

Δυναμικές Διαταραχές σε
Πρωτοπλανητικούς Δίσκους
Κοσμικής Σκόνης Παρουσία
Γιγάντιου Πλανήτη

Πιθανή Ανίχνευση τους με την ALMA

Αδάμ Παρκοσίδης

Επιβλέποντες Καθηγητές:
Παπαδόπουλος Παντελής, Κλεομένης Τσιγάνης

Πτυχιακή εργασία για την απόκτηση
Bachelor of Physics



Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής
Τμήμα Φυσικής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Ελλάδα

Περίληψη

Οι πρωτοπλανητικοί δίσκοι, που περιβάλλουν νεαρούς αστέρες, αποτελούμενοι από νέφη αερίου και σκόνης είναι η μήτρα στην οποία γεννιούνται οι πλανήτες. Η διαδικασία ζεκινάει από τη συσσωμάτωση σωματιδίων σκόνης (της τάξης των μμ) και καταλήγει σε πλήρεις πλανήτες. Τα ολοένα και μεγαλύτερης μάζας σώματα, καθώς περιφέρονται σε ελλειπτικές τροχιές γύρω από τον αστέρα, “καθαρίζουν” την τροχιά τους από μικρότερα σωματίδια· είτε προσκολλώντας τα σε αυτά είτε διώχνοντας τα μέσω του φαινομένου της βαρυτικής σκέδασης. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να εμφανίζονται φαινομενικά κενοί, από σκόνη και αέριο, δακτύλιοι στο επίπεδο του δίσκου. Τέτοιοι δίσκοι γίνονται αντιληπτοί από την ισχυρή far-IR/submillimeter ακτινοβολία που εκπέμπουν. Το ποσό της απορροφούμενης και της εκπεμπόμενης (σε μεγαλύτερα μήκη κύματος) ακτινοβολίας καθορίζει την θερμοκρασία της σκόνης. Στην παρούσα εργασία θα κατασκευάσουμε, με επαγωγικό τρόπο, έναν επίπεδο, flat, πρωτοπλανητικό δίσκο σκόνης (χωρίς αέριο) με την παρουσία ενός γιγάντιου πλανήτη. Θεωρούμε ότι ο δίσκος έχει εξαντλήσει το απόθεμα αερίου του. Αρχικά θα μελετήσουμε μέσω αριθμητικών προσομοιώσεων τη δυναμική εξέλιξη των σωματιδίων του δίσκου, υπό την παρουσία του πλανήτη. Έπειτα θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε το προφίλ επιφανειακής πυκνότητας του δίσκου αποτυπώνοντας την ύπαρξη του πλανήτη στον δίσκο μέσω κάποιου “δείκτη”. Στη συνέχεια θα εκλέξουμε το μοντέλο ακτινοβολίας βάση του οποίου θα υπολογίσουμε την κατανομή θερμοκρασιών στον δίσκο θεωρώντας σφαιρικά σωματίδια ίδιας σύστασης και μεγέθους. Ακόμα προσεγγίζοντας το σύστημα ως “παρατηρητές” θα μελετήσουμε την κατανομή φασματικής ενέργειας του συστήματος (Spectral Energy Distribution) που λαμβάνουμε. Στο τέλος θα παράγουμε χάρτες κατανομής της θερμικής ακτινοβολίας σκόνης στην κυματική περιοχή των Millimeter/Submillimeter και πιο συγκεκριμένα στις βασικές συχνότητες της Attacama Large Millimeter Array (ALMA), καθώς αποτελεί το μοναδικό όργανο που μπορεί να αποκαλύψει την “ύπογραφή” ενός γιγάντιου πλανήτη στα δυναμικά χαρακτηριστικά μακρινών πρωτοπλανητικών δίσκων στον Γαλαξία μας.

Abstract

The protoplanetary discs that surround the new born stars, which consist of gas and dust, are the uterus in which new planets are born. The process starts with the aggregation of dust particles (of the μm range) and ends up in complete planets. The ever-increasing large mass bodies, as they rotate in elliptical orbits around the stars, “clear” their orbits from smaller particles either by attaching themselves to them or by the phenomenon of *gravitational scattering*. As a result, seemingly empty (of dust and gas) rings appear at the level of the disc. Such discs are perceived by the strong far-IR/submillimeter radiation they emit. The amount of absorbed and emitted (at longer wavelengths) radiation determines the temperature of the dust. In the present work we will inductively create a *flat* protoplanetary dust disc (without gas) in the presence of a giant planet. We consider that the disc has depleted its gas supply. Initially, we will go through numerical simulations to examine the dynamical evolution of the disc’s particles and then we will try to determine the disc’s surface density profile depicting the existence of the planet on the disc via a “pointer”. We will also choose the radiation model, on whose basis we will estimate the temperature distribution in the disc, in the presence of the planet, for spherical particles of the same composition and size. We then study the emergent Spectral Energy Distribution (SED) that we receive. Finally, we will produce maps with the distribution of the thermal radiation of the dust at the Millimeter/Submillimeter range and more specifically, at the basic frequencies of the Attacama Large Millimeter Array (ALMA), because this is the only instrument which can reveal the “signature” of a giant planet at the dynamical features of far away protoplanetary discs in our Galaxy.

Ευχαριστίες

Η εκπόνηση της παρούσας πτυχιακής διατριβής θα ήταν αδύνατη χωρίς την πολύτιμη βοήθεια και υποστήριξη που έλαβα από τους επιβλέποντες καθηγητές μου, κύριο Κλεομένη Τσιγάνη και κύριο Παντελή Παπαδόπουλο. Στο παραπάνω σύνολο θα ήθελα να προσθέσω τον Δόκτωρ Δημήτρη Σταματέλλο, (UCLan, Preston, UK), η προσφορά του οποίου ήταν εξαιρετικά σημαντική. Από την πλευρά μου θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου για την υπομονή, την εμπιστοσύνη τους αλλά και για τον χρόνο που μου αφιέρωσαν.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή	10
1.1 Βασικά στοιχεία Ουράνιας Μηχανικής	10
1.1.1 Στοιχεία της Τροχιάς	10
1.1.2 Συντονισμοί	13
1.2 Πεδίο Ακτινοβολίας	17
1.2.1 Βασικά Μεγέθη Διάδοσης Ακτινοβολίας	17
1.2.2 Ιδιότητες Μελανού Σώματος	19
1.2.3 Διάδοση Ακτινοβολίας	20
1.2.4 Αλληλεπίδραση Μεταξύ Ακτινοβολίας και Σωματιδίων της Σκόνης	22
1.3 Πρωτοπλανητικοί Δίσκοι	25
1.3.1 Δημιουργία και Γενικά Χαρακτηριστικά	25
1.3.2 Φυσικά Χαρακτηριστικά και Δομή του Δίσκου	25
1.3.3 Σκόνη των Πρωτοπλανητικών Δίσκων	27
1.4 Αριθμητική Προσομοίωση	27
1.4.1 Solar System Integration Software Package- SWIFT	27
1.5 Παρατηρήσεις σε Υψηλές Ραδιοσυχνότητες	30
1.5.1 Συνέλιξη	30
1.5.2 Atacama Large Millimeter Array-ALMA	30
2 Αρχικές Συνθήκες	34
2.1 Μονάδες Μέτρησης	34
2.2 Επιλογή Αρχικής Θέσης του Πλανήτη	35
2.3 Δημιουργία Δίσκου-Παράμετροι Ολοκλήρωσης	36
2.4 Παράμετροι της Σκόνης	38
3 Δυναμική Εξέλιξη του Συστήματος	39
3.1 Προφίλ Επιφανειακής Πυκνότητας	39
4 Κατανομή της Εκπεμπόμενης Ακτινοβολίας	48
4.1 Επιλογή Πεδίου Ακτινοβολίας	48
4.2 Υπολογισμός της Θερμοχρασίας Ισορροπίας της Σκόνης του Δίσκου	49
5 Φασματική και Χωρική Κατανομή της Εκπεμπόμενης Ακτινοβολίας	52
5.1 Φασματική Κατανομή της Ισχύος	52
5.2 Κατανομή Λαμπρότητας	58
6 Παρατηρήσεις και Συμπεράσματα	63

Κατάλογος Σχημάτων

1.2	Τα Στοιχεία της Τροχιάς ενός Σώματος	12
1.3	Αριθμητική Κατανομή Αστεροειδών της Κύριας Ζώνης	15
1.4	Τριπλος Συντονισμός 1:2:4 μεταξύ των τριών εκ των τεσσάρων Γαλιλαϊκών δορυφόρων του Δία	16
1.5	Ορισμός της Ειδικής Έντασης της Ακτινοβολίας	18
2.1	Δίσκος της Κατανομής των Test Particles τη Χρονική Στιγμή $t_0 = 0 \text{ sec}$ (Initial Disk)	37
3.1	Δίσκος τη Χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ Myrs}$	39
3.2	Γενικό Προφίλ Αριθμητικής Πυκνότητας της Κατανομής	42
3.3	Μέσος Όρος του Αριθμού των Test Particles σε κάθε Δακτύλιο Dr_i Με κόκκινο χρώμα δίνεται η $N_{max}(r)$, με πράσινο η N_{min} και ο MeanN μπλέ	45
3.4	Επιφανειακή Πυκνότητα σε κάθε Δακτύλιο Dr_i Συναρτήσει της Απόστασης Με κόκκινο χρώμα δίνεται η $\Sigma_{max}(r)$, με πράσινο η $\Sigma_{min}(r)$ και ο $\Sigma(r)$ μπλέ	46
3.5	Επιφανειακή Πυκνότητα σε κάθε Δακτύλιο Dr_i , όπου $r \geq 1AU$ Συναρτήσει της Απόστασης Με κόκκινο χρώμα δίνεται η $\Sigma_{max}(r)$, με πράσινο η $\Sigma_{min}(r)$ και ο $\Sigma(r)$ μπλέ	47
5.1	Φασματική Κατανομή Ακτινοβολίας του Συστήματος Ήλιου-Δίσκου . .	53
5.2	Φασματική Κατανομή Ακτινοβολίας του Συστήματος Ήλιου-Δίσκου-2 . .	54
5.3	Μονοχρωματική ροή ακτινοβολίας του συστήματος	54
5.7	Απεικόνιση του δίσκου απόστασης 100pc στα 870GHz	59
5.8	Απεικόνιση του δίσκου απόστασης 100pc στα 650GHz	59
5.9	Απεικόνιση του δίσκου απόστασης 100pc στα 460GHz	60
5.10	Απεικόνιση του δίσκου απόστασης 100pc στα 325GHz	60
5.11	Απεικόνιση του δίσκου απόστασης 100pc στα 230GHz	60
5.12	Απεικόνιση εσωτερικού τμήματος του δίσκου απόστασης 100pc	61

Κατάλογος Πινάκων

1	Πίνακας Φυσικών Σταθερών	9
2	Πίνακας Αστρονομικών Σταθερών	9
1.1	Μέγιστη διαχριτική υκανότητα του ALMA για τις διάφορες συχνότητες με $\vartheta_{MRS} > 0.408\text{arcsec}$ (ακτινική διάμετρος του δίσκου)	33
1.2	Μέγιστη διαχριτική υκανότητα του ALMA για τις διάφορες συχνότητες με $\vartheta_{MRS} < 0.408\text{arcsec}$ (ακτινική διάμετρος του δίσκου)	33
2.1	Αρχικές τιμές των στοιχείων της τροχιάς του Δία	35
2.2	Οι 15 διαφορετικές κατανομές που αποτελούν τον δίσκο των test particles	36
2.3	Αρχικές τιμές των στοιχείων της τροχιάς των test particles	36
2.4	Οι Φυσικές Παράμετροι των Σωματιδίων της Σκόνης	38
3.1	Παράμετροι σκαναρίσματος για την εξαγωγή του γενικού προφίλ αριθμητικής πυκνότητας του δίσκου την $t_1 = 10 \text{ Myrs}$	41
3.2	Τιμές των Διαφόρων Παραμέτρων “Σκαναρίσματος” του Δίσκου	44
3.3	Παράμετροι Διαχωρισμού του Δίσκου- “Σκαναρίσματος”	44

Σταθερές

Φυσικές Σταθερές	Τιμές και Μονάδες Μέτρησεις
Παγκόσμια Σταθερά	$G = 6.6673 \times 10^{-8} \frac{cm^3}{gsec^2}$
Ταχύτητα του φωτός στο κενό	$c = 2.99792 \times 10^{10} \frac{cm}{sec}$
Σταθερά του Planck	$h = 6.6261 \times 10^{-27} erg sec$
Σταθερά του Boltzmann	$k = 1.3807 \times 10^{-16} \frac{erg}{K}$
Σταθερά του Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5.6711 \times 10^{-5} \frac{erg}{cm^2 sec K^4}$
Σταθερά της ακτινοβολίας	$a = 7.5667 \times 10^{-15} \frac{erg}{cm^3 K^4}$

Πίνακας 1: Πίνακας Φυσικών Σταθερών

Αστρονομικές Σταθερές	Τιμές και Μονάδες Μέτρησεις
Αστρονομική Μονάδα	$1AU = 1.4959 \times 10^{13} cm$
Parsec	$1pc = 206265 AU$
Μάζα Ήλιου	$1M_{\odot} = 1.99 \times 10^{33} g$
Ακτίνα Ήλιου	$1R_{\odot} = 6.955 \times 10^{10} cm$
Ηλιακή Σταθερά	$l_{\odot} = 1.366 \times 10^6 \frac{erg}{cm^2 sec}$
Μάζα Γης	$1M_{\oplus} = 5.98 \times 10^{27} g$

Πίνακας 2: Πίνακας Αστρονομικών Σταθερών

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικά στοιχεία Ουράνιας Μηχανικής

1.1.1 Στοιχεία της Τροχιάς

Η κίνηση των πλανητών περιγράφεται από τους τρεις περίφημους **νόμους του Kepler**, οι οποίοι ερμηνεύουν την γεωμετρία της τροχιάς και την φαινόμενη κίνηση των πλανητών, χωρίς όμως να αποκαλύπτουν το αίτιο της κίνησης. Σύμφωνα με αυτούς:

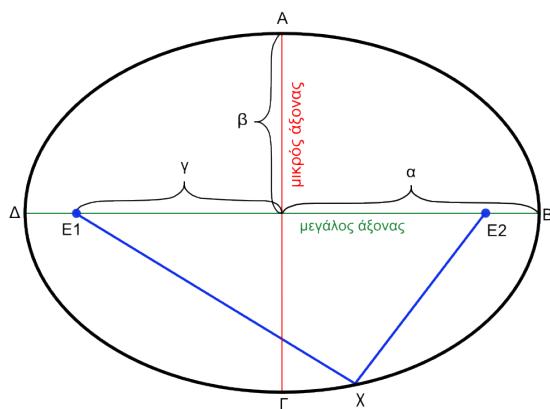
1. Οι τροχιές των πλανητών είναι επίπεδες ελλείψεις, με τον Ήλιο να βρίσκεται στη μια εστία.
2. Η κίνηση γύρω από τον Ήλιο γίνεται με σταθερή εμβαδική ταχύτητα.
3. Τα τετράγωνα των περιόδων περιφοράς των πλανητών, T , είναι ανάλογα των κύβων των μεγάλων ημιαξόνων, α , της τροχιάς τους.

$$T^2 = \frac{(4\pi^2)\alpha^3}{G(M+m)} \quad ^1 \tag{1.1.1}$$

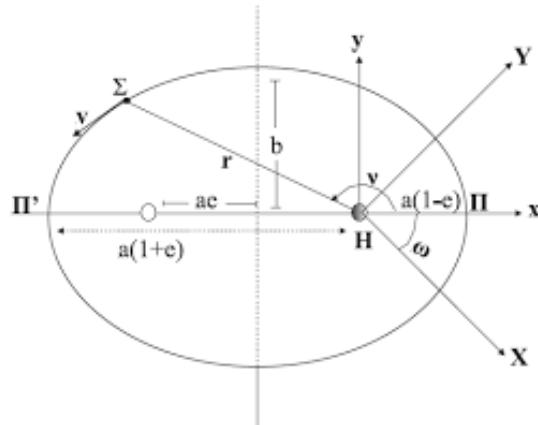
Οι παραπάνω νόμοι διέπουν την κίνηση περιφοράς ενός πλανήτη ή ενός δορυφόρου ή και ενός μικρότερου σώματος γύρω από το ελκτικό του κέντρο στο διάστημα, καθώς τα σώματα μικρότερης μάζας, m , είναι δέσμια από το βαρυτικό πεδίο του μεγαλύτερου σώματος μάζας M (ελκτικό κέντρο).

Στη συνέχεια της εργασίας θα μιλήσουμε για την κίνηση τέτοιων σωμάτων γύρω από το ελκτικό τους κέντρο, οπότε οι παραπάνω νόμοι θα μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι.

¹ G η Παγκόσμια σταθέρα, M η μάζα του ελκτικού κέντρου-στην περίπτωση αυτή του αστέρα-, m η μάζα του πλανήτη



(α') Ελλειψη



(β') Ελλειπτική τροχιά Πλανήτη γύρω από τον Ήλιο

Προκειμένου να μελετήσουμε την τροχιά ενός σώματος στο χώρο ή καλύτερα να γνωρίζουμε την ακριβή του θέση σε αυτόν, συναρτήσει του χρόνου, χρειάζεται να εισάγουμε έξι μεταβλητές, μια για κάθε βαθμό ελευθερίας. Για αυτό το λόγο, ορίζουμε τα στοιχεία της τροχιάς, ένα σύνολο έξι μεταβλητών που χρησιμοποιούνται όχι μόνο για την περιγραφή του σχήματος και τον πλήρη ορισμό του προσανατολισμού της ελλειπτικής τροχιάς αλλα και για τη θέση του σώματος πάνω σε αυτήν.

Πιό συγκεκριμένα ορίζουμε:

1. Τα δύο πρώτα στοιχεία σχετίζονται με το σχήμα της έλλειψης.
 - i Το **μεγάλο ημιάξονα** της έλλειψης, a , που αποτελεί το άθροισμα του περικέντρου² ή περιηλίου και του **αποκέντρου**³ ή αφηλίου διαιρούμενο δια δύο, Σχήμα: [1.1α'](#).
 - ii Την **εκκεντρότητα** της έλλειψης, e , που ορίζεται ως ο λόγος της απόστασης της εστίας από το κέντρο (γ) προς τον μεγάλο ημιάξονα της a , Σχήμα: [1.1α'](#). Η εκκεντρότητα σχετίζεται με το σχήμα της έλλειψης και η τιμή της κυμαίνεται από $0 \leq e < 1$. Όσο πλησιάζει στο μηδέν τείνει να γίνει κύκλος άρα και η ελλειπτική τροχιά τείνει να γίνει κυκλική.
2. Τα επόμενα τρία στοιχεία σχετίζονται με τον προσανατολισμό της έλλειψης.
 - iii Την **κλίση** του επιπέδου της τροχιάς, i , που ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζει το επίπεδο της τροχιάς ενός σώματος με το επίπεδο αναφοράς $x - y$. Ως επίπεδο αναφοράς συνήθως επιλέγεται το επίπεδο της **εκλειπτικής**⁴ και οι τιμές του i κυμαίνονται από $0 - 180$ μοίρες, Σχήμα: [1.2](#).
 - iv Το **μήκος** του **αναβιβάζοντος** συνδέσμου, Ω , το οποίο ορίζεται στο επίπεδο αναφοράς $x - y$ (εκλειπτική) ως η γωνία μεταξύ του άξονα Οχ και της γραμμής των συνδέσμων. Η γραμμή των συνδέσμων αποτελεί την τομή

²Το σημείο μιας ελλειπτικής τροχιάς που βρίσκεται πιο κοντά στην εστία αναφοράς, ευθύγραμμο τμήμα **ΗΠ** Σχήμα: [1.1β'](#)

³Το σημείο μιας ελλειπτικής τροχιάς που βρίσκεται πιο μακριά από την εστία αναφοράς, ευθύγραμμο τμήμα **ΗΠ'** Σχήμα: [1.1β'](#)

⁴Εκλειπτική ονομάζεται το επίπεδο περιφοράς της Γής γύρω από τον Ήλιο

μεταξύ του επιπέδου αναφοράς $x - y$ (εκλειπτική) και της έλλειψης (επίπεδο της τροχιάς του σώματος), Σχήμα: 1.2. Ο άξονας Οχ συνήθως επιλέγεται ώστε να συμπίπτει με τη διεύθυνση του μέσου εφρινού σημείου γ^5 .

v Το όρισμα του περιηλίου, ω , που ορίζεται στο επίπεδο της ελλειπτικής τροχιάς ως η γωνία μεταξύ της γραμμής των συνδέσμων και της θέσης του περιηλίου της τροχιάς, Σχήμα: 1.2 .

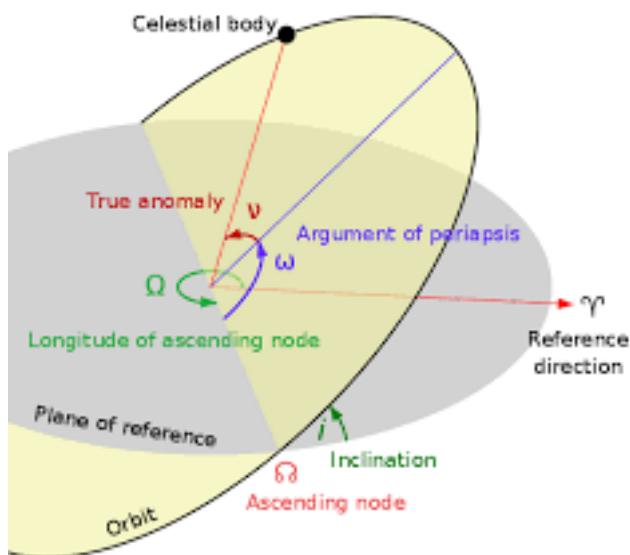
3. Το τελευταίο στοιχείο σχετίζεται με τη θέση του σώματος επι της έλλειψης.

vii Η αληθής ανωμαλία n , που ορίζεται στο επίπεδο της ελλειπτικής τροχιάς ως η γωνία μεταξύ της γραμμής των αψίδων και της επιβατικής ακτίνας του σώματος, Σχήμα: 1.2 ή αντίστοιχα στο Σχήμα: 1.1β'. Η n αυξάνει κατα τη φορά κίνησης του σώματος.

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι αντί της αληθής ανωμαλίας n συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέση ανωμαλία M , η οποία έχει διαστάσεις γωνίας και ορίζεται ως $n(t - t_p) = M$,όπου

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (1.1.2)$$

και ορίζεται ως η μέση (γωνιακή) συχνότητα περιφοράς του σώματος ή μέση κίνηση. Ουσιαστικά μας δίνει τη θέση ενός ιδεατού κινητού που ακολουθεί ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας a , με συχνότητα περιφοράς ίση προς τη μέση κίνηση n της πραγματικής τροχιάς.



Σχήμα 1.2: Τα Στοιχεία της Τροχιάς ενός Σώματος

Στην περίπτωση που η κλίση είναι μηδέν $i = 0$ ή αντίστοιχα το επίπεδο της τροχιάς του σώματος ταυτίζεται με το επίπεδο αναφοράς $x - y$ τα στοιχεία Ω και ω βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Για την αποφυγή αυτής της σύγχυσης ορίζουμε το μήκος του

⁵Το σημείο της Ουράνιας Σφαίρας στο οποίο φαίνεται να βρίσκεται ο Ήλιος από τη Γή κατα τη στιγμή της εαρινής ισημερίας του Βόρειου Ήμισφαρίου της

περιηλίου ω , το οποίο έχει διαστάσεις γωνίας και δίνεται ως $\omega = \Omega + \omega$. Εύκολα διωρίνει κανείς ότι στην περίπτωση $i \neq 0$ η γωνία ω αποτελεί μια “σπαστή” γωνία σε δύο επίπεδα (απεικονίζεται ως ω για $i = 0$ στο Σχήμα: 1.1β', απεικονίζεται για $i \neq 0$ στο Σχήμα: 1.2).

Ακόμα, στην περίπτωση μηδενικής εκκεντρότητας της τροχίας του σώματος $e = 0$ (ισοδύναμα στην περίπτωση κυκλικής τροχιάς) η μέση ανωμαλία M δεν ορίζεται· καθώς δεν ορίζεται ο χρόνος διάβασης του περικέντρου t_p και τόσο η εμβαδική όσο και η γραμμική ταχύτητα του σώματος είναι σταθερές. Για την αποφυγή αυτής της σύγχυσης ορίζουμε το μέσο μήκος λ , όπου $\lambda = M + \omega$.

Τα έξι στοιχεία της τροχιάς $(\alpha, e, i, \Omega, \omega, M)$ βρίσκονται σε αντιστοιχία με τις έξι παραμέτρους που χρησιμοποιούνται στην Μηχανική (x, y, z, u_x, u_y, u_z) , τις συνιστώσες δηλαδή των διανυσμάτων θέσης και ταχύτητας, ώστε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια τις αρχικές συνθήκες της κίνησης.

1.1.2 Συντονισμοί

Μελετώντας τώρα τις τροχιές των ουράνιων σωμάτων στο διάστημα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι εμφανίζονται διάφοροι συντονισμοί στην κίνηση τους. Οι συντονισμοί μπορούν να διαχριθούν σε διάφορες κατηγορίες, δύο από αυτές είναι:

1. Αιώνιοι Συντονισμοί (*secular resonance*)
2. Συντονισμοί μέσης κίνησης (*mean notion resonance*)

→ Η πρώτη κατηγορία αναφέρεται σε αυτούς που σχετίζονται με τον συντονισμό της συχνότητας μετάπτωσης του περιηλίου, (g) , του μήκους αναβιβάζοντος συνδέσμου, (s) , ή κάποιου γραμμικού συνδυασμού των δύο συχνοτήτων μετάπτωσης. Αυτοί μπορούν να προκαλέσουν μεταβολές στην κλίση και στην εκκεντρότητα της τροχιάς ενός σώματος σε μεγάλες χρονικές κλίμακες.

Ένα παράδειγμα για αυτή την κατηγορία αποτελεί ο αιώνιος συντονισμός $g_H : g_J = 1 : 1$, όπου η συχνότητα μετάπτωσης του περιηλίου του Ερμή είναι σχεδόν ίδια με τη συχνότητα μετάπτωσης του περιηλίου του Δία.

→ Η δεύτερη κατηγορία συντονισμών αναφέρεται σε αυτούς που σχετίζονται με τις περιόδους κίνησης δύο ή και περισσότερων σωμάτων (για περισσότερα από δύο σώματα ονομάζονται συντονισμοί Laplace). Όταν ο λόγος της μέσης κίνησης του ενός σώματος ω προς το άλλο ισούται με ένα λόγο μικρών ακεραίων της μορφής $\frac{p}{p+q}$, όπου p και q ακέραιοι, τότε τα σώματα βρίσκονται σε συντονισμό τάξης q . Τέτοιου είδους συντονισμοί μπορούν είτε να αποσταθεροποιήσουν είτε να σταθεροποιήσουν την τροχιά ενός σώματος ανάλογα με το μέγεθος τους αλλά και με το πόσο κοντά θα οδηγηθούν τα σώματα σε αυτόν (ακριβής τιμή του συντονισμού) ή όχι. Προφανώς αν οδηγηθούν σε ακριβή τιμή του συντονισμού η επιρροή του - είτε ως προς αστάθεια είτε ως προς σταθεροποίηση του συστήματος- μεγιστοποιείται.

Καθώς ένα σώμα περιφέρεται γύρω από το ελκτικό του κέντρο η μέση κίνηση του σώματος είναι αντιστρόφως ανάλογη της περιόδου περιφοράς, (1.1.2). Άρα μπορούμε να πούμε ισοδύναμα ότι όταν ο λόγος της περιόδου περιφοράς του ενός σώματος, ως προς του άλλου, ισούται με ένα λόγο μικρών ακέραιων της μορφής $\frac{p}{p+q}$, τότε τα σώματα

βρίσκονται σε συντονισμό τάξης q .

Η γεωμετρία ενός συντονισμού μέσης κίνησης

Για να γίνει πιο κατανοητή η γεωμετρία ενός συντονισμού μέσης κίνησης ωστε να γίνει μια μικρή ανάλυση μέσω ενός απλοϊκού συλλογισμού.

Ας υποθέσουμε ότι ένας αστεροειδής της κύριας ζώνης είναι σε συντονισμό ($p+q : p$) = 2 : 1, τάξης $q = 1$ με τον Δία. Για λόγους απλότητας θεωρούμε ότι η τροχιά του Δία είναι κυκλική, συνεπίπεδη με αυτή του αστεροειδή και αγνούμε τις διαταραχές (ή παρέλξεις) που προκαλεί η μεταξύ τους βαρυτική αλληλεπίδραση. Έστω τώρα ότι την χρονική στιγμή $t = 0 \text{ sec}$ τα δύο σώματα βρίσκονται σε σύνοδο, στο περίκεντρο της τροχιάς του αστεροειδή. Τότε τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{2}T_J$ ο αστεροειδής έχει συμπληρώσει μια πλήρη περιφορά γύρω από τον Ήλιο και έχει επιστρέψει στην αρχική του θέση ενώ ο Δίας μισή περιφορά και βρίσκεται στην διεύθυνση του απογείου της τροχιάς του αστεροειδή. Την χρονική στιγμή $t = T_J$ ο Δίας έχει επιστρέψει στην αρχική του θέση έχοντας συμπληρώσει μια πλήρη περιφορά και ο αστεροειδής βρίσκεται εκ νέου στην αρχική του θέση έχοντας συμπληρώσει άλλη μια πλήρη περιφορά (συνολικά δύο πλήρεις περιφορές). Τελικά μετά από χρόνο $t = T_J$ η αρχική διάταξη επαναλαμβάνεται. Ουσιαστικά αν ο αστεροειδής της κύριας ζώνης είναι σε συντονισμό $p+q : p$ με τον Δία, η αρχική διάταξη επαναλαμβάνεται κάθε $p+q$ πλήρεις περιφορές του αστεροειδή γύρω από τον Ήλιο.

