1.3 toppunkter CLRS intro

- Toppunkter
  - Algoritme 1
  - Algoritme 2
  - Algoritme 3

Disse noter er stærkt inspireret af noter af Philip Bille og Inge Li Gørtz til kuset Algoritmer og Datastrukturer, på DTU, http://www2.compute.dtu.dk/courses/02105+02326/2015/#generelinfo

Toppunkter

- Toppunkt. Indgang A[i] er et toppunkt hvis A[i] er mindst ligeså stort som dets naboer:
  - A[i] toppunkt hvis $A[i-1] \leq A[i] \geq A[i+1]$ for $i \in \{1, .., n-2\}$
  - A[0] toppunkt $A[0] \geq A[1]$ og A[n-1] er toppunkt hvis $A[n-2] \leq A[n-1]$. (Tænk $A[-1] = A[n] = -\infty$).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	7	15	17	11	2	3	6	8	7	5	9	5	23

- Toppunktsproblem. Givet en tabel A[0..n-1], find *et* tal i, således at A[i] toppunkt.
  - Input. En tabel A[0..n-1].
  - Output. Et tal i, $0 \leq i < n$, så A[i] er et toppunkt.

Introduktion

- Toppunkter
  - Algoritme 1
  - Algoritme 2
  - Algoritme 3

Algoritme 1

- Algoritme 1. For hver indgang i A, check om den er et toppunkt. Returner indeks på første toppunkt.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	7	15	17	11	2	3	6	8	7	5	9	5	23

- Pseudokode.

```
TOPPUNKT1(A, n)
    if A[0] ≥ A[1] return 0
    for i = 1 to n-2
        if A[i-1] ≤ A[i] ≥ A[i+1] return i
    if A[n-2] ≤ A[n-1] return n-1
```

- Udfordring. Hvordan analyserer vi algoritmen?

Teoretisk analyse

- Køretid/tidskompleksitet.
  - T(n) = antallet af skridt som algoritmen udfører på et input af størrelse n.
- Skridt.
  - Læsning/skrivning til hukommelse (x := y, A[i], i = i + 1, ...)
  - Arithmetiske/boolske operationer (+, -, *, /, %, &&, ||, &, |, ^, ~)
  - Sammenligninger (<, >, =<, =>, =, ≠)
  - Programflow (if-then-else, while, for, goto, funktionskald, ..)
- Værstefaldstidskompleksitet (worst-case complexity).
  - Interesseret (næsten altid) i værstefaldstidskompleksitet = maksimal køretid over alle input af størrelse n.

Teoretisk analyse

- Køretid. Hvad er køretiden T(n) for algoritmen?

```
TOPPUNKT1(A, n)
    if A[0] ≥ A[1] return 0
    for i = 1 to n-2
        if A[i-1] ≤ A[i] ≥ A[i+1] return i
    if A[n-2] ≤ A[n-1] return n-1
```

