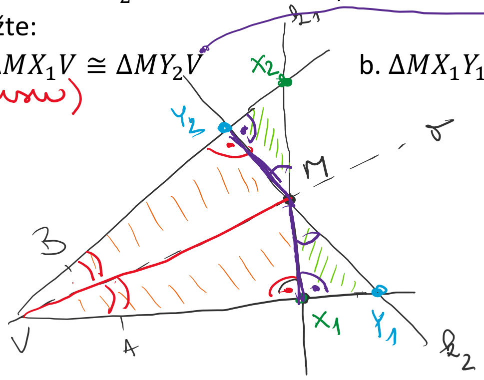
ZHODNOSŤ A PODOBNOSŤ TROJUHOLNÍKOV

- dva útvary sú **zhodné**, ak je možné ich premiestnením stotožniť – v praxi ťažko realizovateľné, preto hľadáme iné možnosti overenia zhodnosti
- ozn.: $U_1 \simeq U_2$
- vety o zhodnosti trojuholníkov

(sus) Trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch stranách a uhle nimi zovretom sú zhodné.
(sss) Trojuholníky, ktoré sa zhodujú v troch stranách sú zhodné.
(usu) Ak sa dva trojuholníky zhodujú v jednej strane a v dvoch uhloch priľahlých, tak sú zhodné.
(Ssu) Ak sa dva trojuholníky zhodujú v dvoch stranách a v uhle oproti väčšej strane, tak sú zhodné.

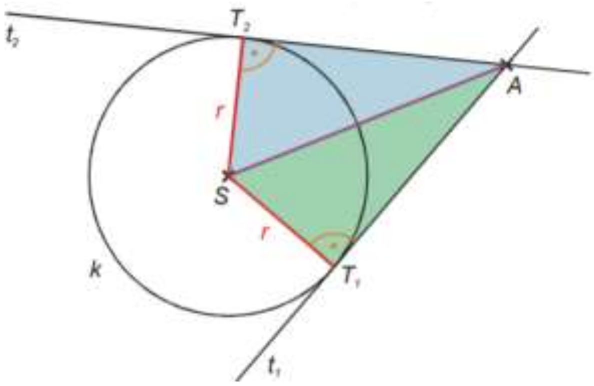
Úlohy

1. Je daný obdĺžnik $ABCD$. Nech body K , L sú bodmi uhlopriečky BD, pre ktoré platí $|SK| = |SL|$. Dokážte, že trojuholníky $\triangle\, ASK, \triangle\, CSL$ sú zhodné.
2. Bod S je stredom základne AB rovnoramenného trojuholníka ABC. Bodom S veďte kolmice k ramenám AC a BC. Päty týchto kolmíc označte K, L. Dokážte, že trojuholník ASK je zhodný s trojuholníkom BSL.
3. Nad stranami AB, AC trojuholníka ABC sú zostrojené rovnostranné trojuholníky ABH, ACK tak, že $\Delta ABH \cap \Delta ABC = AB, \Delta ACK \cap \Delta ABC = AC$. Dokážte, že $|CH| = |BK|$.
4. Na stranami AB, BC trojuholníka ABC sú zostrojené štvorce ABPQ a BCRT tak, že s daným trojuholníkom majú spoločné len úsečky AB a BC. Dokážte, že $|CP| = |AT|$.
5. Narysujte konvexný uhol AVB a jeho os označte o. Zvoľte ľubovoľný bod M na osi o. Zostrojte kolmicu k_1 bodom M na $\overrightarrow{VA}$, označte body X_1, X_2 tak, aby $X_1 \in \overrightarrow{VA} \cap k_1$; $X_2 \in \overrightarrow{VB} \cap k_1$. Zostrojte kolmicu k_2 bodom M na $\overrightarrow{VB}$, označte body Y_1, Y_2 tak, aby $Y_1 \in \overrightarrow{VA} \cap k_2$; $Y_2 \in \overrightarrow{VB} \cap k_2$. Dokážte:
   a. $\Delta MX_1V \cong \Delta MY_2V$ b. $\Delta MX_1Y_1 \cong \Delta MY_2X_2$

