Homework 5

Adam Niedziałkowski

26 December 2016

1 Problem

Projektowanie szerokopasmowej sieci dostepowej można przedstawić nastepujaco (zapis jest celowo nadmiarowy): w pewnej lokalizacji miedzy cen- trala a grupa klientów instaluje sie wezeł pośredniczacy, do którego od cen- trali doprowadza sie kabel światłowodowy, a potem od niego rozprowadza sygnał za pomoca kabli miedzianych do klientów (np. z użyciem techniki xDSL). Wezeł pośredniczacy dokonuje konwersji optyczno-elektrycznej i pracuje jako koncentrator. Użycie jak najkrótszego segmentu złożonego z kabli miedzianych byłoby korzystne dla klienta, ponieważ im krótszy taki segment, tym wieksza przepływność, ale z punktu widzenia operatora sensowne jest użycie jak nadłuższych odcinków już dawno położonej in- frastruktury miedzianej (w zwiazku z użyciem istniejacej infrastruktury pomijamy tutaj koszty położenia kabli). Przy założonej przepływności, która ma uzyskać każdy klient, długość okablowania miedzianego łacza- cego wezeł pośredniczacy z klientem nie może być dłuższa niż R km. Z punktu widzenia topologii fizycznej sieć złożona z wierzchołków reprezen- tujacych centrale, wezeł pośredniczacy (wezły pośredniczace) oraz klien- tów jest drzewem. Problem polega na znalezieniu takiego umiejscowienia wezłów pośredniczacych obsługujacych wszystkich klientów, że pojedyn- czy wezeł pośredniczacy może obsłużyć wszystkich przyłaczonych klientów.

1.1 Oznaczenia

Oznaczenia:

$S-$ zbiór klientów,

$J-$ zbiór potencjalnych lokalizacji wezłów pośredniczacych,

$J_s \subseteq J-$ zbiór lokalizacji, które znajduja sie nie dalej niż R km od klienta s,

T_j- zbiór typów urzadzeń dostepnych w weźle pośredniczacym, gdyby go ulokowano w lokalizacji, j

$q_{jt}-$ liczba klientów, których urzadzenie może obsłużyć; $c_{jt}-$ koszt urzadzenia.

1.2 Funkcja celu

$$min \sum_{j \in J} \sum_{t \in T_j} c_{jt} y_{jt} \tag{1}$$

1.3 Ograniczenia

$$\forall_{s \in S} : \sum_{j \in J_s} x_{sj} = 1 \tag{2}$$

$$\forall_{j \in J} : \sum_{s \in S : j \in J_s} x_{sj} \leq \sum_{t \in T_j} q_{jt} y_{jt} \tag{3}$$

$$\forall_{j \in J} : \sum_{t \in T_j} y_{jt} \leq 1 \tag{4}$$

$\forall_{s \in S} \forall_{j \in J_s} : x_{sj} \in 0, 1; \forall_{j \in J} \forall_{t \in T_j} : y_{jt} \in_{Z_+}$

1.4 Zadanie

1.4.1 Znaczenie zmiennych

- $y_{jt}-$ zmienna całkowita określajaca liczbe wykorzystanych urzadzeń typu t w lokalizacji j (z (4) wynika, że jest binarna).
- $x_{sj}-$ zmienna binarna określajaca do której lokalizacji przypisany jest klient.

1.4.2 Interpretacja równań

1. Funkcja celu (1) to minimalizacja całkowitego kosztu potrzebnych urzadzeń. Tzn sprawdzamy z których urzadzeń korzystamy (y) i sumujemy ich koszt (c).
2. Równanie (2) to ograniczenie, mówiace o tym, że każdy klient korzysta z dokładnie jednej lokalizacji.
3. Ograniczenie (3) zostało dodane w celu upewnienia sie, że liczba przpisanych klientów nie przekracza możliwości obsługi urzadzenia ($x \leq q$)
4. Ostatnie ograniczenie (4) mówi o tym, że w danej lokalizacji montowane jest co najwyżej jedno urzadzenie nadawcze.

