Środowisko programisty

Projekt

Ciąg Fibonacciego

Autor:

Adam Makiewicz

Aktualna godzina i data:
18:04
21 grudnia 2014

Spis treści

Rozdział 1

Historia

1.1 Czym jest i jak powstał

Ciąg liczb naturalnych określony rekurencyjnie w sposób następujący:
Pierwszy wyraz jest równy 0, drugi jest równy 1, każdy następny jest sumą dwóch poprzednich. Ciąg został podany w 1202 roku przez Leonarda z Pizy zwanego Fibonaccim w swoim dziele Liber abaci jako rozwiązanie zadania o rozmnażaniu się królików. Nazwę "ciąg Fibonacciego" spopularyzował w XIX w. Édouard Lucas.[1]

1.2 Wzory

Jawny wzór na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego podany w roku 1843 przez J.P.M. Bineta możemy otrzymać, korzystając z metody funkcji tworzących.[2]

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

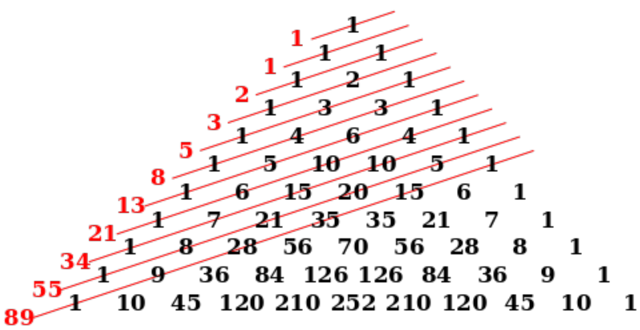
Można też wyrazić wartości kolejnych elementów ciągu za pomocą symbolu Newtona :

$$F_n = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k-1}$$

lub za pomocą Macierzy liczb Fibonacci'ego

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \times \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

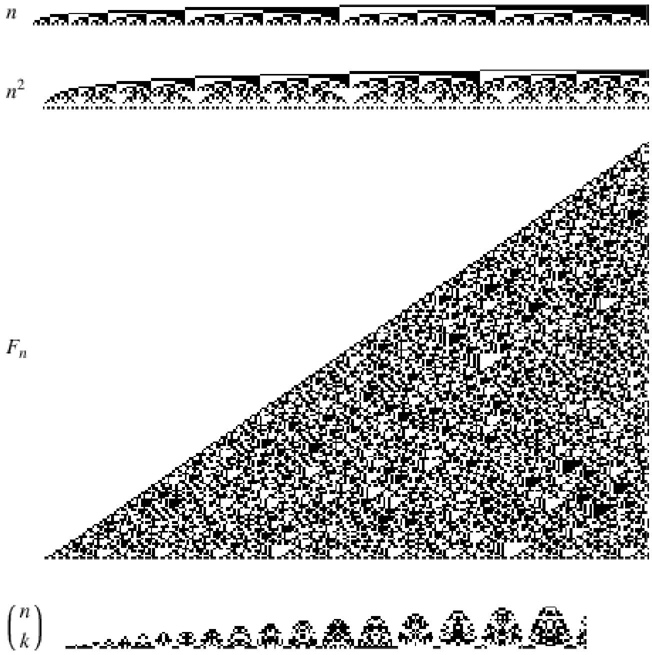
Oraz sumując liczby z Trójkąta Newtona:



Rysunek 1.1: Liczby Fibonacciego w Trojkacie Pascala

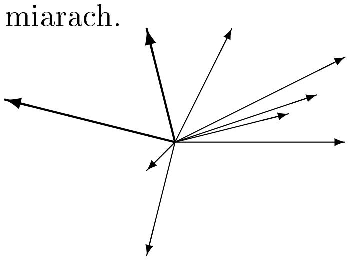
1.3 Graficzna reprezentacja Liczb Fibonacciego

