# Dynamic Energy Planning for Autonomous UAVs

# Dynamic Energy Planning for Autonomous UAVs

A Dissertation submitted in partial satisfaction of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Robotics

bу

Adam Seewald

Approved by:

Dr. Ulrik Pagh Schultz, Advisor Unmanned Aerial Systems Center University of Southern Denmark

Approved on:

https://doi.org/10.

The typesetting is done using LaTeX. Figures are generated with PGF/TikZ. Fonts are EB Garamond, Helvetica, and Iwona for body, headers, and equations respectively.

Copyright © 2021 by Adam Seewald. Some rights reserved.

This work is subject to CC BY-NC-SA license, which means that you can copy, redistribute, remix, transform, and build upon the content for any non commercial purpose, as long as you give appropriate credit, provide a link to the license, and indicate if changes were made. If you remix, transform, or build upon the material, you must distribute your contributions under the same license as the original. License details: https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/



First edition, 2021

Published by University of Southern Denmark, in Odense, Denmark

То ...

## **Acknowledgements**

PREM IPSUM DOLOR SIT AMET, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## **Contents**

1	Intro	duction		1
	1.1	A Brief F	History of Aerial Robotics	2
	1.2	Motivatio	on	3
	1.3	Objectiv	e	3
	1.4	Outline o	of the Approach	4
	1.5	Applicati	ions	5
	1.6	Problem	Formulation	6
	1.7	Structure	e	6
2	State	e of the A	Art	9
	2.1	Energy I	Modeling	10
	2.2	Motion F	Planning	12
	2.3	Planning	g with Dynamics	13
	2.4	Planning	g for Autonomous UAVs	14
		2.4.1	Flight controllers	15
		2.4.2	Energy models in aerial robotics	15
		2.4.3	State estimation in aerial robotics	15
		2.4.4	Optimal control in aerial robotics	15
	2.5	Planning	g Computations with Motion	16
	2.6	Summai	ry	16
3	Ener	gy Mode	els	19
	3.1	Models	Classification	20
	3.2	Energy I	Model of the Computations	21
		3.2.1	Computational energy of the UAV	21
		3.2.2	Measurement layer	22
		3.2.3	Hardware platforms and benchmarks	22
		3.2.4	Power measurements for embedded boards	22

viii Contents

		3.2.5 The powprofiler tool	22
		3.2.6 Energy-aware design of algorithms	23
		3.2.7 ROS middleware	23
		3.2.8 Experimental methodology	23
	3.3	Battery Model	24
		3.3.1 UAV batteries	24
		3.3.2 Derivation of differential battery model	25
	3.4	Energy Model of the Motion	25
		3.4.1 Mechanical energy of the UAV	26
		3.4.2 Experimental methodology	26
	3.5	Periodic Energy Model	26
		3.5.1 Furier series of empirical data	27
		3.5.2 Derivation of differential periodic model	27
		3.5.3 Merging computations and motion	31
	3.6	Results	31
	3.7	Summary	32
,	04-4	Falleration	
4		Estimation  A Brief Wilder and Clark Estimation	33
	4.1	•	34
	4.2	, ,	35
	4.3	<del>v</del>	35
		, ,	36
			36
	4.4	Periodic Model Estimation	37
		4.4.1 Period estimation	37
		4.4.2 Minimization of the estiamte error	38
			38
	4.5	-	38
			39
			39
		3	40
	4.6		40
	4.7	Summary	41
5	Guid	ance	43
	5.1	Vector Fields for Guidance	44
	5.2	Derivation of the Guidance Action	45
		5.2.1 Motion simulations	45
		5.2.2 Energy simulations	46
	5.3	Alteration of the Path	46