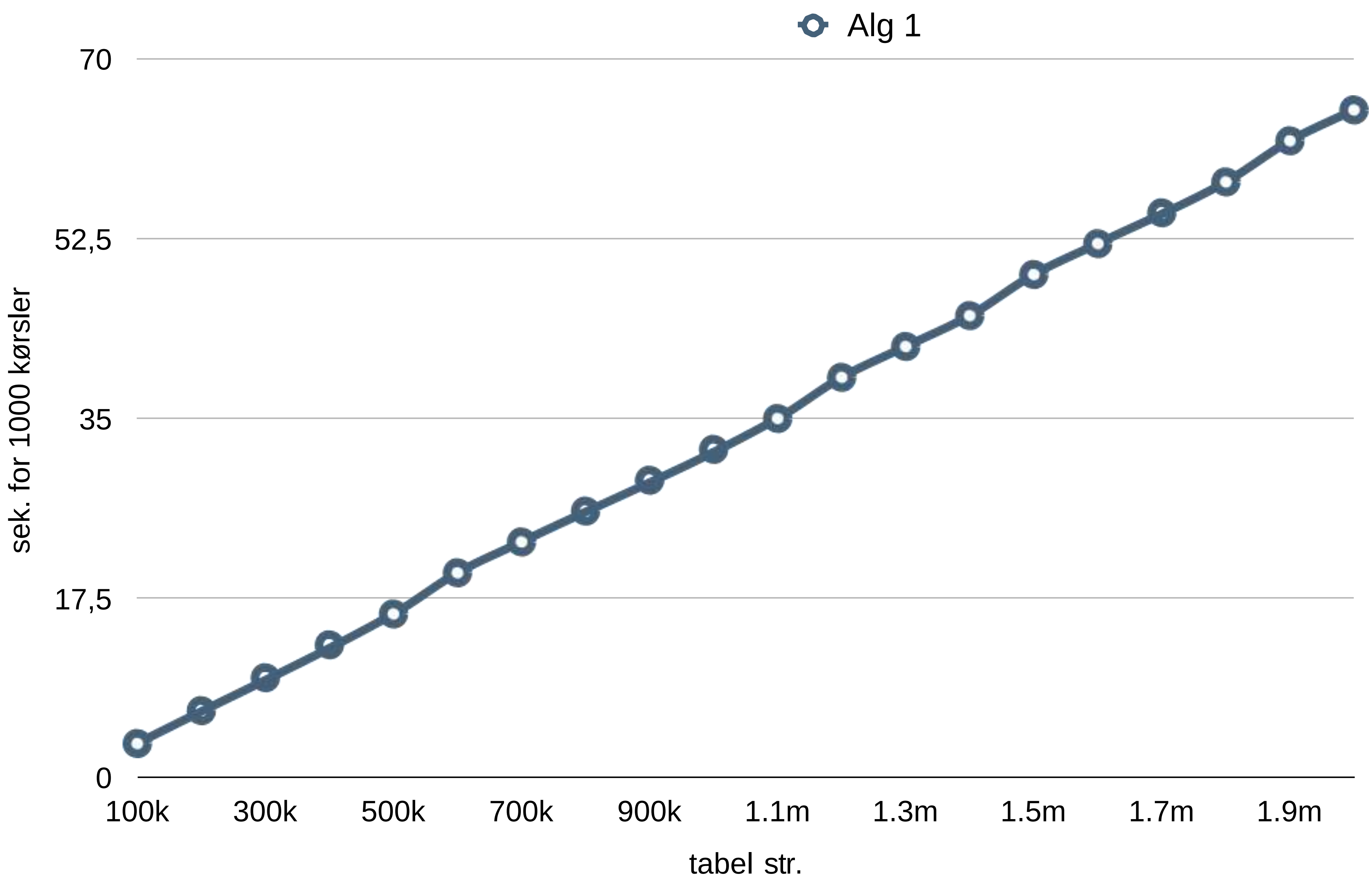
c_1

$(n-2) \cdot c_2$

c_3

$$T(n) = c_1 + (n-2) \cdot c_2 + c_3$$

- T(n) er en *lineær funktion* af n: T(n) = an + b, for passende konstanter a og b.
- Asymptotisk notation. $T(n) = \Theta(n)$
- Eksperimentiel analyse.
  - Hvad er køretid af algoritmen i praksis?
  - Hvordan passer den teoretisk analyse med praksis?


Alg 1
70
52,5
35
17,5
0
sek. for 1000 kørsler
100k
300k
500k
700k
900k
1.1m
1.3m
1.5m
1.7m
1.9m
tabel str.

Toppunkter

- Algoritme 1 finder et toppunkt i $\Theta(n)$ tid.
- Stemmer overens med praksis.
- Udfordring. Kan vi gøre det bedre?

Introduktion

- Algoritmer og datastrukturer
- Toppunkter
  - Algoritme 1
  - Algoritme 2
  - Algoritme 3

Algoritme 2

- Observation. Et (globalt) maksimalt tal i A er et toppunkt.
- Algoritme 2. Find et maksimalt tal i A med FindMax(A, n).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	7	15	17	11	2	3	6	8	7	5	9	5	23

```
FindMax(A, n)
    max = 0
    for i = 0 to n-1
        if (A[i] > A[max]) max = i
    return max
```

Teoretisk analyse

- Køretid. Hvad er køretiden T(n) for algoritmen?

```
FINDMAX(A, n)
    max = 0
    for i = 0 to n-1
        if (A[i] > A[max]) max = i
    return max
```

