ĎALŠIE METÓDY RIEŠENIA SÚSTAV ROVNÍC

- sústavu upravíme na tvar

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

$$2x - y + 5z = -4$$
$$x + y - 3z = 2$$
$$-x + z = 1$$

- pre takúto sústavu vieme napísať **maticu sústavy**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- maticu, ktorú vytvoríme pripojením absolútnych členov k matici sústavy, nazývame **rozšírenou maticou sústavy**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

- **determinantom** matice sústavy nazývame determinant, ktorý je vytvorený z koeficientov pri neznámych

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \text{číslo}$$

- D_x , D_y , D_z sú determinanty, ktoré vzniknú z determinantu D tak, že nahradíme príslušný stĺpec pravou stranou rovníc

$$D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{12} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{12} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantov

výpočet determinantu 2. stupňa (2 x 2)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Pr: $2x - 3y = 5$, $x - 4y = 1$ $\rightarrow D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4) - (-3)\cdot 1 = -8 + 3 = -5$

výpočet determinantu 3. stupňa (3 x 3) **Sarrusovo pravidlo**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Pr: $1x + 1y - 1z = 7$, $2x + 3y + 1z = 1$, $-x + 2y + 4z = 8$

$$\rightarrow D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 + (-4) + (-1) - 3 - 2 - 8 = -6$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

GEM https://www.youtube.com/watch?v=buhdFjMy7PU
Cramerovo pravidlo https://www.youtube.com/watch?v=nyi42cJ8olM

Cramerovo pravidlo

Nech D je determinant sústavy a D_x, D_y, D_z sú determinanty, ktoré vzniknú z determinantu D tak, že nahradíme príslušný stĺpec pravou stranou rovníc.

Ak je determinant rôzny od nuly, potom má sústava práve jedno riešenie $[x, y, z] = \left[\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D}\right]$

Úloha

Cramerovým pravidlom vyriešte sústavu
$$\begin{aligned} 1x + 2y - 1z &= 1 \\ -2x + 1y - 3z &= 2 \\ 0 \quad 2y - 1z &= -2 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) + 4 + 0 - 0 - (-6) - 4 = 5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) + (-4) + 12 - (2) - (-6) - (-4) = 15$$

$$\Rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{15}{5} = 3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -14 \quad \rightarrow \quad y = \frac{D_y}{D} = -\frac{14}{5}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -18 \quad \rightarrow \quad z = \frac{D_z}{D} = -\frac{18}{5}$$

$$K = \left\{\left[3; -\frac{14}{5}; -\frac{18}{5}\right]\right\}$$

Úloha

Cramerovým pravidlom vyriešte sústavu
$$\begin{aligned} 6x + 13y &= 5 \\ 2x + 7y &= 3 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 13 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 16$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -4 \quad \rightarrow \quad x = \frac{D_x}{D} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \quad \rightarrow \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$K = \left\{\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]\right\}$$

GEM https://www.youtube.com/watch?v=buhdFjMy7PU
Cramerovo pravidlo https://www.youtube.com/watch?v=nyi42cJ8olM

Úloha

Cramerovým pravidlom vyriešte sústavu

$$\begin{aligned} x + \ 5y &= 2 \\ 2x + 10y &= 7 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + \ 5y &= 2 \\ 2x + 10y &= 4 \end{aligned} \quad \begin{matrix} 1\cdot(-2) \\ \oplus \end{matrix} \rightarrow 0 = 0$$

$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 10 - 10 = 0$ $\qquad$ $D = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 0$!

$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 35 = -15 \rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{-15}{0}$? $\qquad$ $D_x = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 4 = 3 \rightarrow y = \frac{3}{0}$? $\qquad$ $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

$K = \emptyset$

$K = \left\{ \left[x ; \frac{x-2}{5} \right] ; x \in \mathbb{R} \right\}$

$D = 0$; $\exists i \ D_i \neq 0$ ---- $K = \emptyset$

$D = 0$; $\forall i \ D_i = 0$ ---- nekonečne veľa riešení

$D \neq 0$ ---- práve 1 riešenie $\left[\frac{D_x}{D} , \frac{D_y}{D} , \frac{D_z}{D} \right]$

Gaussova eliminačná metóda (GEM)

- snažíme sa upraviť maticu sústavy v rozšírenej sústave na trojuholníkový tvar tak, aby prvky pod diagonálou boli nulové

$$\begin{pmatrix} \clubsuit & \clubsuit & \clubsuit \\ 0 & \clubsuit & \clubsuit \\ 0 & 0 & \clubsuit \end{pmatrix}$$

