FI-HMI: Temperovaná ladění

Adam Havel

29. května 2013

1 Absolutní a relativní sluch

Každý alespoň trochu schopný muzikant by měl disponovat dobrým relativním sluchem, tedy schopností poznat frekvenční rozdíl mezi dvěma znějícími tóny a jen na základě poslechu rozhodnout, jaký hudební interval je odděluje. Takových intervalů je alespoň v naší klasické hudební nauce dvanáct, což je přirozeně stejné množství, jaké nám nabízí repertoár hudebních tónů neboli chromatická řada. A právě umění rozpoznat krom intervalu i samotné absolutní výšky, to znamená přiřadit je k jednomu z těchto dvanácti tónů — jako třeba C nebo G♭ — se nazývá absolutním sluchem.

Většina lidí má představu, že je tato schopnost vrozená a spojuje si ji s jakýmsi přirozeným hudebním nadáním — ostatně jako příklad člověka, který byl tímto sluchem obdařen, se často udává třeba Wolfgang Amadeus Mozart. Jak ovšem zjistíme, s tímto „Svatým grálem“ muzikantů to není tak úplně jednoduché.

Dnes už tušíme, že se absolutní sluch formuje především v raném dětství a hlavní faktor představuje opakované vystavení hudebním tónům spolu s dalším podnětem, třeba vizuálním, který ke konkrétním zvukům přiřadí dané označení. Dětský mozek je pak schopen toto spojení zachovat a slyší-li pak jedinec, u kterého se tato vlastnost projeví, správnou frekvenci, na mysl mu okamžitě vytane i název tónu.

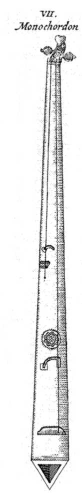
Problém ovšem nastane v momentě, kdy si uvědomíme, že frekvence jednotlivých tónů jsou jen předmětem úzu a momentální dohody a jejich hodnoty se tedy v průběhu času významně mění. Dnes se jako reference pro lazení nástrojů většinou používá tzv. koncertní A o hodnotě 440 Hz, nicméně to samé A bylo na počátku předchozího století skoro o deset hertzů menší. Podíváme-li se až do osmnáctého století, zjistíme dokonce, že se tato frekvence významně lišila nejen v čase, ale například i v rámci různých měst, a to i o desítky hertzů [2]!

Ve světle těchto zjištění se absolutní sluch jeví jako svého druhu Danajský dar. V momentě, kdy orchestr ladí jinak, než je dnes zvyklé — třeba z důvodu větší autentičnosti u současných barokních souborů — slyší člověk s absolutním sluchem rozdíl a nepříjemně jej pociťuje. Nicméně, ani běžní posluchači nejsou ušetřeni následků změn hudebního úzu, protože se mění nejen tóny, ale i samotné vzdálenosti mezi nimi. Tyto intervaly určují matematicky odvozené systémy nazvané ladění, kterých v historii vzniklo velké množství: v hudební tradici naší západní kultury například dominuje takzvané rovnoměrně temperované ladění. Tak to ovšem nebylo vždy.

2 Harmonická řada

Hudba, jak ji známe, by nemohla existovat nebýt jedné vlastnosti lidského mozku, a to sice té, že dva tóny vnímá jako v podstatě stejné, pokud jsou od sebe vzdáleny o interval oktávy. To jinými slovy znamená, že jsou jejich frekvence členy stejné geometrické posloupnosti o kvocientu 2 — jako A jsou tedy shodně označeny například tóny o frekvenci 440 a 220 Hz. Tuto vlastnost mimochodem sdílíme s mnoha dalšími savci [1].