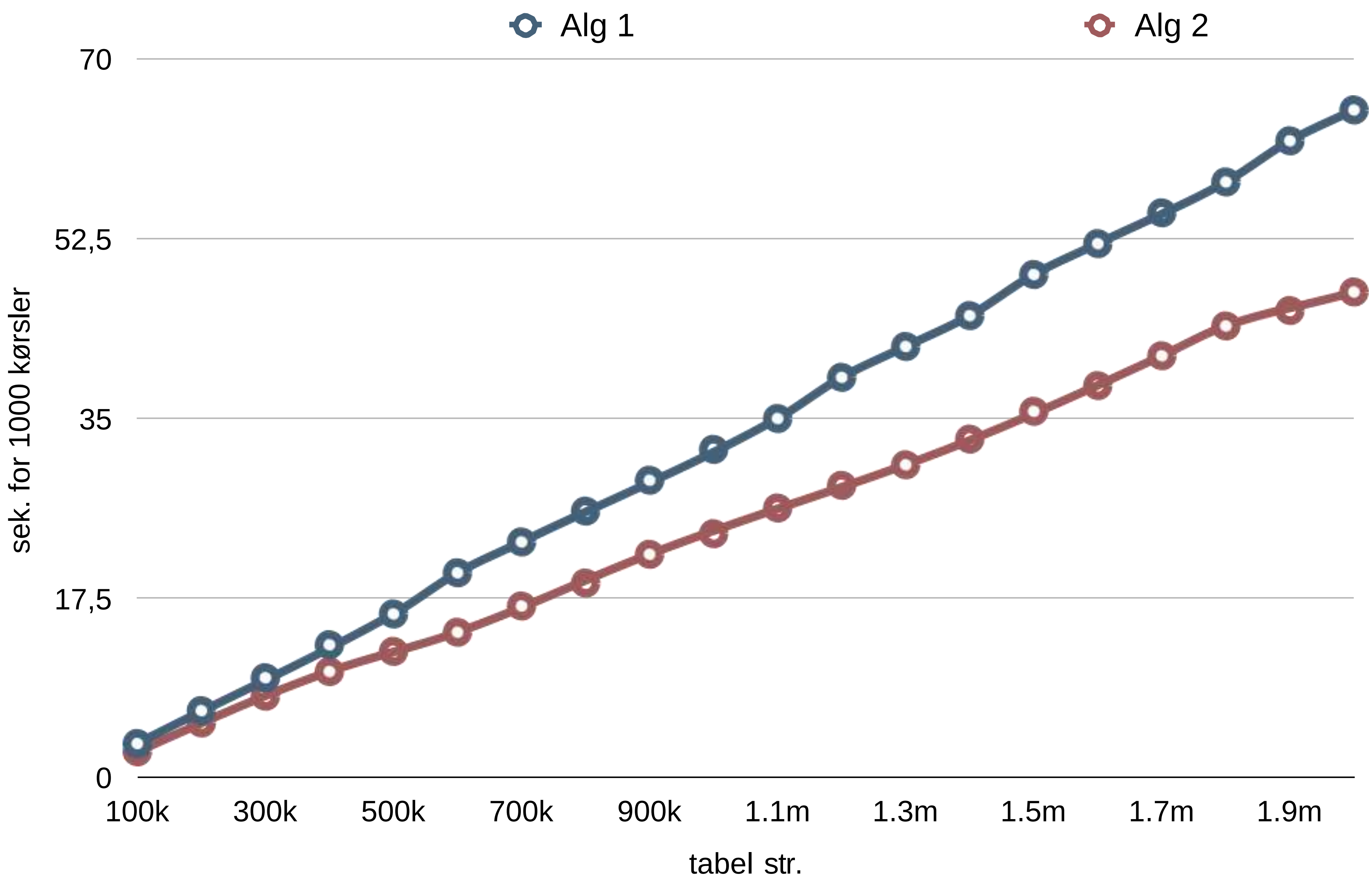
c_4

$n \cdot c_5$

c_6

$$T(n) = c_4 + n \cdot c_5 + c_6 = \Theta(n)$$

- Ekperimentiel analyse. Bedre konstanter?


Alg 1
Alg 2
70
52,5
35
17,5
0
sek. for 1000 kørsler
100k
300k
500k
700k
900k
1.1m
1.3m
1.5m
1.7m
1.9m
tabel str.