Contents ix

			47
5.5	Summai	y	47
Optin	nal Cont	trol Generation	49
6.1	A Brief F	History of Optimal Control	50
6.2	Optimiza	ation Problems with Dynamics	52
	6.2.1	Continuous systems: unconstrained case	52
	6.2.2	Continuous systems: constrained case	53
	6.2.3	Perturbed systems	53
	6.2.4	Multistage systems	54
6.3	Numeric	cal Simulation and Differentiation	54
	6.3.1	Euler method	55
	6.3.2	Runge-Kutta methods	55
	6.3.3	Algorithmic differentiation	55
6.4	Direct O	ptimal Control Methods	56
	6.4.1	Direct single shooting	56
	6.4.2	Direct multiple shooting	57
	6.4.3	Direct collocation	57
6.5	Numeric	eal Optimization	57
	6.5.1	Convexity	58
	6.5.2	Optimality conditions	58
	6.5.3	First order optimality conditions	59
	6.5.4	Second order optimality conditions	59
	6.5.5	Sequential quadratic programming	59
	6.5.6	Nonlinear interior point methods	60
6.6	Model P	Predictive Control	60
	6.6.1	Output model predictive control	61
	6.6.2	Optimal control generation with model predictive control	61
6.7	Results		61
6.8	Summai	y	62
ferenc	es		65
lex			69
	Optin 6.1 6.2 6.3 6.4 6.5 6.6 6.7 6.8	Optimal Cont 6.1 A Brief R 6.2 Optimize 6.2.1 6.2.2 6.2.3 6.2.4 6.3 Numeric 6.3.1 6.3.2 6.3.3 6.4 Direct C 6.4.1 6.4.2 6.4.3 6.5 Numeric 6.5.1 6.5.2 6.5.3 6.5.4 6.5.5 6.5.6 6.6 Model P 6.6.1 6.6.2 6.7 Results 6.8 Summan	Optimal Control Generation 6.1 A Brief History of Optimal Control 6.2 Optimization Problems with Dynamics 6.2.1 Continuous systems: unconstrained case 6.2.2 Continuous systems: constrained case 6.2.3 Perturbed systems 6.2.4 Multistage systems 6.3 Numerical Simulation and Differentiation 6.3.1 Euler method 6.3.2 Runge-Kutta methods 6.3.3 Algorithmic differentiation 6.4 Direct Optimal Control Methods 6.4.1 Direct single shooting 6.4.2 Direct multiple shooting 6.4.3 Direct collocation 6.5 Numerical Optimization 6.5.1 Convexity 6.5.2 Optimality conditions 6.5.3 First order optimality conditions 6.5.4 Second order optimality conditions 6.5.5 Sequential quadratic programming 6.5.6 Nonlinear interior point methods 6.6 Model Predictive Control 6.6.1 Output model predictive control 6.6.2 Optimal control generation with model predictive control 6.7 Results 6.8 Summary  ferences

# **Figures**

# **Notation**

∃ there exists

## **Abbreviations**

LP linear program

QP quadratic program

MPC model predictive control

NLP non linear program

UAV unmanned aerial vehicle

OCP optimal control problem

BVP boundary-value problem

## **Chapter 1**

### Introduction

#### Status

General structure with just some dummy text.

OREM IPSUM DOLOR SIT AMET, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh

lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 1.1 A Brief History of Aerial Robotics

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

1.2. Motivation 3

#### 1.2 Motivation

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 1.3 Objective

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent

blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 1.4 Outline of the Approach

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent

1.5. Applications 5

blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 1.5 Applications

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent

blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 1.6 Problem Formulation

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 1.7 Structure

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit.

1.7. Structure 7

Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## **Chapter 2**

### State of the Art

#### Status

Pasted energy modeling in Section 2.1 from (Seewald, Schultz, et al., 2019), rest dummy text.

OREM IPSUM DOLOR SIT AMET, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. MPC Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sedelit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 2.1 Energy Modeling

Marowka developed a power-metrics based analytical model, to exploit the possibility of considerably increasing energy efficiency by choosing an optimal chip configuration, which we extended to evaluate the impact of different architectural design choices on energy efficiency (Marowka, 2017). Marowka's theoretical contribution shows three processing schemes for heterogeneous computing with a comparison of their respective energy efficiency. Variations in chip configurations are done to investigate the impact on energy, power, and performance. Symmetric processor scheme consists of only a multicore CPU. Asymmetric CPU-GPU processor scheme consists of both CPU and GPU on the hardware side, and of a program running on CPU or GPU, but not on both in the same time interval, on the software side. CPU-GPU simultaneous processing scheme consists of a program running on CPU and GPU simultaneously. Our work extends and starts from Marowka's approach by building an experimental method to the CPU-GPU simultaneous processing scheme.

For evaluating the effects of a battery as an energy source, we used the work done by (R. Rao et al., 2003). Their work summarizes state-of-the-art battery modeling into four classes of models that capture the battery state and its non-linearities. The lowest class contains the physical models that are accurate and model battery state evolution through a set of ordinary and partial differential equations. However, they suffer from a significant level of complexity that reflects on the time needed to produce predictions. The work proceeds by showing empirical models, that predict battery state from empirical trials. The third class consists of abstract models that we incorporated into our approach, in particular, by deriving the equation from the model developed by (Hasan et al., 2018) (they model battery state through an equivalent electrical circuit and its evolution in time). The fourth class consists of mixed models where experimental data are collected and subsequently refined with analytical expressions to determine the models' parameters.