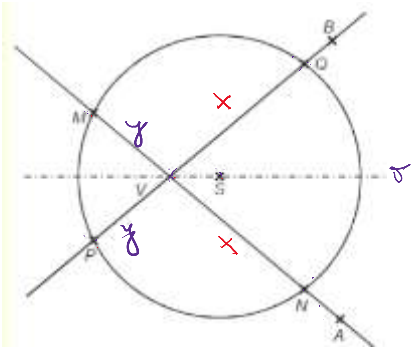


$|MY_2| = |MX_1|$

6. Je daná kružnica $k(S; r)$ a bod A, ktorý leží mimo kružnice k. Zostrojte dotyčnice kružnice k z bodu A a body dotyku označte T_1, T_2. Dokážte, že $|AT_1| = |AT_2|$



7. Je daný trojuholník ABC a priamka p, na ktorej leží ťažnica t_c tohto trojuholníka. Dokážte, že body A, B majú od priamky p rovnakú vzdialenosť.
8. Na osi o ostrého uhla AVB zostrojte vnútri uhla AVB bod S. Zostrojte kružnicu $k(S;\ r)$ tak, aby platilo $r > VS$. Označte priesečníky priamky AV s kružnicou k ako M, N a priesečníky priamky BV s kružnicou k ako P, Q . Dokážte, že úsečky MN, PQ majú rovnakú veľkosť.

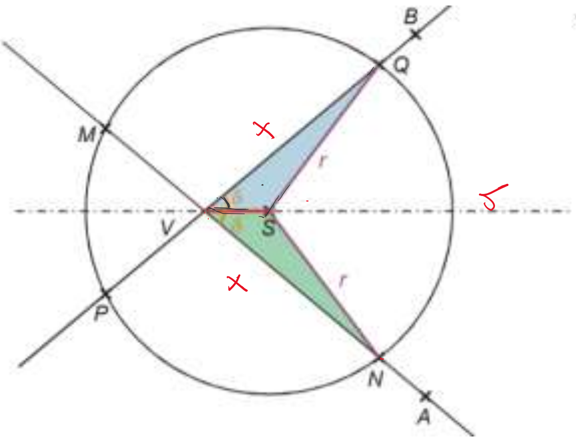


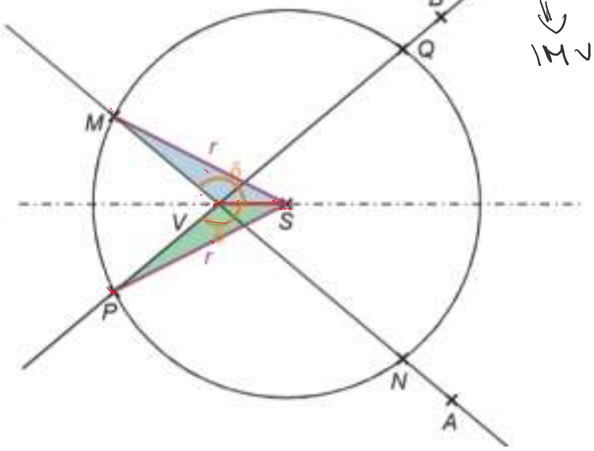
$\Delta QVS \cong NVS$ (sus) $\Rightarrow |VQ| = |VN| = x$

$\Delta MSV \cong \Delta PSV$ (ssu)