Συντονισμοί και λόγος μεγάλων ημιαξόνων των τροχιών

Ας θεωρήσουμε δύο σώματα με μάζες m, m' , με μεγάλους ημιαξονες α, α' και με συνεπίπεδες τροχιές, τα οποία περιφέρονται γύρω από κοινό ελκτικό κέντρο μάζας M . Επίσης ας αγνοήσουμε τις διαταραχές που προκαλεί η μεταξύ τους βαρυτική αλληλεπίδραση. Η μάζα m αναφέρεται στο εσωτερικό σώμα ενώ η m' στο εξωτερικό, δηλαδή $\alpha < \alpha'$. Τότε η συνθήκη συντονισμού για τα δύο σώματα είναι:

$$\frac{n'}{n} = \frac{p}{p+q}, \text{ όπου } p \text{ και } q \text{ ακέραιοι [8, Chap. 8, Sect. 8.2]} \quad (1.1.3)$$

Μέσω της σχέση (1.1.1) προκύπτει:

$$\left(\frac{T}{T'}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^3 \frac{M+m'}{M+m} \quad (1.1.4)$$

Ας πάμε ένα βήμα παραπέρα και ας υποθέσουμε ότι τα δύο σώματα αναφέρονται σε δύο πλανήτες του Ήλιου μας Συστήματος (έστω τον Δία και τον Κρόνο) και ότι το κεντρικό σώμα αντιστοιχεί στον ίδιο τον Ήλιο. Τότε καθώς ισχύει $m \ll M$ και $m' \ll M$ συνεπάγεται ότι:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \left(\frac{T}{T'}\right)^{2/3} \quad (1.1.5)$$

και μέσω της (1.1.2) μπορεί να εκφραστεί ώστε:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \left(\frac{n'}{n}\right)^{2/3} \quad (1.1.6)$$

Ο συνδυασμός των (1.1.3) και (1.1.6):

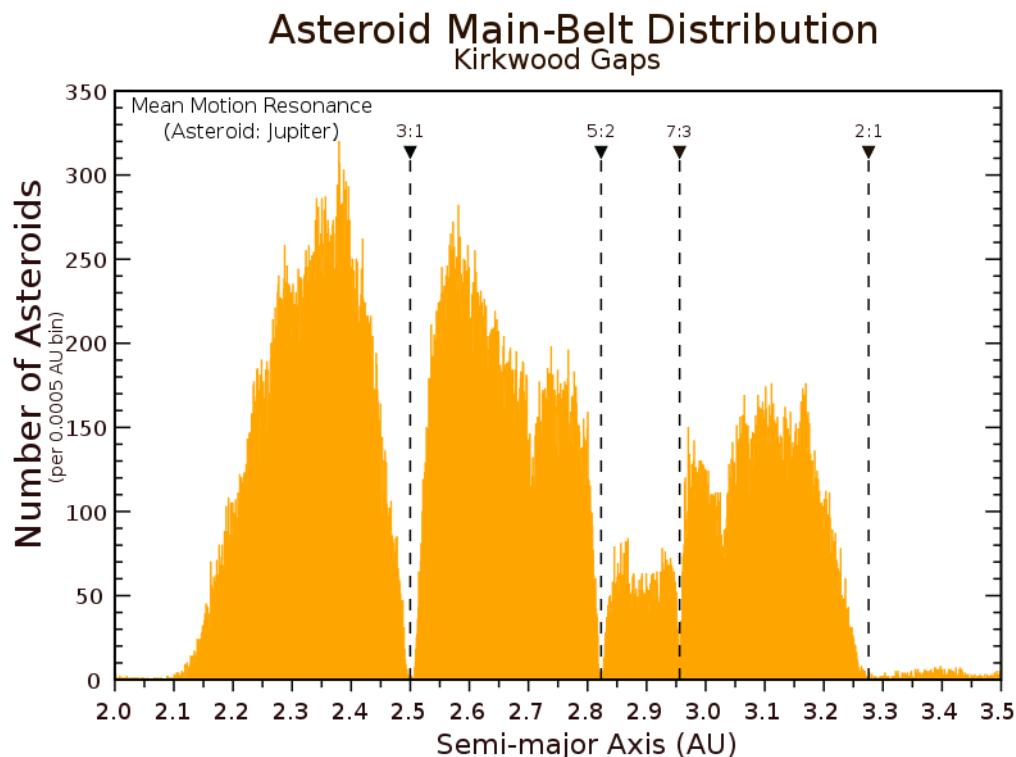
$$\frac{p}{p+q} = \left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^{3/2}, \text{ όπου } p \text{ και } q \text{ ακέραιοι} \quad (1.1.7)$$

μας δείχνει ότι η συνθήκη συντονισμού για τα δύο σώματα μπορεί να εκφραστεί και μέσω του λόγου των μεγάλων ημιαξόνων της τροχιάς τους, ο οποίος αν ικανοποιεί την (1.1.7) τα σώματα βρίσκονται σε συντονισμό $p + q : p$, τάξης q .

Για δεδομένες τιμές της περιόδου περιφοράς των δύο πλανητών και του μεγάλου ημιαξονα της τροχιάς του Δία η λύση της (1.1.7) ως προς α' ουσιαστικά μας δίνει την τιμή που θα έπρεπε έχει ο μεγάλος ημιαξόνας του Κρόνου ώστε να ισχυεί συντονισμός.

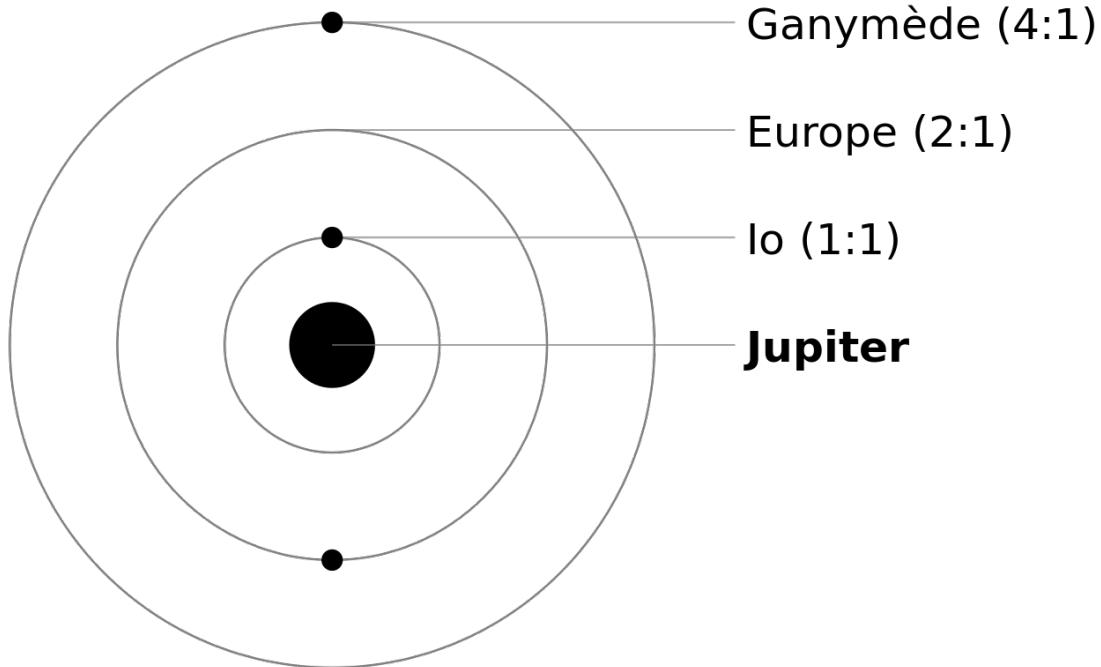
Όπως αναφέραμε η ύπαρξη συντονισμών μέσης κίνησης μπορούν είτε να αποσταθεροποιήσουν είτε να σταθεροποιήσουν την τροχιά ενός σώματος.

Ένα παράδειγμα αποσταθεροποίησης της τροχιάς σωμάτων αποτελούν οι συντονισμοί 4:1, 3:1, 5:2, 7:3 και 2:1 των αστεροειδών της κύριας ζώνης με τον Δία. Αστεροειδείς της ζώνης με μεγάλους ημιαξονες α που εμπίπτουν στους παραπάνω συντονισμούς έχουν ασταθείς τροχιές με αποτέλεσμα να διαφεύγουν από τη ζώνη. Το φαινόμενο αυτό είναι τόσο έντονο ώστε η αριθμητική πυκνότητα αστεροειδών συναρτήσει της απόστασης α εμφανίζει απότομα ελάχιστα που αγγίζουν μηδενικές τιμές πυκνότητας, Σχήμα: 1.3. Το φαινόμενο παρατήρησε πρώτος ο Kirkwood (1867), για αυτό και ονομάζονται διάκενα του Kirkwood (Kirkwood gaps).



Σχήμα 1.3: Αριθμητική Κατανομή Αστεροειδών της Κύριας Ζώνης

Ένα παράδειγμα σταθεροποίησης της τροχίας σωμάτων αποτελούν οι συντονισμοί τριών εκ των τεσσάρων Γαλιλαϊκων δορυφόρων του Δία. Πιο συγκεκριμένα οι δορυφόροι Γανυμήδης, Ευρώπη και Ιό σχηματίζουν τριπλό συντονισμό ή συντονισμό *Laplace*, με αποτέλεσμα οι τροχίες τους να έχουν λόγο περιόδων 1:2:4. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε μια πλήρη περιφορά του Γανυμήδη γύρω από τον Δία η Ευρώπη εκτελεί δύο και η Ιό τέσσερις, Σχήμα: 1.4.



Σχήμα 1.4: Τριπλος Συντονισμός 1:2:4 μεταξύ των τριών εκ των τεσσάρων Γαλιλαϊκων δορυφόρων του Δία

Ενώ αρχικά οι παλιρροιογόνες δυνάμεις του Δία προς αυτούς αλλα και η μεταξύ τους βαρυτική αλληλεπίδραση μετέβαλλαν τους μεγάλους ημιάξονες α των τροχιών τους με διαφορετικό ρυθμό και ως εκ τουτο ο λόγος των περιόδων περιφοράς άλλαζε με συνεχή τρόπο πιθανόν να βρίσκονταν μακριά από κάποιο συντονισμό και με την πάροδο του χρόνου να βρεθηκαν σε συντονισμό (*resonance trapping*). Ξέρουμε όμως [10, Chap. 1, Sect. 1.8], ότι τελικά το σύστημα “χλειδώθηκε” σε αυτό το συντονισμό και πια οι όποιες μεταβολές των τροχιών λόγω παλιρροιας, γίνονται με τέτοιον τρόπο ώστε ο λόγος των περιόδων να διατηρείται σταθερός.

1.2 Πεδίο Ακτινοβολίας

Πεδίο ακτινοβολίας ονομάζεται ο χώρος όπου υπάρχει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Αυτή μπορεί να εκπέμπεται, να απορροφάται ή και απλός να διαδίδεται στο χώρο αυτό. Από τον παραπάνω όρισμο καταλαβαίνουμε ότι η έννοια του πεδίου ακτινοβολίας καλύπτει μεγάλο εύρος περιπτώσεων, ώστε ένας τέτοιος χώρος να μπορεί να θεωρηθεί η ατμόσφαιρα ενός πλανήτη, ένα μεσοαστρικό μέσο, ένα αστέρι κ.ο.κ.

1.2.1 Βασικά Μεγέθη Διάδοσης Ακτινοβολίας

Η κατανομή θερμοκρασιών σε ένα δίσκο σκόνης εξαρτάται έντονα από την ακτινοβολία του αστέρα, ο οποίος περιβάλλεται από τον δίσκο. Η ακτινοβολία αρχικά εκπέμπεται από τον αστέρα, διαδίδεται, απορροφάται από τα σωματίδια της σκόνης θερμαίνοντας τον δίσκο και στη συνέχεια μέρος της ακτινοβολίας επανεκπέται από αυτά. Προκειμένου να μελετήσουμε την παραπάνω διαδικασία πρέπει να ορίσουμε συγκεκριμένα μεγέθη.

- *Ροή της Ακτινοβολίας*

Ας υποθέσουμε μια στοιχειώδη επιφάνεια dA , η ενέργεια ανα μονάδα επιφάνειας και ανα μονάδα χρόνου ορίζει την *ροή της ακτινοβολίας* που περνάει από αυτή την επιφάνεια:

$$F = \frac{dE}{dAdt}, \frac{\text{erg}}{\text{sec cm}^2} \quad (1.2.1)$$

Φυσικά η ενέργεια αυτή είναι ηλεκτρομαγνητικής φύσης, άρα είναι σημαντικό το μήκος κύματος ή αντίστοιχα η συχνότητα της ακτινοβολίας ώστε να προσδιορίσουμε το ποσό της ενέργειας που περνάει από την επιφάνεια. Οι σχέσεις συνδέονται με τη γνωστή σχέση $E = h\nu$ ή αντίστοιχα $E = \frac{h}{\lambda}$, όπου h η σταθερά του Planck.

Η σχέση (1.2.1) ορίστηκε για την ενέργεια σε όλα τα μήκη κύματος και ονομάζεται *βολομετρική ροή*, συνήθως όμως μας ενδιαφέρει η ροή της ακτινοβολίας σε ένα συγκεκριμένο εύρος μηκών κύματος (ή αντίστοιχα συχνοτήτων). Έτσι ορίζουμε την *μονοχρωματική ροή*:

$$F_\nu = \frac{dE}{dAdtd\nu}, \frac{\text{erg}}{\text{sec cm}^2 \text{Hz}} \quad (1.2.2)$$

και προφανώς οι δύο ποσότητες συνδέονται μέσω των σχέσεων:

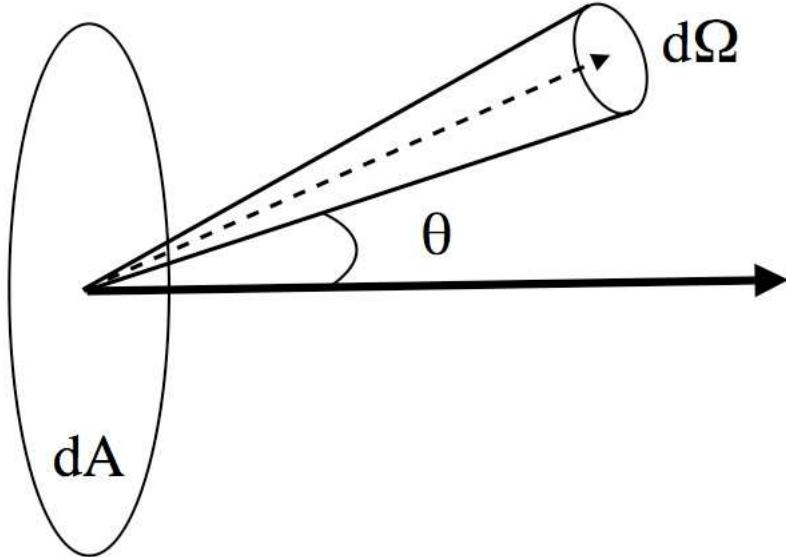
$$F = \int_0^\infty F_\lambda d\lambda, \quad F = \int_0^\infty F_\nu d\nu \quad (1.2.3)$$

Στο σημείο αυτό ορίζουμε ως μονάδα μέτρησης της μονοχρωματικής ροής, F_λ , το Jansky, όπου $1Jy = 10^{-23} \text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1}$

- *Ειδική Ένταση της Ακτινοβολίας*

Η ροή της ακτινοβολίας αναφέρεται στην συνολική ενέργεια που μεταφέρουν όλα τα φωτόνια, από όλες τις διευθύνσεις, καθώς διασχίζουν μια επιφάνεια. Όταν μελετάμε την διάδοση της ακτινοβολίας μας ενδιαφέρει η ενέργεια που μεταφέρεται σε μια συγκεκριμένη διεύθυνση. Έτσι χρησιμοποιούμε την ειδική ένταση της ακτινοβολίας, η οποία αποτελεί το βασικό μέγεθος της θεωρίας διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων και ορίζεται ως:

$$I_\nu = \frac{dE_\nu}{\cos \theta dA dt d\nu d\Omega}, \quad \text{erg sec cm}^2 \text{ Hz ster} \quad (1.2.4)$$



Σχήμα 1.5: Ορισμός της Ειδικής Έντασης της Ακτινοβολίας

Έστω πάλι η στοιχειώδης επιφάνεια dA από την οποία περνούν ακτίνες, με διάνυσμα κατέυθυνσης \vec{n} , οι οποίες εμπεριέχονται σε μια στοιχειώδη στερεά γωνία $d\Omega$. Η ενέργεια αυτή που περνάει από την επιφάνεια dA (και μεταφέρεται από τις ακτίνες εντός της στερέας γωνίας $d\Omega$) σε ένα συγκεκριμένο έυρος συχνοτήτων, $d\nu$, ανα μονάδα χρόνου, dt , ορίζεται από την ειδική έντασης της ακτινοβολίας. Η γωνία θ είναι η γωνία μεταξύ του κάθετου διανύσματος στην στοιχειώδη επιφάνεια dA και του μοναδιαίου διανύσματος \vec{n} , που ορίζει την στερέα γωνία μέσα στην οποία διαδίδεται η ακτινοβολία.

Από τις (1.2.2) και (1.2.4) παρατηρούμε ότι τα δύο μεγέθη συνδέονται έτσι ώστε:

$$F_\nu = \int_{\Omega_s} I_\nu \cos \theta d\Omega \quad (1.2.5)$$

- Μέση Ένταση της Ακτινοβολίας

Η μέση ένταση της ακτινοβολίας είναι η μέση τιμή της ειδικής έντασης της ακτινοβολίας, ολοκληρωμένη σε στερεά γωνία $d\Omega$, δηλαδή:

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu(\vec{n}) d\Omega \quad (1.2.6)$$

Το μέγεθος αυτό έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, διότι όπως θα δουμε παρακάτω καθορίζει την θέρμανση των στερεών σωματιδίων της σκόνης.

1.2.2 Ιδιότητες Μελανού Σώματος

Ένα υλικό, θερμοκρασίας T , εκπέμπει ακτινοβολία. Όταν η ύλη και η ακτινοβολία έρθουν σε Θερμοδυναμική Ισορροπία, η οποία επιτυγχάνεται αφού ένα φωτόνιο αλληλεπιδράσει πολλές φορές με την ύλη (οπτικά αδιαφανές μέσο), τότε η ειδική ένταση της ακτινοβολίας του δίνεται από την συνάρτηση Planck.

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (1.2.7)$$

Η οποία φυσικά μπορεί να εκφραστεί και σαν συνάρτηση του μήκους κύματος

$$I_\lambda = B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (1.2.8)$$

όπου η θερμοκρασία μπορεί να είναι και συνάρτηση της θέσης μέσα στο υλικό $T = T(r)$.

Το πεδίο ακτινοβολίας μελανού σώματος είναι ένα ομοιόμορφο και ισοτροπικό πεδίο ακτινοβολίας σε θερμοδυναμική ισορροπία και μέσω των σχέσεων (1.2.6) και (1.2.7) η μέση ένταση της ακτινοβολίας του είναι:

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} I_\nu d\Omega = \frac{I_\nu}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega = I_\nu = \frac{1}{4\pi} \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \int_{4\pi} d\Omega = B_\nu(T) \quad (1.2.9)$$

Από τις σχέσεις (1.2.5) και (1.2.7) ολοκληρώνοντας για σφαιρικές συντεταγμένες στη μισή σφαίρα:

$$F_\nu^+ = I_\nu \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \pi I_\nu = \pi \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (1.2.10)$$

Ακόμα οι ολικές ποσότητες προκύπτουν εύκολα αν ολοκληρώσουμε σε όλο το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα. Η ολική ένταση της ακτινοβολίας που προέρχεται από μια σφαιρική επιφάνεια είναι:

$$I = \int_0^\infty I_\nu d\nu = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (1.2.11)$$

όπου $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 c^2 h^3}$ η σταθερά του Stefan-Boltzmann.

Από τις σχέσεις (1.2.10) (1.2.11) ολική θετική ροή:

$$F^+ = \int_0^\infty F_\nu^+ d\nu = \sigma T^4 \quad (1.2.12)$$

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα του μελανού σώματος είναι η εξής:
Το μήκος κύματος, λ_{max} , στο οποίο η εκπομπή γίνεται μέγιστη εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία, T .

$$\lambda_{max} = \frac{0.2898}{T} \text{ cm} \quad (1.2.13)$$

Η παραπάνω σχέση ορίζει ορίζεται ως Νόμος του Wien και προκύπτει αν θέσουμε ίση με το μηδέν την πρώτη παράγωγο της (1.2.8) ως προς το μήκος κύματος λ . Φυσικά ο νόμος του Wien μπορεί να εκφραστεί αντίστοιχα και συναρτήση της συχνότητας.

1.2.3 Διάδοση Ακτινοβολίας

Μια από τις υεμελειώδεις ιδιότητες της ειδικής έντασης της ακτινοβολίας, I_ν , είναι ότι η τιμή της δε μεταβάλλεται με την απόσταση στον κενό χώρο του διαστήματος. Έστω ότι ακολουθούμε μια ακτίνα που διαδίδεται στον κενό χώρο και διανύει απόσταση s , τότε αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = 0 \quad (1.2.14)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι υψηστης σημασίας και παίζει κεντρικό ρόλο στη διάδοση της ακτινοβολίας.

Καθώς μια ακτίνα διαδίδεται στο χώρο μεταφέρει ενέργεια E . Όταν αυτή περνάει μέσα από ύλη, πυκνότητας ρ , ενέργεια dE μπορεί ειτε να προστεθεί είτε να αφαιρεθεί μέσω εκπομπής ή απορρόφησης αντίστοιχα· με αποτέλεσμα η ειδική ένταση της ακτινοβολίας, I_ν , να μεταβάλλεται.

Η ενέργεια που εκπέμπεται από έναν στοιχειώδη όγκο, dV , καθορίζεται από τον συντελεστή αυθόρυμητης εκπομπής, j_ν :

$$dE_\nu = j_\nu \rho dV dt d\nu d\Omega, \text{ όπου } j_\nu \text{ έχει διαστάσεις } \frac{\text{erg}}{\text{sec g Hz ster}} \quad (1.2.15)$$

Αν λάβουμε υπόψην ότι $dV = dA ds$ και από την σχέση (1.2.15) τότε η ενέργεια που προστίθεται καθώς η ακτίνα ταξιδεύει απόσταση ds μέσα στην ύλη είναι:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu \rho \quad (1.2.16)$$

Αντίστοιχα, καθώς η ακτίνα ταξιδεύει απόσταση ds μέσα στην ύλη, πυκνότητας ρ , η ενέργεια που χάνεται λόγο απορρόφησης καθορίζεται από τον συντελεστή απορρόφησης, k_ν , ο οποίος ορίζει την αδιαφάνεια του υλικού:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -k_\nu \rho I_\nu, \text{ όπου } k_\nu \text{ σε } \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \quad (1.2.17)$$

Ο συντελεστής απορρόφησης με τη σειρά του εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της ύλης. Πιο συγκεκριμένα ας υποθέσουμε ένα σωματίδιο της ύλης, ο συντελεστής απορρόφησης του εξαρτάται από το σχήμα, το μέγεθος και την σύσταση του σωματιδίου. Σαν αποτέλεσμα, αν υποθέσουμε ότι τα σωματίδια έχουν σφαιρικό σχήμα, ίδιο μέγεθος και ίδια σύσταση, ο αριθμός των σωματιδίων που θα συναντήσει η ακτίνα επιφάνειας dA ταξιδεύοντας απόσταση ds μέσα στην ύλη εξαρτάται από την αριθμητική πυκνότητα του υλικου, n (σωματίδια ανα μονάδα όγκου). Υποθέτοντας ότι κάθε σωματίδιο έχει ενεργό διατομή⁶ απορρόφησης σ , ο συντελεστής απορρόφησης δίνεται:

$$k_\nu = \frac{n\sigma_\nu}{\rho}, \frac{cm^2}{g} \quad (1.2.18)$$

Είναι προφανές ότι το γινόμενο $k_\nu\rho$ εκφράζει την πιθανότητα απορρόφησης ενός φωτονίου που διασχίζει μήκος ds εντός του υλικού. Έτσι η μέση ελεύθερη διαδρομή⁷, l , είναι το μήκος

$$l_\nu = \frac{1}{k_\nu \rho} \quad (1.2.19)$$

Από τις σχέσεις (1.2.16) και (1.2.17) προκύπτει η εξίσωση διάδοσης της ακτινοβολίας:

$$\frac{dI_\nu(s)}{ds} = j_\nu(s)\rho - k_\nu\rho I_\nu(s) \quad (1.2.20)$$

Η παραπάνω σχέση είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς μας δίνει την μεταβολή της ειδικής έντασης της ακτινοβολίας καθώς αυτή διασχίζει απόσταση s εντός ύλης.

Μια εξίσου σημαντική ποσότητα είναι το οπτικό βάθος, τ_ν . Το οπτικό βάθος ενός μέσου ορίζεται ως ο αριθμός των μέσων ελεύθερων διαδρομών ενός φωτονίου μέχρι αυτό να απορροφηθεί. Το οπτικό βάθος μεταξύ δύο σημείων s_1 και s_2 ορίζεται ως:

$$\tau_\nu(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} k_\nu(s)\rho ds \quad (1.2.21)$$

Έτσι σε μια δεδομένη συχνότητα, ν , ένα μέσο λέγεται ότι έχει μεγάλο οπτικό βάθος (optically thick medium) αν $\tau_\nu > 1$ ένω ότι έχει μικρό οπτικό βάθος (optically thin medium) αν $\tau_\nu < 1$.

Ενα ακόμα σημαντικό μέγεθος είναι η ποσότητα S_ν , που ονομάζεται συνάρτηση της πηγής και εκφράζει την εκπεμπτικότητα του υλικού.

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{k_\nu} \quad (1.2.22)$$

Από τις (1.2.20) και (1.2.22) προκύπτει ότι :

$$\frac{dI_\nu(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} = S_\nu(\tau_\nu) - I_\nu(\tau_\nu) \quad (1.2.23)$$

Η εξίσωση διάδοσης της ακτινοβολίας, (1.2.23), είναι γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης και η γενική λύση της εξίσωσης δίνεται με άνθροιση της λύση της ομογενούς με

⁶Ουσιαστικά η ενεργός διατομή αποτελεί μια υποθετική δραστική επιφάνεια γύρω από έναν απορροφητή, μέσα στην οποία κάποιο εισερχόμενο φωτόνιο μπορεί να απορροφηθεί

⁷Η μέση ελεύθερη διαδρομή ενός φωτονίου ορίζεται ως η απόσταση που διασχίζει το φωτόνιο πρωτού απορροφηθεί

μια μερική λύση της πλήρους Δ.Ε.. Αρχικά προσδιορίζουμε την λύση της ομογενούς Δ.Ε., η οποία είναι $I_\nu(\tau_\nu) = ce^{-\tau_\nu}$, όπου $c = I_\nu(\tau_\nu = 0)$. Μια μερική λύση της πλήρους Δ.Ε. προκύπτει με τη μέθοδο της μεταβολής αυθαίρετων σταθερών ή μέθοδο Lagrange θεωρώντας λύση της μορφής $I_\nu(\tau_\nu) = z(\tau_\nu)e^{-\tau_\nu}$, όπου $z(\tau_\nu)$ μια συνάρτηση την οποία θα προσδιορίσουμε. Από την (1.2.23) προκύπτει:

$$\begin{aligned}\frac{dz(\tau_\nu)}{d\tau_\nu} &= S_\nu(\tau_\nu)e^{\tau_\nu} \\ z(\tau_\nu) &= c + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau_\nu)e^{\tau_\nu} d\tau_\nu \\ I_\nu(\tau_\nu) &= I_\nu(\tau_\nu = 0) + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau_\nu)e^{\tau_\nu} d\tau_\nu\end{aligned}$$

και αν η συνάρτηση της πηγής είναι ανεξάρτητη της θέσης μέσα στο υλικό ή αντίστοιχα οι συντελεστές απορρόφησης και εκπομπής είναι σταθεροί για όλο το υλικό τότε η λύση της Δ.Ε. μπορεί να γραφεί ως:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) \quad (1.2.24)$$

θεωρώντας αμελητέα την ακτινοβολία πίσω από το στρώμα του υλικού, (negligible background intensity), συνεπάγεται ότι:

$$I_\nu(\tau_\nu) = S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) \quad (1.2.25)$$

Η σημασία της συνάρτησης της πηγής φανερώνεται αν υποθέσουμε ότι το υλικό στο οποίο διαδίδεται η ακτινοβολία βρίσκεται σε Θερμοδυναμική Ισορροπία. Σε αυτή την περίπτωση η ακτινοβολία του δίνεται παντού από την συνάρτηση Planck και κατεπέκταση $\frac{dI_\nu}{ds} = 0$. Από την σχέση (1.2.23) προκύπτει:

$$S_\nu = I_\nu = B_\nu(T) \quad (1.2.26)$$

Η σχέση (1.2.26) μας λέει ότι όταν ένα υλικό βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία η ένταση της ακτινοβολίας δεν μεταβάλλεται στο εσωτερικό του, δηλαδή όση ακτινοβολία απορροφάται σε καθε σημείο του εσωτερικού του, τόση επανεκπέμπεται!

1.2.4 Αλληλεπίδραση Μεταξύ Ακτινοβολίας και Σωματιδίων της Σκόνης

Στην περίπτωση διάδοσης της ακτινοβολίας σε έναν πρωτοπλανητικό δίσκο σκόνης, εξετάζουμε την αλληλεπίδραση της με τα στερεά σωματίδια της σκόνης. Προκειμένου να αναλύσουμε τις παραμέτρους του προβλήματος είναι απαραίτητο να εμβαθύνουμε περισσότερο στην φυσική σημασία του συντελεστή απορρόφησης και να εξηγήσουμε το πως καθορίζει το ποσό της ενέργειας που απορροφούν και το ποσό που εκμπέμπουν τα σωματίδια. Για την απλοποίηση του προβλήματος θεωρούμε ότι τα σωματίδια είναι ομογενείς σφαίρες.