System-level optimization techniques, such as dynamic voltage scaling, have been used for lowering the power consumption (Chowdhury and Chakrabarti, 2005; I. Hong et al., 1999; Luo and Jha, 2001). These techniques are available for hardware featuring dynamic voltage scaling and aim to achieve higher energy efficiency by including in-

formation about configuration parameters into the scheduler. They however focus on homogeneous systems, unlike our work which is designed to work for heterogeneous systems. This approach to modeling has nevertheless been extended to include GPU features (S. Hong and Kim, 2010), to heterogeneous systems (Bailey et al., 2014), to optimal software partitioning (Goraczko et al., 2008), and by Wu et al. to machine learning techniques (Wu et al., 2015). The work by Wu et al. mostly relies on neural networks and has been introduced only recently in the field of power estimation and modeling for heterogeneous systems. In particular, for a collection of applications, Wu et al. train a neural network by measuring a number of performance counters for different configurations. Even if these techniques perform well for defining static optimization strategies, they are generally not suitable for heterogeneous parallel systems in aerial robotics. In these cases, systems suffer from a considerable level of uncertainty, for which reason a statically defined energy model often would not model the real energy behavior. An overview of energy estimation in the context of machine learning approaches has recently been presented by (García-Martín et al., 2019). They present a literature review motivated by a belief that the machine learning community is unfamiliar with energy models, but do not relate to GPU-featured devices nor in general heterogeneous devices. In contrast, in our work we aim at automating the generation of application-level power estimation models that can be adapted for machine learning algorithms. Our approach does not yet take detailed scheduling decisions into account, unlike the black-box approach for CPU-GPU energy-aware scheduling presented by (Barik et al., 2016): they model the power by relating execution time to power consumption but otherwise do not focus on energy models.

Our approach shares the same principle of differentiating the microcontroller from the companion computer with (Mei et al., 2004, 2005). The controller acts on the actuators and reads the sensors, while the companion computer (can be found with different names in literature, such as secondary or embedded computer), performs computationally heavy operations. A similar approach for mobile robots is presented by (Dressler and Fuchs, 2005). However, both contributions neither elaborate further on computational elements of a heterogeneous platform, such as GPU, nor focus on different robots except the one under analysis.

The majority of other contributions in the literature focus on optimizing motion planning to increase power efficiency. For instance, approaches to minimize UAV power consumption, such as the work by (Kreciglowa et al., 2017), aim to determine the best trajectory generation method for an aerial vehicle to travel from one configuration to another. Uragun suggests the use of power-efficient components (Uragun, 2011): an energy-efficient UAV system can either be built using conceptual product development with emerging technologies or using energy-efficient components. Kanellakis et al. affirm that integrating visual sensors in the UAV ecosystem still lacks solid experimental evaluation (Kanellakis and Nikolakopoulos, 2017). They suggest that to

save energy, the available payload for sensing and computing has to be restricted. Our approach towards energy modeling shares a similar principle as the one presented by (Sadrpour et al., 2013a,b) for Unmanned Ground Vehicles or UGVs. They propose a linear regression-based technique in the absence of real measurements and a Bayesian networks-based one in their presence. We used a simplified approximation technique to limit the number of computations needed while focusing rather on an accurate battery prediction.

To validate our approach and quantify its outcomes, we used the models previously developed for fine-grained energy modeling by (Nunez-Yanez and Lore, 2013), and (Nikov et al., 2015) respectively. In summary, fine-grained energy modeling uses hardware event registers to capture the CPU state under a representative workload. The energy-modeling consists of three stages. In data collection, the first stage, a benchmark runs on the platform and data are collected. The second and third stage, data processing and model generation, are performed offline on a different architecture. In these two stages, data are analyzed and a model that predicts possible future usage is generated.

Calore et al. develop an approach for measuring power efficiency for High-Performance Computing or HPC systems (Calore et al., 2015). An external board is used to measure the power consumption, while the data are collected from NVIDIA Jetson TKr board running one benchmark. Our initial analysis presented at HLPGPU 2019 was made using a similar technique (Seewald, Ebeid, et al., 2019). A shunt resistor and digital multimeter integrated into the external board was used to evaluate the power efficiency. In this paper we extend our experiments to use internal power monitors and address a broader range of platforms. We now build a proper energy model that reflects the computational behavior of the device under study and shows the energy evolution. An early report on our work has been presented in the Team-Play project's deliverable D4.3 (*Public Deliverables of the TeamPlay Horizon2020 Project* 2019) "Report on Energy, Timing and Security Modeling of Complex Architectures".