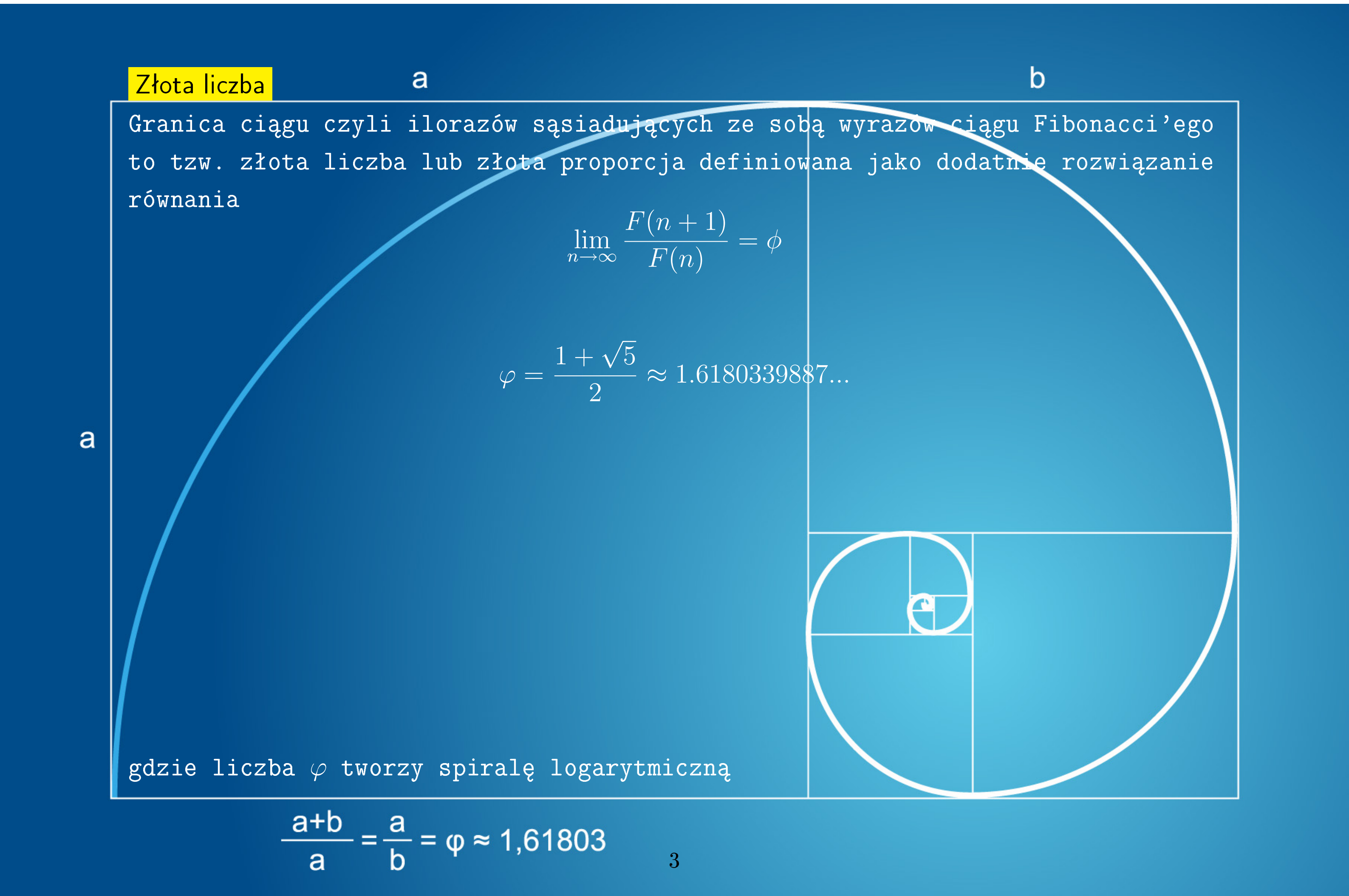
Jeśli kolejne wyrazy ciągu zapisać w systemie dwójkowym, jeden pod drugim, z wyrównaniem do prawej strony to otrzymamy wydłużający się w dół trójkąt, którego elementy powtarzają się ("czubek" pojawia się poniżej, przy prawej krawędzi, w coraz dłuższym rozwinięciu - pojawia się nad nim "biały trójkąt"), co czyni go podobnym do fraktala. W znaczeniu potocznym oznacza zwykle obiekt samo-podobny (tzn. taki, którego części są podobne do całości) albo "nieskończenie subtelny" (ukazujący subtelne detale nawet w wielokrotnym powiększeniu)Dla lepszej przejrzystości na rysunku obok wszystkie zera zastąpiono białymi punktami, a jedynki - czarnymi.



Rysunek 1.2: Trójkąt Pascala w zapisie binarnym

Można także przedstawić wektorowo w 3 wymiarach.