Toppunkter

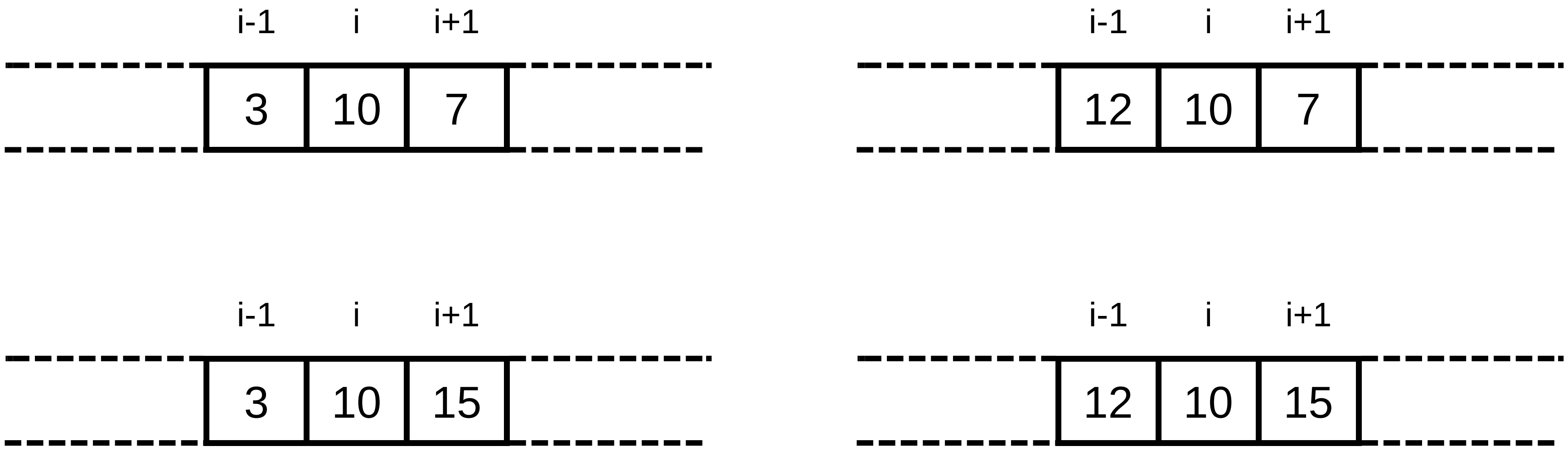
- Teoretisk
  - Algoritme 1 og 2 finder et toppunkt i $\Theta(n)$ tid.
- Eksperimentielt
  - Algoritme 1 og 2 kører i $\Theta(n)$ tid i praksis.
  - Algoritme 2 er en konstant faktor hurtigere end algoritme 1.
- Udfordring. Kan vi gøre det betydeligt bedre?

Introduktion

- Algoritmer og datastrukturer
- Toppunkter
  - Algoritme 1
  - Algoritme 2
  - Algoritme 3

Algoritme 3

- Snedig ide.
  - Kig på en vilkårlig indgang A[i] og dens naboer A[i-1] og A[i+1].
  - Hvor kan vi finde et toppunkt ifht. A[i]?
    - Naboer er ≤ A[i] $\Longrightarrow$ A[i] er toppunkt.
    - Ellers er A voksende i mindst en retning $\Longrightarrow$ der findes toppunkt i den retning.



- Udfordring. Hvordan kan vi bruge ide til at lave en effektiv algoritme?

Algoritme 3

- Algoritme 3.
  - Kig på midterste indgang A[m] og naboer A[m-1] og A[m+1].
  - Hvis A[m] er toppunkt, returner m.
  - Ellers fortsæt søgning rekursivt i halvdel af tabel hvor nabo er større end A[m].

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	7	15	17	11	2	3	6	8	7	5	9	5	23

Algoritme 3

- Algoritme 3.
  - Kig på midterste indgang A[m] og naboer A[m-1] og A[m+1].
  - Hvis A[m] er toppunkt, returner m.
  - Ellers fortsæt søgning rekursivt i halvdel af tabel hvor nabo er større end A[m].

```
TOPPUNKT3(A,i,j)
   m = rundeop((i+j)/2))
   if A[m] ≥ naboer return m
   elseif A[m-1] > A[m]
      return TOPPUNKT3(A,i,m-1)
   elseif A[m] < A[m+1]
      return TOPPUNKT3(A,m+1,j)
```