Στην εξίσωση (1.2.18) δώσαμε τον ορισμό του συντελεστή απορρόφησης για **δεδομένο μήκος κύματος παρατήρησης**, λ , ή αντίστοιχα δεδομένη συχνότητα,

v. Σαν αποτέλεσμα ανάλογα με το μέγεθος του σωματιδίου και το μήκος κύματος παρατήρησης η τιμή του συντελεστή απορρόφησης μεταβάλλεται. Πιο συγκεκριμένα ανάλογα με την παράμετρο μεγέθους $x = \frac{2\pi r_d}{\lambda}$.

Η εξάρτηση αυτή φανερώνεται μέσα από την ενεργό διατομή απορρόφησης, η οποία είναι:

$$\sigma_\nu = Q_\nu A \quad (1.2.27)$$

όπου A η γεωμετρική επιφάνεια που συμμετέχει στην διαδικασία απορρόφησης.

Ο συντελεστής Q_ν ονομάζεται αποδοτικότητα απορρόφησης (absorption efficiency), είναι ένα αδιάσταστο μέγεθος και εξαρτάται από την παράμετρο μεγέθους $x = \frac{2\pi r_d}{\lambda}$. Ο υπολογισμός της Q_ν δίνεται από την θεωρία σκέδασης του Mie, η Q_ν καθορίζει το πόσο “καλά” απορροφά την ακτινοβολία, συχνότητας ν , ένα σφαιρικό σωματίδιο ακτίνας r_d . Για διαφορετική παράμετρο μεγέθους $x = \frac{2\pi r_d}{\lambda}$ παίρνουμε και διαφορετική λύση της Q_ν . Γενικά είναι ένας περίπλοκος υπολογισμός που απαιτεί την χρήση υπολογιστικής ισχύς· πάραντα μπορούμε να δώσουμε κάποιες λύσεις για δύο διαφορετικά όρια.

- $x \geq 0.1 \implies \frac{2\pi r_d}{\lambda} \geq 0.1$
- $x \leq 0.1 \implies \frac{2\pi r_d}{\lambda} \leq 0.1$

Το πρώτο όριο ονομάζεται *Όριο Γεωμετρικής Οπτικής*. Ουσιαστικά όταν το μήκος κύματος είναι αρκετά μικρότερο από το μέγεθος του σωματιδίου, τότε αναδύεται η σωματιδιακή φύση του φωτός και το σωματίδιο απορροφάει όλο το φώς που πέφτει στην επιφάνεια του. Άρα $Q_\nu = 1$.

Το δεύτερο όριο ονομάζεται *Όριο Rayleigh*. Ουσιαστικά όταν το μήκος κύματος είναι συγχρίσιμο ή μεγαλύτερο από το μέγεθος του σωματιδίου, τότε αναδύεται η κυματική φύση του φωτός και η αποδοτικότητα Q_ν εξαρτάται από την συχνότητα ν . Αποδεικνύεται ότι, [5, Chap. 8, Sect. 2.2] στο όριο Rayleigh, $x = \frac{2\pi r_d}{\lambda} \ll 1$ για σφαιρικά σωματίδια, συγκεκριμένης σύστασης, η λύση μπορεί να βρεθεί αναλυτικά και ο συντελεστής Q_ν είναι ανάλογος της παραμέτρου $x = \frac{2\pi r_d}{\lambda}$ και μιας συνάρτησης που εξαρτάται μόνο από την συχνότητα ν . Η συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί σε εκθετική μορφή και τελικά:

$$Q_\nu = r_d Q_0 \nu^\beta, \text{ όπου } Q_0 \text{ σταθερά} \quad (1.2.28)$$

Το β είναι ένας σταθερός αριθμός που σχετίζεται με το μέγεθος, το σχήμα και την σύσταση των σωματιδίων της σκόνης. Οι αλλαγές στην τιμή του β συνδέονται με αλλαγές στις ιδιότητες των σωματιδίων της σκόνης. Συνήθως για την μεσοαστρική σκόνη (ISM Dust) $1.7 \leq \beta_{ISM} \leq 2$ και αποδεικνύεται ότι η μείωση της τιμής του β συνεπάγεται αύξηση στο μέγεθος των σωματιδίων [2]. Ετσι για πρωτοπλανητικούς δίσκους μεγάλης ηλικίας, όπου αναμένουμε σωματίδια μεγαλύτερων διαστάσεων αναμένουμε και μικρότερες τιμές του β . αντίθετα για πρωτοπλανητικούς δίσκους νεαρής ηλικίας, όπου αναμένουμε σωματίδια μικρότερων διαστάσεων αναμένουμε και μεγαλύτερες τιμές του β .

Έτσι η τιμή του του συντελεστή απορρόφησης k_ν μπορεί να δωθεί για τα δύο όρια ως:

$$k_\nu = \frac{A}{m}, \text{ για } x \geq 0.1$$

$$k_\nu = \frac{A}{m} r_d Q_0 \nu^\beta, \text{ για } x \leq 0.1 \quad (1.2.29)$$

(1.2.30)

όπου $m = \frac{4\pi\rho r_d^3}{3}$ η μάζα του σωματιδίου για σφαιρικά σωματίδια.

Τελικά ο συντελεστής απορρόφησης συναρτήσει του μήκους κύματος για ένα σωματίδιο δίνεται ως:

$$k_\lambda = k_0 \left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^{-\beta} \quad (1.2.31)$$

όπου οι σταθερές k_0 και λ_0 προσδιορίζονται από την (1.2.18) για ένα σωματίδιο μάζας m και ακτίνας r_d . Πιο συγκεκριμένα γνωρίζοντας την τιμή της αποδοτικότητας για το συγκεκριμένο μήκος κύματος, λ_0 , μπορούμε να προσδιορίσουμε το k_0 .

1.3 Πρωτοπλανητικοί Δίσκοι

1.3.1 Δημιουργία και Γενικά Χαρακτηριστικά

Όταν η μάζα του αρχικού νέφους, αερίου και σκόνης, ξεπεράσει μια κρίσιμη τιμή μάζας που ονομάζεται **Μάζα Jeans**⁸ ακολουθεί το φαινόμενο της βαρυτικής κατάρρευσης⁹. Καθώς λαμβάνει χώρα η συρρίκνωση, το νέφος περιστρέφεται με ολοένα και μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα, w , ώστε να παραμείνει σταθερή η στροφορμή του, $J = MwR^2$ με αποτέλεσμα το νέφος να αποκτά πεπλατισμένη δισκοειδή μορφή. Διαχρίνοντας την εξέλιξη του συστήματος σε δύο στάδια έχουμε: τον πρωτοαστρικό δίσκο και στη συνέχεια τον πρωτοπλανητικό δίσκο¹⁰. Κατα τη μετάβαση από το πρώτο στάδιο στο δεύτερο δημιουργείται μια μεγάλη συγκέντρωση δεσμεύοντας τεράστια ποσά αερίου και σκόνης στο κέντρο του δίσκου, το πρωταστέρι, το οποίο στο τέλος αυτής έχει εξελιχθεί στον αστέρα του συστήματος· έτσι ο πρωτοπλανητικός δίσκος χαρακτηρίζεται από μικρότερη μάζα σε σχέση με τον πρωτοαστρικό δίσκο. Στον υπόλοιπο δίσκο δημιουργούνται μικρότερες συγκεντρώσεις ύλης, οι οποίες ακολουθούν (σε μεγάλη προσέγγιση) ελλειπτικές τροχιές περί τον αστέρα. Τα σωματίδια σκόνης του δίσκου απορροφούν ενέργεια μέσω της αστρικής ακτινοβολίας και στη συνέχεια την επανεκπέμπουν στα far-IR και submillimeter μήκη κυματος. Η ακτινοβολία σε αυτές τις υψηλές ράδιο συχνότητες είναι και ο λόγος που κάνουμε χρήση ραδιοτηλεσκοπείων σαν την ALMA για να χαρτογραφήσουμε τέτοιους δίσκους. “Καρπός” των παρατηρήσεων πρωτοπλανητικών δίσκων και της θεωρίας της στατιστικής είναι το συμπέρασμα ότι:

1. Μάζα

Η μάζα τους κυμαίνεται από περίπου 0.001 έως $0.1 M_{\odot}$ ¹¹ και οι διάμετροι τους από 30 έως 200 AU¹².

2. Χρόνος Ζωής

Είναι αρκετά βραχύβιοι σε σχέση με την κοσμική κλίμακα του χρόνου. Πιο συγκεκριμένα ο μέσος χρόνος ζωής τους είναι περίπου $3Myr$, με τους μεγαλύτερους που έχουν παρατηρηθεί να έχουν ηλικία περίπου $10Myr$.

1.3.2 Φυσικά Χαρακτηριστικά και Δομή του Δίσκου

Οι πρωτοπλανητικοί δίσκοι παρουσιάζουν αξονική και κατοπτρική συμμετρία. Ακόμα μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση απειροστού πάχους καθώς η ακτινική διεύθυνση τους, r , είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από την κατακόρυφη διέθυνση z , δηλαδή:

$$\frac{z}{r} \ll 1 \quad (1.3.1)$$

⁸Η κρίσιμη τιμή μάζας του νέφους, η οποία αν ξεπεραστεί ξεκινάει η βαρυτική κατάρρευση του

⁹Όταν η βαρυτική δύναμη της μάζα των νεφών ξεπεράσει τη δύναμη που προκαλείται από την βαθμίδα της πίεσης τους ακολουθεί η συρρίκνωση τους, ένα φαινόμενο που στην αστρονομική ορολογία ονομάζεται βαρυτική κατάρρευση

¹⁰Στα περισσότερα μοντέλα εξέλιξης πλανητικών συστημάτων κάνουμε λόγο και για τρίτο στάδιο όπου έχουμε έναν debris disk που προκύπτει από την σύγκρουση πλανετοειδών κατά τα τελικά στάδια δημιουργίας των πλανητών

¹¹ M_{\odot} είναι ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται για την Μάζα του Ήλιου, $1M_{\odot} = 1$ Ηλιακή Μάζα καθώς το σύμβολο \odot αναφέρεται στον Ήλιο

¹²Η τιμή του μεγάλου ημιάξονα της τροχίας της Γης, όπως προκύπτει από τον 3ο Νόμο του Kepler, για περίοδο ίση με 1 έτος 365.25 ημέρες, $AU = 1$ Αστρονομική Μονάδα

Καθώς κινούμαστε ακτινικά σε μεγαλύτερες αποστάσεις, από τον αστέρα προς τα πέρατα του δίσκου, ο λόγος του πάχους του δίσκου, H , προς την απόσταση, r , αυξάνεται. Οι δίσκοι αυτοί ονομάζονται *Flaring Discs*, όλα τα σημεία της επιφάνειας τους δέχονται απευθείας την ακτινοβολία του αστέρα, θερμαίνονται και στη συνέχεια επανεκπέμπουν μέρος της ακτινοβολίας σε μεγάλες αποστάσεις.

Στην περίπτωση που το πάχος του δίσκου, H , είναι σταθέρο σε κάθε τιμή της απόστασης, r , κάνουμε λόγο για *Flat Discs*, οι οποίοι και θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία.

Οι πρωτοαστρικοί και κατεπέκταση και οι πρωτοπλανητικοί δίσκοι χαρακτηρίζονται από προφίλ επιφανειακής πυκνότητας, $\Sigma(r)$. Σύμφωνα με την **MMSN Minimum Mass Solar Nebula**[10, Chap. 7, Sect. 7.2], μπορούμε να κάνουμε μια εκτίμηση για το προφίλ επιφανειακής πυκνότητας του πρωτοαστρικού δίσκου του Ήλιακού μας Συστήματος. Το αποτέλεσμα είναι επιφανειακή πυκνότητα μορφής:

$$\Sigma(r) = \Sigma_0 \left(\frac{r}{1AU} \right)^{-\gamma} \frac{g}{cm^2} \quad (1.3.2)$$

όπου για στερεά σώματα σκόνης $\Sigma_0 = 7$ για $r < 2.7AU$ ή $\Sigma_0 = 30$ για $r > 2.7AU$ και $\gamma = \frac{3}{2}$. Βλέπουμε ότι η επιφανειακή πυκνότητα της σκόνης μείωνεται εκθετικά καθώς μεγαλώνει η απόσταση από το κέντρο του δίσκου ανάλογα με τον όρο $\frac{1}{\gamma}$.

Βάση της υπάρχουσας θεωρίας, πιστεύουμε ότι το Ήλιακό μας Συστήματος δημιουργήθηκε με παρόμοιο τρόπο με άλλα Πλανητικά Συστήματα. Σαν αποτέλεσμα αυτού άλλα και του γεγονότος ότι ο νόμος της βαρύτητας δεν ισχύει μόνο τοπικά στο Ήλιακό μας Σύστημα αναμένουμε παρόμοιας μορφής καμπύλη επιφανειακής πυκνότητας και για άλλους πρωτοπλανητικούς δίσκους.

Η θερμοκρασία ενός πρωτοπλανητικού δίσκου εξαρτάται από διάφορους παράγοντες. Άρχικα το αστέρι στο κέντρο του δίσκου θερμαίνει τον δίσκο με την ακτινοβολία του, καθώς τα στερεά σωματίδια σκόνης σε ορισμένα μήκη κύματος απορροφούν¹³ ενώ σε μεγαλύτερα μήκη κύματος την επανεκπέμπουν. Το ποσό της ακτινοβολίας που θα απορροφηθεί εξαρτάται τόσο από τη γεωμετρία του δίσκου όσο και από τις ιδιότητες των σωματιδίων της σκόνης. Προκειμένου να υπολογίσουμε την κατανομή θερμοκρασιών στον δίσκο και κατ' πέκταση να εξάγουμε το θερμοκρασιακό του προφίλ πρέπει να συνηπολογίσουμε τους μηχανισμούς θέρμανσης και ψύξης του δίσκου.

Στην περίπτωση του επίπεδου πρωτοπλανητικού δίσκου σκόνης (χωρίς αερίο) ο βασικός μηχανισμός θέρμανσης είναι η απορρόφηση της ακτινοβολίας του αστέρα που περιβάλλει. Φυσικά η κατανομή θερμοκρασίας που θα αποκτήσει ο δίσκος σκόνης εξαρτάται από διάφορους παράγοντες, οι κυριότεροι οίμως είναι:

1. Η βολομετρική ροή, $F\odot$, του αστέρα
2. Ο συντελεστής απορρόφησης, k_ν , των σωματιδίων της σκόνης
3. Η επιφανειακή πυκνότητα μάζας του δίσκου

¹³Τα σωματίδια σκόνης μπορούν επίσης να σκεδάσουν ακόμα και πολώσουν την ακτινοβολία, αλλά οι μηχανισμοί αυτοί δε θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία

1.3.3 Σκόνη των Πρωτοπλανητικών Δίσκων

Στην ορολογία της Αστροφυσικής, η ύλη που εντοπίζεται μεταξύ των άστρων ονομάζεται Interstellar Medium, ISM. Στον χώρο αυτό εντοπίζουμε ύλη, ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία, βαρυτικό και μαγνητικό πεδίο. Η μεσοαστρική ύλη αποτελείται από 70% υδρογόνο, 28% ήλιο και 2% βαρύτερα στοιχεία όπως οξυγόνο, άνθρακα, άζωτο κ.ο.κ. Το 99% της ύλης βρίσκεται στην αέρια φάση, (gas), ενώ μόλις περίπου το 1% βρίσκεται στην στερεά κατάσταση, (solid state), το οποίο ονομάζουμε σκόνη. Σαν αποτέλεσμα η συνολική μάζα της σκόνης είναι τάξεις μεγέθους μικρότερη από την συνολική μάζα του αερίου.

Η μεσοαστρική σκόνη αποτελείται από πολύ μικρά στερεά σωματίδια, το μέγεθος των οποίων εκτείνεται από 0.0005μm έως περίπου 1μm [9, Chap. 1, Sect. 2.5] και απαρτίζεται κυρίως από πυριτικά άλατα, ενώσεις άνθρακα και πιθανότατα γραφίτη. Ακόμα είναι αδιαφανής στο ορατό κομμάτι του φάσματος, ενώ εκπέμπει σε διαφορετικά μήκη κύματος ανάλογα με το σχήμα, το μέγεθος και την σύσταση των σωματιδίων που την αποτελούν. Τα σωματίδια που έχουν μεγάλο μέγεθος, ≥ 0.01 μm, βρίσκονται σε θερμοδυναμική ισορροπία, θερμοκρασίας T_{dust} , με το εκάστοτε πεδίο ακτινοβολίας στο οποίο περιέχονται. Έτσι η ακτινοβολία που εκπέμπουν, σύμφωνα με τον νόμο του Kirchhoff, χαρακτηρίζεται αποκλειστικά από την θερμοκρασία ισορροπίας τους, T_{dust} .

Η μεσο αστρική ύλη που εντοπίζεται γύρω από τους νεαρούς αστέρες αποτελεί όπως είδαμε τους πρωτοπλανητικούς δίσκους. Σε αυτό το στάδιο, τα σωματίδια της σκόνης μπορούν να αυξηθούν σε μέγεθος κατά αρκετές τάξεις μεγέθους, από μη μέχρι τον σχηματισμό στερεών πλανητών. Σε συνδυασμό με το όριο ηλικίας αυτών των δίσκων αναμένουμε ότι πιοτικά όσο μεγαλύτερος σε ηλικία είναι ένας δίσκος τόσο πιθανότερο είναι να συνατήσουμε σε αυτόν σωματίδια μεγαλύτερων διαστάσεων αλλα και να μην συναντήσουμε αέριο. Φυσικά η απώλεια του αερίου στον δίσκο και η αύξηση του μεγέθους των σωματιδίων δεν εξαρτάται μόνο από τον χρόνο αλλά από μία πληθώρα παραγόντων που επικρατούν στον δίσκο καθώς το πρόβλημα του σχηματισμού συσσωμάτων και τελικά πλανειτειδών είναι ένα εξαιρετικά περίπλοκο πρόβλημα. Από την άλλη πλευρά, πιοτικά περιμένουμε ότι όσο πιο “νεαρός” είναι ένας δίσκος τόσο πιθανότερο είναι να συνατήσουμε σε αυτόν σωματίδια μικρότερων διαστάσεων αλλα και μεγαλύτερες ποσότητες αερίου.

1.4 Αριθμητική Προσομοίωση

1.4.1 Solar System Integration Software Package- SWIFT

Για την αριθμητική ολοκλήρωση των τροχιών των σωματιδίων, χρησιμοποιήθηκε ο συμπλεκτικός αλγόριθμος ολοκλήρωσης *SWIFT*[7](A Solar System Integration Software Package), ο οποίος έχει σχεδιαστεί ώστε να ενσωματώνει ένα σύνολο αριθμητικά βαρυτικά αλληλεπιδρώντων σωμάτων μαζί με μια ομάδα σωματιδίων (test particles). Τα test particles “άισθάνονται” τη βαρυτική δύναμη των μαζικών σωμάτων αλλα δεν αλληλεπιδρούν βαρυτικά μεταξύ τους ούτε επηρεάζουν τα μαζικά σώματα. Ο *SWIFT* είναι ικανός να πραγματοποιήσει ολοκληρώσεις μεγάλης κλίμακας (*long-term integrations*) χαρτογραφώντας, με αρκετά μικρό

βήμα χαρτογράφησης (timestep), τον χώρο φάσης¹⁴ του συστήματος σύμφωνα με την μέθοδο “Wisdom-Holman Mapping”[12] (WHP).

Η χρήση του *SWIFT* για προσομοιώσεις δυναμικής εξέλιξης συστημάτων N-σωμάτων έχει αρκετά πλεονεκτήματα. Αρχικά η μέθοδος ολοκλήρωσης και χαρτογράφησης που χρησιμοποιεί, ενώ βασίζεται στη μέθοδο ”Wisdom”[11], αποτελεί τη βελτιωμένη εκδοχή της, χωρίς να υπόκειται στους περιορισμούς της αρχικής μεθόδου. Πιο συγκεκριμένα:

- Η εγκυρότητα της χρήσης του αλγορίθμου δεν περιορίζεται μόνο σε χαμηλές τιμές της εγκεντρότητας και της κλίσης των σωμάτων.
- Η εγκυρότητα της χρήσης του αλγορίθμου δεν περιορίζεται σε συγκεκριμένες τιμές συντονισμών

Ένα ακόμα πλεονέκτημα είναι ότι ενώ **και** η αρχική μέθοδος ολοκλήρωσης και χαρτογράφησης βασίζεται στη μηχανική Χαμιλτον, η βελτιωμένη εκδοχή της χειρίζεται την εκλογή της “Χαμιλτονιανής” του συστήματος με μεγαλύτερη κομψότητα διατηρώντας βέβαια τον συμπλεκτικό χαρακτήρα του αλγορίθμου, δηλαδή διατηρείται ο δισδιάστατος χώρος των φάσεων $dq \wedge dp$, όπου (q, p) οι κανονικές μεταβλητές. Πιο συγκεκριμένα η Χαμιλτονιανή χωρίζεται σε δύο μέρη:

$$H = H_{Kepler} + \phi(t) * H_{Interaction} \quad (1.4.1)$$

Ο όρος H_{Kepler} αναπαριστά την αλληλεπίδραση του κάθε σώματος με το κεντρικό σώμα (πρωτεύον) του συστήματος (το αστέρι), ο $H_{Interaction}$ αναπαριστά τη διαταραχή του καθε δευτερεύον σωμάτος (test particles και πλανήτες) από την αλληλεπίδραση του με τους πλανήτες και $\phi(t)$ μια περιοδική συνάρτηση που εκλέγεται με σεβασμό στη διαδικασία του μέσου όρου.

Η βασική ιδέα πίσω από την εκλογή της $\phi(t)$ είναι ότι οι όροι που διαταράσσονται ταχέα (ή, ισοδύναμα, που προκαλούν διαταραχές υψηλής συχνότητας) έχουν μέσο όρο μηδέν μέσα σε ένα χρονικό διάστημα που η τάξη μεγέθους του είναι ανάλογη της τάξης μεγέθους των περιόδων περιφοράς των σωμάτων του συστήματος. Έτσι η $\phi(t)$ μπορεί να εκλεγεί αυθαίρετα αρκεί ο μέσος όρος της σε μια περίοδο χαρτογράφησης να ισούται με **ένα**, ώστε η (1.4.1) να δίνει, ανα timestep, την πραγματική Χαμιλτονιανή του συστήματος:

$$H = H_{Kepler} + H_{Interaction} \quad (1.4.2)$$

Αυτή η εκλογή της Χαμιλτονιανής, (1.4.1), καθιστά πολύ αποτελεσματική την μέθοδο χαρτογράφησης καθώς τα δύο μέρη της μπορούν να ολοκληρωθούν και να υπολογιστούν ανεξάρτητα.

Ένα ακόμα αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό του *SWIFT* είναι ο τρόπος που διαχειρίζεται τις κοντινές διελεύσεις μεταξύ test particles και πλανητών, καθώς χρησιμοποιεί μεταβλητό βήμα ολοκλήρωσης (μεταβλητό timestep). Πιο συγκεκριμένα, η ολοκλήρωση τώρα βασίζεται στη μέθοδο “Regularized Mixed Variational Symplectic”[6] (RMVS)

¹⁴Ο χώρος φάσης είναι ένας χώρος στον οποίο εκπροσωπούνται όλες οι πιθανές καταστάσεις ενός συστήματος, με κάθε πιθανή κατάσταση να αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό σημείο στο χώρο φάσης. Για μηχανικά συστήματα, ο χώρος φάσης αποτελείται συνήθως από όλες τις πιθανές τιμές των μεταβλητών θέσης και οριμής.

method“, ορίζοντας δύο ζώνες γύρω από κάθε πλανήτη. Η εσωτερική ζώνη, αποτελεί μια σφαίρα, με ακτίνα ίση με μια *aktīna Hill*¹⁵ και η εξωτερική, που αποτελεί ένα σφαιρικό κέλυφος, εκτείνεται από $r_H < r \leq 3r_H$.

$$r_H = a_P \left(\frac{1}{3} \frac{M_P}{M_\odot + M_P} \right)^{\frac{1}{3}}, \text{ ο δείκτης } P \text{ αντιστοιχεί στο 'Planet'}$$
 (1.4.3)

Την χρονική στιγμή που ξεκινάει η προσομοίωση αν κάποιο test particle βρίσκεται εντός της εξωτερικής ζώνης ή προβλέπεται ότι θα βρεθεί εντός αυτής κατά το τέλος του βήματος ολοκλήρωσης (εντός ενός timestep), τότε το βήμα ολοκλήρωσης μειώνεται κατά ένα παράγοντα 100, δηλαδή

$$\frac{t_\nu}{t_{\nu+1}} = 100$$
 (1.4.4)

Αντίστοιχα για την εσωτερική ζώνη ο παράγοντας μείωσης είναι 5.

$$\frac{t_\nu}{t_{\nu+1}} = 5$$
 (1.4.5)

Από τον ορισμό της *aktīna Hill* είναι προφανές ότι αν ένα σώμα βρεθεί στην εσωτερική ζώνη, το πρωτεύον σώμα στην H_{Kepler} της τροχιάς του γίνεται ο πλανήτης, έναντι του αστέρα.

Με αυτό τον τρόπο πετυχαίνεται καλύτερη ανάλυση ή αλλιώς παρέχεται μεγαλύτερη διακριτική ικανότητα στον προσδιορισμό των διανυσμάτων θέσεως και ορμής των σωμάτων στην περίπτωση της κοντινής μεταξύ τους διεύλευσης. Αυτή η διαδικασία προφανώς και “σέβεται” τη συμπλεκτικότητα, δηλαδή σε κάθε βήμα ολοκλήρωσης ο μετασχηματισμός της Χαμιλτονιανής είναι **κανονικός μετασχηματισμός**¹⁶.

Στον *SWIFT* εμπεριέχονται συνολικά οι 4 μέθοδοι ολοκλήρωσης:

- Ο αλγόριθμος “Wisdom-Holman Mapping”[12] (*WHP*). **WHP**.
- Ο αλγόριθμος “Regularized Mixed Variable Symplectic”[6] (*RMVS*) method“, **RMVS**.
- Ο αλγόριθμος “A fourth order T+U Symplectic (TU4) method”[4], **TU4**.
- Ο αλγόριθμος “A Bulirsch-Stoer method“.

Για περισσότερες πληροφορίες επισκεφτείτε **[SWIFT]**

¹⁵Η ακτίνα Hill εκφράζει την σφαίρα επιφροής ενός σώματος, δηλαδή την έκταση της γειτονικής του περιοχής στην οποία η δυναμική καθορίζεται από την βαρύτητα του σώματος και όχι του αστέρα

¹⁶Ένας μετασχηματισμός $(q,p) \rightarrow (q',p')$ είναι κανονικός (συμπλεκτικός) εάν διατηρεί την μορφή των εξισώσεων του Hamilton

1.5 Παρατηρήσεις σε Υψηλές Ραδιοσυχνότητες

1.5.1 Συνέλιξη

Η Συνέλιξη αποτελεί μια μαθηματική πράξη μεταξύ δύο συναρτήσεων (f και g) και παράγει μια τρίτη ως εξής:

$$[f * g](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x')g(x')dx' \quad (1.5.1)$$

Η διαδικασία της συνέλιξης, στην περίπτωση αστρονομικών παρατηρήσεων, είναι πολύ σημαντική. Διότι αν $g(x') \rightarrow I_\nu(\vec{n}')$ και $f(x - x') \rightarrow f(\vec{n} - \vec{n}')$ τότε $I_\nu^m = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{n} - \vec{n}')I_\nu(\vec{n}')dn'$ είναι η ειδική ένταση που μετράει το τηλεσκόπειο ή ειδική ένταση που μετράει η διάταξη των τηλεσκοπείων μας (αν πρόκειται για συμβολομετρία), όπου η $f(\vec{n} - \vec{n}')$ είναι η δέσμη. Τελικά:

$$f(\vec{n} - \vec{n}') = \vec{P}_n(\vec{n} - \vec{n}') \quad (1.5.2)$$

όπου $\vec{P}_n(\vec{n} - \vec{n}')$ η απόκριση σημειακής πηγής του συστήματος που επιβάλλεται από τους νόμους της κυματικής οπτικής (λέγεται και point spread function). Ενώ

$$f(\vec{n} - \vec{n}') = \vec{S}_n(\vec{n} - \vec{n}') \quad (1.5.3)$$

όπου $\vec{S}_n(\vec{n} - \vec{n}')$ η συνάρτηση που μας λέει την απόκριση της σημειακής πηγής όπως την καθορίζει η ατμόσφαιρα.

Στην περίπτωση της *Ραδιοαστρονομίας* η $f(\vec{n} - \vec{n}')$ είναι η απόκριση σημειακής πηγής $\vec{P}_n(\vec{n} - \vec{n}')$.

1.5.2 Atacama Large Millimeter Array-ALMA

Η ALMA είναι ένα συμβολόμετρο το οποίο αποτελείται από 66 ραδιο αντέννες, βρίσκεται στην βόρεια Χιλή και ανιχνεύει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία σε υψηλές ραδιοσυχνότητες. Πιο συγκεκριμένα το εύρος μηκών κύματος που καλύπτει είναι από 0.3 έως 3.6mm ή αντίστοιχα από 84 έως 950GHz. Έχει κατασκευαστεί σε υψόμετρο 5000m στην πεδιάδα Chajnantor των Χιλιανών Άνδεων, μία τοποθεσία που προσφέρει συνήθως τις εξαιρετικά ξηρές και καυτές συνθήκες του ουρανού που απαιτούνται για παρατήρησεις στο παραπάνω τμήμα του φάσματος. Ο μεγάλος αριθμός αντέννων δίνει την δυνατότητα διαφορετικών διάταξεων πετυχαίνοντας πολύ υψηλές τιμές διαχριτικής ικανότητας (resolution) και κατ' επέκταση εικόνες υψηλής ευχρίνειας. Σαν αποτέλεσμα είναι το πιό ισχυρό επίγειο τηλεσκόπιο για την παρατήρηση του ψυχρού Σύμπαντος (μοριακό αερίο και σκόνη) και κατ' επέκταση μελετά τα δομικά στοιχεία των αστεριών, των πλανητικών συστημάτων και των γαλαξιών.