1.4.3 Metoda

Jedna z metod która z których bedzie korzystało dokładne rozwiazanie tego problemu jest branch-and-bound. Polega ona na podziale problemu na podproblemy (divide-and-conquer) w taki sposób, że dla nowego utworzonego podproblemu dodajemy nowe ograniczenie, dzielac przestrzeń rozwiazań na dwie cześci (branch) . Np. zakładamy że w podproblemie "a" $x > 5$, a w podproblemie "b" $x \leq 5$. Nastepnie próbujemy rozwiazać tak postawione zadanie. Jeżeli okazuje sie, że tak powstała gałaź rozwiazań oferuje zawsze lepsza wartość funkcji celu niż pozostałe rozwiazania, możemy wtedy zawezić przestrzeń rozwiazań do nowopostałego problemu ograniczonego (bound).

Problem z tego zadania można by rozbić na dwa pod problemy w ten sposób: zakładamy, że dla Lokalizacji pierwszej: $\sum_{t\in T_j} y_{jt} = 0$ czyli nie bedzie w niej żadnego urzadzenia. I jeżeli okaże sie, że cena urzadzeń w tej lokalizacji jest bardzo wysoka a także możliwe jest nieskorzystanie z tej stacji, wtedy można stwierdzić, że rozwiazanie należace do tej gałezi bedzie zawsze dawało lepsza wartość funckji celu. W konsekwencji możemy druga (pozostała gałaż, gdzie: $\sum_{t\in T_j} y_{jt} = 1$) odrzucić i już nie rozpatrywać. Co oczywiście upraszcza problem.

1.4.4 Wpływ relaksacji

W przypadku relaksacji równania (4) możemy instalować wiecej niż jedno urzadzenie w danej lokalizacji. Biorac od uwage, że funkcja celu opiera sie wyłacznie na cenie, potencjalnie bedziemy mogli użyć najtańszych urzadzeń w całości systemu, czyli wartość funckji celu dla zrelaksowanego problemu bedzie nie gorsza (może być lepsza tj. mniejsza) niż w przypadku wyjściowym.

1.4.5 Dualizacja

$$L(x,y,\lambda) = \sum_{j\in J}\sum_{t\in t_j} c_{jt}y_{jt} - \sum_{j\in J}\lambda_j\Big(\sum_{s\in S, j\in J_s} x_{sj} - \sum_{t\in T_j} q_{jt}y_{jt}\Big) \tag{5}$$

$$\lambda_j \geq 0, \tag{6}$$

$$W(\lambda) = \min_{x,y} L(x,y,\lambda) = \min_{x,y}\sum_{j\in J}\sum_{t\in T_j}(c_{jt}y_{jt} + \lambda_j q_{jt}y_{jt}) \tag{7}$$

$$-\sum_{j\in J}\sum_{s\in S, j\in J_s}\lambda_j x_{sj} = \min_{x} - \sum_{j\in J}\sum_{s\in S, j\in J_s}\lambda_s x_{sj} \tag{8}$$

A biorac pod uwage ograniczenie (2):

$$= -\sum_{s\in S}\max_{j\in J_s}\lambda_j \tag{9}$$

Wobec tego dualna funkcja celu ma postać:

$$\max W(\lambda) = \max - \sum_{s\in S}\max_{j\in J_s}\lambda_j \tag{10}$$

Czyli po uwaglednieniu ograniczenia (6)

$$\max W(\lambda) = 0 \tag{11}$$

1.4.6 Liście w topologii

Tak, jeżeli żaden z klientów nie bedzie przypisany do danego wezła pośredniczacego, czyli:

$$\exists_{j\in J}\sum_{s\in S} x_{sj} = 0 \tag{12}$$

Stopień takiego wezła, zgodnie z defnicja to $1 : \deg j = 1$

1.4.7 Korzeń topologii

Centrala bedzie korzeniem takiej topologi. Przy czym, zależy to od interpretacji, potencja za korzeń można by uznać dowolny wierzchołek grafu.

1.4.8 Dane sprzeczne

Aby sfromuowany problem był sprzeczny (nie miał rozwiazań) najłatwiej jest złamać ograniczenie (3), to znaczy by liczba klientów przekraczała sumaryczne możliwości obsługi wszystkich urzadzeń np.:

$$|S| = 2 \tag{13}$$

oraz

$$\sum_{j \in J} \sum_{tinT} q_{jt} = 1 \tag{14}$$

Z (6) wynika, że liczba klientów to 2, a z (7), że jesteśmy w stanie obsłużyć tylko jednego klienta. Q.E.D.