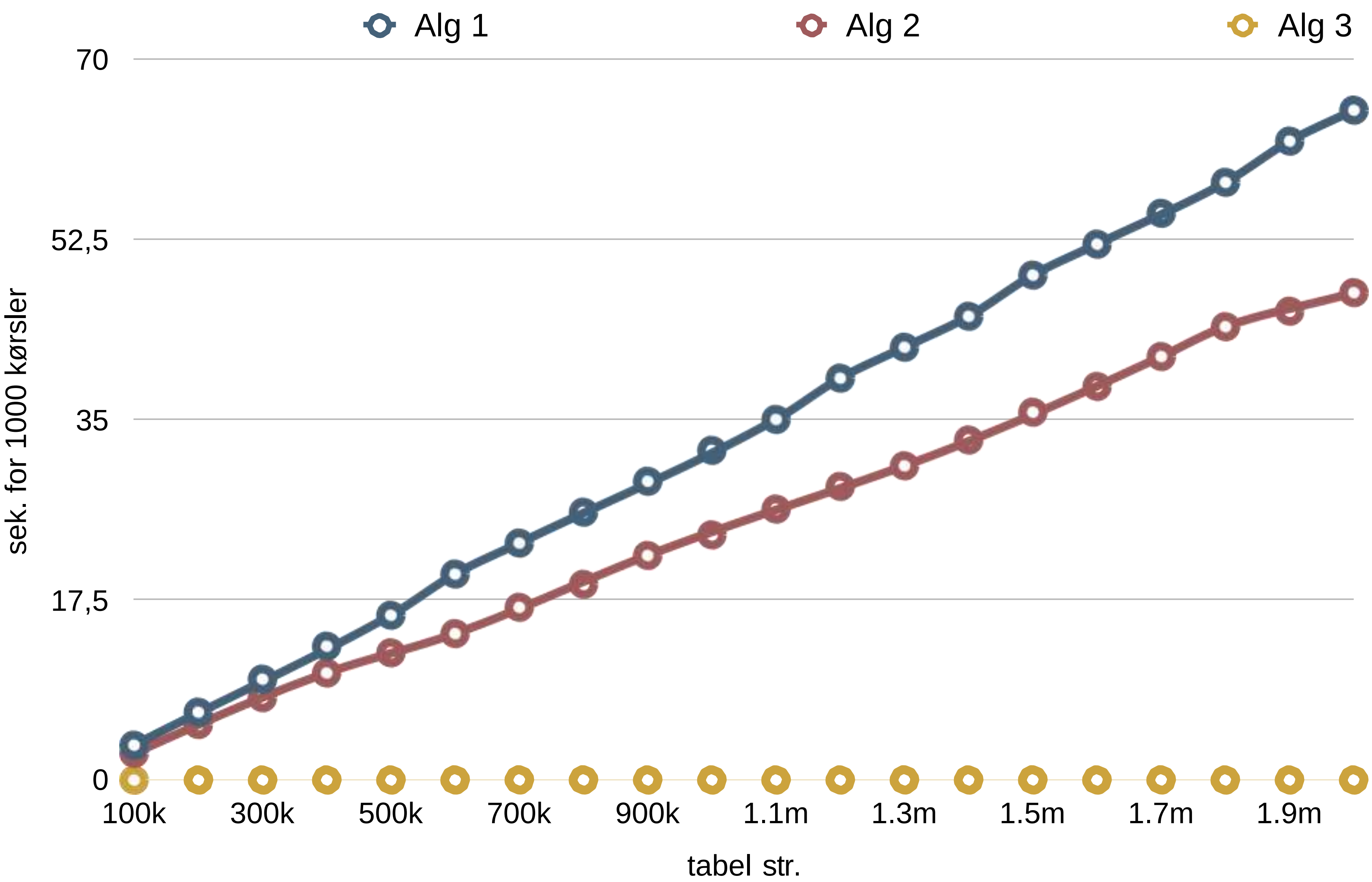
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3	7	15	17	11	2	3	6	8	7	5	9	5	23

Algoritme 3

- Køretid
- Et rekursivt kald tager constant tid.
- Hvor mange rekursive kald laver vi?

```
TOPPUNKT3(A,i,j)
   m = rundeop((i+j)/2))
   if A[m] ≥ naboer return m
   elseif A[m-1] > A[m]
      return TOPPUNKT3(A,i,m-1)
   elseif A[m] < A[m+1]
      return TOPPUNKT3(A,m+1,j)
```

- Et rekursivt kald halverer størrelsen af tabellen vi kigger på. Vi stopper når tabellen har størrelse 1.
  - 1. rekursive kald: n/2
  - 2. rekursive kald: n/4
  - ….
  - k'te. rekursive kald: $n/2^k$
  - ….
- $\Longrightarrow$ Efter ~$\log_2 n$ rekursive kald har tabellen størrelse ≤ 1.
- $\Longrightarrow$ Køretiden er $\Theta(\log n)$
- Ekperimentiel analyse. Betydeligt bedre?


Alg 1
Alg 2
Alg 3
70
52,5
35
17,5
0
sek. for 1000 kørsler
100k
300k
500k
700k
900k
1.1m
1.3m
1.5m
1.7m
1.9m
tabel str.

Toppunkter

- Teoretisk
  - Algoritme 1 og 2 finder et toppunkt i $\Theta(n)$ tid.
  - Algoritme 3 finder et toppunkt i $\Theta(\log n)$ tid.
- Eksperimentielt
  - Algoritme 1 og 2 kører i $\Theta(n)$ tid i praksis.
  - Algoritme 2 er en konstant faktor hurtigere end algoritme 1.
  - Algoritme 3 er meget, meget hurtigere end algoritme 1 og 2.