Όταν δύο κεραίες στοχεύουν ένα αντικείμενο στον ουρανό, η παρατήρηση γίνεται από ελαφρώς διαφορετικές θέσεις. Σαν αποτέλεσμα η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία από το αντικείμενο φτάνει στη μία κεραία με διαφορά φάσης από ότι στην άλλη. Ο πολλαπλασιασμός και ο υπολογισμός του μέσου όρου των αντίστοιχων σημάτων μέσω του διασυσχετιστή μας δίνει το πλάτος και την φάση του διασυσχετισμένου σήματος. Ουσιαστικά μετράμε μια ποσότητα που ονομάζεται complex visibility, $V(u, v)$, η οποία

δεν είναι τίποτε άλλο από τον μετασχηματισμό Fourier της κατανομής λαμπρότητας της πηγής στο χώρο των χωρικών συχνότητων, $(u, v)_{\text{plane}}^{17}$ και περιέχει πληροφορίες σχετικά με την λαμπρότητα της πηγής αλλα και με την θέση της σε αυτόν μέσω των χωρικών συντεταγμένων (u, v) , δηλαδή:

$$V(u, v) = \iint_{\Omega_s} I(l, m) e^{-2\pi i(ul+vm)} dl dm = A e^{i\phi} \quad (1.5.4)$$

όπου A το πλάτος και ϕ η φάση του διασυσχετισμένου σήματος. Έτσι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της complex visibility είναι η κατανομή λαμπρότητας της πηγής στο επίπεδο παρατήρησης, $I_\nu(l, m)$! Άρα:

$$V(u, v) = \iint_{\Omega_s} I_\nu(l, m) e^{-2\pi i(ul+vm)} dl dm \quad (1.5.5)$$

$$I_\nu(l, m) = \iint_{\Omega_s} V(u, v) e^{2\pi i(ul+vm)} du dv \quad (1.5.6)$$

όπου

$$(ul + vm) = \vec{D}_\lambda \vec{\sigma} \quad (1.5.7)$$

και $\vec{\sigma} = (l, m)$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός σημείου μέσα στην πηγή σχετικά με το κέντρο του συμβολομετρικού χάρτη. Ακόμα $\vec{D}_\lambda = (u, v)$ που είναι οι προβολές του \vec{D}_λ πάνω στους άξονες του ουρανογραφικού συστήματος συντεταγμένων της πηγής. Οι $N = 66$ ραδιο αντέννες του ALMA μετράνε κάθε στιγμή $N(N - 1)/2 = 4290$ ανεξάρτητες ορατότητες και κατα τη διάρκεια μια πλήρους παρατήρησης, καθώς η γη περιστρέφεται, το κάθε ζευγάρι αντέννων διαγράφει ένα τμήμα έλλειψης στο επίπεδο (u, v) και έτσι στο τέλος μια χαρτογραφικής παρατήρησης έχουν μετρηθεί εκατομμύρια ορατότητες ή αντίστοιχα συντελεστές Fourier της ειδικής έντασης της κοσμικής πηγής. Τελικά η $I_\nu(l, m)$ δεν είναι τίποτε άλλο από το μετασχηματισμό Fourier των visibilities $V(u, v)$. Ωστόσο είναι πρακτικά αδύνατο να συλλέξουμε όλες τις ορατότητες του επιπέδου παρατήρησης· με αποτέλεσμα η όποια πληροφορία δεν εμπίπτει στην κατανομή δειγματοληψίας των ορατοτήτων, $B(u, v)$, να μην λαμβάνεται ($V^m(u, v) = 0$)

$$V^m(l, m) = V(u, v)B(u, v) \quad (1.5.8)$$

όπου $B(u, v) = 1$ για μετρούμενη visibility ενώ $B(u, v) = 0$ για μη μετρούμενη. Σύμφωνα με το Θεώρημα της Συνέλιξης ο μετασχηματισμός Fourier του γινομένου δύο συναρτήσεων είναι η συνέλιξη των μετασχηματισμών Fourier της κάθε συνάρτησης[1, Appendix A.7]! Τελικά ο μετασχηματισμός Fourier του γινομένου είναι:

$$F[V^m(l, m)] = F[V(u, v)] * F[B(u, v)] \quad (1.5.9)$$

όπου $F[V^m(l, m)] = I_\nu^D(l, m)$ ονομάζεται Dirty Image και τελικά:

$$I_\nu^D(l, m) = b(l, m) * I_\nu(l, m), \text{ όπου } b(l, m) = F[B(u, v)] \quad (1.5.10)$$

¹⁷Ο χώρος των χωρικών συχνοτήτων σε αναλογία με τον χώρο των φάσεων της Μηχανικής, αποτελεί ένα χώρο όπου εκπροσωπούνται οι δυνατές καταστάσεις του οπτικού συστήματος. Κάθε οπτικό ερέθισμα μπορεί να αναπαράσταση μιας διασδιάστατης συναρτησης $f(u, v)$ με χωρικές συντεταγμένες u, v που περιγράφει πως κατανέμεται η τιμή της έντασης του φωτός στο επίπεδο της φωτογραφίας

Η συνάρτηση $b(l, m)$ αποτελεί την συνθετική δέσμη του ραδιοσυμβολόμετρου (*synthesized beam*), συγχροτείται από τον κεντρικό λοβό της δέσμης αλλά και από μικρότερους λοβούς, οι οποίοι μπορούν να γίνουν και αρνητικοί, σε αντίθεση με τους αντίστοιχους πλαγιολοβούς μονής αντέννας. Ο κεντρικός λοβός προσεγγίζει γρήγορα μια Γκουσιανή δέσμη για σύγχρονα συμβολόμετρα όπου ο αριθμός των αντέννων, N , είναι μεγάλος. Είναι φανερό ότι το εύρος του κεντρικού λοβού, (FWHM), καθορίζει το μέγεθος του και ταυτόχρονα την διαχριτική ικανότητα του ραδιοσυμβολόμετρου. Το μέγεθος μιας Γκαουσιανής δέσμης δίνεται ως:

$$\Delta\Omega_b = 1.133 \times \theta^2, \text{ όπου } \theta = FWHM \text{ σε arcsec} \quad (1.5.11)$$

Στο σημείο αυτό φανερώνεται και το μεγάλο προτέρημα ενός ραδιοσυμβολόμετρου έναντι ενός μεμονομένου ραδιοτηλεσκοπίου· καθώς η διαχριτική ικανότητα του δεύτερου δίνεται από την σχέση:

$$\theta_{res} = k \frac{\lambda}{D} \quad (1.5.12)$$

όπου k μια σταθερά, λ το μήκος κύματος ανίχνευσης και D η διάμετρος του “πιάτου” του ραδιοτηλεσκοπίου. Στην περίπτωση όμως ενός ραδιοσυμβολόμετρου η μεταβλητή D στην παραπάνω σχέση αποτελεί την απόσταση των ακραίων ραδιοτηλεσκοπίων της διάταξης και ισοδυναμεί με τις μέγιστες τιμές u_{max}, v_{max} στο $(u, v)plane$. Για μια συγκεκριμένη συχνότητα, μεγάλες τιμές του D συνεπάγονται μικρές τιμές του θ (δηλαδή μεγάλη διαχριτική ικανότητα) άρα και σύμφωνα με την (1.5.11) πολύ στενή δέσμη. Η χρήση μιας πολύ στενής δέσμης (μεγάλη διαχριτική ικανότητα) μας επιτρέπει να ανιχνεύουμε λεπτομέρειες στην δομή των παρατηρούμενων αστρικών σωμάτων με μεγαλύτερη ευκρίνεια. Στον αντίποδα, με την χρήση ενός ραδιοσυμβολόμετρου εισέρχεται και ένας γηγενής περιορισμός. Πιο συγκεκριμένα οι ελάχιστες τιμές u_{min} και v_{min} καθορίζουν την μεγαλύτερη δυνατή κλίμακα χαρτογράφισης ενός αντικειμένου στο χώρο των χωρικών συχνοτήτων. Η κεντρική “τρύπα” στο $(u, v)plane$ μιας συγκεκριμένης συμβολομετρικής διάταξης, είναι εγγενής χαρακτηριστικό της διάταξης αυτής. Έτσι οποιαδήποτε λαμπρότητα του ουρανού περιγράφεται από χωρικές συντεταγμένες (u, v) που ξεπερνούν το όριο αυτό δεν συγκαταλέγονται στην απεικόνιση αλλα γίνονται “fillter-out”. Το όριο αυτό δίνεται από το μέγεθος ϑ_{MRS} (Maximum Recoverable Scale):

$$\vartheta_{MRS} \simeq \frac{0.6\lambda}{D_{min}} \quad (1.5.13)$$

όπου το D_{min} καθορίζεται από τις u_{min} και v_{min} .

Όπως φαίνεται από την (1.5.12) η διαχριτική ικανότητα της συνθετικής ακτίνας εξαρτάται πέρα από την συχνότητα στην οποία γίνεται η παρατήρηση και από την διάταξη των ραδιοτηλεσκοπίων (configuration). Το ALMA μέσα από τις διάφορες δυνατές διατάξεις των αντέννων του μπορεί να πετύχει και διαφορετικές τιμές διαχριτικής ικανότητας (angular resolution), το οποίο μεταφράζεται σε διαφορετικά μεγέθη της συνθετικής ακτίνας. Παρακάτω δίνεται ο πίνακας με τις τιμές του FWHM για τις διάφορες συχνότητες στις οποίες θα γίνει η απεικόνιση του δίσκου:

$\Sigma\chi\nu$ (gHz)	FHWM (arcsec)	ϑ_{MRS} (arcsec)	Configuration
230	0.0417	0.618	C-8
325	0.0278	0.412	C-8
460	0.0459	0.562	C-7
650	0.0471	0.632	C-6
870	0.0352	0.472	C-6

Πίνακας 1.1: Μέγιστη διαχριτική ικανότητα του ALMA για τις διάφορες συχνότητες με $\vartheta_{MRS} > 0.408\text{arcsec}$ (ακτινική διάμετρος του δίσκου)

$\Sigma\chi\nu$ (gHz)	FHWM (arcsec)	ϑ_{MRS} (arcsec)	Configuration
230	0.0183	0.216	C-10
325	0.0122	0.144	C-10

Πίνακας 1.2: Μέγιστη διαχριτική ικανότητα του ALMA για τις διάφορες συχνότητες με $\vartheta_{MRS} < 0.408\text{arcsec}$ (ακτινική διάμετρος του δίσκου)

Οι τιμές του πίνακα πάρονται από το ALMA Cycle 8 Technical Handbook[[Chap. 7, Sect. 7.2 , ALMA](#)]

Κεφάλαιο 2

Αρχικές Συνθήκες

Στην παρούσα εργασία δημιουργήθηκε ένας πρωτοπλανητικός δίσκος με έναν μόνο πλανήτη και 114000 (test particles). Κεντρικό αστέρι του συστήματος επιλέχθηκε ο Ήλιος, ενώ σαν πλανήτης ο Δίας. Η κίνηση όλων των *test particles* γίνεται στο επίπεδο και αρχή των συντεταγμένων είναι η θέση του Ήλιου. Τα test particles προσομοιώνουν ένα δείγμα του δίσκου, πιο συγκεκριμένα κάθε ένα test particle αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο πλήθος σωματιδίων σκόνης, το οποίο πρέπει να βεβαιωθούμε ότι είναι σωστά κατανεμημένο σε αυτον ώστε να μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για το πραγματικό πλήθος των σωματιδίων και κατεπέκταση για ολόκληρο τον δίσκο. Τέλος υποθέσαμε ότι συνολική μάζα του δίσκου σκόνης είναι $M_{disk} = 10^{-4} M_{\odot}$.

2.1 Μονάδες Μέτρησης

Για να λειτουργήσει σωστά ο *SWIFT* απαιτεί συνδυασμό μονάδων μέτρησης τέτοιων ώστε η *Βαρυτική Σταθερά*, G στην σχέση (1.1.1), να ισούται με **μονάδα** και σαν αποτέλεσμα οποιοσδήποτε συνδυασμός μονάδων “σέβεται” την παραπάνω συνθήκη είναι αποδεκτός. Στην παρούσα εργασία επιλέξαμε τον συγκεκριμένο συνδυασμό:

- Μεγάλοι Ήμιάζονες Τροχιών $\alpha \rightarrow AU$
- Περίοδοι Περιφοράς Σωμάτων $T \rightarrow Years$

Άρα, μέσω της (1.1.1) για $\alpha = 1$ και $T = 1$, προκύπτει $M_{\odot}=4\pi^2$.

Για τις υπόλοιπες γωνίες και μήκη(που έχουν διαστάσεις γωνίας) ο *SWIFT* λειτουργεί με μονάδες rad.

Αρχικά συντάχθηκε ένα script με την ονομασία *kepToxyz.f*, το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα να εισάγουμε τα Κεπλεριανά στοιχεία της τροχίας ($\alpha, e, i, \Omega, a_{\text{w}}, M$) και να πάρουμε τις αρχικές τιμές των διανυσμάτων θέσης και ταχύτητας του κάθε σωματιδίου καθορίζοντας τις αρχικές παραμέτρους της κίνησης. Ακόμα μας επιτρέπει να εισάγουμε τη μάζα κάθε σώματος βάση της κανονικοποίησης $M_{\odot}=1$, τις γωνίες και τα μήκη σε μοίρες και στη συνέχεια μετατρέπει όλες τις μεταβλητές στις κατάλληλες μονάδες, ώστε να λειτουργήσει σωστά ο κώδικας (π.χ. εισάγουμε $M_{\odot}=1$ και την μετατρέπει σε $M_{\odot}=4\pi^2$). Το συγκεκριμένο script δημιουργήθηκε για λόγους διευκόλυνσης και από εδώ και στο εξής όλες οι μονάδες δίνονται βάση αυτού του συλλογισμού. Πιο συγκεκριμένα οι μάζες σε ηλιακές μάζες(M_{\odot}), οι γωνίες και τα μήκη σε μοίρες($^{\circ}$) και στη συνέχεια γίνεται η μετατροπή τους στις κατάλληλες μονάδες.

2.2 Επιλογή Αρχικής Θέσης του Πλανήτη

Σαν πρώτο βήμα επιλέχθηκαν οι αρχικές τιμές των στοιχείων της τροχίας του πλανήτη, οι οποίες περιγράφουν τις αρχικές συνθήκες της κίνησης του και δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

M(M \odot)	$\alpha(AU)$	e	i $^{\circ}$	Ω°	ω°	M $^{\circ}$
0.001	5.2044	0.001	0	0	275.42104984168986	0

Πίνακας 2.1: Αρχικές τιμές των στοιχείων της τροχιάς του Δία

Βάση των παραπάνω βλέπουμε ότι την χρονική στιγμή $t_0 = 0$ sec βρίσκεται στο περιήλιο της τροχιάς του, η θέση του οποίου χαρακτηρίζεται από την τιμή του w , η τροχιά του επιλέχθηκε σχεδόν κυκλική και το επίπεδο της ταυτίζεται με το επίπεδο της εκλειπτικής. Η μάζα και ο μεγάλος ημιάξονας του αντιστοιχούν σε πολύ καλή προσέγγιση στις πραγματικές τους τιμές.

2.3 Δημιουργία Δίσκου-Παράμετροι Ολοκλήρωσης

Για τη δημιουργία του πρωτοπλανητικού δίσκου συντάχθηκε ένα script με την ονομασία *GenTP.f*, στο οποίο δίνεται ο αριθμός των (test particles), οι αρχικές τιμές των στοιχείων της τροχιάς τους, τα δύο όρια στα οποία θα περιέχεται η κατανομή (α_{min} και α_{max}) και αυτό την παράγει.

Ο δίσκος που δημιουργήσαμε αποτελείται από 114000 test particles και εκτείνεται σε έναν κυκλικό δακτύλιο με εσωτερική ακτίνα $\alpha_{min} = 1AU$ και εξωτερική $\alpha_{max} = 20AU$. Η παραγωγή του έγινε μέσω της σύμπτυξης δεκαπέντε κατανομών, με αριθμό test particles nb_i με $i \in [1, 2, \dots, 15]$, που παράχθηκαν ξεχωριστά από το *GenTP.f* και ακολουθούν τον εξής συλλογισμό: Κάθε μια εκτείνεται σε έναν δακτύλιο εσωτερικής ακτίνας α_{min} και εξωτερικής α_{max} ενώ κάθε ένα test particle της κατανέμεται με βήμα $da = \frac{\alpha_{max} - \alpha_{min}}{nb} = 0.0005AU$. Σαν αποτέλεσμα ο δίσκος την χρονική στιγμή $t_0 = 0 sec$ έχει γνωστή και σταθερή αριθμητική πυκνότητα, η οποία προσδιορίζεται από τις παραμέτρους των κατανομών που τον δημιούργησαν. Παρακάτω δίνονται οι παράμετροι των κατανομών και κατέπέκταση ολόκληρου του δίσκου:

Κατανομή i	nb_i	a_{min} (AU)	a_{max} (AU)	da (AU)
1	3000	1	2.5	0.0005
2	3000	1	2.5	0.0005
3	3000	1	2.5	0.0005
4	10000	2.5	7.5	0.0005
5	10000	2.5	7.5	0.0005
6	10000	2.5	7.5	0.0005
7	10000	7.5	12.5	0.0005
8	10000	7.5	12.5	0.0005
9	10000	7.5	12.5	0.0005
10	10000	12.5	17.5	0.0005
11	10000	12.5	17.5	0.0005
12	10000	12.5	17.5	0.0005
13	5000	17.5	20	0.0005
14	5000	17.5	20	0.0005
15	5000	17.5	20	0.0005

Πίνακας 2.2: Οι 15 διαφορετικές κατανομές που αποτελούν τον δίσκο των test particles

Οι αρχικές τιμές των υπόλοιπων στοιχείων της τροχιάς τους δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

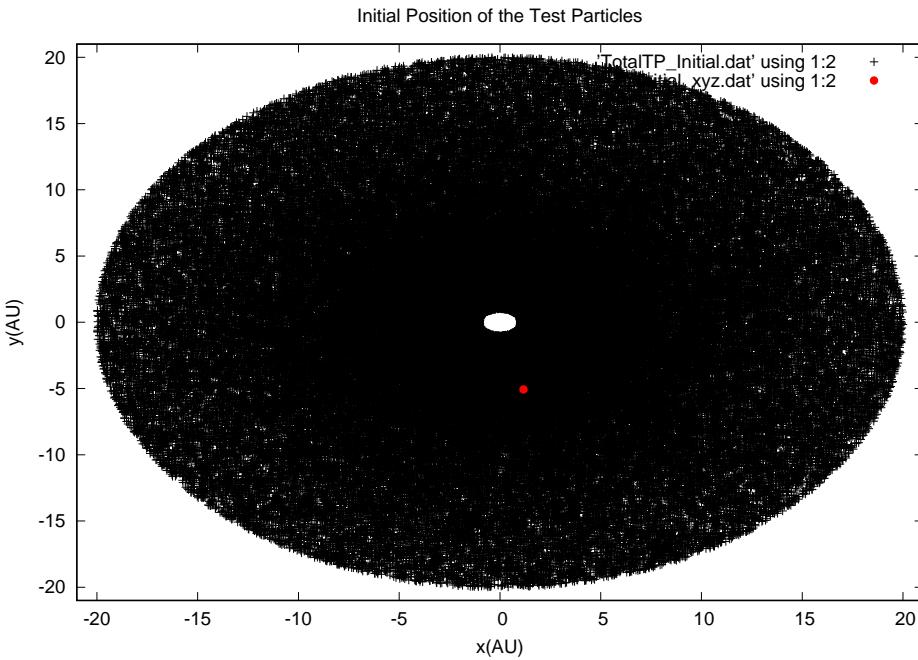
e	i°	Ω°	ω°	M°
0	0	0	0	0-360

Πίνακας 2.3: Αρχικές τιμές των στοιχείων της τροχιάς των test particles

Η μέση ανωμαλία, M κάθε test particle προσδιορίστηκε από έναν random number generator που εμπεριέχεται στο *GenTP.f*, ώστε οι αρχικές θέσεις των test particles

του δίσκου να είναι τυχαίες και να προσομοιώνουν όσο καλύτερα γίνεται μια πραγματικά τυχαία κατανομή.

Βάση των παραπάνω βλέπουμε ότι οι τροχιές όλων των test particles και κατέπεκταση των σωματιδίων είναι κυκλικές και το επίπεδο τους ταυτίζεται με το επίπεδο της τροχιάς του πλανήτη. Η εικόνα της κατανομής των test particles την χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ sec}$ είναι η παρακάτω:



Σχήμα 2.1: Δίσκος της Κατανομής των Test Particles τη Χρονική Στιγμή $t_0 = 0 \text{ sec}$ (Initial Disk)

Η θέση κάθε test particle στο επίπεδο συμβολίζεται με “+”, ενώ η θέση του πλανήτη με “●”, η οποία στο παρόν γράφημα είναι κόκκινη για να ξεχωρίζει.

Λόγω των αρχικών συνθηκών που επιλέξαμε, ο δίσκος παρουσιάζει αξονική και κατοπτρική συμμετρία. Επίσης η αριθμητική του πυκνότητα, $N_{t_0=0}$, είναι σταθερή και γνωστή. Καθώς έχουμε 6000 test particles σε καθε δακτύλιο πάχους 1 AU, οπότε μπορούμε να πούμε ότι η επιφανειακή του πυκνότητα, $\Sigma_{t_0=0}(r)$, μειώνεται συναρτήσει του τετραγώνου της απόστασης καθώς ο ίδιος αριθμός test particles διαμοιράζεται σε ολοένα και μεγαλύτερου εμβαδού δακτυλίους. Σαν αποτέλεσμα η αριθμητική του πυκνότητα και κατ' επέκταση η επιφανειακή του πυκνότητα προσδιορίζονται πλήρως από τις αρχικές συνθήκες δημιουργίας του δίσκου (αν θεωρήσουμε δεδομένη την μάζα του κάθε test particle).

2.4 Παράμετροι της Σκόνης

Τα μικρά στερεά σωματίδια αποτελούν την σκόνη και προκειμένου να προσδιορίσουμε τα φυσικά χαρακτηριστικά της καταφύγαμε στις παρακάτω υποθέσεις και παραδοχές:

- Τα στερεά σωματίδια συγχροτούνται από το ίδιο υλικό και έχουν ίδια χημική σύσταση, συγκεκριμένα από 100% πυριτικά άλατα, (Astronomical Silicate).
- Τα στερεά σωματίδια θεωρήσαμε ότι είναι συμπαγή και έχουν σφαιρικό σχήμα ακτίνας r_d .
- Τα στερεά σωματίδια χαρακτηρίζονται από σταθερή πυκνότητα $\rho_d = 2.7 \frac{g}{cm^3}$

Οι πληροφορίες σχετικά με την σύσταση του υλικού και την πυκνότητα του πάρθηκαν από το Database of Optical Constants for Cosmic Dust, [\[OCDB\]](#).

Στην συγκεκριμένη εργασία κάνουμε λόγο για έναν αρκετά μαζικό δίσκο σχετικά νεαρής ηλικίας και σύμφωνα με την λογική της παραγράφου (1.3.3) επιλέξαμε το μέγεθος των σωματιδίων της σκόνης να είναι λίγο μεγαλύτερο από αυτό της ISM. Συνοψίζοντας τα παραπάνω, τα σωματίδια που επιλέχθηκαν για την παρούσα εργασία είναι:

Ακτίνα (r_d)	Πυκνότητα ($\rho_d \frac{g}{cm^3}$)	Σύσταση
0.5 μm	2.7	100% πυριτικά άλατα

Πίνακας 2.4: Οι Φυσικές Παράμετροι των Σωματιδίων της Σκόνης

Το κατώτατο όριο στο μέγεθος δεν είναι τυχαίο καθώς θεωρούμε ότι σωματίδια με ακτίνα $r_d < 0.45 \mu m$ έχουν εκδιωχθεί από το σύστημα λόγο της πίεσης της ακτινοβολίας του Ήλιου! [\[3\]](#)

Η μάζα του κάθε σωματιδίου ισούται με:

$$m = \frac{4\pi \rho r_d^3}{3} = 1.41372 \times 10^{-12} g \quad (2.4.1)$$

Η συνολική μάζα του δίσκου είναι $M_{disk} = 10^{-4} M_\odot = 1.99 \times 10^{29} g$ άρα η μάζα κάθε test particle είναι:

$$m_{tp} = \frac{10^{-4} M_\odot}{114000} = 8.772 \times 10^{-10} M_\odot = 1.746 \times 10^{24} g \quad (2.4.2)$$

Από τις [\(2.4.1\)](#) και [\(2.4.2\)](#) το κάθε test particle αντιπροσωπεύει N σωματίδια, όπου:

$$N = \frac{m_{tp}}{m} = \frac{1.746 \times 10^{24}}{1.41372 \times 10^{-12}} = 1.235 \times 10^{36} \quad (2.4.3)$$

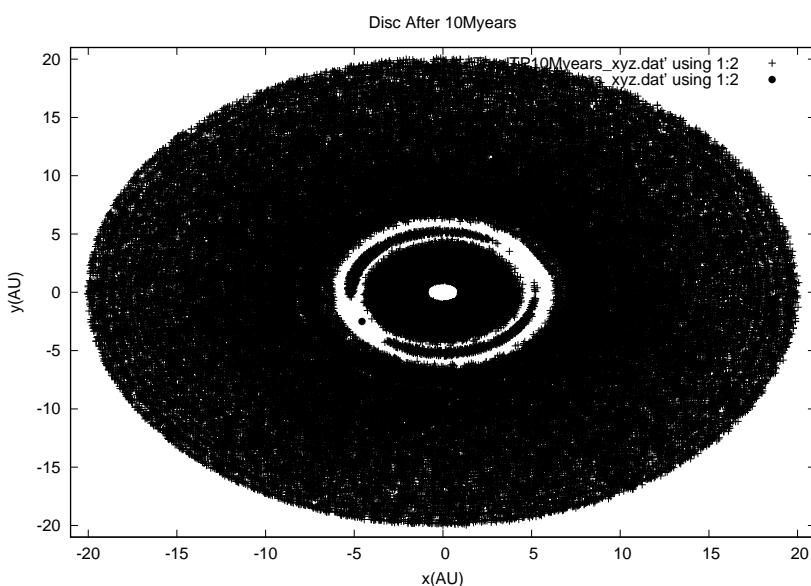
Τελικά ο δίσκος την χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ sec}$ έχει μάζα $M_{disk} = 1.99 \times 10^{29} g$ και περιέχει $N \times 114000 = 1.407 \times 10^{41}$ σωματίδια σκόνης.

Κεφάλαιο 3

Δυναμική Εξέλιξη του Συστήματος

3.1 Προφίλ Επιφανειακής Πυκνότητας

Η αριθμητική ολοκλήρωση έγινε για χρονικό διάστημα **10Myrs**. Η επιλογή του χρονικού διαστήματος ολοκλήρωσης δεν είναι τυχαία, καθώς αντιστοιχεί σε πολλές περιόδους περιφοράς του Δία. Με αυτό τον τρόπο εξασφαλίζουμε ότι θα μεσολαβήσει αρκετός χρόνος, ώστε τα αποτελέσματα που θα πάρουμε να είναι ασφαλή. Η ολοκλήρωση πραγματοποιήθηκε με βήμα 0.2yrs παίρνοντας με αυτό τον τρόπο ικανοποιητικό αριθμό σημείων στις τροχιές των σωμάτων και εξήγαγε δεδομένα (output) κάθε 10^4yrs . Στη συνέχεια συντάχθηκε ένα script με την ονομασία *xToRTh.f*, το οποίο μετέτρεπε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες όλων των test particles του συστήματος σε Πολικές. Αποτέλεσμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης ήταν η δυναμική εξέλιξη του συστήματος για το χρονικό διάστημα των **10Myrs**. Παρακάτω δίνεται η εικόνα του δίσκου:



Σχήμα 3.1: Δίσκος τη Χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ Myrs}$

Η θέση κάθε test particle που παρουσιάζεται στο επίπεδο $x - y$ συμβολίζεται με “+”, ενώ η θέση του Δία με “•” και αυτός ο συμβολισμός θα τηρηθεί σε ολόκληρη την έκταση της εργασίας.

Αμέσως μετά την ολοκλήρωση της προσομοιώσης παρατηρούμε ότι:

- Ο αριθμός των test particles του συστήματος έχει μειωθεί σε σχέση τον αρχικό τους αριθμό.
- Έχουν σχηματιστεί δύο ομάδες test particles, οι οποίες ακολουθούν την τροχιά του πλανήτη και οι θέσεις τους παρουσιάζουν συμμετρία ως προς αυτόν.
- Ο πλανήτης έχει “καθαρίσει” μεγάλο μέρος της τροχιάς του από test particles, δημιουργώντας έναν κενό δακτύλιο στην επιφάνεια του δίσκου και αλλάζοντας έτσι το προφίλ της αριθμητικής του πυκνότητας.