- ekvivalentné úpravy, ktoré používame pri GEM:
    - vynásobenie niektorej rovnice sústavy (t. j. jej pravej i ľavej strany) nenulovým číslom
    - pripočítanie násobku jednej rovnice sústavy ku inej rovnici sústavy (pripočítavame odpovedajúce si členy)

Úloha

Riešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 8x + 2y + 3z - 5u &= -25 \\ x + y + z + u &= 4 \\ -4x - 3y + z - u &= -19 \\ 3x + 7y + 8z + 3u &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & 2 & 3 & -5 & -25 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -4 & -3 & 1 & -1 & -19 \\ 3 & 7 & 8 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 8 & 3 & 0 \\ -4 & -3 & 1 & -1 & -19 \\ 8 & 2 & 3 & -5 & -25 \end{array}\right) \begin{matrix} 1\cdot(-3) \quad 1\cdot 4 \quad 1\cdot(-8) \\ \oplus \\ \oplus \\ \oplus \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -3 \\ 0 & -6 & -5 & -13 & -57 \end{array}\right) \sim$$

GEM https://www.youtube.com/watch?v=buhdFjMy7PU
Cramerovo pravidlo https://www.youtube.com/watch?v=nyi42cJ8olM

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & -12 \\ 0 & -6 & -5 & -13 & -57 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /\cdot(-4) \;/(6) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -15 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 5 & -75 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /:3 \\ /:5 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -15 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right)$$

$\rightarrow x+y+z+w=4 \rightarrow x+2-4+5=4 \rightarrow x=1$

$\rightarrow y+5z+3w=-3 \rightarrow y-20+15=-3 \rightarrow y=2$

$\rightarrow -5z-4w=0 \rightarrow -5z-20=0 \rightarrow z=-4$

$\rightarrow -3w=-15 \rightarrow w=5$

$K=\{[1;2;-4;5]\}$

Úloha

V tabuľke je uvedená časová náročnosť na výrobu troch modelov A, B a C určitého výrobku na jednotlivých výrobných linkách:

linka	A	B	C
1	40 min	30 min	25 min
2	25 min	20 min	20 min
3	10 min	10 min	5 min

a. Vypočítajme, koľko kusov výrobkov modelu A, koľko kusov modelu B a koľko kusov modelu C je potrebné vyrobiť za týždeň, keď
   - pre 1. linku máme týždenne k dispozícii 4 500 minút,
   - pre 2. linku 3 050 minút,
   - pre 3. linku 1 200 minút, pričom chceme využiť celú časovú kapacitu.

b. Ako by sa zmenila výroba, ak odstavíme 3. linku?

$$\begin{aligned} 40A + 30B + 25C &= 4500 \\ 25A + 20B + 20C &= 3050 \\ 10A + 10B + 5C &= 1200 \end{aligned} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 30 & 25 & 4500 \\ 25 & 20 & 20 & 3050 \\ 10 & 10 & 5 & 1200 \end{array}\right) \begin{array}{l} /:5 \\ /:5 \\ /:5 \end{array}$$

GEM https://www.youtube.com/watch?v=buhdFjMy7PU
Cramerovo pravidlo https://www.youtube.com/watch?v=nyi42cJ8olM

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \\ 2 & 2 & 1 & 240 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 240 \\ 8 & 6 & 5 & 900 \\ 5 & 4 & 4 & 610 \end{array}\right) \begin{array}{l} /\cdot(-4) \\ /\cdot(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 240 \\ 0 & -2 & 1 & -60 \\ 1 & 0 & 2 & 130 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 240 \\ 1 & 0 & 2 & 130 \\ 0 & -2 & 1 & -60 \end{array}\right) /\cdot(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 240 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & -2 & 1 & -60 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 240 \\ 0 & 2 & -3 & -20 \\ 0 & 0 & -2 & -80 \end{array}\right) \end{array}$$

$C = 40 \Leftarrow -2C = -80$

$B = 50 \Leftarrow 2B - 120 = -20 \Leftarrow 2B - 3C = -20$

$A = 50 \Leftarrow 2A + 100 + 40 = 240 \Leftarrow 2A + 2B + C = 240$

$A = 50$

$B = 50$

$C = 40$

GEM https://www.youtube.com/watch?v=buhdFjMy7PU

Cramerovo pravidlo https://www.youtube.com/watch?v=nyi42cJ8olM