# DMA 2016

## –Ugeopgave 12 –

- Hele ugeopgaven skal besvares.
- Ugeopgaven skal afleveres mandag den 16. januar 2017 klokken 23:59 på Absalon.
- Hvis opgaven skal genafleveres vil I få det at vide senest mandag d. 23/1 og genafleveringsfristen vil være senest mandag d. 30/1. Vi afholder timer med hjælp til genafleveringer i ugen 23-27/1.
- Ugeopgaven skal laves i **grupper** af 3-4 personer.
- Besvarelsen skal udarbejdes i LaTeX.

Del 1 Vi får givet en vægtet orienteret graf $G = (V, E)$ hvor vægtene $w : E \to \mathbb{R}$ angiver sandsynligheder. Vi kan f.eks. forestille os at $G$ repræsenterer et kommunikationsnetværk og $w(\,(u, v)\,)$ er sandsynligheden for at forbindelsen mellem knude $u$ og $v$ ikke er afbrudt. $V$ kunne også være positioner på en bane i et paintball spil, og $w(\,(u, v)\,)$ sandsynligheden for ikke at blive ramt af en paintball kugle når man løber fra position $u$ til $v$.

Når $w$ repræsenterer sandsynligheder har vi $0 \leq w(e) \leq 1$ for alle $e \in E$ og vi antager yderligere at sandsynligheden er større end nul for alle kanter: $w(e) > 0$ for alle $e \in E$. Sandsynlighederne på en vej $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e_k$ antages at være uafhængige hvilket her betyder at den samlede sandsynlighed for vejen kan findes ved at gange sandsyndlighederne for hver kant sammen, dvs. $w(e_1)w(e_2)\cdots w(e_{k-1})w(e_k)$.

Vi er nu interesserede i at finde veje mellem knuder i $G$ med størst sandsynlighed, dvs. veje hvor $w(e_1)w(e_2)\cdots w(e_{k-1})w(e_k)$ er så stor som muligt. I eksemplerne ovenfor svarer det til en vej med størst sandsynlighed for uafbrudt forbindelse langs vejen i kommunikationsnetværket, eller vejen med størst sandsynlighed for ikke at blive ramt af en paintball kugle når man bevæger sig på banen.

(a) Lad $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e_k$ være en vej. Brug regnereglerne for logaritmefunktionen til at omskrive

$$-\log(w(e_1)w(e_2)\cdots w(e_{k-1})w(e_k))$$

til en *sum* hvor sandsynlighederne langs vejen indgår i hvert led.

(b) Brug udregningen i (a) til at lave en algoritme, der finder veje med størst sandsynlighed mellem knuder i $G$ *(hint: din algoritme kan være en let modificeret udgave af f.eks. Dijkstra's algoritme. Alternativt kan du starte med at modificere kantvægtene og derefter udføre Dijkstra's algortime).*

Del 2 Lad $G = (V, E)$ være en orienteret graf. Efter udførsel af bredde-først søgning BFS$(G, s)$ startet i en knude $s$ ved vi at $v.d$ indeholder det mindste antal kanter på en vej fra $s$ til $v$ for alle $v \in V$. Lad nu $w : E \to \mathbb{R}$ være en vægt-funktion hvor vægtene $w(e)$ er 1 for alle kanter, dvs. $w(e) = 1$, $\forall e \in E$. Dijkstra's algoritme Dijkstra$(G, w, s)$ kan bruges til at finde korteste veje i $G$ fra $s$ til alle andre knuder med vægtfunktionen $w$.

I det følgende lader vi $\delta_{\text{BFS}}(s, v)$ være det mindste antal kanter på en vej fra $s$ til $v$, og vi lader $\delta_{\text{SP}}(s, v)$ være længden af den korteste vej fra $s$ til $v$ med vægtfunktionen $w$.

(a) Forklar hvorfor kørsel af de to algoritmer BFS$(G, s)$ og Dijkstra$(G, w, s)$ giver det samme resultat når $w(e) = 1$ for alle $e \in E$, dvs. begge algoritmer resulterer i samme værdier $v.d$ i alle knuder. Brug definitionen af $\delta_{\text{BFS}}(s, v)$ og $\delta_{\text{SP}}(s, v)$.

(b) Forklar hvad det betyder at en knude er sort under udførslen af BFS og relater til hvad det betyder at en knude er i mængden $S$ under udførslen af Dijkstra's algoritme.

(c) BFS besøger alle knuder i afstand $k$ fra $s$ før den besøger knuderne med afstand $k + 1$ fra $s$. Argumenter for at Dijkstra's algoritme har følgende lignende egenskab når $w(e) = 1$ for alle $e \in E$:

Når en knude $u$ besøges er $\delta_{\text{BFS}}(s, u) \leq v.d$ for alle $v \in V \setminus S$, dvs. det mindste antal kanter på en vej fra $s$ til $u$ er mindre end eller lig "shortest path estimate" for alle knuder $v$ som ikke er i $S$.

*(hint: brug løkkeinvarianten CLRS s. 660 øverst til at relatere $u.d$ og $\delta_{\text{SP}}(s, u)$)*