Ανάλυση των Παρατηρήσεων

Κατα το χρονικό διάστημα της ολοκλήρωσης τα test particles αλληλεπιδρούν βαρυτικά με τον αστέρα και τον πλανήτη. Αποτέλεσμα αυτής της αλληλεπίδρασης είναι η μεταβολή των στοιχείων της τροχιάς τους σύμφωνα με νόμους της Μηχανικής (όπως αναφέρθηκε ο πλανήτης δεν δέχεται την βαρυτική δύναμη της κατανομής). Έτσι κάποια test particles άλλοτε αποκτούν τροχιές που τους αναγκάζουν να πέσουν στην επιφάνεια του αστέρα, άλλοτε ταχύτητες μεγαλύτερες από την ταχύτητα διαφυγής¹ από τον αστέρα και έτσι διαφεύγουν από το σύστημα. Τελικά τα test particles αυτά χαρακτηρίζονται ”not active”. Ο SWIFT με τη χρήση του δισδιάστατου πίνακα *istat(NTPMAX, NSTAT)* ελέγχει μετά από κάθε timestep ποιά test particles είναι ”active” και ποιά ”not active”, καθώς συγκεκριμένοι δείκτες ενημερώνουν το πρόγραμμα σε ποία από τις δύο καταστάσεις βρίσκεται το κάθε test particle. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ Myrs}$ τα test particles που παραμένουν ενεργά στο σύστημα είναι 101294·άρα, από την (2.4.2), μάζα του δίσκου είναι:

$$M_{disk} = 101294 \times 1.746 \times 10^{24} g = 1.769 \times 10^{29} g \quad (3.1.1)$$

Οι δύο ομάδες των test particles που ακολουθούν την τροχιά του πλανήτη είναι σε συντονισμό 1 : 1 με αυτόν και βρίσκονται στα σημεία ευσταθούς ισορροπίας Lagrange L_4 και L_5 του συστήματος πλανήτη-αστέρα[8, Chap. 3, Sect. 3.5.-3.7]. Καθώς η τροχιά του πλανήτη είναι σχεδόν κυκλική τα τρίγωνα με κορυφές ΔHL_4 και ΔHL_5 είναι ισόπλευρα. Σαν αποτέλεσμα η μια ομάδα βρίσκεται δεσμευμένη σε ένα χώρο 60° , (L_5), πίσω από τον πλανήτη (κινούμενη προς αυτόν) και η δεύτερη ομάδα βρίσκεται σε ένα χώρο 60° , (L_4), μπροστά του (ο πλανήτης κινείται προς αυτήν). Ο συγκεκριμένος συντονισμός είναι ευσταθής για χρόνους συγκρίσιμους με την ηλικία του σύμπαντος, οπότε αν δεν υπάρξει κάποια εξωτερική διαταραχή ο πλανήτης θα εξακολουθήσει να μοιράζεται την τροχιά του με τις δύο αυτές ομάδες διατηρώντας το σύστημα την γεωμετρία του. Οι δύο αυτές ομάδες μπορούν να ταυτιστούν με τους γνωστούς *Τρωικούς αστεροειδείς* του Ηλιακού μας Συστήματος.

¹Ταχύτητα διαφυγής ή παραβολική ταχύτητα ονομάζεται η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να αποκτήσει, ένα σώμα μάζας m και απόστασης r από το ελεκτικό κέντρο μάζας M , ώστε να τεθεί σε παραβολική τροχιά και να διαφύγει σε άπειρη απόσταση από αυτό. $u_\infty = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{r}}$

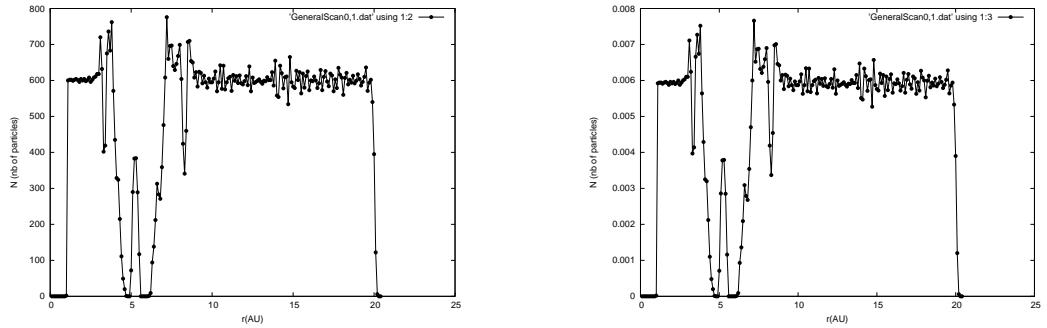
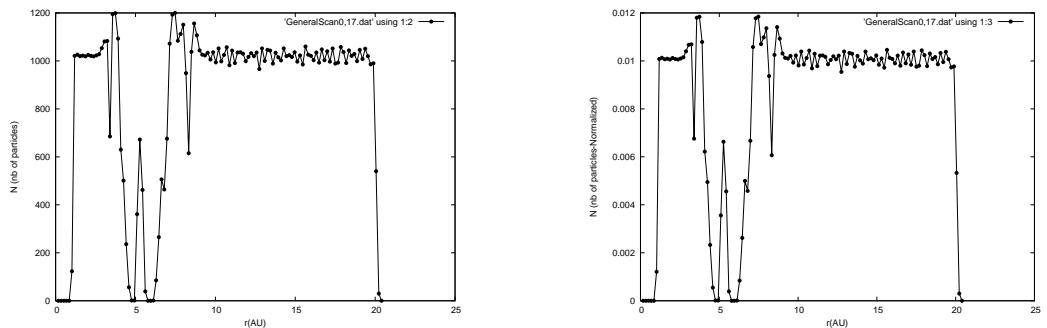
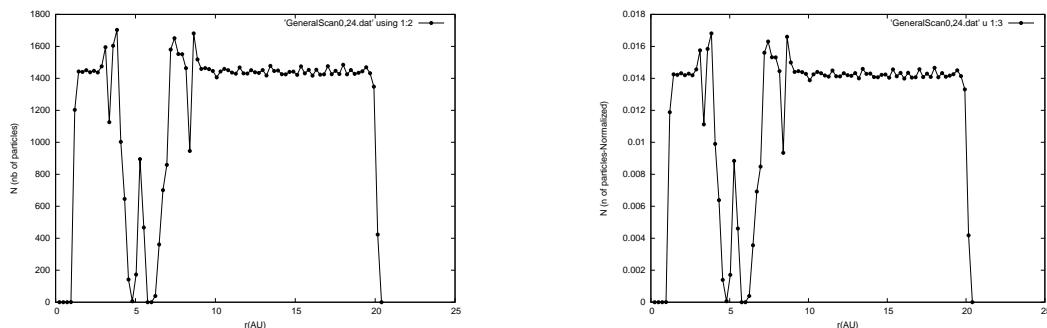
Το εύρος των κενού δακτυλίου (gap), που δημιουργήθηκε στον δίσκο, εξαρτάται από την *ακτίνα Hill* του πλανήτη, (1.4.3), άρα κατ' επέκταση από τον λόγο της μάζας του προς τη μάζα του αστέρα. Ποιοτικά όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα του πλανήτη τόσο μεγαλύτερο είναι και το εύρος του δακτυλίου που δημιουργεί στον δίσκο σκόνης. Για τον Δία στο συγκεκριμένο σύστημα μέσω της (1.4.3) προκύπτει $r_H = 0.82615\text{AU}$.

Όπως αναφέραμε τη χρονική στιγμή $t_0 = 0 \text{ sec}$ η αριθμητική πυκνότητα των test particles του δίσκου, είναι σταθερή, οπότε μπορούμε να πούμε ότι η επιφανειακή του πυκνότητα μειώνεται συναρτήσει του τετραγώνου της απόστασης, αφού ο ίδιος αριθμός test particles διαμοιράζεται σε ολοένα και μεγαλύτερου εμβαδού δακτυλίους. Τη χρονική στιγμή όμως $t_1 = 10 \text{ Myrs}$ το προφίλ της αριθμητικής πυκνότητας (και κατεπέκταση της επιφανειακής πυκνότητας) του έχουν αλλάξει. Για να μελετήσουμε το νέο αυτό προφίλ αρχικά χωρίσαμε τον δίσκο σε δακτύλιο συναρτήσει της απόστασης r τους από το ελεκτικό κέντρο. Μέσα από αυτό το γενικό “σκανάρισμα” εξάγομε το γενικό προφίλ αριθμητικής πυκνότητας του δίσκου. Μετρήσεις έγιναν για τις τιμές:

	i	$Dr(\text{AU})$
1	204	0.1
2	120	0.17
3	85	0.24

Πίνακας 3.1: Παράμετροι σκανάρισματος για την εξαγωγή του γενικού προφίλ αριθμητικής πυκνότητας του δίσκου την $t_1 = 10 \text{ Myrs}$

Παρακάτω δίνονται τα διαγράμματα, με τον αριθμό των test particles N_{ri} συναρτήσει της απόστασης r , που προέκυψαν από τις παραπάνω τιμές για κάθε ζεύγος τιμών:

(α') $i = 204, Dr = 0.1\text{AU}$ (β') $i = 204, Dr = 0.1\text{AU-Normalized}$ (γ') $i = 120, Dr = 0.17\text{AU}$ (δ') $i = 120, Dr = 0.17\text{AU-Normalized}$ (ε') $i = 85, Dr = 0.24\text{AU}$ (τ') $i = 85, Dr = 0.24\text{AU-Normalized}$

Σχήμα 3.2: Γενικό Προφίλ Αριθμητικής Πυκνότητας της Κατανομής

Παρατηρώντας τα παραπάνω διαγράμματα μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής περιοχές:

- Για $0 < r \leq 1$ (AU) δεν υπάρχουν test particles και η αριθμητική πυκνότητα σε αυτή την περιοχή είναι μηδέν.
- Στη συνέχεια για την περιοχή $1 \leq r \leq 3.85$ (AU) ο αριθμός των test particles παρουσιάζει αύξηση, εκτός από το σημείο που αντιστοιχεί σε $r \simeq 3.4$ (AU).
- Μεταξύ των $3.85 \leq r \leq 7.5$ (AU) εμφανίζεται μια μεγάλη κοίλη, η οποία διαχωρίζεται από μια κορυφή για $r \simeq 5.2$ (AU).

- Ο αριθμός των test particles για $7.5 \leq r \leq 20$ (AU) είναι περίπου σταθερός εκτός από το σημείο που αντιστοιχεί σε $r \simeq 8.33(AU)$. Από εκεί και μετά ο αριθμός των test particles μειώνεται δραματικά καθώς έχουμε φτάσει στα πέρατα του δίσκου.

Ανάλυση των Διαγραμμάτων

Το γεγονός ότι στις περιοχές για $r_1 \simeq 3.4(AU)$ και $r_2 \simeq 8.33(AU)$ εμφανίζονται δύο τοπικά ελάχιστα στον αριθμό των test particles δεν είναι τυχαίο. Με βάση την (1.1.7) παρατηρούμε ότι τα test particles με $a_1 \simeq 3.4(AU)$ βρίσκονται πολύ κοντά στον συντονισμό 2:1 με τον πλανήτη και τα test particles με $a_2 \simeq 8.33(AU)$ στον συντονισμό 1:2 με τον πλανήτη.

$$\left(\frac{a_1}{a_J}\right)^{3/2} = 0.53, \quad \left(\frac{a_J}{a_2}\right)^{3/2} = 0.49 \quad (3.1.2)$$

Οι συντονισμοί αυτοί είναι ασταθείς με αποτελέσμα τα test particles που βρίσκονται κοντά σε αυτούς να αποκτούν ασταθείς τροχιές σε σχετικά σύντομα χρονικά διαστήματα να μεταβάλλονται τα στοιχεία της τροχιάς τους. Ακόμα βλέπουμε ότι το “πηγάδι” στα διαγράμματα για τον συντονισμό τον 1:2, των test particles με τον πλανήτη, είναι βαθύτερο από το πηγάδι για τον συντονισμό 2:1 με τον πλανήτη. Η συμπεριφορά αυτή ερμηνεύεται από την (3.1.2), η οποία μας δείχνει ότι ο πρώτος είναι πιο κοντά στην ακριβή τιμή του συντονισμού, (0.5), άρα είναι και πιο ισχυρός.

Ουσιαστικά παρατηρώντας την γεωμετρία του δίσκου, Σχήμα: 3.1, σε συνδυασμό με τα παραπάνω διαγράμματα αριθμητικής κατανομής των test particles, μπορούμε να κατανοήσουμε ότι η ενδιάμεση κορυφή αντιστοιχεί στις ομάδες test particles που εντοπίζονται στα σημεία ευσταθούς ισορροπίας Lagrange (L_4, L_5) και χρήζει πιο λεπτομερή ανάλυση.

Ας υποθέσουμε ότι κινούμαστε ακτινικά από το κέντρο του δίσκου προς την άκρη του σε μια τυχαία διεύθυνση (τυχαία αζιμουθιακή γωνία ϑ)² έως ότου συναντήσουμε τα test particles των περιοχών L_4 και L_5 . Ακολουθώντας τον παραπάνω συλλογισμό είναι εμφανές ότι καθώς κινηθούμε ακτινικά το **αν** ϑ τα συναντήσουμε εξαρτάται από την γωνία ϑ στην οποία ϑ απιλέξουμε να κινηθούμε· καθώς η δακτυλοειδής αυτή περιοχή, σε αντίθεση με τις άλλες δύο, δεν είναι συνεχής αλλά διαχωρίζεται στη διάμετρο που ταυτίζεται με την διεύθυνση εντοπισμού του πλανήτη. Η ύπαρξη της ενδιάμεσης αυτής κορυφής, σε συνδυασμό με τον κενό δακτύλιο, ϑ μας απασχολίσει ιδιαίτερα καθώς αποτελούν την ένδειξη ύπαρξης πλανήτη στον δίσκο. Τέλος τα δύο “πηγάδια” δεξιά και αριστερά της ενδιάμεσης κορυφής αντιστοιχούν στον κενό δακτύλιο που δημιουργεί ο πλανήτης στην τροχία του. Ο δακτύλιος αυτός, προφανώς δεν είναι απόλυτα κενός, αλλα περιέχει τα test particles των περιοχών L_4, L_5 για αυτό και εμφανίζεται η κορυφή όπως αναφέρθηκε.

Το γεγονός ότι για αποστάσεις $r > 8.33(AU)$ η αριθμητική πυκνότητα των test particles είναι σχεδόν σταθερή μας σηματοδοτεί και το όριο της κυριαρχίας του βαρυτικού δυναμικού του Δία. Φυσικά η βαρυτική του δύναμη εξακολουθεί να ασκείται στα test particles όμως δεν είναι ικανή να μεταβάλλει έντονα τα στοιχεία της τροχιάς τους· εκτός για κάποια από αυτά που ίσως βρεθούν σε κάποιο συντονισμό ασταθούς

²Η γνωστή αζιμουθιακή γωνία των πολικών συντεταγμένων

ισορροπίας με τον Δία.

Στο σημείο αυτό προκειμένου να μελετήσουμε σε μεγαλύτερο βάθος την γεωμετρία που απέκτησε ο δίσκος λόγω της παρουσίας του πλανήτη, αλλα και τις χαρακτηριστικές περιοχές της κατανομής, συντάχθηκε ένα script με την ονομασία *ScanDiskFixed.f*. Σύμφωνα με αυτό χωρίσαμε επιπλέον τον δίσκο, με αρχή την διεύθυνση του πλανήτη την $t_1 = 10 \text{ Myrs}$, σε $j = 36$ διαμετρικές διευθύνσεις ανα 10° και επαναλάβαμε την διαδικασία “σκαναρίσματος” του δίσκου δοκιμάζοντας διαφορετικές τιμές παραμέτρων. Έστω πχ η διεύθυνση αναφοράς είναι $\theta = 0^\circ$ και $\vartheta = 180^\circ$, η επόμενη είναι $\theta = 10^\circ$ και $\vartheta = 190^\circ$ κ.ο.κ.

Τώρα μετρήθηκε ο αριθμός test particles σε κάθε διεύθυνση με εύρος $\pm Dth^\circ$, σε κάθε έναν δακτυλίο πάχους Dr από τους i δακτυλίους. Ισοδύναμα μετρήθηκε ο αριθμός των test particles σε κάθε “κελί” $[i, j]$, όπου $i = 1, 2, 3, \dots$ και $j = 1, 2, 3, \dots, 36$. Μετρήσεις έγιναν για τις τιμές:

	i	$Dr(\text{AU})$		i	$Dr(\text{AU})$		i	$Dr(\text{AU})$
1	204	0.1	1	204	0.1	1	204	0.1
2	120	0.17	2	120	0.17	2	120	0.17
3	85	0.24	3	85	0.24	3	85	0.24
(α') $Dth = \pm 10^\circ$			(β') $Dth = \pm 15^\circ$			(γ') $Dth = \pm 20^\circ$		

Πίνακας 3.2: Τιμές των Διαφόρων Παραμέτρων “Σκαναρίσματος” του Δίσκου

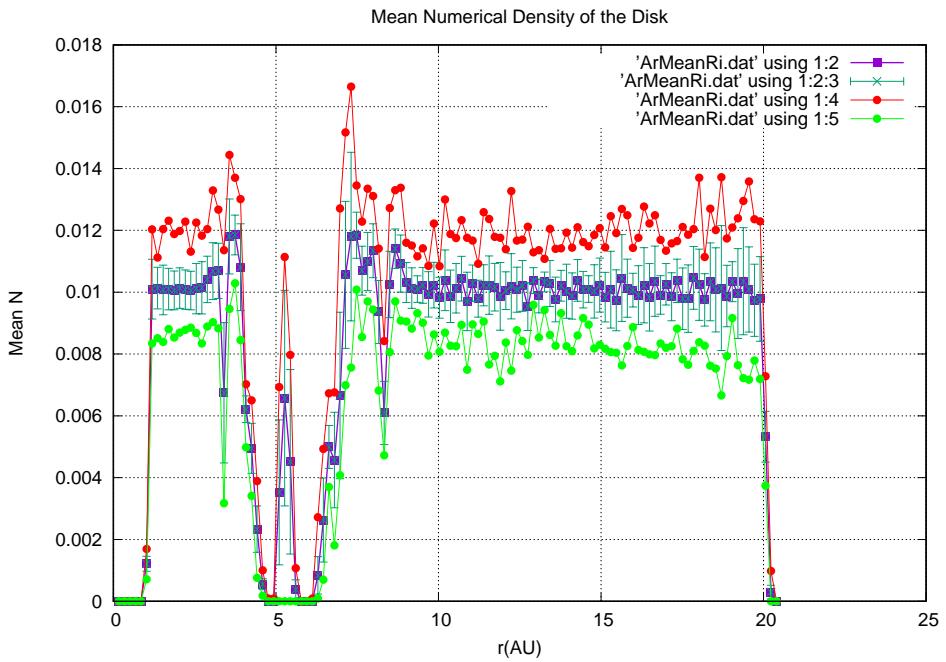
Είναι φανερό ότι οι 36 διευθύνσεις ανα 10° έχουν σαν αποτέλεσμα να μετρηθεί δύο φορές ο αριθμός των test particles του δίσκου. Επιπλέον το εύρος $\pm Dth^\circ$ σε κάθε διεύθυνση έχει σαν αποτέλεσμα επικαλύψεις μεταξύ των περιοχών μέτρησης test particles. Για τους παραπάνω λόγους ο αριθμός των test particles κανονονικοποιήθηκε σύμφωνα με το εμβαδόν επικάλυψης για τα διαφορετικά εύρη “σκαναρίσματος”. Επίσης κρατήσαμε τις μετρήσεις των 18 πρώτων διαμετρικών διευθύνσεων, ($j = 1, 2, 3, \dots, 18$), καθώς αύτες περιλαμβάνουν μια πλήρη μέτρηση των test particles του δίσκου ($18 \times 10^\circ = 180^\circ$) και οι επόμενες 18 είναι αντίστοιχες καθώς μετριούνται τα test particles του δίσκου για δεύτερη φορά.

Καταλήξαμε να κρατήσουμε τις τιμές των παραμέτρων που δίνουν τον διαχωρισμό του δίσκου σε $i = 120$ δακτυλίους πάχους $Dr = 0.17 \text{ AU}$, δηλαδή

$\pm Dth^\circ$	i	$Dr(\text{AU})$
± 10	120	0.17
± 15	120	0.17
± 20	120	0.17

Πίνακας 3.3: Παράμετροι Διαχωρισμού του Δίσκου- “Σκαναρίσματος”

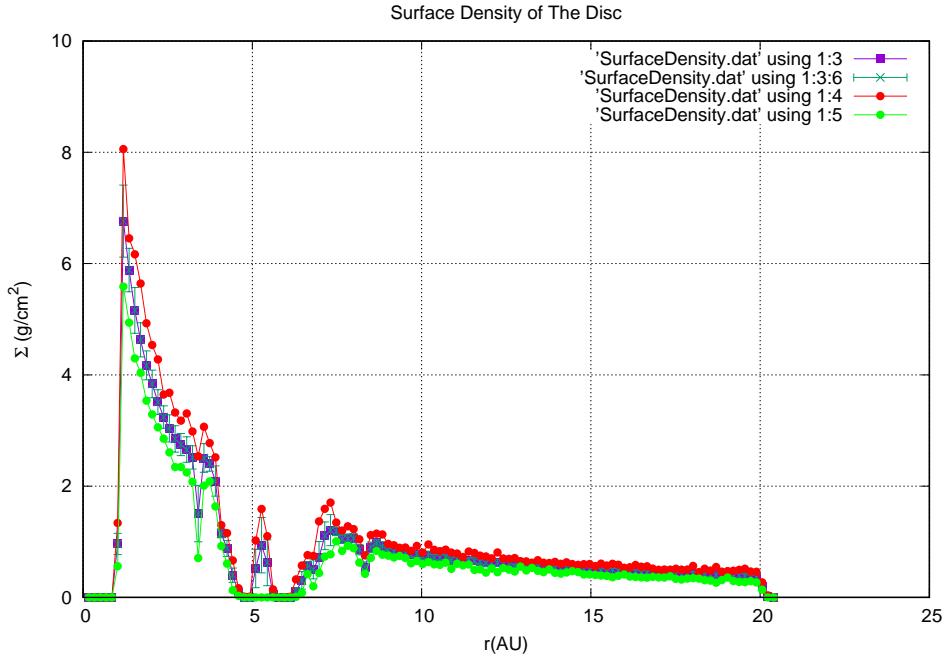
Τελικά πήραμε 54 διαφορετικές μετρήσεις του αριθμού των test particles για κάθε “κελί” ενός δακτυλίου Dr_i , όπου $i = 1, 2, \dots, 120$. Στη συνέχεια βρήκαμε τον μέσο όρο του αριθμού των test particles, $MeanN_{ri}$, για κάθε “κελί” δακτυλίου i και πάχους Dr_i καθώς και το “κελί” με τον μέγιστο αριθμό test particles, N_{max} , και αυτό με τον ελάχιστο αριθμό test particles, N_{min} . Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση μαζί με την τυπική απόκλιση των μετρήσεων στον μέσο όρο:



Σχήμα 3.3: Μέσος Όρος του Αριθμού των Test Particles σε κάθε Δακτύλιο Dr_i
Με κόκκινο χρώμα δίνεται η $N_{max}(r)$, με πράσινο η N_{min} και ο $MeanN$ μπλέ

Βλέπουμε ότι σε κάθε δακτύλιο r_i , με εξαίρεση την περιοχή του πλανήτη, οι τιμές της τυπικής απόκλισης δεν είναι μεγάλες, αυτό σημαίνει ότι η διαφορά του αριθμού των test particles μεταξύ των “κελιών” με το ίδιο r αλλά διαφορετική διεύθυνση ϑ (πχ τα “κελιά” [3,1],[3,2],[3,3] κ.ο.κ.) δεν είναι μεγάλη ή ισοδύναμα έχουμε περίπου ομοιόμορφα κατανεμημένα τα test particles του κάθε δακτυλίου σε αυτόν και ο συνολικός τους αριθμός μπορεί να προσεγγιστεί αρκετά ικανοποιητικά από τον μέσο όρο $MeanN_{ri} \forall i = 1, 2, \dots, 120$. Αντίθετα ο αριθμός των test particles, για r χοντά στην $r_J = 5.2044\text{AU}$, παρουσιάζει μεγάλη διασπορά τιμών· σε κάποια διεύθυνση ο αριθμός των test particles αγγίζει το μηδέν ενώ ταυτόχρονα ο αριθμός test particles σε άλλη διεύθυνση παρουσιάζει μεγάλες τιμές. Αυτή ακριβώς η μη ισοτροπική κατανομή των test particles στη συγκεκριμένη απόσταση r αποτελεί ένδειξη ότι υπάρχει ένα μαζικό σώμα σε αυτήν περίπου την απόσταση. Η παρουσία του σώματος και κατ’ επέκταση η βαρυτική του επιρροή προκαλεί την μεγάλη διασπορά στον αριθμό των test particles, η οποία αντίστροφα είναι η δυναμική “ύπογραφή” της παρουσίας του.

Με δεδομένο το προφίλ αριθμητικής πυκνότητας του δίσκου μπορούμε να εξάγουμε και το προφίλ της επιφανειακής του πυκνότητας, αφού γνωρίζουμε εμβαδόν κάθε δακτυλίου και την μάζα του καθε test particle. Παρακάτω δίνεται το διάγραμμα επιφανειακής πυκνότητας του δίσκου:



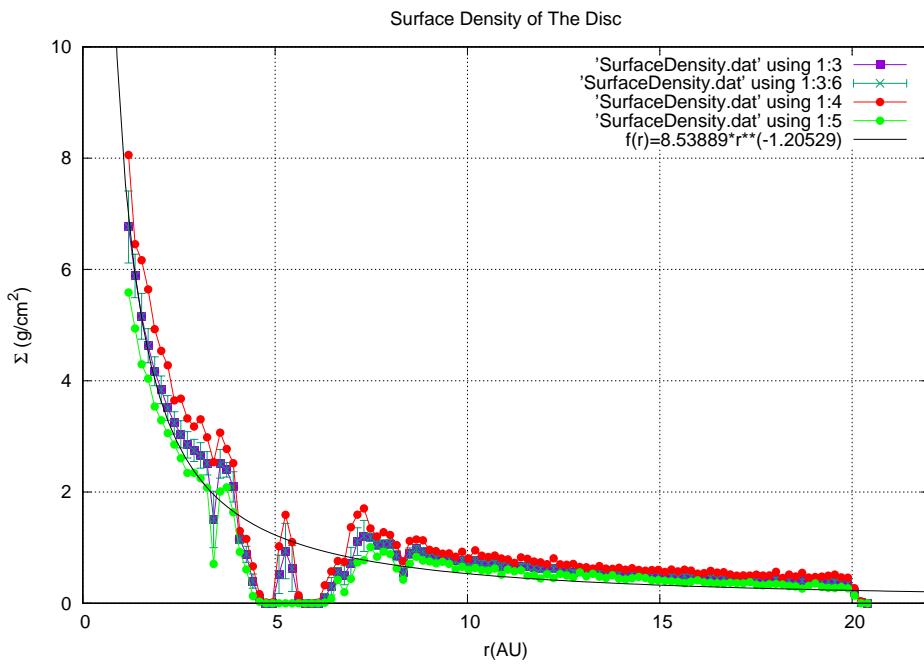
Σχήμα 3.4: Επιφανειακή Πυκνότητα σε κάθε Δακτύλιο Dr ; Συναρτήσει της Απόστασης

Με κόκκινο χρώμα δίνεται η $\Sigma_{max}(r)$, με πράσινο η $\Sigma_{min}(r)$ και ο $\Sigma(r)$ μπλέ

Φαίνεται καθαρά η εκθετική μείωση της επιφανειακής πυκνότητας συναρτήσει της απόστασης μέχρι το όριο όπου το βαρυτικό δυναμικό του πλανήτη παύει να παίζει τον κυρίαρχο ρόλο. Από εκεί και μετά η καμπύλη της επιφανειακής πυκνότητας είναι πιο ομαλή και συνεχίζει να μειώνεται συναρτήσει της απόστασης με μικρότερο όμως ρυθμό. Επίσης φαίνονται καθαρά τα δύο τοπικά ελάχιστα που αντιστοιχούν στους μεγάλους ημιάξονες $\alpha_1 \simeq 3.4(AU)$ και $\alpha_2 \simeq 8.33(AU)$. καθώς τα test particles βρίσκονται πολύ κοντά στους συντονισμούς 2:1 και 1:2 με τον πλανήτη.

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι το 55.25% της συνολικής μάζας του δίσκου βρίσκεται μεταξύ 1 με $5AU$, δηλαδή σε έναν δακτύλιο εύρους $4AU$. Το υπόλοιπο 44.75% κατανέμεται από 5 εώς $20.4AU$, δηλαδή σε ένα δακτύλιο εύρους $15AU$. Αυτή η μεγάλη διαφοροποίηση στην επιφανειακή πυκνότητα του δίσκου θα είναι πολύ σημαντική για τα αποτελέσματα του μοντέλου μας όπως θα διύμε παρακάτω.

Τέλος για να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη καμπύλη, 1.3.2, που περιγράφει το προφίλ επιφανειακής πυκνότητας του δίσκου βάση των δεδομένων μας αποβάλλαμε τους δακτυλίους απόστασης $< 1AU$, καθώς δεν εμπεριέχουν καθόλου ύλη. Παρακάτω δίνεται το διάγραμμα επιφανειακής πυκνότητας του δίσκου για $r \geq 1AU$:



Σ χήμα 3.5: Επιφανεικαή Πυκνότητα σε κάθε Δακτύλιο Dr_i , όπου $r \geq 1AU$ Συναρτήσει της Απόστασης

Με κόκκινο χρώμα δίνεται η $\Sigma_{max}(r)$, με πράσινο η $\Sigma_{min}(r)$ και ο $\Sigma(r)$ μπλέ

$$\text{όπου τελικά } \Sigma(r) = 8.53889 \times r^{-1.20529} \frac{g}{cm^2}.$$

Κεφάλαιο 4

Κατανομή της Εκπεμπόμενης Ακτινοβολίας

Προκειμένου να υπολογίσουμε την Θερμοκρασία *Iσορροπίας* των σωματιδίων της σκόνης στον δίσκο πρέπει αρχικά να ορίσουμε τα χαρακτηριστικά του πεδίου της ακτινοβολίας.