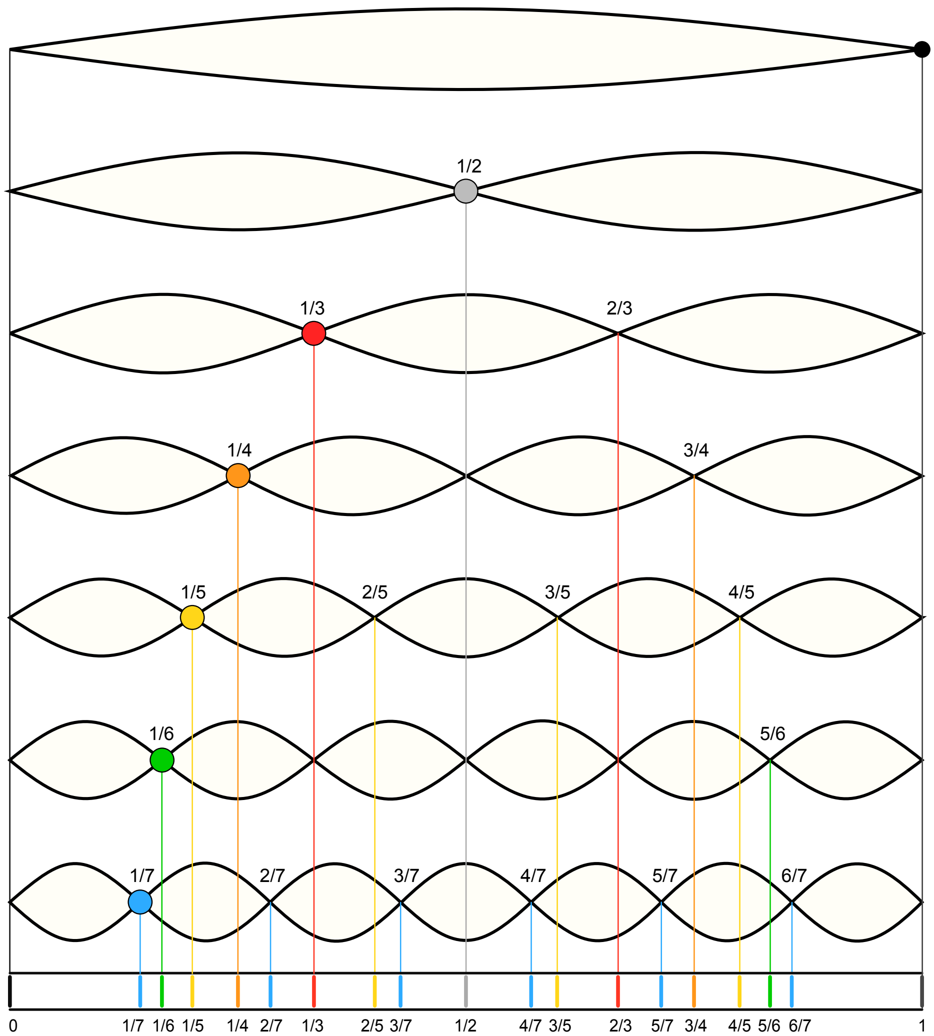
Ladění pak není nic jiného, než způsob, jak takto daný frekvenční rozsah rozdělit na jednotlivé tóny. Zde je důležité poznamenat, že ačkoliv v naší kultuře jsme zvyklí (už od Pythagora!) používat tónu dvanáct, jejich množství — ač podstatné — není pevně dané.



Obrázek 1: Monochord

Právě Pythagorovi se pak přisuzuje jedno z nejstarších známých ladění, které se hojně používalo až do 16. století [5]. Rozložení tónů v tomto systému bylo založeno na pozorování takzvaného *monochordu*, což byl jednoduchý hudební — nebo spíše vědecký — nástroj o jedné (či více) strunách, určený k demonstraci vlastností tónů. S jeho pomocí tedy mohli zkoumat třeba výše zmíněný interval oktávy, a to tak, že strunu zkrátili na polovinu, čímž se frekvence tónu zdvojnásobila.

Řekové si tehdy všimli, že struna upevněná na obou koncích vibruje s frekvencí o vlnové délce rovné dvojnásobku délky struny — této frekvenci se říká *fundementální*. Ovšem mnohem důležitější bylo zjištění, že struna zároveň vibruje i s dalšími frekvencemi. První z nich má vlnovou délku rovnou délce struny, její frekvence je tedy dvákrat tak velká, což znamená, že jde o interval oktávy. Vibruje-li tedy struna se základní frekvencí 100 Hz, vibruje zároveň i s frekvencí dvojnásobnou, tedy 200 Hz. Jako další pozorujeme vibraci o 300 Hz, která je s předchozí oktavou v poměru 3:2 a jedná se o interval čisté kvinty. Jak můžeme vidět na obrázku 2, následující frekvence je zase oktáva, tentokrát o 400 Hz, a až po ní se objevuje nový tón, s frekvencí 500 Hz. Ten je s předchozí oktávou v poměru 5:4, jde tedy o velkou tercii. Poté následuje další kvinta a tak dále.