#### 2.2 Motion Planning

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 2.3 Planning with Dynamics

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 2.4 Planning for Autonomous UAVs

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 2.4.1 Flight controllers

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 2.4.2 Energy models in aerial robotics

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 2.4.3 State estimation in aerial robotics

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 2.4.4 Optimal control in aerial robotics

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut

porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 2.5 Planning Computations with Motion

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 2.6 Summary

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec 2.6. Summary 17

ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# **Chapter 3**

# **Energy Models**

#### Status

Started filling the model from (Seewald, Garcia de Marina, et al., n.d.) (Subsection 3.5.2), rest is dummy text.

OREM IPSUM DOLOR SIT AMET, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sedelit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 3.1 Models Classification

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# 3.2 Energy Model of the Computations

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# 3.2.1 Computational energy of the UAV

### 3.2.2 Measurement layer

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 3.2.3 Hardware platforms and benchmarks

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 3.2.4 Power measurements for embedded boards

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# **3.2.5** The powprofiler tool

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut

porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 3.2.6 Energy-aware design of algorithms

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum

#### 3.2.7 ROS middleware

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# 3.2.8 Experimental methodology

# 3.3 Battery Model

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 3.3.1 UAV batteries

## 3.3.2 Derivation of differential battery model

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# 3.4 Energy Model of the Motion

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent

blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 3.4.1 Mechanical energy of the UAV

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 3.4.2 Experimental methodology

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# 3.5 Periodic Energy Model

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh

lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 3.5.1 Furier series of empirical data

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# 3.5.2 Derivation of differential periodic model

We refer to the instantaneous energy consumption evolution simply as the energy signal. We model the energy using energy coefficients  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$  that characterize such energy signal. The coefficients are derived from Fourier analysis (the size of the energy coefficients vector m is related to the order of a Fourier series) and estimated using a state estimator.

We prove a relation between the energy signal and the energy coefficients in Lemma 3.5.1. We show after the main results how this approach allows us variability in terms of non-periodic signals.

After having illustrated the energy model, we enhance it with the energy contribution of the path in Subsection ??, and of the computations in Subsection ??.

Let us consider a periodic energy signal of period T, and a Fourier series of an arbitrary order  $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  for the purpose of modeling of the energy signal

$$h(t) = a_0/T + (2/T)\sum_{j=1}^{r} \left(a_j \cos \omega j t + b_j \sin \omega j t\right), \tag{3.1}$$

where  $h: \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$  maps time to the instantaneous energy consumption,  $\omega := 2\pi/T$  is the angular frequency, and  $a, b \in \mathbb{R}$  the Fourier series coefficients.

The energy signal can be modeled by Equation (3.1) and by the output of a linear model

$$\dot{\mathbf{q}} = A\mathbf{q} + B\mathbf{u},$$

$$\mathbf{q} = C\mathbf{q},$$
(3.2)

where  $y \in \mathbb{R}$  is the instantaneous energy consumption.

The state  $\mathbf{q}$  contains the energy coefficients

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \alpha_r & \beta_r \end{bmatrix}',$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & * \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ & * & & A_r \end{bmatrix}, A_j := \begin{bmatrix} 0 & \omega j \\ -\omega j & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = (1/T) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
(3.3)

where  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$  with m = 2r + 1,  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  is the state transition matrix, and  $C \in \mathbb{R}^m$  is the output matrix. In matrix A, the top left entry is zero, the diagonal entries are  $A_1, \ldots, A_r$ , the remaining entries are zeros (\*).

The linear model in Equation (3.2) allows us to include the control in the model of Equation (3.1).

### Lemma 3.5.1 (Signal, output equality)

Suppose control  ${\bf u}$  is a zero vector, matrices A, C are described by Equation (3.3), and the initial guess  ${\bf q}_0$  is

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} a_0 & a_1/2 & b_1/2 & \cdots & a_r/2 & b_r/2 \end{bmatrix}^T.$$

Then, the signal h in Equation (3.1) is equal to the output y in Equation (3.2).

*Proof.* The equality of the signal and output is achieved by a proper choice of the items of matrices A, C and the initial guess  $\mathbf{q}_0$ .

We propose a formal proof of Lemma 3.5.1. The proof justifies the choice of the items of the matrices A, C and of the initial guess  $\mathbf{q}_0$  in Equation (3.3). We write

these elements such that the coefficients of the series  $a_0, \ldots, b_r$  are the same as the coefficients of the state  $\alpha_0, \ldots, \beta_r$ .

