

Set Cover – programowanie liniowe

Musimy stworzyć macierz z takim przypisaniem, żeby każda kolumna była opisana przez oddzielny podzbiór, natomiast wiersz przez każdy element z uniwersum. Jeśli dany element znajduje się w podzbiorze to w macierzy będzie 1, jeśli nie to dajemy 0.

Mając tak wypełnioną macierz, wystarczy ją zminimalizować: $\sum_{i=1}^n x_i$

Przykład:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$S_1 = \{1, 3, 4\}$

$S_2 = \{1, 2, 4\}$

$S_3 = \{2, 3, 4\}$

$S_4 = \{1, 2, 3\}$

$S_5 = \{5\}$

$S_6 = \{6, 7\}$

$S_7 = \{7\}$

Zaczynamy wypełnianie macierzy od S_1 . Wypełniamy kolumnę od góry na dół. Sprawdzamy czy S_1 zawiera element '1', ten element jest w podzbiorze więc w macierzy ląduje 1. Następnie sprawdzamy '2', okazuje się, że brak tego elementu w S_1 , więc w macierzy ląduje 0. Proces kontynuujemy do całkowitego wypełnienia macierzy.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7
1	1	1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	1	0	0	0
3	1	0	1	1	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	1	1

Można to także przedstawić w postaci równań:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + x_2 & + & x_4 \geq 1 \\
 & x_2 + x_3 + & x_4 \geq 1 \\
 x_1 & + & x_3 + x_4 \geq 1 \\
 x_1 + x_2 + x_3 & & \geq 1 \\
 & x_5 & \geq 1 \\
 & & x_6 \geq 1 \\
 & & x_6 + x_7 \geq 1
 \end{array}$$

Mając wypełnioną macierz wystarczy skorzystać z jakiegokolwiek solvera, np.
<https://comnuan.com/cmnn03/cmnn03004/>.

$$f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

Otrzymane wyniki są następujące:

$$x_1 = 0.3333 \quad x_2 = 0.3333 \quad x_3 = 0.3333 \quad x_4 = 0.3333 \quad x_5 = 1 \quad x_6 = 1 \quad x_7 = 0$$
$$f(x) = 3.3333$$

Interpretacja wyników jest następująca:

Jeśli w wyniku otrzymaliśmy 1 to podzbiór o danym indeksie jest naszym rozwiązaniem. W naszym przypadku będą to podzbiory: S_5, S_6 . Dodatkowo możemy dostać także wynik w postaci ułamkowej w takim wypadku do rozwiązania wędrują kombinacje podzbiorów. U nas będą to: S_1, S_2, S_3, S_4 .

Ostateczne możliwe wyniki:

S_1, S_2, S_5, S_6

S_1, S_3, S_5, S_6

S_1, S_4, S_5, S_6

S_2, S_3, S_5, S_6

S_3, S_4, S_5, S_6