4.1 Επιλογή Πεδίου Ακτινοβολίας

Στο σημείο αυτό ας θεωρήσουμε ως πεδίο ακτινοβολίας ένα αστέρι και την γύρω περιοχή του. Φυσικά δε μπορούμε να έχουμε αυστηρά συνθήκες θερμοδυναμικής ισορροπίας καθώς οι φυσικές παράμετροι, όπως η θερμοκρασία, μεταβάλλονται στον χώρο και στον χρόνο. Μπορούμε όμως να υποθέσουμε συνθήκες τοπικής θερμοδυναμικής *Iσορροπίας* για μεταβολές αρκετά μικρές, σε κλίμακες συγκρίσιμες με την μέση ελεύθερη διαδρομή των φωτονίων. Έτσι υποθέτουμε ότι η επιφάνεια του αστέρα εκπέμπει ακτινοβολία σαν μέλαν σώμα

Στην παρούσα εργασία επιλέξαμε σαν κεντρικό άστρο τον Ήλιο. Θεωρώντας σφαιρική συμμετρία και από την σχέση (1.2.12) η συνολική θερμοκρασία που εκπέμπεται από την επιφάνεια του προς όλες τις κατευθύνσεις δίνεται από την σχέση (1.2.12):

$$F^+ = \sigma T_e^4, \text{όπου } T_e \text{ η ενεργός θερμοκρασία της επιφάνειας του Ήλιου} \quad (4.1.1)$$

Η συνολική ηλεκτρομαγνητική ισχύς ή αντίστοιχη η ενέργεια ανα μονάδα χρόνου που εκπέμπει ο Ήλιος από την επιφάνεια του σε όλο το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα ονομάζεται *Φωτεινότητα*, L_\odot και προφανώς:

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 F^+ = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_e^4, \frac{\text{erg}}{\text{sec}} \quad (4.1.2)$$

Η φαινόμενη λαμπρότητα του Ήλιου, l_\odot που ονομάζεται *Ηλιακή Σταθερά*, είναι γνωστή από αστρονομικές παρατηρήσεις. Η φαινόμενη λαμπρότητα ουσιαστικά ισούται με την φωτεινότητα L_\odot διαμοιρασμένη σε μια επιφάνεια σφαίρας με ακτίνα την απόσταση Γης-Ήλιου.

$$L_\odot = 4\pi(1AU)^2 l_\odot, \frac{\text{erg}}{\text{sec}} \quad (4.1.3)$$

Από τις (4.1.1), (4.1.2) και (4.1.3) προκύπτει:

$$\begin{aligned} T_e^4 &= \frac{4\pi(1AU)^2l_\odot}{4\pi R_\odot^2\sigma} \\ T_e^4 &= \frac{(1AU)^2l_\odot}{R_\odot^2\sigma} \\ T_e &= 5777.62K \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Από τον νόμο του Wien, (1.2.13), προκύπτει ότι το μέγιστο της εκπεμπόμενης ηλιακής ακτινοβολίας εντοπίζεται στα $\lambda_{max} = 0.5016$ μμ, δηλαδή στην περιοχή του Ορατού τμήματος του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος. Τελικά από τις σχέσεις (4.1.1) και (4.1.2) προκύπτει η φωτεινότητα του Ήλιου είναι:

$$L_\odot = 3.8412 \times 10^{33} \frac{erg}{sec} \quad (4.1.5)$$

4.2 Υπολογισμός της Θερμοκρασίας Ισορροπίας της Σκόνης του Δίσκου

Για να υπολογίσουμε την Θερμοκρασία Ισορροπίας, T_{dust} της σκόνης πρέπει να πρώτα να συνυπολογίσουμε τον ρυθμό θέρμανσης και ψύξης ($H = \frac{erg}{sec}$ και $C = \frac{erg}{sec}$ αντίστοιχα) του κάθε σωματιδίου. Ο ρυθμός θέρμανσης ενός σωματιδίου σκόνης ισοδύναμει με την ενέργεια που απορροφάει το σωματίδιο, ανα μονάδα χρόνου, από τα φωτόνια όλων των συχνοτήτων του φάσματος προερχόμενα από όλες τις διευθύνσεις.

$$H = \int_0^\infty k_\nu \pi J_\nu d\nu \quad (4.2.1)$$

Στο σημείο αυτό υποθέτουμε ότι κάθε στερεό σωματίδιο δέχεται απευθείας την ηλιακή ακτινοβολία, χωρίς δηλαδή κάποιο άλλο σωματίδιο να βρισκεται μπροστά του και να αποκόπτει μέρος αυτής (optically thin Disc). Τελικά κάθε σωματίδιο σκόνης θερμαίνεται αποκλειστικά από την ακτινοβολία του Ήλιου¹.

Ο Ήλιος για ένα σωματίδιο απόστασης, r , υπόκειται σε στερέα γωνία $\pi \frac{R_\odot^2}{r^2}$ και η είδικη ένταση της ακτινοβολίας που δέχεται το σωματίδιο είναι $B_\nu(T_e)$. Από την σχέση (1.2.6) η μέση ένταση που δέχεται από όλες τις διευθύνσεις (εντός της στερεάς γωνίας, $\pi \frac{R_\odot^2}{r^2}$) είναι:

$$J_\nu = \frac{\pi R_\odot^2}{4\pi r^2} B_\nu(T_e), \frac{erg}{sec cm^2 Hz ster} \quad (4.2.2)$$

Τελικά από τις (4.2.1) και (4.2.2) προκύπτει:

$$H = \frac{4(\pi r_d)^2}{4m} \left(\frac{R_\odot}{r}\right)^2 \int_0^\infty Q_\nu B_\nu(T_e) d\nu \quad (4.2.3)$$

¹ Αγνοούμε την ενέργεια που μπορεί να απορροφήσει ένα σωματίδιο από τα υπόλοιπα σωματίδια, καθώς όλα εκπέμπουν προς όλες τις κατευθύνσεις (4π)

Ο ρυθμός ψύξης ενός σωματιδίου ισοδύναμεί με την ενέργεια που εκπέμπει το σωματίδιο, ανά μονάδα χρόνου, για τα φωτόνια όλων των συχνοτήτων του φάσματος προς όλες τις κατευθύνσεις:

$$C = \int_0^\infty k_\nu \pi B_\nu(T_{dust}) d\nu = \frac{4(\pi r_d)^2}{m} \int_0^\infty Q_\nu^{emis} B_\nu(T_{dust}) d\nu \quad (4.2.4)$$

Την ίδια σκόνη, θερμοκρασία T_{dust} , βρίσκονται σε θερμοδύναμική ισορροπία όταν πρέπει ο ρυθμός ψύξης, C , να ισούται με τον ρυθμό θέρμανσης, H . Η παραπόνω υπόθεση προέρχεται από τον Νόμο του Kirchhoff και κατ' επέκταση συμπεραίνουμε ότι όση ακτινοβολία απορροφάται τόση εκπέμπεται άρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε στον ρυθμό ψύξης την αποδοτικότητα εκπομπής, Q_ν^{emis} ². Τελικά από την σχέση $H = C$ έχουμε:

$$\left(\frac{R_\odot}{2r}\right)^2 \int_0^\infty Q_\nu B_\nu(T_e) d\nu = \int_0^\infty Q_\nu B_\nu(T_{dust}) d\nu \quad (4.2.5)$$

Στο σημείο αυτό όταν γίνει μια ποιοτική ανάλυση για την λύση των δύο ολοκλήρωμάτων.

Όσον αφορά το ολοκλήρωμα στο αριστερό κομμάτι γνωρίζουμε ότι ο Ήλιος δεν εκπέμπει αποτελεσματικά στα μεγάλα μήκη κύματος, (λ_{IR} έως $\lambda = \infty$) · επίσης η σκόνη δεν απορροφά καθόλου στα πολύ μικρά μήκη κύματος, ($\lambda = 0$ έως λ_{UV}). Τέλος τα μήκη κύματος, τα οποία είναι σχετικά με την αποτελεσματική απορρόφηση, (λ_{UV} έως λ_{IR}), είμαστε στο όριο της γεωμετρικής οπτικής οπότε μπορούμε να υποθέσουμε $Q_\nu = 1$.

Όσον αφορά το ολοκλήρωμα στο δεξιό κομμάτι γνωρίζουμε ότι η σκόνη εκπέμπει αποτελεσματικά στα μεγάλα μήκη κύματος όπου βρισκόμαστε στο όριο Rayleigh και ο συντελεστής Q_ν δίνεται από τη σχέση (1.2.28). Έτσι από τις (4.2.5), (1.2.11), (4.1.2) για το αριστερό μέλος της ισότητας και από την λύση του δεξιού μέλους της εξίσωσης[5, Chap. 8, Sect. 2.2] προκύπτει:

$$\frac{L_\odot}{16(\pi r_d)^2} = 1.47 \times 10^{-6} r_d T_{dust}^6, \text{ για } \beta = 2 \text{ και οι μονάδες είναι } r \text{ και } r_d \text{ σε cm} \quad (4.2.6)$$

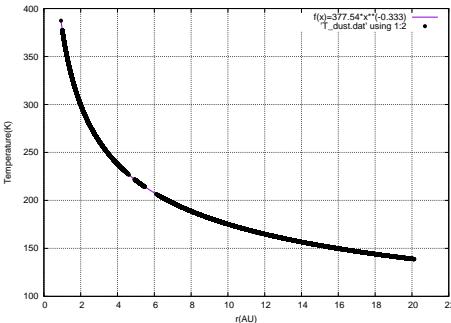
Μετατρέποντας την απόσταση r σε AU και για $r_d = 0.5\mu m = 5 \times 10^{-5} cm$ τελικά προκύπτει:

$$T_{dust} = 377.54 r^{-\frac{1}{3}}, \text{ για } \beta = 2 \quad (4.2.7)$$

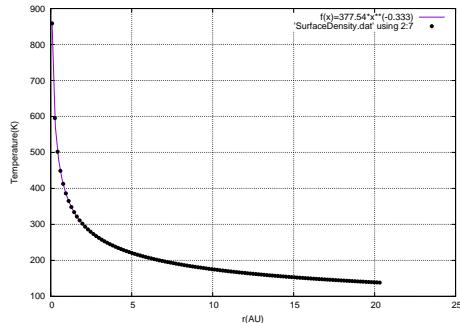
Η εξίσωση (4.2.7) δίνει την θερμοκρασία ισορροπίας των test particles και κατ' επέκταση των σωματιδίων της σκόνης συναρτήσει της απόστασης.

²Η φυσική σημασία της αποδοτικότητας εκπομπής είναι ανάλογη με αυτήν την αποδοτικότητας απορρόφησης, όπως ορίστηκε, για την διαδικασία όμως της εκπομπής του φωτός. Συνήθως συμβολίζονται Q_ν^{emis} και Q_ν^{abs} αντίστοιχα, αλλα στην εργασία χρησιμοποιούμε Q_ν^{emis} και Q_ν , με την αποδοτικότητα απορρόφησης, Q_ν

Παρακάτω δίνεται θερμοκρασία ισορροπίας των test particles (και κατ' επέκταση των σωματιδίων της σκόνης) συναρτήσει της απόστασης στον δίσκο, αλλά και η μέση θερμοκρασία κάθε δακτυλίου i , $i = 1, 2, 3, \dots, 120$ του δίσκου:



(α') Θερμοκρασία των test particles συναρτησει της απόστασης τους



(β') Μέση θερμοκρασία κάθε δακτυλίου συναρτησει της απόστασης του

Στο διάγραμμα 4.1α' εντοπίζουμε δύο περιοχές όπου δεν υπάρχουν test particles. Φυσικά οι περιοχές αυτές αντιστοιχούν στον κενό δακτυλίο που έχει δημιουργήσει ο Δίας καθώς περιφέρεται στην τροχία του. Ακόμα στο διάγραμμα 4.1β' πρέπει να σημειωθεί ότι τα πρώτα 5 σημεία αντιστοιχούν στους δακτυλίους μέσης απόστασης $r_i = i \times 0,17AU$ με $i = 1, 2, 3, 4, 5$ στους οποίους δεν εμπεριέχονται σωματίδια. Το γεγονός γίνεται φανερό και από το διαγράμμα 4.1α', όπου τα test particles εντοπίζονται από αποστάσεις $r \geq 1AU$. Τέλος η εξίσωση (4.2.7) δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για σωματίδια διαμέτρου μέχρι 1μm.

Κεφάλαιο 5

Φασματική και Χωρική Κατανομή της Εκπεμπόμενης Ακτινοβολίας

5.1 Φασματική Κατανομή της Ισχύος

Ο δίσκος θερμοκρασίας T_{dust} βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία και ακτινοβολεί. Θέλουμε να βρούμε την φασματική κατανομή της ενέργειας του δίσκου, (SED), που λαμβάνει παρατηρητής σε απόσταση $D = 100 pc$ από τον δίσκο βλέποντας τον “face on”, δηλαδή στην (1.2.4) $\theta = 0 \text{ deg}$. Η SED είναι ένα διάγραμμα λF_λ vs λ , το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως για τον χαρακτηρισμό αστρονομικών πηγών.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την SED συντάχθηκε ένα script με την ονομασία *System'sSED.py*, όπου θεωρήσαμε ότι κάθε δακτύλιος του δίσκου αντιπροσωπεύει ένα “pixel” πάχους $Dr = 0.17 AU$. Έτσι το σύνολο των σωματίδιων κάθε δακτύλιου $i = 1, 2, \dots, 120$, πάχους Dr_i , επιφανειακής πυκνότητας Σ_{ri} και θερμοκρασίας T_{ri} αντιπροσωπεύουν ένα “μεγάλο σωματίδιο”. Ο παρατηρητής σε απόσταση D από τον δίσκο λαμβάνει, από κάθε δακτύλιο i , μονοχρωματική ροή ακτινοβολίας F_λ^i (ή F_ν^i αντίστοιχα). Θεωρούμε την ακτινοβολία πίσω από τον δίσκο αμελητέα. έτσι από τις σχέσεις (1.2.25), (1.2.26), (1.2.7) και (1.2.8) προκύπτει:

$$\begin{aligned} F_\lambda^i &= \left(\frac{2\pi r Dr}{D^2} \right) (1 - e^{-\tau_\lambda^i}) B_\lambda(T_{dust}^i) \\ F_\nu^i &= \left(\frac{2\pi r Dr}{D^2} \right) (1 - e^{-\tau_\nu^i}) B_\nu(T_{dust}^i) \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Η εκπομπή στα μεγάλα μήκη κύματος από τα σωματίδια της σκόνης έχει μικρό οπτικό βάθος, άρα τα σωματίδια που βρίσκονται μπροστά δεν αποκόπτουν μέρος της ακτινοβολίας αυτών που βρίσκονται πιο πίσω. Ουσιαστικά όπως για την απορρόφηση έτσι και για την εκπομπή θεωρούμε ότι ο δίσκος έχει μικρό οπτικό βάθος (optically thin Disc). Το οπτικό βάθος, (1.2.21), δίνεται τώρα:

$$\tau_\lambda^i = k_\lambda \Sigma_{ri}, \text{ όπου } \Sigma_{ri} \text{ η επιφανειακή πυκνότητα του δακτυλίου } i \quad (5.1.2)$$

Θα χρειαστούμε την συνάρτηση του συντελεστή εκπομπής, k_λ , του δίσκου για να προσδιορίσουμε το οπτικό βάθος. Ο συντελεστής εκπομπής όμως είναι ίσος με τον συντελεστή απορρόφησης, αφου θεωρούμε ότι η σκόνη βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία και τελικά δίνεται από την (1.2.31). Για τον προσδιορισμό των σταθερών

χρησιμοποιήσαμε το ζεύγος τιμών: αν $\lambda_0 = 0.1\text{cm}$ τότε $Q_\lambda = 6.8778718 \times 10^{-5}$ (οι τιμές προκύπτουν για σωματίδιο με όλα τα φυσικά χαρακτηριστικά που υποθέσαμε στην ενότητα 2.4).

Από την (1.2.18) προκύπτει (για ένα σωματίδιο) για το συγκεκριμένο ζεύγος τιμών:

$$k_0 = \frac{3Q_\lambda}{4r_d\rho} = 0.3821 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \quad (5.1.3)$$

άρα:

$$k_\lambda = 0.3821 \left(\frac{\lambda}{0.1}\right)^{-2} = 0.003821 \lambda^{-2} \quad (5.1.4)$$

αντίστοιχα:

$$k_\nu = 0.3821 \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^2 \quad (5.1.5)$$

Στην σχέση, (5.1.4), το λ δίνεται σε cm . Τελικά από την (5.1.2) και (5.1.4):

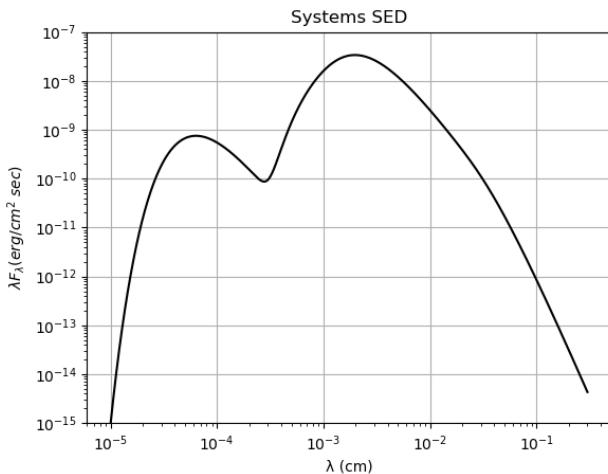
$$\tau_{\lambda,i} = 0.003821 \lambda^{-2} \Sigma_{ri}, \text{ όπου } \Sigma_{ri} \text{ σε } \frac{\text{g}}{\text{cm}^2} \quad (5.1.6)$$

Από τις (5.1.1) και (5.1.6) υπολογίστηκε η μονοχρωματική ροή του δίσκου. Προκειμένου όμως να υπολογίσουμε την SED του συστήματος χρειάζεται να συνυπολογίσουμε και την μονοχρωματική ροή του Ήλιου, η οποία δίνεται ως:

$$F_\lambda = \left(\frac{R_\odot}{D}\right)^2 B_\lambda(T_e) \quad (5.1.7)$$

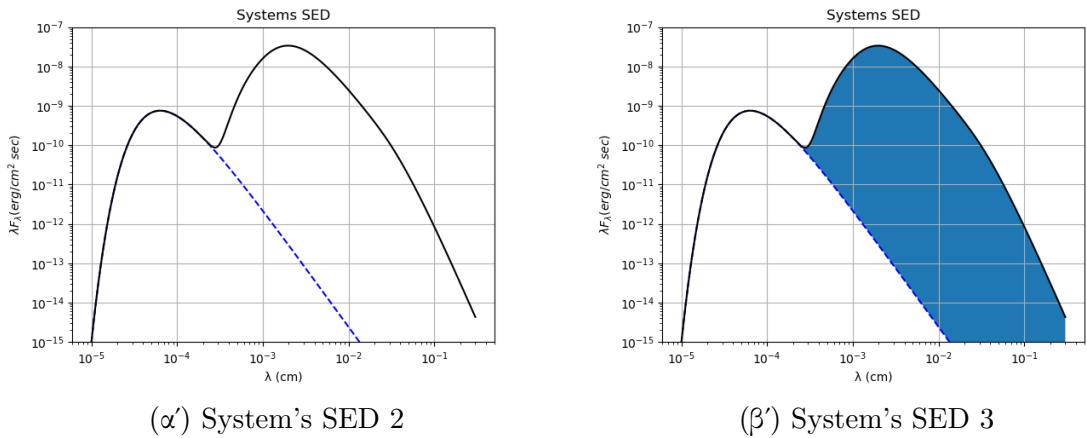
$$F_\nu = \left(\frac{R_\odot}{D}\right)^2 B_\nu(T_e) \quad (5.1.8)$$

Τελικά η SED του συστήματος Ήλιου-Δίσκου για 1000 σημεία με λ από $0.1\mu\text{m}$ έως $3000\mu\text{m}$ (σε λογαριθμική κλιμακα) είναι η εξής:



Σχήμα 5.1: Φασματική Κατανομή Ακτινοβολίας του Συστήματος Ήλιου-Δίσκου

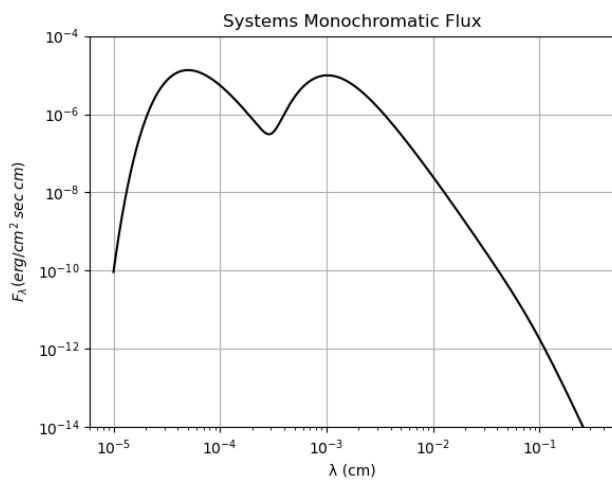
Παρακάτω σημειώνεται το όριο από το οποίο και μετά ανιχνεύεται η παρουσία του δίσκου.



Σχήμα 5.2: Φασματική Κατανομή Ακτινοβολίας του Συστήματος Ήλιου-Δίσκου-2

Παρατηρώντας την 5.1 διακρίνουμε δύο κορυφές. Η πρώτη αντιστοιχεί στον αστέρα, ενώ η ύπαρξη της δεύτερης μας φανερώνει ότι πέρα από το αστέρι του συστήματος υπάρχει και ένας δίσκος μεσοαστρικής ύλης. Η συνάρτηση πηγής του δίσκου είναι μέλαν σώμα, αλλά η αναδύόμενη ειδική ένταση της ακτινοβολίας του, σε αντίθεση με του αστεριού, είναι πολλαπλασιασμένη με τον όρο του οπτικού βάθους 5.1.1. Ακόμα η δεύτερη κορυφή είναι μετατοπισμένη σε μεγαλύτερα μήκη κύματος λόγω της πολύ μικρότερης θερμοκρασίας της μεσοαστρικής ύλης του δίσκου.

Στην γραφική παράσταση της SED υπολογίζουμε το γινόμενο λF_λ και οπως αναφέραμε, ο δισκος εκπέμπει πιο αποτελεσματικά στα μεγάλα μήκη κύματος. Σαν αποτέλεσμα έχουμε μεγαλύτερη μετατόπιση προς τα θετικά του άξονα για του τμήματος που αντιστοιχεί στον δίσκο έναντι αυτού που αντιστοιχεί στον αστέρα. Αυτό φανερώνεται και από το διάγραμμα μονοχρωματικής ροής, $F_{λνσλ}$ του συστήματος, όπου δεν πολλαπλασιάζεται η μονοχρωματική ροή με το μήκος κύματος:

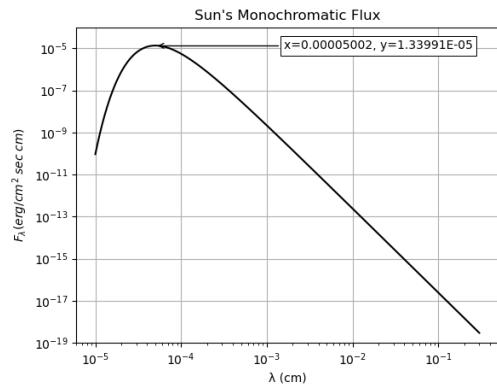


Σχήμα 5.3: Μονοχρωματική ροή ακτινοβολίας του συστήματος

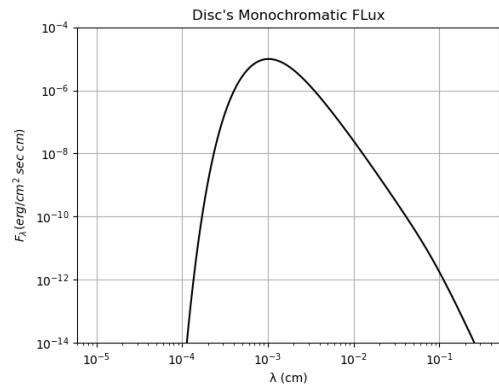
Στο σημείο αυτό πρέπει να αναλογιστούμε μια βασική υπόθεση που κάναμε για την απλοποίση του μοντέλου μας. Για τον υπολογισμό της Θερμοκρασίας *Iσορροπίας* της σκόνης θεωρήσαμε ότι **ο δίσκος είναι οπτικά διαφανής** και κατ' επέκταση

ότι η ακτινοβολία που απορροφάνε και επανεκπέμπουν τα σωματίδια της σκόνης δεν αποκόπτεται από άλλα σωματίδια που πιθανώς βρίσκονται μπροστά από τα πρώτα. Η παραπάνω υπόθεση καταλήγει στις μέγιστες θερμοκρασίες που μπορεί να έχει η σκόνη υπό την ακτινοβολία του συγκεκριμένου αστεριού άρα και στη μέγιστη μονοχρωματική ροή ακτινοβολίας που μπορεί να εκπέμψει αυτός ο δίσκος. Μια πιο αυστηρή ανάλυση του προβλήματος απαιτεί την λύση της διάδοσης της ακτινοβολίας μέσα στον δίσκο.

Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της μονοχρωματικής ροής του αστέρα και του δίσκου, για 1000 σημεία με λ από 0.1μμ έως 3000mm (σε λογαριθμική κλιμακα), δίνονται παρακάτω:

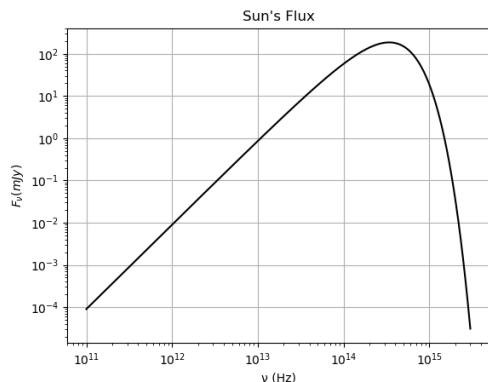


(α') Φασματική Κατανομή Ακτινοβολίας του Ήλιου

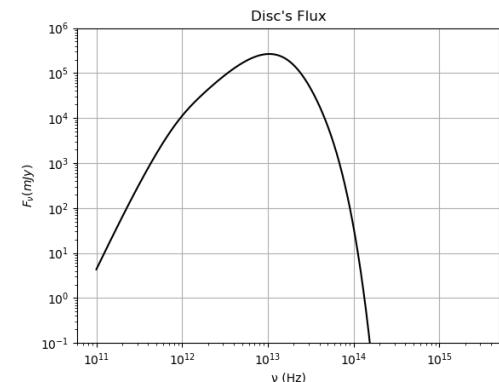


(β') Φασματική Κατανομή Ακτινοβολίας του Δίσκου

και δίνονται αντίστοιχα σε mJy , μέσω του script: *FluxmJy.py*:



(α') Φασματική Κατανομή Ακτινοβολίας του Ήλιου σε mJy



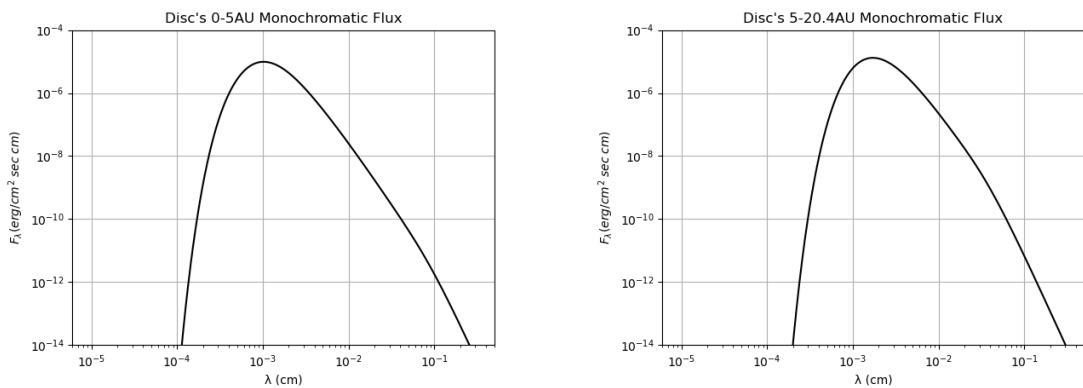
(β') Φασματική Κατανομή Ακτινοβολίας του Δίσκου σε mJy

Το εμβαδόν της καμπύλης των διαγραμμάτων μας δίνει την συνολική ροή του αστέρα και του δίσκου αντίστοιχα στην απόσταση των 100pc (1.2.3). Η συνολική ροή για τον Ήλιο προκύπτει $1.027 \times 10^{-9} \frac{\text{erg}}{\text{sec cm}^2}$, ενώ για τον δίσκο $5.173 \times 10^{-8} \frac{\text{erg}}{\text{sec cm}^2}$. Βλέπουμε δηλαδή ότι η ροή του δίσκου φαίνεται να είναι ~ 50 φορές μεγαλύτερη από του αστέρα.

Αν υψηλούμε το προφίλ της επιφανειακής πυκνότητας του δίσκου, 3.4, βλέπουμε ότι η μάζα στον δίσκο κατανέμεται με τέτοιον τρόπο ώστε το 55.25% της συνολικής

μάζας του δίσκου βρίσκεται μεταξύ $1 - 5AU$, δηλαδή σε έναν δακτύλιο εύρους $4AU$. Προφανώς και όταν μια τόσο μεγάλη μάζα σκόνης ($5.525 \times 10^{-4} M_{\odot}$) κατανέμεται σε μια τόσο μικρή περιοχή η προσέγγιση του μικρού οπτικού βάθους ξεκινάει να ακλονίζεται. Ακόμα παρατηρώντας το προφίλ κατανομής των θερμοκρασιών του δίσκου, [4.1β'](#), βλέπουμε ότι η παραπάνω περιοχή του δίσκου αντιστοιχεί και στην περιοχή με τις μεγαλύτερες θερμοκρασίες. Έτσι ενώ μια ομοιόμορφη αύξηση της μάζας του δίσκου αυξάνει αναλογικά την ροή, η ταυτόχρονη αύξηση του οπτικού βάθους θα έπρεπε να μειώνει την θερμοκρασία ισορροπίας της σκόνης. Από την εξίσωση [\(1.2.12\)](#) βλέπουμε ότι η ροή εξαρτάται εκθετικά από την θερμοκρασία, οπότε ακόμα και μια μικρή διόρθωση στην τιμή της θερμοκρασίας επηρεάζει σημαντικά την ροή.