Obrázek 2: Harmonická řada (zdroj: Wikimedia)

Tyto tóny se označují jako *alikvótní* a jejich funkce je naprosto zásadní, protože jejich množství a intenzita v poměru k fundamentální frekvenci vytvářejí takzvanou barvu tónu. A právě díky barvě jsme jen podle sluchu schopni poznat hudební nástroj jeden od druhého. Některé, třeba flétna, disponují jen alikvótními tóny oktávy, jiné zase jen těmi lichými a podobně.

Než budeme pokračovat dále, je třeba si uvědomit několik poznatků. Zaprvé, alikvótní tóny jsou zjevně členy aritmetické posloupnosti o diferenci rovné fundamentální frekvenci. Zadruhé, vyšší oktávy a kvinty jsou nedílnou a podstatnou součástí většiny vibrujících těles. A zatřetí, jak postupujeme v harmonické řadě, objevují se stále menší intervaly a zlomky vyjadřující poměr k oktávám jsou čím dál složitější. Čistá kvinta s poměrem 3:2 je pak tedy hned po oktávě nejjednodušší interval. To je důležite i proto, že náš mozek vnímá intervaly, které se dají vyjádřit pomocí poměru malých čísel, jako stabilní. Naproti tomu ty intervaly, které mají ve zlomku velká čísla, považujeme za nepříjemné či nestabilní a nazýváme je disonantní.

Není proto náhodou, že nejstarší pentatonické stupnice (stupnice o pěti tónech) jsou založeny právě na intervalech přirozeně se vyskytujících v přírodě v podobě alikvótních tónů. Krom oktávy a kvinty jsou to velká tercie, čistá kvarta a malá septima. O tercii jsme se již zmínili, zaměříme se proto na poslední dva. Kvarta se ve skutečnosti v harmonické řadě objevuje až jako dvacátý alikvótní tón, ale dá se jednoduše matematicky odvodit ze svého vztahu ke kvintě. Jde totiž o její inverzi, což znamená, že složíme-li dohromady interval kvinty a kvarty, dostaneme oktávu. Víme-li, že kvinta je v poměru 3:2 a oktáva 2:1, můžeme si lehce odvodit, že kvarta představuje zlomek 4:3.

S přirozenou malou septimou je to složitější. Ta se v harmonické řadě objevuje jako šestý člen o poměru 7:4, což je pomerně odlišné číslo, než k jakému matematicky dospěli Řekové nebo jaké dnes používáme my v temperovaném ladění. Proto by se na dnešním klavíru tento interval zahrát nedal, neboť by ležel někde mezi velkou sextou a malou septimou. Jeho velikost se lišila i v rámci různých kultur, například v čínské tradici se používal interval srovnatelný s naší dnešní malou septimou, zatímco v té africké to naopak byla spíše velká sexta [4].

3 Čistá ladění

S předchozími znalostmi se konečně můžeme vrátit k Pythagorovi a jeho ladění, jehož základy stojí právě na intervalech oktávy a kvinty. Princip je takový, že všechny tóny vytvoříme jen skládáním těchto dvou intervalů. To znamená, že si vybereme tón, třeba D, a jeho frekvenci vynásobíme v poměru 3:2, čímž získáme interval kvinty a tón A. Od A postupujeme stejně, tedy násobíme 3:2. Tím se ovšem dostaneme mimo rozsah oktávy a proto frekvenci vydělíme dvěma. Výsledkem je tón E a interval velké sekundy s poměrem 9:8. Stejným způsobem můžeme postupovat i směrem „dolů“ od základního D, akorát místo 3:2 násobíme v poměru 2:3, což značí snížení o interval kvinty. Abychom se vrátili do správné oktávy, musíme pak ještě výsledek vynásobit dvěma. Další výpočty pro ostatní tóny a jejich hodnoty jsou k vidění v tabulce 1.

Již na první pohled zde vidíme zásadní problém — velká část intervalů je vyjádřena jako poměr relativně vysokých čísel a jak už jsme popsali výše, takové intervaly se našemu sluchu jeví jako velmi disonantní. Právě proto se v hudební tradici středověku, například v gregoriánských chorálech, objevují v podstatě jen intervaly oktávy, kvarty a kvinty [5].