$\Downarrow$

$|MV| = |VP| = y$



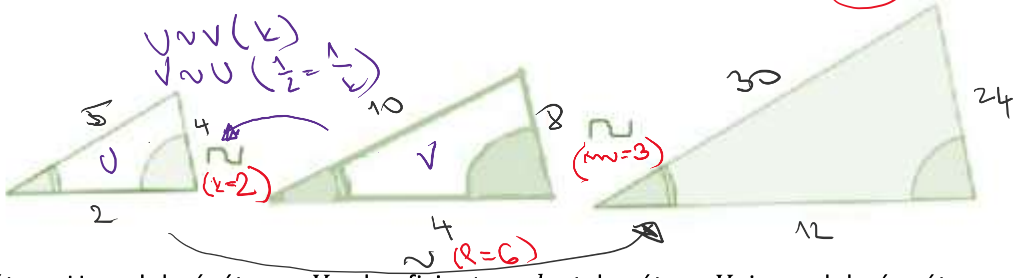


- dva útvary sú **podobné**, keď majú rovnaký tvar, ale inú veľkosť
- trojuholník $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, práve vtedy keď existuje kladné číslo $\boldsymbol{k}$ také, že pre ich strany platí:
  $|AB| = k \cdot |A_1B_1|$
  $|AC| = k \cdot |A_1C_1|$
  $|BC| = k \cdot |B_1C_1|$ a pre ich uhly platí:
  $\alpha \simeq \alpha_1, \beta \simeq \beta_1, \gamma \simeq \gamma_1$!! → zachová tvar

  $\rightarrow \frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = k \rightarrow$ koef podobnosti
- pomer $\boldsymbol{k}$ nazývame **koeficient podobnosti** trojuholníkov
  - $k > 1$ - zväčšenie,
  - $k < 1$- zmenšenie,
  - $k = 1$- trojuholníky sú zhodné.
- vety o podobnosti trojuholníkov
  - **uu** - každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch vnútorných uhloch sú podobné $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ ak $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$.
  - **sus -** každé dva trojuholníky, ktoré majú ten istý pomer dĺžok dvoch dvojíc odpovedajúcich si strán a zhodujú sa v uhle nimi určenom, sú podobné. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ ak $b: b' = c: c', \alpha = \alpha'$.

- **sss** - dva trojuholníky sú podobné, ak pomery dĺžok každých dvoch odpovedajúcich si strán sa rovnajú $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ ak $a : a' = b : b' = c : c'$

- **Podobnosť útvarov je tranzitívna** (prenáša)
  - ak je útvar U podobný útvaru V a útvar V zase podobný útvaru W, potom sú podobné aj útvary U a W. Zapisujeme $U \sim V \wedge V \sim W \Rightarrow U \sim W$
  - ak koeficient podobnosti $U \sim V$ je k, koeficient podobnosti $V \sim W$ je m, potom koeficient podobnosti $U \sim W$ je súčinom koeficientov podobností, t.j. $k.m$



- Ak je útvar U podobný útvaru V s koeficientom k, tak útvar V je podobný s útvarom U s koeficientom $\frac{1}{k}$

Úloha

Daný je trojuholník PQR, ktorého strany majú dĺžku $p = 3\,cm, q = 4\,cm, r = 5\,cm$. Vypočítajte dĺžky strán, obvod a obsah trojuholníka STU, ktorý je podobný s trojuholníkom PQR s koeficientom podobnosti $k = 3$.

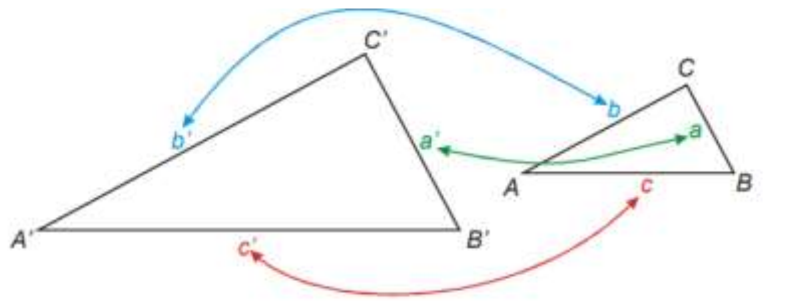
$\sim_{k=3} \Delta STU$ $\xrightarrow{\cdot 3}$ $s = 9$, $t = 12$, $u = 15$

$S_{\Delta PQR} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ $\xrightarrow{\cdot 3^2}$ $S_{STU} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$