Let us re-write the Fourier series expression in Equation (3.1) in its complex form with the well-known Euler's formula  $e^{it} = \cos t + i \sin t$ . With  $t = \omega jt$ , we find the expression for  $\cos \omega jt = (e^{i\omega jt} + e^{-i\omega jt})/2$  and  $\sin \omega jt = (e^{i\omega jt} - e^{-i\omega jt})/(2i)$  by substitution of  $\sin \omega jt$  and  $\cos \omega jt$  respectively. This leads ku01967automatic

$$h(t) = a_0/T + (1/T) \sum_{j=1}^{r} e^{i\omega j t} (a_j - ib_j) +$$

$$(1/T) \sum_{j=1}^{r} e^{-i\omega j t} (a_j + ib_j),$$
(3.4)

where i is the imaginary unit.

The solution at time t can be expressed  $\mathbf{q} = e^{At}\mathbf{q}_0$ . Both the solution and the system in Equation (3.2) are well established expressions derived using standard textbooks ku01967automatic; ogata2002modern. To solve the matrix exponential  $e^{At}$ , we use the eigenvectors matrix decomposition method moler2003nineteen.

The method works on the similarity transformation  $A = VDV^{-1}$ . The power series definition of  $e^{At}$  implies  $e^{At} = Ve^{Dt}V^{-1}$  moler2003nineteen. We consider the non-singular matrix V, whose columns are eigenvectors of A;  $V := \begin{bmatrix} v_0 & v_1^0 & v_1^1 & \dots & v_r^0 & v_r^1 \end{bmatrix}$ . We then consider the diagonal matrix of eigenvalues  $D = \operatorname{diag}(\lambda_0, \lambda_1^0, \lambda_1^1, \dots, \lambda_r^0, \lambda_r^1)$ .  $\lambda_0$  is the eigenvalue associated to the first item of A.  $\lambda_j^0$ ,  $\lambda_j^1$  are the two eigenvalues associated with the block  $A_j$ . We can write  $Av_j = \lambda_j v_j \quad \forall j = \{1, \dots, m\}$ , and AV = VD.

We apply the approach in terms of Equation (3.2), under the assumptions made in the lemma (the control is a zero vector);  $\dot{\mathbf{q}} = A\mathbf{q}$ . The linear combination of the initial guess and the generic solution

$$F\mathbf{q}(0) = \gamma_0 v_0 + \sum_{k=0}^{1} \sum_{j=1}^{r} \gamma_j v_j^k$$

$$F\mathbf{q}(t) = \gamma_0 e^{\lambda_0 t} v_0 + \sum_{k=0}^{1} \sum_{j=1}^{r} \gamma_j e^{\lambda_j t} v_j^k$$
(3.5)

where  $F = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$  is a properly sized vector of ones.

Let us consider the second expression in Equation (3.5). It represents the linear combination of all the coefficients of the state at time t. It can also be expressed in

the following form

$$F \mathbf{q}(t)/T = \gamma_0 e^{\lambda_0 t} v_0/T + (1/T) \sum_{j=1}^r \gamma_j e^{\lambda_j^0 t} v_j^0 + (1/T) \sum_{j=1}^r \gamma_j e^{\lambda_j^1 t} v_j^1.$$
(3.6)

We proof that the eigenvalues  $\lambda$  and eigenvectors V are such that Equation (3.6) is equivalent to Equation (3.4).

The matrix A is a block diagonal matrix, so we can express its determinant as the multiplication of the determinants of its blocks det  $(A) = \det(0) \times \det(A_1) \times \cdots \times \det(A_n) \times \det(A_n) \times \cdots \times \det(A_n) \times \det(A_n) \times \cdots \times \det(A_n) \times \det(A_n$  $\det(A_r)$ . We proof the first determinant and the others separately.

Thereby we start by proofing that the first terms of the Equation (3.4) and (3.6) match. We find the eigenvalue from det(0) = 0, which is  $\lambda_0 = 0$ . The corresponding eigenvector can be chosen arbitrarily  $(0-\lambda_0)\nu_0=\begin{bmatrix}0&\cdots&0\end{bmatrix}$   $\forall \nu_0,$  thus we choose  $v_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ . We find the value  $y_0$  of the vector y so that the terms are equal,  $y_0 = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ . Then, we proof that all the terms in the sum of both the Equations (3.4) and (3.6)

match.

