



# Diskret Matematik og Algoritmer

## Aflevering 10g

Adam Ingwersen,  
Aske Fjellerup,  
Peter Friborg

Datalogisk Institut  
Københavns Universitet

January 16, 2017



## 1

### a)

Ved hjælp af logaritmereglerne for et produkt, kan følgende omskrivninger foretages:

$$\begin{aligned} & -\log(w(e_1) \cdot w(e_2) \cdot \dots \cdot w(e_{k-1}) \cdot w(e_k)) \\ & -(\log(w(e_1)) + \log(w(e_2)) + \dots + \log(w(e_{k-1})) + \log(w(e_k))) \\ & -\sum_{i=1}^n \log(w(e_i)) \end{aligned}$$

### b)

Her tænkes det at modificere Dijkstra's algoritme via modifikation af **RELAX** operationen på en **Edge**. Det er klart, at eftersom at der arbejdes med vægte  $w \in [0, 1]$ , skal der inkorporeres et multiplikativt element. Det observeres, at **RELAX** bliver kaldt for hver en **Vertex** nærliggende en vilkårlig **Vertex**,  $v$ . Hertil anskuer **RELAX** bagudrettet den bedste (billigste) vej fra  $v$  til  $u$  som en akkumulation af optimale vertex/edge kombinationer:

---

**Algorithm 1** Modifikation af Dijkstra's algoritme til sandsynligheds-vægte

---

```
1: function MODIFIED RELAX( $u, v, w$ )
2:   if  $v.d < u.d + \log(w(u,v))$ 
3:      $v.d = u.d + \log(w(u,v))$ 
4:      $v.\pi = u$ 
1: function DIJKSTRA( $G, w, s$ )
2:   INITIALIZE-SINGLE-SOURCE( $G, s$ )
3:    $S =$ 
4:    $Q = G.V$ 
5:   while  $Q \neq \emptyset$ 
6:      $u = \text{EXTRACT-MAX}(Q)$ 
7:      $S = S \cup u$ 
8:     for each vertex  $v \in G.\text{adj}[u]$ 
9:       RELAX( $u, v, w$ )
```

---

## 2

### 2.1 a)

Dijkstra's algoritme og BFS i scenariet med enheds-vægte, resulterer i de samme værdier i alle kunder. Dijkstra's anvender en prioritetskø fremfor FIFO-kø (som i BFS), hvorfor Dijkstra's er asymptotisk langsommere end BFS, når  $w=1$ . Lad os se, hvorfor disse algoritmer er ækvivalente for  $w=1$ : BFS finder den korteste vej fra  $s$  til  $u$  - her menes der med den korteste vej, den vej med færrest skridt. Dijkstra's finder den mindst omkostningsfulde vej fra  $s$  til  $u$ . Hvis omkostningerne for hver **edge** er ens, vil den korteste vej pr. definition være den billigste.

## 2.2 b)

I BFS angiver farven **sort** for en node, at alle nærliggende noder er besøgt. I konteksten for Dijkstra's algoritme, for en node der indgår i sættet  $S$ , at denne er blevet tilføjet til mængden  $S$  via union af den foregående mængde  $S$  og den evaluerede node  $u$ , som via **RELAX** blev vurderet, at være en bedre/billigere node at besøge end den foregående bedste-vej node,  $v$ .

## 2.3 c)

Denne egenskab følger direkte af betingelsen om non-negative **edges**.