Στο σημείο αυτό χωρίσαμε τον δίσκο σε δύο περιοχές από $1 - 5AU$ και από $5 - 20.4AU$ και μετρήσαμε την μονοχρωματική ροή του κάθε τμήματος προσεγγίζοντας τα σαν δύο διαφορετικά σώματα από το εμβαδόν της κάθε καμπύλης. Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της μονοχρωματικής ροής των δύο περιοχών αντίστοιχα:



(α') Μονοχρωματική ροή ακτινοβολίας από το κομμάτι του δίσκου 0-5AU

(β') Μονοχρωματική ροή ακτινοβολίας από το κομμάτι του δίσκου 5-20.4AU

Οι συνολικές ροές που μετρήθηκαν είναι $1.6 \times 10^{-8} \frac{erg}{sec cm^2}$ και $3.57 \times 10^{-8} \frac{erg}{sec cm^2}$ για το πρώτο και το δεύτερο τμήμα αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι η ροή από το δεύτερο τμήμα είναι ~ 2.23 φορές μεγαλύτερη από αυτή του πρώτου! Αρκεί να αναλογιστούμε το εξης:

Εάν ο δίσκος ήταν απόλυτα οπτικά διαφανής θα έπρεπε το πρώτο κομμάτι του έχοντας μεγαλύτερη μέση θερμοκρασία και ταυτόχρονα μεγαλύτερη επιφανειακή πυκνότητα να έχει μεγαλύτερη ροή. Ο λόγος που αυτό δεν παρατηρείται προδίδεται από τις εξίσωσεις [5.1.1](#) και [5.1.6](#), όπου οι μεγάλες τιμές επιφανειακής πυκνότητας σε συνδυασμό με την μικρότερη ροή σε σχέση με το δεύτερο κομμάτι του δίσκου μας λέει ότι τελικά δεν και τόσο οπτικά διαφανής και μάλιστα το πρώτο κομμάτι είναι περισσότερο αδιαφανής από το δεύτερο. Ουσιαστικά επιβεβαιώνεται ότι η προσέγγιση του μικρού οπτικού βάθους εισάγει ένα σφάλμα στην μέτρηση της θερμοκρασίας ισορροπίας της σκόνης, το οποίο είναι μεγαλύτερο για το πρώτο κομμάτι του δίσκου και μικρότερο για το δεύτερο.

Όσον αφορά την ροή που λαμβάνουμε από τον Ήλιο, μπορούμε να επαληθεύσουμε την τιμή της. Το μέγιστο της γραφικής παράστασης [5.4α'](#) αντιστοιχεί στο $\lambda = 0.000050002 cm = 0.5002 μm$ και από τον νόμο του Wien, [\(1.2.13\)](#), προκύπτει η θερμοκρασία του Ήλιο $T_{Sun} = 5793.68 K$. Η τιμή είναι πολύ κοντά στην τιμή, [4.1.4](#), που μετρήσαμε και η απόκλιση της προκύπτει από το γεγονός ότι εδώ εξετάσαμε την μο-

νοχρωματική ροή σε συγκεκριμένο εύρος μηκών κύματος και όχι την βολομετρική που αντιστοιχεί σε όλο το φάσμα. Ακόμα από το εμβαδόν του ολοκληρώματος υπολογίσαμε ότι η μονοχρωματική ροή του Ήλιου στα $100pc$ είναι $1.027 \times 10^{-9} \frac{erg}{sec\ cm^2}$. Από την 4.1.3 και 1.2.11 για $100pc$ προκύπτει:

$$\frac{L_{\odot}}{4\pi(100pc)^2} = \pi F_{\lambda} \Rightarrow$$

$$F_{\lambda} = \frac{3.8412 \times 10^{33}}{4\pi^2 \times (100 \times 206265 \times 1.4959^{13})^2} \Rightarrow$$

$$F_{\lambda} = 1.022 \times 10^{-9} \frac{erg}{sec\ cm^2}$$

όπου η τιμή μας επαληθεύεται με πάρα πολυ καλή ακρίβεια.

Συνοψίζοντας, βλέποντας και μόνο την SED 5.1 μπορούμε να πούμε τα εξής:

- Η μορφή της SED προδίδει την ύπαρξη πρωτοπλανητικού δίσκου γύρω από τον αστέρα.
- Ο πρωτοπλανητικός δίσκος έχει μικρότερη μέση θερμοκρασία από τον αστέρα.
- Ο πρωτοπλανητικός δίσκος εκπέμπει το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας του στα μεγαλύτερα μήκη κύματος.
- Η υπόθεση οπτικής διαφάνειας οδηγεί στις μέγιστες θερμοκρασίες για τον δίσκο και κατ' επέκταση στην μέγιστη εκπεμπόμενη μονοχρωματική ροή.

5.2 Κατανομή Λαμπρότητας

Παρατηρώντας την SED του συστήματος, 5.1, εντοπίζουμε την ύπαρξη του δίσκου με τα χαρακτηριστικά που αναφέρθηκαν, αλλα η παρουσία του πλανήτη δεν είναι ακόμα προφανής. Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 3, η “ύπογραφή” της ύπαρξης του πλανήτη είναι η ύπαρξη συντονισμών μέσης κίνησης αλλά και ο κενός δακτύλιος που δημιουργεί στην τροχιά του σε συνδυασμό με την μη ισοτροπική κατανομή των test particles κοντά στην απόσταση r του πλανήτη. Κατ’ επέκταση οι δύο ομάδες των test particles που ακολουθούν την τροχιά του (που βρίσκονται σε συντονισμό 1 : 1 με αυτόν) και εντοπίζονται στα σημεία ευσταθίους ισορροπίας Lagrange L_4 και L_5 . Στο σημείο αυτό θα προσπαθήσουμε να δημιουργήσουμε δισδιάστατες απεικονίσεις του συστήματος μέσω της μονοχρωματικής ακτινοβολίας που λαμβάνουμε σε διάφορες συχνότητες παρατήρησης, ώστε να αναδείξουμε αυτην την γεωμετρία του σύστηματος και να έχουμε άμεση απόδειξη της ύπαρξης του πλανήτη.

Για την δημιουργία των απεικονίσεων ή “φωτογραφιών” συντάχθηκε ένα script με την ονομασία $2DImageArcsecAU.py$, όπου χωρίσαμε τον δίσκο σε “pixels”, αριθμού $i \times j$ και διαστάσεων Δx^i , Δy^j . Φυσικά όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των “pixels” τόσο μικρότερο είναι και το μέγεθος τους. Ο αριθμός τους δεν μπορεί να είναι απειρόριστα μεγάλος καθώς αυτό θα συνεπάγεται ελάχιστο έως μηδενικό αριθμό σωματιδίων εντός του κάθε “pixel” εισάγοντας με αυτόν τον τρόπο ένα στατιστικό σφάλμα. Στη συνέχεια μετρήσαμε όχι μόνο την μέση θερμοκρασία του κάθε “pixel” η οποία εξαρτάται μόνο από την απόσταση του από το κέντρο του δίσκου (4.2.7), αλλά και όλα τα test particles εντός αυτών. Έπειτα γνωρίζοντας την επιφάνεια του κάθε “pixel”, τον αριθμό των test particles εντός αυτού αλλα και την μάζα του κάθε test particle (2.4.2) υπολογίζαμε την επιφανειακή πυκνότητα μάζας του κάθε “pixel”. Έτσι η μονοχρωματική ροή του κάθε “pixel” (mJy), σε συνδυασμό με την (5.1.1), δίνεται ως:

$$F_{\nu}^{[i,j]} = \left(\frac{\Delta x^i \Delta y^j}{D^2} \right) (1 - e^{-\tau_{\nu}^{[i,j]}}) B_{\nu}(T_{dust}^{[i,j]}) \quad (5.2.1)$$

και

$$\tau_{\nu,[i,j]} = 0.3821 \left(\frac{\nu}{\nu_0} \right)^2 \Sigma_{[i,j]}, \text{ όπου } \Sigma_{[i,j]} \sigma \epsilon \frac{g}{cm^2} \quad (5.2.2)$$

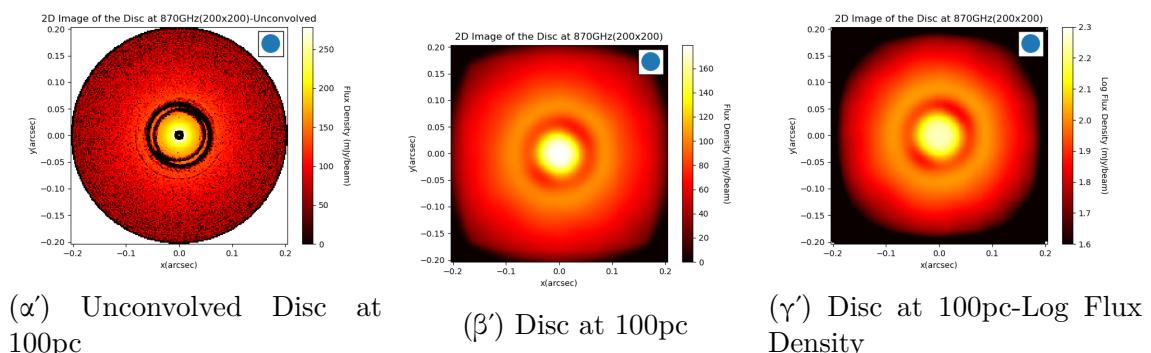
Είναι σύνηθες να βλέπουμε την μονοχρωματική ροή σε μονάδες $mJy/beam$, όπου *beam* είναι η συνθετική ακτίνα του ραδιοτηλεσκοπίου εντός της οποίας γίνεται η μέτρηση. Στην συγκεκριμένη εργασία χρησιμοποιήσαμε μια *Gaussian beam*, το μέγεθος της οποίας καθορίζεται από το FWHM και δίνεται σε *arcsec*. Το μέγεθος της ακτίνας δίνεται από την (1.5.11) και για τον λόγο αυτό το $2DImageArcsecAU.py$ συντάχθηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να μας δίνει τη δυνατότητα να μετράμε το μέγεθος των “pixels” είτε σε *AU* είτε σε *arcsec*. Για να πάμε από *mJy* σε *mJy/beam* ξεκινάμε από την (5.2.1):

$$F_{\nu}^{[i,j]} = \left(\frac{\Delta x^i \Delta y^j}{D^2} \right) (1 - e^{-\tau_{\nu}^{[i,j]}}) B_{\nu}(T_{dust}^{[i,j]}) mJy \quad (5.2.3)$$

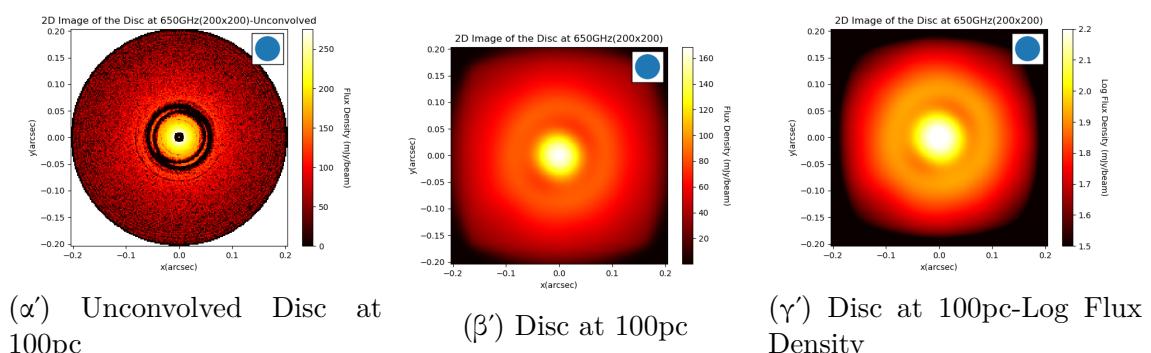
$$F_{\nu}^{[i,j]} = \frac{\Delta \Omega_b (1 - e^{-\tau_{\nu}^{[i,j]}}) B_{\nu}(T_{dust}^{[i,j]})}{4.25 \times 10^{10}} mJy/beam \quad (5.2.4)$$

όπου $1steradian = 4.25 \times 10^{10} (arcsec)^2$.

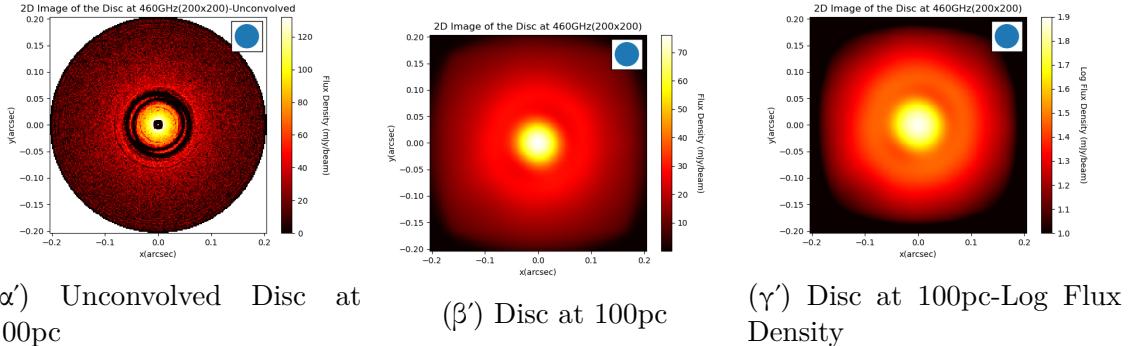
Τα διάφορα μεγέθη της συνθετικής δέσμης που χρησιμοποιήθηκαν για τις απεικόνισεις του δίσκου δίνονται στον πίνακα 1.1. Επιλέξαμε τις μικρότερες δυνατές τιμές του FWHM για τις διάφορες συχνότητες χωρίς όμως να αποκόπτουμε μέρος του δίσκου. Αυτό σημαίνει ότι φροντίσαμε ώστε η ϑ_{MRS} να είναι μεγαλύτερη από την ακτινική διάμετρο του δίσκου ($\vartheta_{MRS} \geq 0.408 \text{arcsec}$). Η επιλογή της στενής δέσμης γίνεται κατανοητή αν αναλογιστούμε το εξής: Από την στιγμή που ο δίσκος χωρίστηκε σε “pixels”, αριθμού $i \times j$ και διαστάσεων $\Delta x^i, \Delta y^j$, το μέγεθος του κάθε pixel σε arcsec είναι γνωστό. Το εύρος του κενού δακτυλίου στον δίσκο αντιστοιχεί σε κάποιο αριθμό “pixels” και κατ’ επέκταση σε μια τιμή σε arcsec. Ακόμα το εύρος της δέσμης, σε arcsec, για τις διάφορες συχνότητες είναι επίσης γνωστό από την (1.5.11) και τον πίνακα 1.1. Έτσι, αφού η τελική εικόνα που προκύπτει είναι η συνέλιξη της δέσμης του ραδιοσυμβολέτρου με την διασδιάστατη πίνακα μονοχρωματικής ροής, αν το μέγεθος της δέσμης είναι μικρότερο ή οριακά ίσο με το εύρος του κενού δακτυλίου, τότε αυτός θα είναι απόλυτα ορατός. Στην περίπτωση που η δέσμη είναι μεγαλύτερη από τον κενό δακτύλιο η διαδικασία της συνέλιξης θα δώσει μια εικόνα στην οποία ο κενός δακτύλιος θα είναι λιγότερο ορατός ή μπορεί να μην είναι και καθόλου ορατός, διότι θα υπάρχει κάποια τιμή μονοχρωματικής ροής στα συγκεκριμένα “pixels” λόγω του averaging που γίνεται εντός της δέσμης. Ακόμα θα πρέπει να προσέξουμε ώστε το μέγεθος της δέσμης να αντιστοιχεί τουλαχιστον σε 16 “pixels”, ώστε να μην χάνεται πληροφορία λόγω φτωχής “ψηφιοποίησης” της δέσμης συνέλιξης. Η εκλογή περισσότερων “pixels” συνεπάγεται την καλύτερη αναπαράσταση της συνθετικής δέσμης του ραδιοτηλεσκοπίου με την οποία συνελίσουμε την πρωτογενή εικόνα. Παρακάτω δίνονται εικόνες του δίσκου, στις διάφορες τιμές συχνότητας, , αλλά και για τα αντίστοιχα μεγέθη της δέσμης που αναγράφονται στον πίνακα 1.1 πριν και μετά την συνέλιξη με την δέσμη:



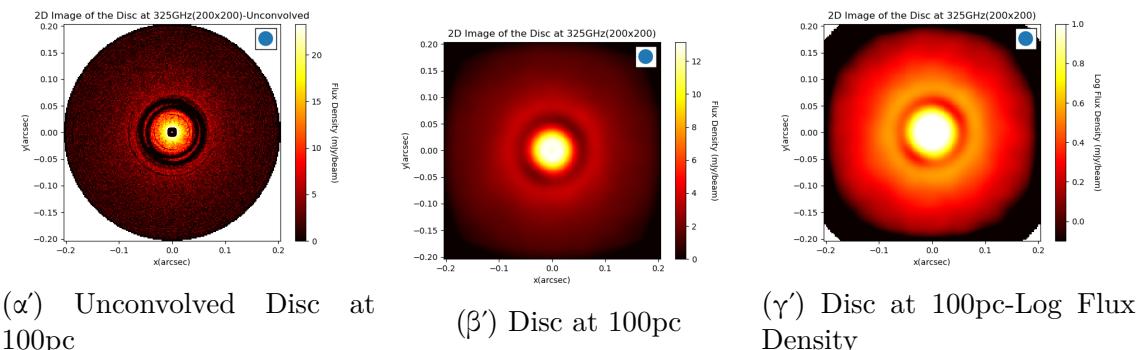
Σχήμα 5.7: Απεικόνιση του δίσκου απόστασης 100pc στα 870GHz



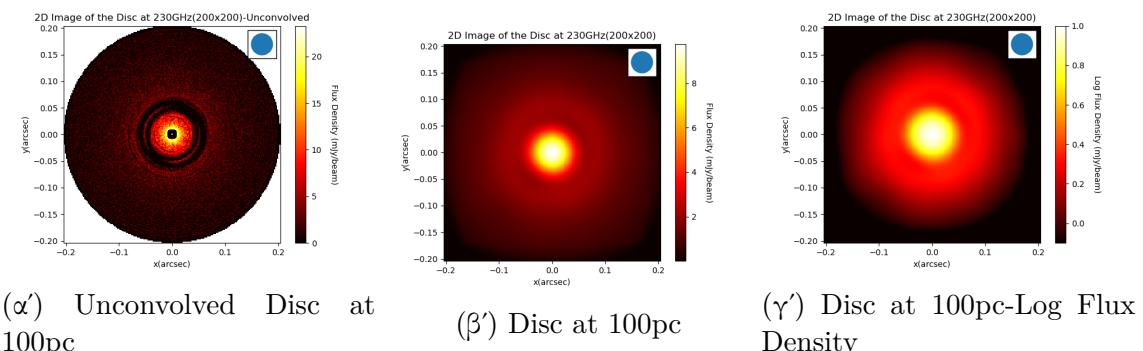
Σχήμα 5.8: Απεικόνιση του δίσκου απόστασης 100pc στα 650GHz



Σχήμα 5.9: Απεικόνιση του δίσκου απόστασης 100pc στα 460GHz



Σχήμα 5.10: Απεικόνιση του δίσκου απόστασης 100pc στα 325GHz



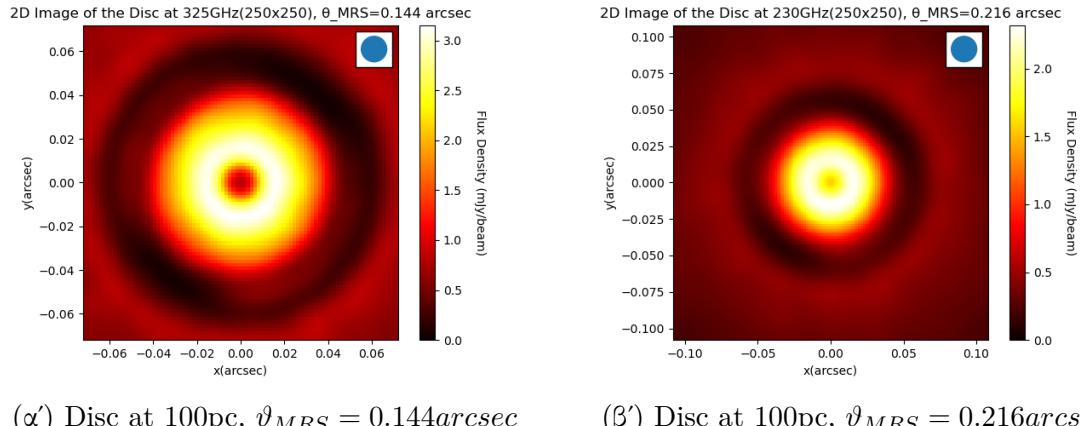
Σχήμα 5.11: Απεικόνιση του δίσκου απόστασης 100pc στα 230GHz

Βλέποντας τις παραπάνω εικόνες μπορούμε να κατανοήσουμε την σημασία της μεγάλης διακριτικής ικανότητας για την ανάδειξη της γεωμετρίας του δίσκου με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Αν δούμε την περίπτωση της απεικόνισης στα 325GHz, όπου έχουμε πολύ στενή δέσμη, ο κενός δακτύλιος είναι αρκετά εμφανής. Στην περίπτωση όμως της απεικονίσεως των 650GHz το εύρος της δέσμης είναι ~ 1.7 φορές μεγαλύτερο· με αποτέλεσμα ο κενός δακτύλιος να είναι λιγότερο εμφανής.

Η ικανότητα μας να απεικονίσουμε τον κενό δακτύλιο με μεγαλύτερη λεπτομέρεια δεν σταματάει εδώ. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την παραπάνω εικόνα του δίσκου στα 325GHz, η οποία από μόνη της είναι ένα πολύ ισχυρό επιχείρημα για την ύπαρξη πλανήτη. Βλεπουμε ότι ο κενός δακτύλιος βρίσκεται εντός μιας γωνιακής διαμέτρου $\sim 1\text{arcsec}$ και από τον πινακα [1.1](#) βλεπουμε ότι $\vartheta_{MRS} = 0.418\text{arcsec}$. Σαν αποτέλεσμα αν είχαμε πραγματικά την δυνατότητα χειρισμού του ALMA μετά την απεικόνιση

του πλήρη δίσκου όταν μπορούσαμε να επιλέξουμε ακόμα μικρότερες διαχριτικές ικανότητες (με $\vartheta_{MRS} < 0.408 \text{arcsec}$) αποκόπτοντας μεν τα εξωτερικά όρια του δίσκου, αλλά λαμβάνοντας μεγαλύτερη λεπτομέρεια στην απεικόνιση του κενού το οποίο βρίσκεται εντός ϑ_{MRS} . Ουσιαστικά στην περίπτωση αυτή το ραδιοσυμβολόμετρο αποκόπτει την μονοχρωματική ροή που έρχεται από ϑ_{MRS} και πάνω και σαν αντάλλαγμα παρέχει μεγαλύτερη διαχριτική ικανότητα στην απεικόνιση της περιοχής ϑ_{MRS} και κάτω.

Μια ακόμα σημαντική βελτίωση στην λεπτομέρεια της εικόνας μπορεί να εισέλθει αυξάνοντας τον αριθμό των “pixels” της εικόνας. Όπως αναφέραμε όσο μεγαλώνει ο αριθμός αυτός όλο και λιγότερα σωματίδια περιέχονται σε κάθε “pixel” αυξάνοντας το στατιστικό σφάλμα στις μετρήσεις. Εύλογα μπορεί να συμπεράνει κανείς ότι περιοχές με μικρή επιφανειακή πυκνότητα όταν παρουσιάζουν μεγαλύτερο στατιστικό σφάλμα έναντι αυτών με μεγαλύτερη. Στο σημείο αυτό εκμεταλλεύμαστε το ότι ο κενός δακτύλιος και κατ’ επέκταση η περιοχή που θέλουμε να απεικονίσουμε είναι η εσωτερική περιοχή του δίσκου και εντοπίζεται σε γωνιακή διαμέτρου $\leq 1 \text{arcsec}$. Σαν αποτέλεσμα αυξάνοντας των αριθμό των “pixels” της εικόνας αυξάνεται περισσότερο το στατιστικό σφάλμα των περιοχών γωνιακής διαμέτρου $> 1 \text{arcsec}$, αλλα οι περιοχές αυτές γίνονται “filter-out” λόγω του ορίου που θέτει η ϑ_{MRS} . Παρακάτω δίνονται οι εικόνες του δίσκου στα 325GHz και 230GHz και τα αντίστοιχα μεγέθη της δέσμης που αναγράφονται στον πίνακα 1.2. Παρέχονται εικόνες μετα την συνέλιξη με την δέσμη:



Σχήμα 5.12: Απεικόνιση εσωτερικού τμήματος του δίσκου απόστασης 100pc

Στις παραπάνω εικόνες βλέπουμε με πολύ μεγάλη ευχρίνεια τον κενό δακτύλιο, ο οποίος αποτελεί και την ένδειξη υπαρξής του πλανήτη. Μάλιστα στην απεικόνιση των 325GHz , όπου έχουμε και την μεγαλύτερη δυνατή διαχριτική ικανότητα, μπορούμε να διωρίνουμε αφυδρά τις δύο ομάδες των αντίστοιχων Τρωικών. Φυσικά όταν πρέπει κανείς να σκεφτεί ότι σε μια πραγματική απεικόνιση ενός δίσκου όταν υπάρχει και θερμικός θόρυβος, ο οποίος “θολωνεί” την εικόνα. Σαν αποτέλεσμα οι πραγματικές απεικονίσεις όταν είναι πιο θολές και με μικρότερη λεπτομέρεια. Πιθανότατα να μην φαίνονται οι Τρωικοί δορυφόροι, αλλα η ύπαρξη και μόνο του κενού δακτυλίου είναι η “ύπογραφή” της παρουσίας του γιγάντιου πλανήτη στο σύστημα.

Τέλος μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι τελίκα επιλέξαμε τις μικρότερες συχνότητες για την απεικόνιση του δίσκου και η επιλογή αυτή δεν είναι τυχαία. Αρχικά βλεπουμε ότι το ALMA μπορεί να πετύχει μεγαλύτερες διαχριτικές ικανότητες σε αυτές τις

συχνότητες μέσω των Configurations C-10. Ο δεύτερος και πιο σημαντικός λόγος είναι ότι όπως αποδείξαμε η σκόνη εκπέμπει πιο αποτελεσματικά στα μεγαλύτερα μήκη κύματος έναντι του αστέρα. Μικρότερες συχνότητες ισοδυναμούν με μεγαλύτερα μήκη κύματος, όρα σε μια πραγματική απεικόνιση, όπου θα περιεχόταν και το αστέρι στο κέντρο του δίσκου, η μονοχρωματική ακτινοβολία που θα λαμβάναμε από αυτό θα είναι σημαντικά μικρότερη έναντι του δίσκου. Σαν αποτέλεσμα είναι δύνατό να εντοπίσουμε τις δομικές λεπτομέρειες του δίσκου χώρις η φασματική κατανομή ακτινοβολίας του αστέρα να κυριαρχεί. Εάν το τελευταίο συνέβαινε τότε θα ήταν αναγκαίες μη πραγματοποιήσιμες απεικονίσεις με μεγάλο δυναμικό εύρος, ώστε να μπορούσε να αποκαλυφθεί ο δίσκος και τα δυναμικά χαρακτηριστικά του, τα οποία μας δείχνουν την ύπαρξη του μαζικού πλανήτη.

Κεφάλαιο 6

Παρατηρήσεις και Συμπεράσματα

Ο στόχος της παρούσας πτυχιακής διατριβής ήταν να εξετάσει την δυναμική αλληλεπίδραση ενός γιγάντιου πλανήτη με έναν πρωτοπλανητικό δίσκο σκόνης, να εξαχρισώσει και τελικά να αναδείξει κάποιον “δείκτη” που θα αποτελεί την “ύπογραφή” ύπαρξης του πλανήτη στο σύστημα. Επειδή η ύπαρξη τέτοιων δίσκων γίνεται αντιληπτή μέσω της ισχυρής far-IR/submillimeter ακτινοβολίας που εκπέμπουν, σαν στόχος ανίχνευσης τέτοιων δεικτών τέθηκε η δημιουργία απεικόνισεων του δίσκου με τις διακριτικές ικανότητες της ALMA. Σκοπός των απεικονίσεων ήταν η ανάδειξη του “δείκτη” ύπαρξης του πλανήτη, η ποιοτική ανάλυση των εικόνων και εκλογή συμπερασμάτων σχετικά με την πραγματική απεικόνιση τέτοιων δίσκων.