For the first block  $A_1$ , we find the eigenvalues from  $det(A_1 - \lambda I) = 0$ . The polynomial  $\lambda^2 + \omega^2$ , gives two complex roots-the two eigenvalues  $\lambda_1^0 = i\omega$ and  $\lambda_1^1 = -i\omega$ . The eigenvector associated with the eigenvalue  $\lambda_1^0$  is  $v_1^0 =$  $\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$ . The eigenvector associated with the eigenvalue  $\lambda_1^1$  is  $v_1^1 = \begin{bmatrix} 0 & i & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$ . Again, we find the values  $\gamma_1$  of the vector  $\gamma$  such that the equivalences

$$\begin{cases} e^{i\omega t}(a_1 - ib_1) &= \gamma_1 e^{i\omega t} v_1^0 \\ e^{-i\omega t}(a_1 + ib_1) &= \gamma_1 e^{i\omega t} v_1^1 \end{cases}$$

hold. They hold for  $\gamma_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_1 \end{bmatrix}$ .

The proof for the remaining r-1 blocks is equivalent.

The initial guess is build such that the sum of the coefficients is the same in both the signals. In the output matrix, the frequency 1/T accounts for the period in Equation (3.4) and (3.6) and (3.1). At time instant zero, the coefficients  $b_i$  are not present and the coefficients  $a_i$  are doubled for each j = 1, 2, ..., r (thus we multiply by a half the corresponding coefficients in  $\mathbf{q}_0$ ). To match the outputs h(t) = y(t)-or equivalently  $F \mathbf{q}(t)/T = C \mathbf{q}(t)$ —we define  $C = (1/T) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$ We thus conclude that the signal and the output are equal, hence the lemma holds.

3.6. Results 31

We note for practical reasons that the signal would still be periodic with another linear combination of coefficients (for instance,  $C = d \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , or  $d \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$  for a constant value  $d \in \mathbb{R}$ ).

## 3.5.3 Merging computations and motion

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 3.6 Results

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# 3.7 Summary

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# **Chapter 4**

# State Estimation

#### Status

General structure with just some dummy text.

OREM IPSUM DOLOR SIT AMET, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sedelit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh

lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# 4.1 A Brief History of State Estimation

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# 4.2 A Necessary Background on Probability Theory

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# 4.3 The Curve Fitting Problem

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent

blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 4.3.1 Least square fitting

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# 4.3.2 Levenberg-Marquardt algorithm

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat.

Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 4.4 Periodic Model Estimation

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 4.4.1 Period estimation

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut

porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 4.4.2 Minimization of the estiamte error

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 4.4.3 Period and horizon in continuous estimation

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# 4.5 Filtering

4.5. Filtering 39

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 4.5.1 Discrete time Kalman filter

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 4.5.2 Continuous time Kalman filter

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent

blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 4.5.3 Nonlinear filtering

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 4.6 Results

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit.

4.7. Summary 41

Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# 4.7 Summary

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# **Chapter 5**

# Guidance

#### Status

General structure with just some dummy text.

OREM IPSUM DOLOR SIT AMET, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sedelit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh

lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 5.1 Vector Fields for Guidance

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 5.2 Derivation of the Guidance Action

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 5.2.1 Motion simulations

### 5.2.2 Energy simulations

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 5.3 Alteration of the Path

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent

5.4. Results 47

blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 5.4 Results

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# 5.5 Summary

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit.

Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# **Chapter 6**

# **Optimal Control Generation**

#### Status

Initial version up to Subsection 6.2.1. From Subsection 6.2.2 dummy text.

This chapter provides essential theoretical background on optimal control theory necessary to derive an optimal configuration of the path and computations of the flying UAV. It solves the problem posed in Section 1.6 and illustrate an algorithm that generates the optimal configuration dynamically. The algorithm relies on a modern optimal control technique known as model predictive control (MPC), where the optimal control trajectory is evaluated on a receding horizon for each optimization step (Rawlings et al., 2017).

Optimal control deals with finding optimal ways to control a dynamic system (Sethi, 2019). It determines the control signal—the evolution in time of the decision variables—such that the model satisfies the dynamics and simultaneously optimizes a performance index (Kirk, 2004).

Many optimization problems originating in fields such as robotics, economics, and aeronautics can be formulated as optimal control problems (OCPs) (Von Stryk and Bulirsch, 1992). Optimization is often called mathematical programming (Nocedal and Wright, 2006) a term that means finding ways to solve the optimization problem. One can often find programming in this context in terms such as linear program (LP), quadratic program (QP), and nonlinear program (NLP). NLPs is the class of optimization problems that we use to derive the optimal configuration. OCPs can be seen as optimization problems with the added difficulty of continuous dynamics. The latter is to be integrated over the optimization horizon using numerical simulation. In the algorithm, we formulate the dynamic planning problem as an OCP that we solve with a numerical method: we transform the OCP in an NLP using numerical

simulation and solve the NLP using numerical optimization, as proposed in (Rawlings et al., 2017). The process is illustrated in Fig. 6.1.