$o_{PQR} = 12$ $\xrightarrow{\cdot 3}$ $o_{STU} = 36$

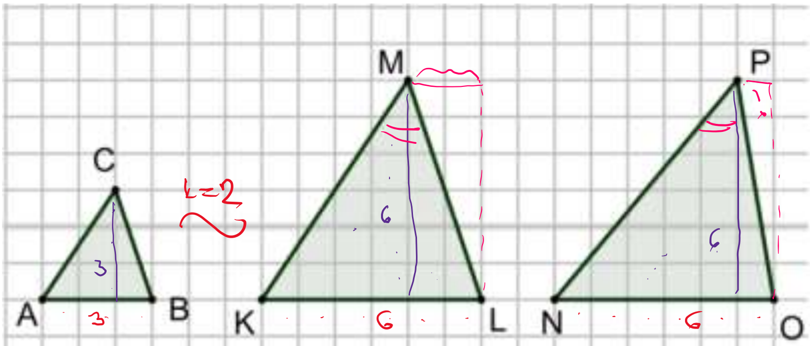
(*) $S = \frac{p \cdot q}{2} = \frac{3p \cdot 3q}{2} = 9 \cdot \boxed{\frac{p \cdot q}{2}} = \underbrace{9}_{k^2} \cdot S_{PQR}$

- **Obsahy podobných útvarov**
  - ak sú dva útvary $U \sim V$ podobné s koeficientom podobnosti k, potom pre ich obsahy S, S' platí $S' = k^2.S$



Úloha

1. Z obrázku zistite, ktoré trojuholníky sú podobné a určte koeficient podobnosti

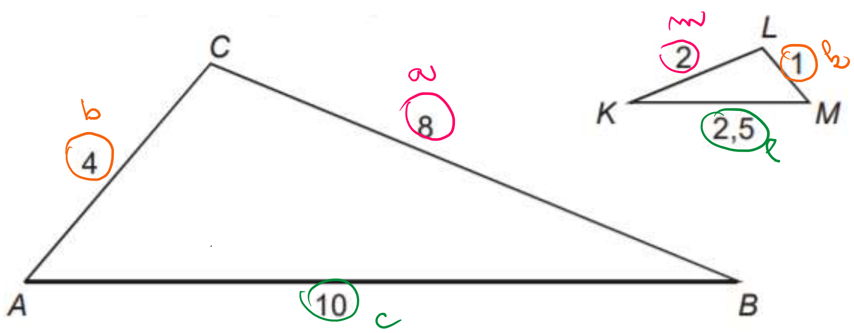


2. Ktoré z nasledujúcich trojuholníkov sú podobné s trojuholníkom ABC, kde $a = 12$, $b = 15, c = 18$.
   a. trojuholník KLM: $k = 12, l = 10, m = 8$ → $\frac{a=12}{m=8}$ $\frac{b=15}{l=10}$ $\frac{c=18}{k=12}$; $\frac{a}{m}=\frac{3}{2}$ $\frac{b}{l}=\frac{3}{2}$ $\frac{c}{k}=\frac{3}{2}$ ✓

      $\triangle ABC \sim \boxed{\triangle MLK}$! ←

      $k=\frac{2}{3}$
   b. trojuholník XYZ so stranami $28;\ 24;\ 36$ → $24;\ 28;\ 36$ → nie sú podob.
   c. trojuholník EFG: $|EF| = 6, |EG| = 4, |FG| = 5$ → $f=4$ $e=5$ $g=6$; $a=12$ $b=15$ $c=18$

      $\triangle ABC \sim \boxed{\triangle FEG}$; $k=\frac{1}{3}$
3. Pre trojuholníky platí $\triangle ABC \sim \triangle KLM$. Určte zvyšné strany, ak viete, že platí: $a = 5, b = 4, c = 6, l = 6$. → $\boxed{\frac{l}{b}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}}$ → $a \to k = 5\cdot\frac{3}{2} = \frac{15}{2}$; $c \to m = 6\cdot\frac{3}{2} = 9$
4. Na obrázku sú dva podobné trojuholníky. Zapíšte ich podobnosť. Zapíšte pomer odpovedajúcich si strán.