Złota liczba

Granica ciągu czyli ilorazów sąsiadujących ze sobą wyrazów ciągu Fibonacci'ego to tzw. złota liczba lub złota proporcja definiowana jako dodatnie rozwiązanie równania

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \phi$$

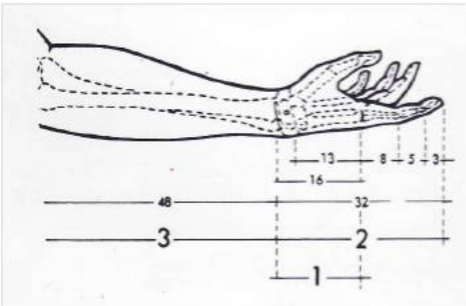
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887...$$

gdzie liczba φ tworzy spiralę logarytmiczną

Rozdział 2

Przykłady Liczb Fibonacciego w naturze

2.1 Ludzkie proporcje

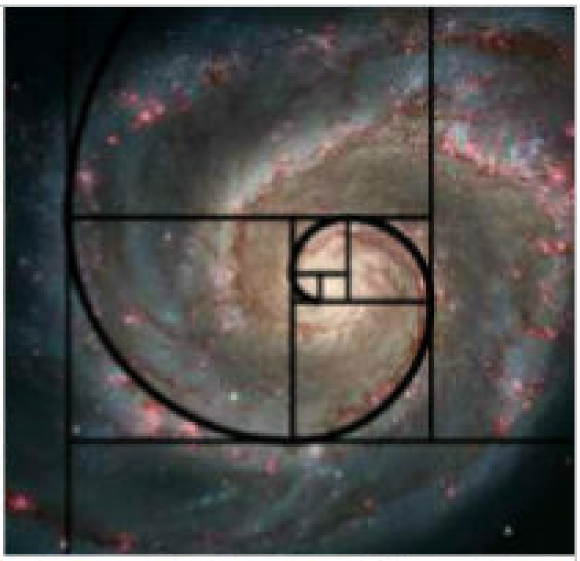
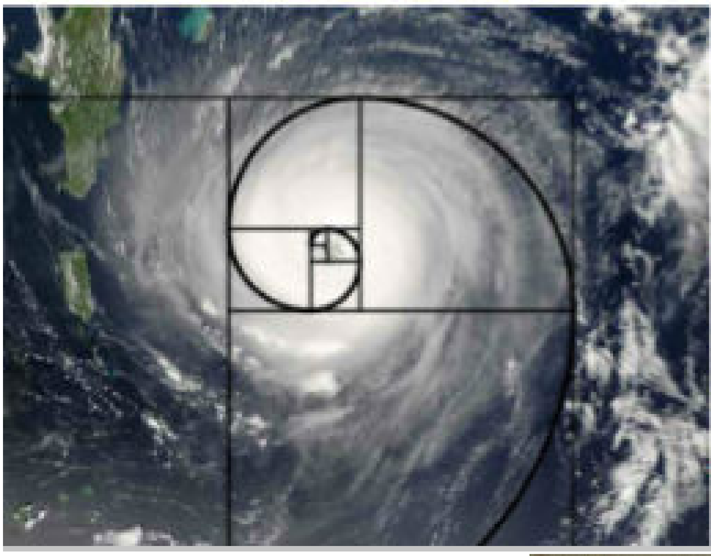


Stosunek długości kości:

1	1	2
3	5	8
13	21	34

Niektórzy doszukują się złotej proporcji wszędzie...

2.2 Przykłady z natury

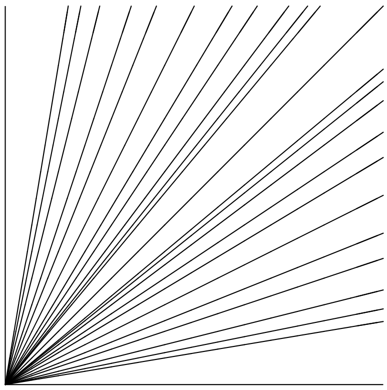





2.3 Fraktale

Fraktal (łac. fractus - złamany, cząstkowy, ułamkowy) w znaczeniu potocznym oznacza zwykle obiekt samo-podobny (tzn. taki, którego części są podobne do całości) albo "nieskończenie subtelny" (ukazujący subtelne detale nawet w wielokrotnym powiększeniu). Ze względu na olbrzymią różnorodność przykładów matematycy obecnie unikają podawania ścisłej definicji i proponują określać fraktal jako zbiór, który posiada wszystkie poniższe charakterystyki albo przynajmniej ich większość:[3]

- Ma nietrywialną strukturę w każdej skali,
- Struktura ta nie daje się łatwo opisać w języku tradycyjnej geometrii euklidesowej,
- Jest samo-podobny, jeśli nie w sensie dokładnym, to przybliżonym lub stochastycznym,

Na przykład linia prosta na płaszczyźnie jest formalnie samo-podobna, ale brak jej pozostałych cech i zwyczajowo nie uważa się jej za fraktal.



Bibliografia

[1] http://pl.wikipedia.org/wiki/Ci%C4%85g_Fibonacciego

[2] http://pl.wikipedia.org/wiki/Wz%C3%B3r_Bineta

[3] http://pl.wikipedia.org/wiki/Fraktal