuholníku ABC ($\gamma = 90°$) je $t_a = 4, t_b = \sqrt{19}$. Vypočítajte dĺžky strán tohto trojuholníka.



R-BCS_b → $|BS_b|^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}$ → $19 = a^2 + \frac{b^2}{4}$

R-ACS_a → $|AS_a|^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$ → $16 = b^2 + \frac{a^2}{4}$

subst.: $a^2 = x$, $b^2 = y$

$19 = x + \frac{y}{4}$ $|\cdot 4$

$16 = y + \frac{x}{4}$ $|\cdot 4$

$x = 16$ $\quad y = 12$

$x = a^2$; $16 = a^2$; $4 = |a|$; $4 = a$

$y = b^2$; $12 = b^2$; $\sqrt{12} = |b|$; $2\sqrt{3} = b$

R-Δ ABC: $c = \sqrt{16 + 12} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

4. Rozhodnite, či každý trojuholník so stranami $2n, 2n+1, 2n-1$, kde $n > 1$ je pravouhlý. Ktorá z uvedených strán je jeho preponou?

2 — iba pre $n = 2$

R-Δ ⟺ PV

$2n$
$2n+1$ → prepona
$2n-1$

} PV → $(2n+1)^2 = (2n)^2 + (2n-1)^2$

$4n^2 + 4n + 1 = 4n^2 + 4n^2 - 4n + 1$

$0 = 4n^2 - 8n$

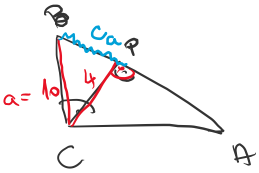
$0 = 4n(n-2)$ ⟺ $\cancel{n = 0}$, $\boxed{n = 2}$

4, 5, 3 ✓

5. Je daná kružnica $k(S; r = 2)$ a ľubovoľný bod A taký, že platí $|SA| = 4$. Z bodu A sú zostrojené dotyčnice ku kružnici k a body dotyku týchto dotyčníc sú T_1, T_2. Vypočítajte
   a. $|AT_1|$
   b. vzdialenosť stredu S od úsečky T_1T_2

c. $|T_1T_2|$

6. V pravouhlom trojuholníku je dĺžka jednej odvesny 10, dĺžka výšky na preponu je 4. Vypočítajte dĺžku druhej odvesny.



R – ΔBPC: $c_a = \sqrt{a^2 - v^2} =$

R – ΔABC: $a^2 = c \cdot c_a$

$\boxed{c = \frac{a^2}{c_a}}$

R – ΔABC:

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$