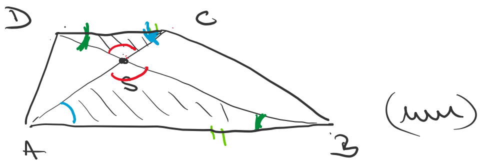
$\triangle ABC \sim \triangle MKL$ → $\frac{m}{a}=\frac{k}{b}=\frac{l}{c}=\frac{1}{4}$

$\triangle MKL \sim \triangle ABC$ → $\frac{a}{m}=\frac{b}{k}=\frac{c}{l}=4$

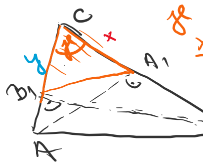
Úlohy

1. V lichobežníku ABCD označte S priesečník uhlopriečok AC a BD. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich tvrdení je pravdivé:

   a. $\Delta ABS \sim \Delta CDS$ ~~b.~~ $\Delta ABS \sim \Delta DCS$ c. $\Delta SAB \sim \Delta SCD$



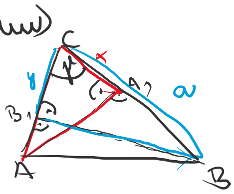
2. Dokážte, že stredné priečky v trojuholníku rozdelia trojuholník na štyri trojuholníky, ktoré sú podobné s trojuholníkom ABC.
3. V ostrouhlom trojuholníku ABC veďte kolmicu z bodu B na stranu AC, jej pätu označte B_1. Pätu kolmice z bodu A na stranu BC označte A_1. Dokážte $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$.



$\frac{x}{b} = \frac{y}{a}$ (uuu)

$\Delta AA_1C \sim \Delta BB_1C$ (uu)

$\frac{x}{b} = \frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC} = \frac{y}{a}$

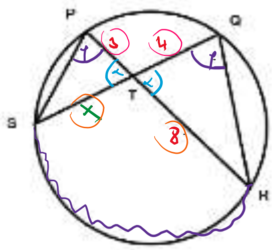


Úlohy

1. Úsečky PR a QS sú tetivy kružnice k, ktoré sa pretínajú v bode T. Vypočítajte dĺžku $|ST|$, ak $|PT| = 3\,cm, |TR| = 8\,cm, |QT| = 4\,cm$

$\Delta PST \sim \Delta QRT$ (uuu) α – vrcholové, φ – obvodové ∠

$\frac{3}{4} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot \cancel{8}^2}{\cancel{4}_1} = 6\,cm$



2. Na obrázku je bod K stredom strany štvorca so stranou dĺžky 18. Vypočítajte obsah vyznačeného trojuholníka.

$S_\Delta = ?$

$S_\Delta = \frac{9 \cdot v_1}{2}$

$S_\Delta = \frac{9 \cdot \cancel{6}^3}{\cancel{2}_1} = 27$

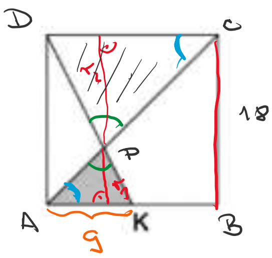
$\Delta AKP \sim \Delta CDP$ (uu)

$k = 2 \Leftrightarrow \frac{|CD|}{|AK|} = \frac{18}{9} = 2$

$v_2 = 2v_1$

$v_1 + v_2 = 18$

$3v_1 = 18 \rightarrow v_1 = 6$



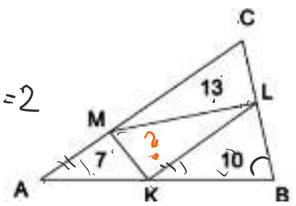
3. V trojuholníku ABC sú body K, L, v tomto poradí, stredmi strán AB a BC. Bod M leží na strane AC. Vypočítajte obsah trojuholníka KLM, ak poznáte obsahy $S_{\triangle KBL} = 10\,cm^2, S_{\triangle AKM} = 7\,cm^2, S_{\triangle MLC} = 13\,cm^2$

KL – str. priečka → $\Delta KLB \sim \Delta ACB$ (uuu) → $k = 2$

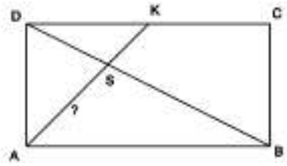
$S_1 = 10$ $S_2 = \boxed{40}$ ← $k^2 \cdot 10$

