Diskret Matematik og Algoritmer

Aflevering 8i

Adam Ingwersen,

Datalogisk Institut
Københavns Universitet

December 15, 2016

1

1.1

Denne delopgave følger kapitel 3 i KBR.

For at danne en ordnet liste bestående af r elementer, der vælges fra en liste af 500 mulige elementer hvor gentagelser er tilladt er der følgende antal muligheder hvorpå dette kan gøres:

$$500^r$$

I det tilfælde, hvor gentagelser er tilladt, kan en ordnet liste bestående af `r` elementer med 500 mulige værdier, beskriver nedenstående formel antallet af muligheder:

$$_{500}P_r = \frac{500!}{(500-r)!}$$

1.2

Det ønskes her at bestemme sandsynligheden for en kollision i tilfældet beskrevet i opgaveteksten. Det antages, at alle tilfælde er lige sandsynlige. Derfor kan sandsynlighedsfunktionen beskrives ved:

$$p(n) = \frac{\frac{500!}{(500-n)!}}{500^n}$$

Ved denne repræsentation, forventes det, at når `n` konvergerer mod 500, vil $p(n)$ ligeledes konvergere mod 1 - altså bliver kollisioner gradvist mere sandsynlige - og ved 500, uundgåelige. Dette jf. skuffeprincippet. Omvendt, vil et lille `n` betyde en lav sandsynlighed for kollisioner. Grænseværdierne for `n` betragtes:

$$p(500) = \frac{\frac{500!}{(500-500)!}}{500^{500}} = 0$$

$$p(0) = \frac{\frac{500!}{(500-0)!}}{500^0} = 1$$

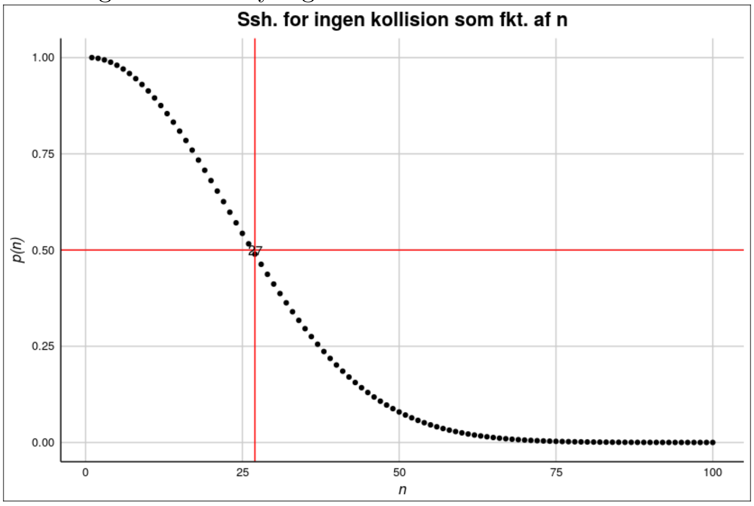
Her er sandsynlighedsfunktionen $p(n)$ monotont aftagende.

1.3

Givet at fakultets-funktionen, under normale omstændigheder, er en integer-funktion - vil det her ikke forsøges at identificere decimal-værdien, hvor $y = 0.5$, men her angives et heltal i stedet. Den første værdi for `n`, hvortil sandsynligheden for ingen kollision er under `0.5` er `27`.

Sandsynlighedsfunktionen samt en effektivisering af permutations-funktionen er angivet i R-kode i bilag sammen med kode, der genererer et plot.

Figure 1: Sandsynlighedsfunktionen fra `n = 1..100`



2

2.1

Refleksivitet

R er refleksiv, da:

$$xRx \forall x \in \mathbb{R}$$

Symmetri

R er symmetrisk, da hvis det gælder, at $x - y \in \mathbb{Z}$, vil det ligeldes gøre sig gældende, at $y - x \in \mathbb{Z}$

Transitivitet

Antag, at $xRy \in \mathbb{Z}$ og $yRz \in \mathbb{Z}$, da lades:

$$x - y = k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$y - z = k_2 \in \mathbb{Z}$$

Da må:

$$k_1 + k_2 = x - y + y - z = x - z \in \mathbb{Z}$$

Altså, er R en Transitiv relation.

2.2

Refleksivitet

S er ikke refleksiv i de tilfælde, hvor $x = 0$ altså:

$$xRx \not> 0 \forall x = 0$$

Symmetri

S er symmetrisk, da multiplikationsrelationen i sig selv er symmetrisk - enhver relation, S, hvor $x \cdot y > 0$, vil det ligeledes gælde, at $y \cdot x > 0$.

Transitivitet

S er transitiv, da der ved multiplikation aldrig vil opstå en situation, hvor relationen ikke er opfyldt i $x \cdot z$, hvis og kun hvis relationen er overholdt for $x \cdot y$ samt $y \cdot z$. For at $x \cdot y > 0$, da må x og y have samme fortegn. Det samme gælder for $y \cdot z$, hvorved det må gælde, at x og z begge har samme fortegn. Så må $xRz > 0$, hvis $xRy \land yRz > 0$.

Bilag

R Kode

```r
# Create a less-computationally heavy method for calculating permutations.
permute = function(n, r){
  if(r == 1){
    n <- n
  } else {
      for(i in (n-r+1):(n-1))
        n <- n*i
  }
  return(n)
}

# Define probability-function, p(n)
prob = function(n, r){
  (permute(n, r)/(n^r))
}

# Define arrays necessary for plot:
n = 1:100
probs = c()

for(i in n){
  probs[i] <- prob(500, i)
}
# Coerce into dataframe
probs_n = data.frame(cbind(n, probs))

# Find integer closest to 0.5
max(which(probs_n$probs >= 0.5))
  # Output: 26


# Load packages for plotting
pkgs <- c("ggplot2", "ggthemes")
lapply(pkgs, require, character.only = TRUE)

# Plot probs_n:
plot <- ggplot(data = probs_n, aes(x = n, y = probs))
plot <- plot + geom_point() + theme_gdocs() +
  geom_hline(yintercept = 0.5, color = 'red') +
  geom_vline(xintercept = 27, color = 'red') +
  annotate('text', x = 27, y = 0.5, parse = TRUE, label = "27") +
  labs(x = "n", y = "p(n)",
       title = "Ssh. for ingen kollision som fkt. af n") +
  theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))
plot(plot)
```