Na druhý pohled zjistíme, že tónů je v tabulce třináct, na dvanáct, jak bychom očekávali. Na vině je fakt, že snížená kvinta a zvětšená kvarta je ve skutečnosti (alespoň v našem temperovaném ladění) jeden a ten samý interval, nazvaný *tritón*, a tóny G$\sharp$ a A$\flat$ jsou takzvaně *enharmonické*, neboli stejné. Podíváme-li se ovšem na jejich poměry v tabulce, zjistíme, že se liší — jedná se tedy o různé tóny.

Rozdílu mezi těmito dvěma tóny se říká *Pythagorejské koma*. Jde o velmi malý interval, který si můžeme vyjádřit jako poměr dvanácti čistých kvint ku sedmi oktávám:

$$\frac{(3:2)^{12}}{(2:1)^{7}} = \frac{3^{12}}{2^{12+7}} = \frac{531441}{524288} \approx 1,01364 \tag{1}$$

Ke stejnému poměru bychom došli, pokud bychom dělili interval šesti velkých sekund, neboli $(9:8)^6$, oktávou, tedy dvěma. Ačkoliv by taková posloupnost sekund měla vést k čisté oktávě, výsledkem je zase interval o něco málo větší. Tímto způsobem ostatně ono koma objevil a spočítal již Euklides [3].

Zde je ovšem třeba si znovu připomenout, že není vůbec nutné, aby oktáva

Tón	**Interval**	**Výpočet**	**Poměr**
A$\flat$	snížená kvinta	$\left(\frac{2}{3}\right)^6 \times 2^4$	$\frac{1024}{729}$
E$\flat$	malá sekunda	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times 2^3$	$\frac{256}{243}$
B$\flat$	malá sexta	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times 2^3$	$\frac{128}{81}$
F	malá tercie	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 2^2$	$\frac{32}{27}$
C	malá septima	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 2^2$	$\frac{16}{9}$
G	čistá kvarta	$\frac{2}{3} \times 2$	$\frac{4}{3}$
D	čistá prima	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
A	čistá kvinta	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
E	velká sekunda	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2}$	$\frac{9}{8}$
B	velká sexta	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2}$	$\frac{27}{16}$
F$\sharp$	velká tercie	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{81}{64}$
C$\sharp$	velká septima	$\left(\frac{3}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{243}{128}$
G$\sharp$	zvětšená kvarta	$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{729}{512}$

Tabulka 1: Pythagorejské ladění

měla přesně dvanáct tónů. Stejně tak dobře jich může mít pět. Nebo tisíc. Pro potřeby Pythagorejského tonálního systému je však toto číslo vhodné z toho důvodu, že není příliš velké — což usnadňuje konstrukci hudebních nástrojů a neklade tak velké nároky na muzikanty — a zároveň s uspokojivou přesností uzavíra takzvaný *kvintový kruh*, až na zmíněné Pythagorejské koma.

Nicméně, už v roce zhruba 50 př. n. l. v Číně zjistil Ching Fang, že pokud se nezastavíme u dvanácté kvinty, ale pokračujeme až k její 53. iteraci, dostaneme systém, který kvintový kruh uzavírá s mnohem větší přesností. Výsledné koma, tentokrát nazvané po Nicholasu Mercatorovi, je pak zhruba rovné číslu 1,00209, což už je pro lidský sluch za hranicí rozlišitelnosti.

Baroko a cembalo (modulace, Bach, dur-mollové harmonie, konsonantní tercie a kvintakordy)

Temperovaná ladění (rozdílnost tónin)

Rovnoměrně temperované ladění (důvod, důsledky, matika)

Současnost

Reference

[1] The mechanism of octave circularity in the auditory brain. URL http://www.neuroscience-of-music.se/eng7.htm.

[2] History of pitch standards in Western music. URL http://en.wikipedia.org/wiki/Concert_pitch#History_of_pitch_standards_in_Western_music.

[3] Andrew Barker. *Greek Musical Writings. Vol. 2: Harmonic and Acoustic Theory*. 2004.

[4] Leonard Bernstein. *The Unanswered Question*, 1973. URL http://www.youtube.com/watch?v=U3HLqCHO08s.

[5] Jaroslav Smolka. *Dějiny hudby*. 2001.