

# Homework 5

Adam Niedziałkowski

26 December 2016

## 1 Problem

Projektowanie szerokopasmowej sieci dostępowej można przedstawić następująco (zapis jest celowo nadmiarowy): w pewnej lokalizacji między centralą a grupą klientów instaluje się węzeł pośredniczący, do którego od centrali doprowadza się kabel światłowodowy, a potem od niego rozprowadza sygnał za pomocą kabli miedzianych do klientów (np. z użyciem techniki xDSL). Węzeł pośredniczący dokonuje konwersji optyczno-elektrycznej i pracuje jako koncentrator. Użycie jak najkrótszego segmentu złożonego z kabli miedzianych byłoby korzystne dla klienta, ponieważ im krótszy taki segment, tym większa przepływność, ale z punktu widzenia operatora sensowne jest użycie jak nadszyszych odcinków już dawno położonej infrastruktury miedzianej (w związku z użyciem istniejącej infrastruktury pomijamy tutaj koszty położenia kabli). Przy założonej przepływności, która ma uzyskać każdy klient, długość okablowania miedzianego łączącego węzeł pośredniczący z klientem nie może być dłuższa niż  $R$  km. Z punktu widzenia topologii fizycznej sieć złożona z wierzchołków reprezentujących centrale, węzeł pośredniczący (węzły pośredniczące) oraz klientów jest drzewem. Problem polega na znalezieniu takiego umiejscowienia węzłów pośredniczących obsługujących wszystkich klientów, że pojedynczy węzeł pośredniczący może obsłużyć wszystkich przyłączonych klientów.

### 1.1 Oznaczenia

Oznaczenia:

$S$  – zbiór klientów,

$J$  – zbiór potencjalnych lokalizacji węzłów pośredniczących,

$J_s \subseteq J$  – zbiór lokalizacji, które znajdują się nie dalej niż  $R$  km od klienta  $s$ ,

$T_j$  – zbiór typów urządzeń dostępnych w węźle pośredniczącym, gdyby go ulokowano w lokalizacji,  $j$

$q_{jt}$  – liczba klientów, których urządzenie może obsłużyć;  $c_{jt}$  – koszt urządzenia.

### 1.2 Funkcja celu

$$\min \sum_{j \in J} \sum_{t \in T_j} c_{jt} y_{jt} \quad (1)$$

### 1.3 Ograniczenia

$$\forall_{s \in S} : \sum_{j \in J_s} x_{sj} = 1 \quad (2)$$

$$\forall_{j \in J} : \sum_{s \in S : j \in J_s} x_{sj} \leq \sum_{t \in T_j} q_{jt} y_{jt} \quad (3)$$

$$\forall_{j \in J} : \sum_{t \in T_j} y_{jt} \leq 1 \quad (4)$$

$$\forall_{s \in S} \forall_{j \in J_s} : x_{sj} \in \{0, 1\}; \forall_{j \in J} \forall_{t \in T_j} : y_{jt} \in \mathbb{Z}$$

### 1.4 Zadanie

#### 1.4.1 Znaczenie zmiennych

- $y_{jt}$  – zmienna całkowita określająca liczbę wykorzystanych urządzeń typu  $t$  w lokalizacji  $j$  (z (4) wynika, że jest binarna).
- $x_{sj}$  – zmienna binarna określająca do której lokalizacji przypisany jest klient.

#### 1.4.2 Interpretacja równań

1. Funkcja celu (1) to minimalizacja całkowitego kosztu potrzebnych urządzeń. Tzn sprawdzamy z których urządzeń korzystamy ( $y$ ) i sumujemy ich koszt ( $c$ ).
2. Równanie (2) to ograniczenie, mówiące o tym, że każdy klient korzysta z dokładnie jednej lokalizacji.
3. Ograniczenie (3) zostało dodane w celu upewnienia się, że liczba przypisanych klientów nie przekracza możliwości obsługi urządzenia ( $x \leq q$ )
4. Ostatnie ograniczenie (4) mówi o tym, że w danej lokalizacji montowane jest co najwyżej jedno urządzenie nadawcze.

#### 1.4.3 Metoda

Jedną z metod, która z których będzie korzystało dokładne rozwiązanie tego problemu jest branch-and-bound. Polega ona na podziale problemu na podproblemy (divide-and-conquer) w taki sposób, że dla nowego utworzonego podproblemu dodajemy nowe ograniczenie, dzieląc przestrzeń rozwiązań na dwie części (branch). Np. zakładamy że w podproblemie "a"  $x > 5$ , a w podproblemie "b"  $x \leq 5$ . Następnie próbujemy rozwiązać tak postawione zadanie. Jeżeli okazuje się, że tak powstała gałąź rozwiązań oferuje zawsze lepszą wartość funkcji celu niż pozostałe rozwiązania, możemy wtedy zawęzić przestrzeń rozwiązań do nowopostawionego problemu ograniczonego (bound).

Problem z tego zadania można by rozbić na dwa pod problemy w ten sposób: zakładamy, że dla Lokalizacji pierwszej:  $\sum_{t \in T_j} y_{jt} = 0$  czyli nie będzie w niej żadnego urządzenia. I jeżeli okaże się, że cena urządzeń w tej lokalizacji jest bardzo wysoka a także możliwe jest nieskorzystanie z tej stacji, wtedy można stwierdzić, że rozwiązanie należące do tej gałęzi będzie zawsze dawało lepszą wartość funkcji celu. W konsekwencji możemy drugą (pozostałą gałąź, gdzie:  $\sum_{t \in T_j} y_{jt} = 1$ ) odrzucić i już nie rozpatrywać. Co oczywiście upraszcza problem.

#### 1.4.4 Wpływ relaksacji

W przypadku relaksacji równania (4) możemy instalować więcej niż jedno urządzenie w danej lokalizacji. Biorąc pod uwagę, że funkcja celu opiera się wyłącznie na cenie, potencjalnie będziemy mogli użyć najtańszych urządzeń w całości systemu, czyli wartość funkcji celu dla zrelaksowanego problemu będzie nie gorsza (może być lepsza tj. mniejsza) niż w przypadku wyjściowym.

#### 1.4.5 Dualizacja

#### 1.4.6 Liście w topologii

Tak, jeżeli żaden z klientów nie będzie przypisany do danego węzła pośredniczącego, czyli:

$$\exists_{j \in J} \sum_{s \in S} x_{sj} = 0 \quad (5)$$

Stopień takiego węzła, zgodnie z definicją to  $1 : \deg j = 1$

#### 1.4.7 Korzeń topologii

Centrala będzie korzeniem takiej topologii. Przy czym, zależy to od interpretacji, potencjał za korzeń można by uznać dowolny wierzchołek grafu.

#### 1.4.8 Dane sprzeczne

Aby sformułowany problem był sprzeczny (nie miał rozwiązań) najłatwiej jest złamać ograniczenie (3), to znaczy by liczba klientów przekraczała sumaryczne możliwości obsługi wszystkich urządzeń np.:

$$|S| = 2 \quad (6)$$

oraz

$$\sum_{j \in J} \sum_{t \in T} q_{jt} = 1 \quad (7)$$

Z (6) wynika, że liczba klientów to 2, a z (7), że jesteśmy w stanie obsłużyć tylko jednego klienta. Q.E.D.