$S_2 = 7 + 13 + 10 + ? = 40$

$? = 10\,cm^2$

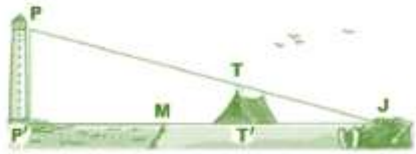


4. Do rovnostranného trojuholníka so stranou dlhou 6 cm je vpísaný štvorec. Vypočítajte dĺžku strany tohto štvorca.
DÚ 5. V obdĺžniku $ABCD$ je K stred strany CD, S je priesečník úsečiek AK a BD. Vypočítajte veľkosť $|AS|$, ak $|AK| = 9$.

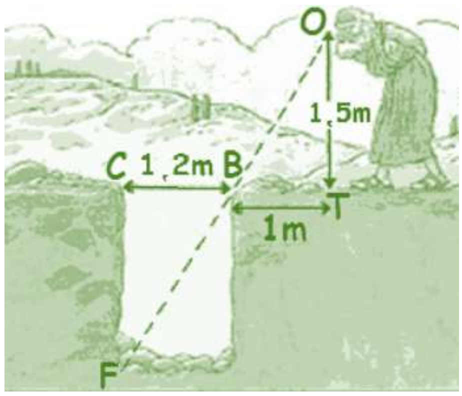


Úlohy

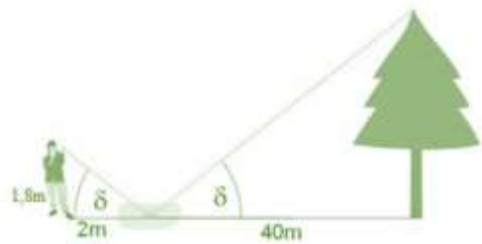
1. Marcel leží v tráve a vidí v zákryte vrchol stanu (bod T) a za ním vrchol majáka (P). $|TT'| = 1{,}2m$, $|PP'| = 36m$, $|JT'| = 5m$. Marcel leží 15 m od brehu mora (M). Vypočítajte vzdialenosť majáka od brehu mora $|P'M|$.



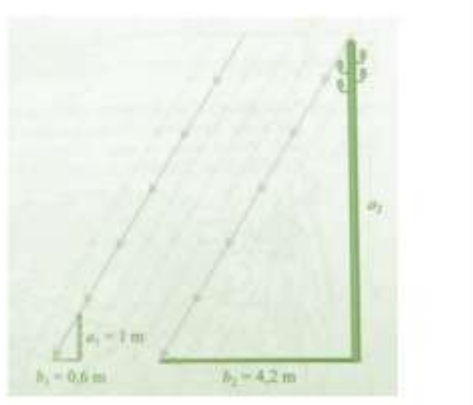
2. Táles je vzdialený 1 m od jamy. Oči má vo výške 150 cm nad zemou a pozerá do jamy s priemerom 120 cm podľa obrázka. Vypočítajte hĺbku jamy.



3. Vrch stromu sa zrkadlí v kaluži, ktorá je vzdialená 40 m. Ty stojíš od tejto kaluže 2 m. Aký vysoký je strom?



4. Zvislá tyč vysoká 1 m vrhá na vodorovnú cestu tieň dlhý 60 cm. Aký vysoký je telefónny stĺp, ktorého tieň na tejto ceste má v tú istú dobu dĺžku 4,2 m .



5. Miesta A, B na obrázku označujú umiestnenie stožiarov vysokého napätia. Ohyb rieky a močariská v ohybe nedovoľujú priamo odmerať ich vzdialenosť. Odôvodnite správnosť nasledujúceho postupu:
   Zvolíme miesto O, ktorého vzdialenosti od miest A, B možno dobre odmerať. Ďalej určíme stred A´ úsečky AO a stred B´ úsečky BO, potom vzdialenosť bodov A´B´ (ktorú vieme odmerať) sa rovná polovici hľadanej vzdialenosti miest A, B .