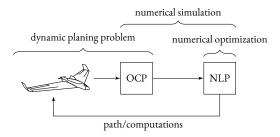


Fig. 6.1. Summary of the optimal control approach. The problem is formulated as an OCP, into finite-dimensional discrete NLP using numerical simulation. NLP is solved using numerical optimization and the optimal configuration for a given time horizon is returned to the UAV. The following horizon is evaluated again in a technique known as MPC.

A typical performance measure for an OCP is built such that the system: reaches a target set  $Q_f$  in minor time, reaches a given final state  $\mathbf{q}_f$  with minimum deviation, maintains the state evolution as close as possible to a given desired evolution, or reaches the target set with the minimum control expenditure effort (Kirk, 2004). In energy planning, it is desired to focus on the latter performance measure.

The outline of the chapter is as follows. After a brief history of optimal control, we introduce formally the OCP subject to continuous dynamics. We then illustrate numerical simulation approaches to convert the infinite-dimensional continuous dynamics into finite-dimensional discrete dynamics. We formulate later in the chapter the dynamic planning problem for the optimal configuration of the path and computations with proper constraints. Finally, we illustrate MPC to solve OCP on a receding horizon. We propose an algorithm to solve such OCP using a numerical method on the horizon along with the analysis of its practical feasibility.

The chapter builds on the rest of the work as follows. In the OCP formulation, we use the estimated state from Chapter 4 of a perfect model in Chapter 3 to solve the planning problem in Section 1.6 and guide the UAV with the obtained optimal configuration from this chapter with the technique in Chapter 5.

# 6.1 A Brief History of Optimal Control

Optimal control originates from the calculus of variations (Sethi, 2019), based on the work of Euler and Lagrange. Calculus of variations solves the problem of determining the arguments of an integral, such that its value is maximum (or minimum). The equivalent problem in calculus is to determine the argument of a function where the function is maximum (or minimum). The work by Euler and Lagrange was later ex-

tended by Legendre, Hamilton, and Weierstrass (Paulen and Fikar, 2016). It has gained a renewed interest in the mid-twentieth century, as modern calculators offered practical ways of solving some OCPs for nonlinear and time-varying systems that were earlier impracticable (Bryson and Ho, 1975).

The conversion of the calculus of variation problems in OCPs requires the addition of the control variable to the dynamics (Sethi, 2019).

There are numerous methods to analytically and numerically solve these continuous time OCPs, although analytical solution is often impracticable except for very limited state dimensions (Rawlings et al., 2017). In the early day of optimal control, some analytical solutions were proposed with dynamic programming (Bellman, 1957), and with maximum (or minimum) principle (Pontryagin et al., 1962).

In computer science dynamic programming is fundamental to compute optimal solutions, yet it's original form was developed to solve optimal control problems (LaValle, 2006). Dynamic programming in optimal control theory is based on a partial differential equation of the performance index named Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation, which is solved either analytically for small dimensional state space problems, or numerically (Rawlings et al., 2017). Dynamic programming can be shown to be equivalent to the principle (Paulen and Fikar, 2016). The principle is related to HJB equation in that it provides optimality conditions an optimal trajectory must satisfy (LaValle, 2006). HJB offer sufficient conditions for optimality while the principle necessary; yet it is useful to find suitable candidates for optimality (LaValle, 2006).

All the numerical approaches discretize infinite-dimensional problems at a certain point (Rawlings et al., 2017).

A first class of these approaches solves the optimality conditions in continuous time using first-order necessary conditions of optimality from the principle (Böhme and Frank, 2017). This is done by algebraic manipulation using an expression that is similar to the HJB equation, and results in a boundary-value problem (BVP) (Rawlings et al., 2017). The class is commonly referred to as the indirect methods. The BVP is solved by discretization at the very end (Rawlings et al., 2017) and/or gradient-based resolution (Paulen and Fikar, 2016).

On the contrary, modern optimal control often first discretize an the control and state variables in the OCP to a finite dimensional optimization problem (usually NLP), which is then solved with numerical optimization (using gradient-based techniques). This other class of numerical approaches is referred to as direct methods. Some direct methods are single and multiple shooting and collocation methods. We employ direct methods in this chapter.

Modern OCPs are often solved on a finite and receding horizon using an approximation of the true dynamics using MPC techniques. It is a more systematic technique which allow to control a model by re-optimizing the OCP repeatedly (Paulen and Fikar, 2016; Poe and Mokhatab, 2017). It takes into account external interferences

by re-estimating the model's state (with techniques that we introduced in Chapter 4). MPC is extensively treated in modern optimal control literature (Camacho and Alba, 2007; Kwon and Han, 2005; Rawlings et al., 2017; Rossiter, 2004; Wang, 2009).