Βασικό στοιχείο στην μελέτη μας ήταν η δυναμική εξέλιξη του συστήματος για χρόνικό διάστημα που αντιστοιχεί σε πολλές περιόδους περιφοράς του πλανήτη, ώστε τα αποτελέσματα που θα πάρουμε να είναι ασφαλή. Από την σκοπιά της δυναμικής ανάλυσης του προβλήματος είδαμε ότι η παρουσία του πλανήτη επιβεβαιώνεται όχι μόνο από τον “κενό” δακτύλιο, τον οποίο δημιουργεί στο επίπεδο της τροχιάς του, αλλα και από την δημιουργία των δύο ομάδων (“Τρωικοί”) με τους οποίους βρίσκεται σε σταθερό συντονισμό 1 : 1 και μοιράζεται την τροχιά του. Είδαμε ότι το εύρος του δακτυλίου εξαρτάται από την ακτίνα Hill του πλανήτη και κατ’ επέκταση από τον λόγο της μάζας του πλανήτη προς την μάζα του αστέρα του συστήματος. Ένα ακόμα σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι η ύπαρξη του πλανήτη μπορεί να ιχνηλατηθεί και σε αποστάσεις αρκετά μεγαλύτερες από την ακτίνα Hill του, μέσω της εμφάνισης συντονισμών μέσης κίνησης. Στην περίπτωση αυτή παρατηρούνται τοπικά ελάχιστα στην αφιθμητική πυκνότητα των σωματιδίων της σκόνης σε αποστάσεις που εμπίπτουν στους ασταθείς αυτούς συντονισμούς, καθώς τα στοιχεία της τροχιάς των σωματιδίων μεταβάλλονται έντονα και σε σύντομα χρονικά διαστήματα.

Από την σκοπιά της ανίχνευσης της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας του δίσκου στο far-IR/submillimeter και τελικά όπως αυτή θα φαινόταν μετά από χαρτογράφιση με την ALMA είδαμε ότι ο “δείκτης” που επιβεβαιώνει την ύπαρξη του πλανήτη και είναι ανιχνεύσιμος είναι ο “κενός” δακτύλιος που δημιουργεί. Στην περίπτωση όμως αυτή, καταλάβαμε ότι η ανιχνευσιμότητα του παραπάνω “δείκτη” εξαρτάται από πολλούς παράγοντες που θα μπορούσαν να καταταχθούν συνοπτικά σε δύο κατηγορίες:

1. Φυσικά χαρακτηριστικά του συστήματος Δίσκου-Αστέρα

Αρχικά είδαμε πόσο σημαντική είναι η εκλογή του μοντέλου ακτινοβολίας· καθώς ο πρώτος παράγοντας που καθορίζει τη θέρμοκρασία της σκόνης είναι η

βιολομετρική ροή του αστέρα. Ταυτόχρονα, ο δεύτερος παράγοντας είναι τα φυσικά χαρακτηριστικά της σκόνης που συγκροτούν τον δίσκο, πιο συγκεκριμένα η σύσταση, το σχήμα και το μέγεθος, αφού προσδιορίζουν όχι μόνο πόση ενέργεια θα απορροφήσει και θα επανεκπέμψει η σκόνη αλλά και σε ποιά μήκη κύματος· ορίζοντας τελικά την θερμοκρασίας ισορροπίας της. Από την πλευρά της, η τελική θερμοκρασία του δίσκου σε συνδυασμό με την επιφανειακή του πυκνότητα και την απόσταση του καθορίζουν στην τελική ποσότητα μονοχρωματικής ροής που θα φτάσει σε αυτά.

2. Χαρακτηριστικά-Δυνατότητες των οργάνων παρατήρησης

Στην δεύτερη αυτή κατηγορία είδαμε την ποσοτικοποίηση των περιορισμών της διακριτικής ικανότητας των σύγχρονων συμβολομέτρων. Πιο συγκεκριμένα, στα μήκη κύματος που ο δίσκος εκπέμπει αποτελεσματικά σε συνδυασμό με τις τιμές διακριτικής ικανότητας που μπορούν επιτύχουν στις αντίστοιχες συχνότητες. Είδαμε την σημασία των παραπάνω στην περίπτωση ανίχνευσης του “κενού” δακτυλίου για το μοντέλο μας, όπου η σχέση μεταξύ διακριτικής ικανότητας και συχνότητας ανίχνευσης ουσιαστικά καθιστούσε το αν ο δείκτης θα ήταν ανιχνεύσιμος σε κάποια απεικόνιση ή όχι.

Στην δημιουργία και μελέτη προσομοιώσεων συστημάτων εξίσου βασικό με την εκλογή συμπερασμάτων είναι και η ικανότητα προσδιορισμού των σημείων όπου το μοντέλο εισάγει περιορισμούς λόγω παραδοχών. Η κατανόηση των περιορισμών αυτών είναι πολύ σημαντική καθώς χαράζει τον δρόμο στον οποίο πρέπει να κινηθούμε βελτιώνοντας το μοντέλο μας και τελικά παράγοντας αποτελέσματα πιο κοντά στον φυσικό κόσμο.

Στην περίπτωση του μοντέλου μας, όπως αναφέρθηκε, τα test particles αντικείωνται ως σωματίδια μηδενικής μάζας από τον SWIFT, δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και δεν επηρέαζουν βαρυτικά τον πλανήτη. Η παραπάνω συμπεριφορά φυσικά εισάγει ένα σφάλμα στις τελικές τιμές των διανυσμάτων θέσης και οριής που λαμβανούμε για τα test particles μετα την ολοκλήρωση των $10Myrs$. Το σφάλμα όμως αυτό δεν επηρεάζει σημαντικά τα αποτέλεσματα μας, διότι η αλλαγή των διανυσμάτων θέσης και οριής των test particles την χρονική στιγμή $t_1 = 10Myrs$ δεν αλλάζει το γεγονός της δημιουργίας του κενού δακτυλίου στην τροχιά του πλανήτη. Ακόμα η μάζα του πλανήτη εξακολουθεί να είναι μεγαλυτερη από αυτή των test particles κατά 6 τάξεις μεγέθους άρα παραμένει η αντίληψη ότι αυτός επηρεάζει σημαντικά τα test particles και επηρεάζεται λιγότερο από αυτά. Ακόμα η παραδοχή του μικρού οπτικού βάθους για τον δίσκο εισάγει, όπως περιγράψαμε, ένα σφάλμα στον υπολογισμό της κατανομής θερμοκρασιών του δίσκου το οποίο έχει ως αποτέλεσμα να λαμβάνουμε τις μεγαλύτερες τιμές ειδικών εντάσεων της ακτινοβολίας από τον δίσκο. Από αυτή την άποψη, μαζί με την υπόθεση μεγάλων ποσοτήτων μεσοαστρικής σκόνης για τον δίσκο τα αποτελέσματα μας είναι μαξιμαλιστικά.

Συνοψίζοντας, η πραγμάτωση παραδοχών για την δημιουργία προσομοιώσεων του δίσκου είναι αναγκαία· καθώς κανένας κώδικας δεν μπορεί να διαχειριστεί την πολυπλοκότητα τέτοιων συστημάτων ούτε τον αριθμό των σωματίδιων του με πλήρη ταυτίση της πραγματικότητας! Σαν αποτέλεσμα είναι λογικό η υπολογιστική ακρίβεια των αποτελέσματων να αποκλίνει σε κάποιο βαθμό από την πραγματική εικόνα, η ποιοτική όμως συμπεριφόρα του συστήματος μπορεί μελετηθεί με πολύ καλή ακρίβεια δίνοντας

μας την δυνατότητα εκλογής συμπερασμάτων για την φυσική συμπεριφορά αυτού. Το “στοίχημα” για τα επόμενα χρόνια είναι η δημιουργία αλγορίθμων που θα μπορούν να διαχειριστούν μεγαλύτερες τιμές σωματιδίων βρίσκοντας τις βαρυτικές δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ όλων των σωμάτων του συστήματος. Ακόμα η δημιουργία αλγορίθμων που θα μελετάνε αναλυτικά το πρόβλημα της διάδοσης ακτινοβολίας και της αλληλεπίδρασης της με σωματίδια διαφορετικών μεγεθών, σχημάτων και σύστασης· καθορίζοντας τελικά το προφίλ κατανομής θερμοκρασιών σε διαφορετικούς δίσκους σκόνης με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Κεφάλαιο 7

Κώδικες

Για την δημιουργία και επεξεργασία των δεδομένων χρησιμοποιήθηκαν οι γλώσσες προγραμματισμού Fortran 95, Python αλλα και τεχνικές “Shell”- scripting. Παρακάτω δίνονται τα πιο σημαντικά προγράμματα:

- Μετατροπή των Κεπλεριανών στοιχείων της τροχιάς σε Καρτεσιανά για την σωστή λειτουργία input του κώδικα SWIFT.

```
program keplToxyz

implicit none

real*8 PI
parameter (Pi=dacos(-1.d0))

integer ialpha,nb,i
real*8 gm,a,e,inc,capom,omega,capm
real*8 x,y,z,vx,vy,vz,gm2,conv
real*8 mpl

ialpha= -1

conv = 4.d0*PI*PI

open(unit=12,file='pl.in',status='unknown')

open (unit=15, file='pl.txt', status='old')
read(15,*) nb
read(15,*) gm

write(12,*) nb
write(12,*) gm*conv
write(12,*) 0.d0, 0.d0, 0.d0
write(12,*) 0.d0, 0.d0, 0.d0

do i=2, nb
  read(15,*) mpl,a,e,inc,capom,omega,capm
```

```

inc=inc*PI/180.d0
capom=capom*PI/180.d0
omega=omega*PI/180.d0
capm=capm*PI/180.d0
gm2 = (gm+mpl)*conv

      call orbel_el2xv(gm2,ialpha,a,e,inc,capom,omega,capm,x,y,
&                  z,vx,vy,vz)

      write(12,*) mpl*conv
      write(12,*) x,y,z
      write(12,*) vx,vy,vz
enddo

close(15)
close(12)
end

```

- Παραγωγή κατανομής των Test Particles στο επίπεδο της τροχιάς του πλανήτη Δία, με κυκλικές τροχίες και τυχαία μέση ανωμαλία.

```

program GenTP

include 'swift.inc'

real*8 PI
parameter (Pi=dacos(-1.d0))
real, dimension(1) :: random
integer i, ntp, ialpha, j
real*8 amax,amin, gm,a,e,inc,capom,omega,capm,num
real*8 x,y,z,vx,vy,vz,gm2,conv

real*8 mpl, da
real*8 ran,rstat(NTPMAX,NSTATR)
integer istat(NTPMAX,NSTAT)
open (unit=27, file='tp.txt', status='old')

read(27,*) ntp
read(27,*) e,inc,capom,omega

ialpha= -1
conv = 4.d0*PI*PI
gm = 1
mpl = 0
amin = 2.5d0

```

```

a = amin
amax = 7.5d0
da = (amax-amin)/10000.d0

open(unit=26,file='tp.in',status='unknown')

write(26,*) ntp

do i=1,ntp
    inc=inc*PI/180.d0
    capom=capom*PI/180.d0
    omega=omega*PI/180.d0
    gm2 = (gm+mpl)*conv
    call random_number(random)
    random = random * 360.d0
    capm = random(1)
    capm = capm*PI/180.d0

    call orbel_el2xv(gm2,ialpha,a,e,inc,capom,omega,capm,
& x,y,z,vx,vy,vz)

do j=1,NSTAT
    istat(i,j) = 0
enddo

do j=1,NSTATR
    rstat(i,j) = 0.0d0
enddo

write(26,*) x,y,z
write(26,*) vx,vy,vz
write(26,*) (istat(i,j),j=1,NSTAT)
write(26,*) (rstat(i,j),j=1,NSTATR)
a = a + da
enddo

close(27)
close(26)
end

```

- Μετατροπή των Καρτεσιανών συντεταγμένων της τροχιάς των Test Particles και του Δία σε Πολικές συντεταγμένες.

```

program xyToRTh

implicit none

```

```

integer i
real*8 x,y,z,r,Th,rad,Dr

open(unit=34,file='TotalTP_xyz.dat',status='old')
open(unit=35,file='TotalTP_RTh.dat',status='unknown')
open(unit=36,file='Jup_xyz.dat',status='unknown')

read(34,*) x,y,z
r = sqrt(x*x+y*y)
Th = Atan2(y,x)
rad = Th
Th = Th*180.d0/PI
Th = dmod(Th,360.d0)

if (Th .lt. 0.d0) then
    Th = Th + 360.d0
endif
print*, "Jupiter's angle(degree/rad) and radius are:",Th,rad,r
write(36,*) x,y,z,Th,rad,r

do i=2, 17295
    read(34,*) x,y,z
    r = sqrt(x*x+y*y)
    Th = Atan2(y,x)
    rad = Th
    Th = Th*180.d0/PI
    Th = dmod(Th,360.d0)

    if (Th .lt. 0.d0) then
        Th = Th + 360.d0
    endif
    write(35,*) x,y,z,Th,rad,r
enddo

close(34)
close(35)
close(36)

end

```

- Πρόγραμμα “System’sSED.py”-Υπολογισμός της Ροής του αστέρα (Ηλιου), του δίσκου αλλα και του συστήματος συνολικά. Ακόμα δημιουργία της SED του συστήματος.

```
#!/usr/bin/env python3
```

```

import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
data = pd.read_csv("data.csv", sep=';')

Physical_cons = {

    "h" : 6.6261*(10**-27), # Planck's constant [erg/sec]
    "c" : 2.99792*(10**10), # light speed [cm/sec]
    "k" : 1.3807*(10**(-16)), # Boltzmann's constant [erg/K]

}

Suns_param = {

    "R_Sun" : 6.955/1495.9, # Sun's radius [AU]
    "D" : 100*206265, # Distance of Sun-Disc [AU]
    "temperature" : 5777.62 # Sun's Temperature [K]

}

Dr = 0.17 # Width of the rings [AU]
wavelengths = np.logspace(np.log10(10**(-5)), np.log10(0.3),
→ num=1000) #cm

def B(lamda, T): #Define Planck's Function
    return (2*Physical_cons["h"]*Physical_cons["c"]**2/lamda**5)
    → *(1/(np.exp(Physical_cons["h"]*Physical_cons["c"])
    → /(lamda*Physical_cons["k"]*T))-1))

Bl_sun = B(wavelengths, Suns_param["temperature"])
Fl_sun = Bl_sun*(Suns_param["R_Sun"]/Suns_param["D"])**2 # Sun's
→ Monochromatic Flux
lFl_sun =
→ wavelengths*Bl_sun*(Suns_param["R_Sun"]/Suns_param["D"])**2 #
→ $\lambda$F$\lambda$


#Sun's Flux Plot
plt.figure()
plt.plot(wavelengths, Fl_sun, color='black')
plt.ylim([10**-20, 10**-4])
plt.xscale("log")
plt.yscale("log")
plt.xlabel("$\lambda$ (cm)")
plt.ylabel(r"$F_\lambda$ (erg/cm^2 ; sec ; cm$)$")

```

```

plt.title("Sun's Monochromatic Flux")
plt.grid()

def sum_over_T(lamda):
    return sum((2*np.pi*data['Rmean']*Dr/Suns_param["D"]**2)*
    ↵ (1-np.exp(-data['Surmean']*0.003821/lamda**2))*B(lamda,
    ↵ data['Tempedust']))

Fl_disc = [sum_over_T(i) for i in wavelengths]
lFl_disc = wavelengths * Fl_disc # $\lambda$F$\lambda$

#Disc's Flux Plot
plt.figure()
plt.plot(wavelengths, Fl_disc, color='black')
plt.ylim([10**-14, 10**-4])
plt.xscale("log")
plt.yscale("log")
plt.xlabel("$\lambda$ (cm)")
plt.ylabel(r"$F_\lambda$ (erg/cm2 ; sec ; cm$)$")
plt.title("Disc's Monochromatic Flux")
plt.grid()

System_Fl = Fl_sun[0:]+Fl_disc[0:]
System_lFl = lFl_sun[0:]+lFl_disc[0:]

#System's SED Plot
plt.figure()
# plt.fill_between(wavelengths, lFl_sun, System_lFl)
# plt.plot(wavelengths, lFl_sun, color='blue', linestyle="--")
plt.plot(wavelengths, System_lFl, color='black')
plt.ylim([10**-15, 10**-7])
plt.xscale("log")
plt.yscale("log")
plt.xlabel("$\lambda$ (cm)")
plt.ylabel(r"$\lambda F_\lambda$ (erg/cm2 ; sec$)$")
plt.title("System's SED")
plt.grid()

total_Flux_sun = np.sum(np.delete(Fl_sun,
    ↵ -1)*(wavelengths[1:]-wavelengths[:-1]))
total_Flux_disc = np.sum(np.delete(Fl_disc,
    ↵ -1)*(wavelengths[1:]-wavelengths[:-1]))

```

- Πρόγραμμα “FluxmJy.py”-Υπολογισμός της Ροής του αστέρα (Ηλιου), του

δίσκου αλλα και του συστήματος συνολικά σε mJy.

```
#!/usr/bin/env python3

import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
data = pd.read_csv("data.csv", sep=';')

Physical_cons = {

    "h" : 6.6261*(10**-27), # Planck's constant [erg/sec]
    "c" : 2.99792*(10**10), # light speed [cm/sec]
    "k" : 1.3807*(10**(-16)), # Boltzmann's constant [erg/K]

}

Suns_param = {

    "R_Sun" : 6.955/1495.9, # Sun's radius [AU]
    "D" : 100*206265, # Distance of Sun-Disc [AU]
    "temperature" : 5777.62 # Sun's Temperature [K]

}

Dr = 0.17 # Width of the rings [AU]
wavelengths = np.logspace(np.log10(10**(-5)), np.log10(0.3),
                           num=1000) #cm
frequency = np.flip(Physical_cons["c"]/wavelengths)

def Planck(nu, T): #Define Planck's Function
    return (2*Physical_cons["h"]*nu**3/Physical_cons["c"]**2)
    *(1/(np.exp(Physical_cons["h"]*nu/(Physical_cons["k"]*T))-1))

def Convert_to_mJy(value): #mjansky
    return value*(10**26)

Bsun = Planck(frequency, Suns_param["temperature"])
Fl_sun = Bsun*(Suns_param["R_Sun"]/Suns_param["D"])**2 # Sun's
# Monochromatic Flux
Fl_sun = Convert_to_mJy(Fl_sun)

#Sun's Flux Plot
plt.figure()
plt.plot(frequency, Fl_sun, color='black')
```

```

plt.xscale("log")
plt.yscale("log")
plt.xlabel("$\nu$ (Hz)")
plt.ylabel(r"$F_\nu$ (mJy)")
plt.title("Sun's Flux")
plt.grid()

def sum_over_T(nu):
    return sum((2*np.pi*data['Rmean']*Dr/Suns_param["D"]**2)
    ↪ *(1-np.exp(-data['Surmean']*0.3821*(nu/29979200000)**2))
    ↪ *Planck(nu, data['Tempedust']))

Fl_disc = [Convert_to_mJy(sum_over_T(i)) for i in frequency]

#Disc's Flux Plot
plt.figure()
plt.plot(frequency, Fl_disc, color='black')
plt.xscale("log")
plt.yscale("log")
plt.ylim([10**-1, 10**6])
plt.xlabel("$\nu$ (Hz)")
plt.ylabel(r"$F_\nu$ (mJy)")
plt.title("Disc's Flux")
plt.grid()

System_Fl = Fl_sun[0:]+Fl_disc[0:]

#System's Flux Plot
plt.figure()
#plt.fill_between(wavelengths, Fl, System_Fl)
#plt.plot(wavelengths, Fl, color='blue', linestyle="--")
plt.plot(frequency, System_Fl, color='black')
plt.xscale("log")
plt.yscale("log")
plt.xlabel("$\nu$ (Hz)")
plt.ylabel(r"$F_\nu$ (mJy)")
plt.title("Systems Flux")
plt.grid()

total_Flux_sun = np.sum(np.delete(Fl_sun,
    ↪ -1)*(frequency[1:]-frequency[:-1]))
total_Flux_disc = np.sum(np.delete(Fl_disc,
    ↪ -1)*(frequency[1:]-frequency[:-1]))

```

- Πρόγραμμα “2DImageArcsecAU.py”-Υπολογισμός της Λαμπρότητας (ή μονο-

χρωματικής ροής ή Flux Density) σε mJy/beam) του δίσκου σε διάφορες συχνότητες, συνέλιξη της με την δέσμη του ραδιοσυμβολόμετρου και παραγωγή των τελικών εικόνων του δίσκου.

```
#!/usr/bin/env python3

import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.patches import Circle
from astropy.convolution import convolve, Gaussian2DKernel
from mpl_toolkits.axes_grid1.anchored_artists import
    AnchoredAuxTransformBox
data = pd.read_csv("TotalTP_xyz.csv", sep=';')

Physical_cons = {

    "h" : 6.6261*(10**-27), # Planck's constant [erg/sec]
    "c" : 2.99792*(10**10), # light speed [cm/sec]
    "k" : 1.3807*(10**(-16)), # Boltzmann's constant [erg/K]

}

System_param = {

    "R_Sun" : 6.955/1495.9, # Sun's radius [AU]
    "D" : 100*206265, # Distance of Sun-Disc [AU]
    "temperature" : 5777.62, # Sun's Temperature [K]
    "x_max" : 20.4, # disc's radius in AU
    "npixels" : 200,
    "M_TestP" : 1.746*10**(24) # Test Particle's mass in g units
}

Units = {

    "AU" : 1.4959*10**13, # cm
    "rad" : 206265 # 1 rad to arcsec

}

x_max_arcsec = System_param["x_max"]*Units["rad"]/System_param["D"]
# disc's radius in arcsec
Pixel_size_arcsec = 2*x_max_arcsec/System_param["npixels"]
Pixel_Area =
    (2*System_param["x_max"]*Units["AU"]/System_param["npixels"])**2
# Pixel's Surface in cm^2
```

```

def Pixelization(x_axis_lim, num_pixels):
    x_points = np.linspace(-x_axis_lim, x_axis_lim, num_pixels)
    return x_points

x_points = Pixelization(System_param["x_max"],
                        System_param["npixels"]) # AU
y_points = Pixelization(System_param["x_max"],
                        System_param["npixels"]) # AU

x_points2 = Pixelization(x_max_arcsec, System_param["npixels"]) #
                        # arcsec
y_points2 = Pixelization(x_max_arcsec, System_param["npixels"]) #
                        # arcsec

def Pixel_r(x,y) :
    return np.sqrt(x**2 + y**2)

x_mean = (x_points[:-1] + x_points[1:])/2 # AU
y_mean = (y_points[:-1] + y_points[1:])/2 # AU
x_mean2 = (x_points2[:-1] + x_points2[1:])/2 # arcsec
y_mean2 = (y_points2[:-1] + y_points2[1:])/2 # arcsec

r = [Pixel_r(i,j) for i in x_mean for j in y_mean]

r_pixel = np.array(r).reshape(199,199)
Temp_pixel = 377.54*(r_pixel)**(-1/3)

calc_TP = np.zeros((System_param["npixels"]-1,
                    System_param["npixels"]-1))

def Find_TP(x,y):
    for i in range(System_param["npixels"]-1):
        if np.logical_and(x_points2[i]<x, x<x_points2[i+1]):
            for j in range(System_param["npixels"]-1):
                if np.logical_and(y_points2[j]<y,
                                y<y_points2[j+1]):
                    calc_TP[i,j]+=1
    return calc_TP

```

```

TP_xy = np.array(data) * Units["rad"]/System_param["D"] # arcsec

for q in range(len(TP_xy[:,0])):
    particles_num = Find_TP(TP_xy[q,0],TP_xy[q,1])

Surf_Density = particles_num*System_param["M_TestP"]/Pixel_Area # 
↪ g/cm^2

frequency = np.array([870.*10**9, 650.*10**9, 460.*10**9,
↪ 325.*10**9, 230.*10**9]) # Frequency values in GHz
th = np.array([0.0352, 0.0471, 0.0459, 0.0278, 0.0417]) # ALMA
↪ resolution (FWHM) in arcsec with $\vartheta_{MRS} > 0.408
th2 = np.array([0.0122, 0.0183]) # ALMA resolution (FWHM) in arcsec
↪ with $\vartheta_{MRS} < 0.408, 325 and 230 GHz

def Planck(nu, Temp): #Define Planck's Function
    return (2*Physical_cons["h"]*nu**3/Physical_cons["c"]**2
    ↪ *(1/(np.exp(Physical_cons["h"]*nu/(Physical_cons["k"]
    ↪ *Temp))-1)))

Gaussian_Beam = {

    "Domega" : 1.133*th[0]**2, # Gaussian Beam in arcsec^2
    "dev" : th[0]/(2*np.sqrt((2*np.log(2)))),
}

gaussian_input = Gaussian_Beam["dev"]/Pixel_size_arcsec

Pixels_Plane = np.zeros((System_param["npixels"]-1,
↪ System_param["npixels"]-1))

Pixels_Plane[:] = np.nan
In_Disk_pixels = (np.array(np.where(r_pixel <= 20.4))).transpose()
↪ #pixels inside disc's radius

def Calc_Disc_Flux(x,y):
    Pixels_Plane[x,y] =
        ↪ (1-np.exp(-Surf_Density[x,y]*0.3821*(frequency[0]
        ↪ /299792000000)**2))*Planck(frequency[0], Temp_pixel[x,y])
    Pixels_Plane[x,y] = Pixels_Plane[x,y]*10**26 # Flux to mJy/sr
    return Pixels_Plane

Disc_Flux = Calc_Disc_Flux(In_Disk_pixels[:,0],In_Disk_pixels[:,1])

```

```

def Convert_to_mJybeam(result): # Flux to mJy/beam
    Disc_Flux = Gaussian_Beam["Domega"]*result/(4.25*10**10)
    return Disc_Flux

Final_result = Convert_to_mJybeam(Disc_Flux)

fig, ax = plt.subplots()
# "extent" defines the corners of the image
extent = [x_points2.min(), x_points2.max(), y_points2.min(),
           y_points2.max()]
im = ax.imshow(Final_result, origin='lower', interpolation='none',
               extent=extent, cmap='hot')
ax.set_xlabel("x(arcsec)")
ax.set_ylabel("y(arcsec)")
ax.set_title("2D Image of the Disc at 870GHz(200x200)-Unconvolved")
clb = fig.colorbar(im, ax=ax)
clb.set_label("Flux Density (mJy/beam)", rotation=-90, labelpad=20)
box = AnchoredAuxTransformBox(ax.transData, loc='upper right')
a_cirle = Circle((0.2, 0.2), th[0]/2) # in data coordinates!
box.drawing_area.add_artist(a_cirle)
ax.add_artist(box)
plt.show()

gauss_kernel = Gaussian2DKernel(x_stddev=gaussian_input)
Final_result = convolve(Final_result, gauss_kernel)
Log_Final_result = np.log10(Final_result)

fig, ax = plt.subplots()
# "extent" defines the corners of the image
extent = [x_points2.min(), x_points2.max(), y_points2.min(),
           y_points2.max()]
#umin = 80.0
#umax = 0.0
im = ax.imshow(Final_result, origin='lower', interpolation='none',
               extent=extent, cmap='hot')#, umin=umin, umax=umax)
#ax.set_xlim(-0.216/2, 0.216/2) # $|\vartheta|_{MRS}
#ax.set_ylim(-0.216/2, 0.216/2) # $|\vartheta|_{MRS}
ax.set_xlabel("x(arcsec)")
ax.set_ylabel("y(arcsec)")
ax.set_title("2D Image of the Disc at 870GHz(200x200)")
clb = fig.colorbar(im, ax=ax)
clb.set_label("Flux Density (mJy/beam)", rotation=-90, labelpad=20)
box = AnchoredAuxTransformBox(ax.transData, loc='upper right')
a_cirle = Circle((0.2, 0.2), th[0]/2) # in data coordinates!
box.drawing_area.add_artist(a_cirle)
ax.add_artist(box)

```

```

plt.show()

fig, ax = plt.subplots()
# "extent" defines the corners of the image
extent = [x_points2.min(), x_points2.max(), y_points2.min(),
          y_points2.max()]
vmin = 2.3
vmax = 1.6
im = ax.imshow(Log_Final_result, origin='lower',
                interpolation='none', extent=extent, cmap='hot', vmin=vmin,
                vmax=vmax)
#ax.set_xlim(-0.216/2, 0.216/2) # $\vartheta_{MRS}
#ax.set_ylim(-0.216/2, 0.216/2) # $\vartheta_{MRS}
ax.set_xlabel("x(arcsec)")
ax.set_ylabel("y(arcsec)")
ax.set_title("2D Image of the Disc at 870GHz(200x200)")
clb = fig.colorbar(im, ax=ax)
clb.set_label("Log Flux Density (mJy/beam)", rotation=-90,
              labelpad=20)
box = AnchoredAuxTransformBox(ax.transData, loc='upper right')
a_cirle = Circle((0.2, 0.2), th[0]/2) # in data coordinates!
box.drawing_area.add_artist(a_cirle)
ax.add_artist(box)
plt.show()

```

Bibliography

- [1] James J Condon and Scott M Ransom. *Essential radio astronomy*, volume 2. Princeton University Press, 2016.
- [2] Bruce T Draine. On the submillimeter opacity of protoplanetary disks. *The Astrophysical Journal*, 636(2):1114, 2006.
- [3] Steve Ertel, Sebastian Wolf, and Jens Rodmann. Observing planet-disk interaction in debris disks. *Astronomy & Astrophysics*, 544:A61, 2012.
- [4] Brett Gladman, Martin Duncan, and Jeff Candy. Symplectic integrators for long-term integrations in celestial mechanics. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 52(3):221–240, 1991.
- [5] Endrik Krugel. *The physics of interstellar dust*. CRC Press, 2002.
- [6] Harold F Levison and Martin J Duncan. The long-term dynamical behavior of short-period comets. *Icarus*, 108(1):18–36, 1994.
- [7] Harold F Levison and Martin J Duncan. Swift: A solar system integration software package. *Astrophysics Source Code Library*, 2013.
- [8] Carl D Murray and Stanley F Dermott. *Solar system dynamics*. Cambridge university press, 1999.
- [9] Alexander GGM Tielens. *The physics and chemistry of the interstellar medium*. Cambridge University Press, 2005.
- [10] Κλεομένης Τσιγάνης and Χαράλαμπος Βάρβογλης. πλανητικά συστήματα. 2015.
- [11] Jack Wisdom. The origin of the kirkwood gaps-a mapping for asteroidal motion near the 3/1 commensurability. *The Astronomical Journal*, 87:577–593, 1982.
- [12] Jack Wisdom and Matthew Holman. Symplectic maps for the n-body problem. *The Astronomical Journal*, 102:1528–1538, 1991.