# 6.2 Optimization Problems with Dynamics

## 6.2.1 Continuous systems: unconstrained case

Given a state variable  $\mathbf{q}$  composed of m states and a control variable  $\mathbf{u}$  composed of n controls, the state variable dynamics at a given time instant t can be described by a differential model

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = f(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0 \text{ given}, \quad \forall t \in [t_0, T],$$
 (6.1)

where  $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  is a given initial time instant, and  $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^m$  a given initial state guess. The latest can be derived empirically from a previous execution or using some initial sensor data.  $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^m$  maps the current state, control and time to the next state. The notations for  $\dot{\mathbf{q}}(t) := d\mathbf{q}(t)/dt$ ,  $\mathbf{q}$ , and  $\mathbf{u}$  are the same from Chapter 3. The function f is assumed to be continuously differentiable. Physically, Equation (6.1) specifies the instantaneous change in state variable of a perfect model with no disturbances.

If the control trajectory  $\mathbf{u}(t_0)$ ,  $\mathbf{u}(t_1)$ , ...,  $\mathbf{u}(T-\Delta t)$  is known for a given time horizon  $t_0 \leq t \leq T$ , the model in Equation (6.1) can be derived to obtain the state trajectory  $\mathbf{q}(t_0)$ ,  $\mathbf{q}(t_1)$ , ...,  $\mathbf{q}(T)$ , where  $\Delta t$  is the instantaneous change in time. The last state at the final time instant T is derived from the last control at the time instant  $T-\Delta t$ . The state trajectory has indeed one item more than the control trajectory.

Optimal control finds a control trajectory which maximizes (or minimizes) a performance index

$$L = l_{t}(\mathbf{q}(T), T) + \int_{t_{0}}^{T} l(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) dt,$$
 (6.2)

where l,  $l_f$  are given instantaneous and final cost functions. The instantaneous cost function maps state, controls, and time to a value that quantifies the cost of a given instant  $l: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ . The final cost function maps the state and time to a value which quantifies the cost of the final instant  $l_f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ . The performance index  $L \in \mathbb{R}$  is then the sum of all the contribution on the time horizon.

Performance index found in (Bryson and Ho, 1975) is also found in literature as cost function in (Simon, 2006; Stengel, 1994), objective function in (S. S. Rao, 2019; Rawlings et al., 2017; Sethi, 2019), or performance measure (Kirk, 2004).

The control variable is usually constrained

$$\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}(t), \ \forall t \in [t_0, T],$$
 (6.3)

where  $U(t) \subseteq \mathbb{R}^m$  is the control constraint set. It delimits all the feasible values of the control for the horizon. There can be different control constraint sets for different instants.

The Equations (6.1–6.3) forms unconstrained OCPs. These problems are formalized

$$\max_{\mathbf{u}(t) \in \mathcal{U}(t)} l_f(\mathbf{q}(T), T) + \int_{t_0}^T l(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t) dt,$$
s.t.  $\dot{\mathbf{q}}(t) = f(\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t), t)$ 

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0 \text{ given.}$$
(6.4)

The evolution of the model is used to derive an optimal control trajectory  $\mathbf{u}(t)$  from an initial guess of the state  $\mathbf{q}_0$  and the horizon. This initial simplistic controller does not represent a realistic scenario. The controller implies that the horizon is known. However, it is often the case that only the initial time step of the horizon  $[t_0, T]$  is known. In the model from Chapter 3 it is indeed unknown apriori when the UAV plan terminates. Moreover the controller does not include any constraint on the state  $\mathbf{q}$ , although UAVs are often bounded by strict battery requirements. Lastly, the optimal control generated with such controller is static given the initial state and the horizon. It is unrealistic to assume that the state of the UAV travelling the optimal control  $\mathbf{u}$  does not change for instants  $t_0 + \Delta t$ ,  $t_0 + 2\Delta t$ , ..., T.

All these initial assumption (known final time step, absence of state constraints, static optimal control law) will be eased in the remaining of the chapter.

## 6.2.2 Continuous systems: constrained case

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

# 6.2.3 Perturbed systems

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut

porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 6.2.4 Multistage systems

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

### 6.3 Numerical Simulation and Differentiation

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 6.3.1 Euler method

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 6.3.2 Runge-Kutta methods

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 6.3.3 Algorithmic differentiation

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent

blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 6.4 Direct Optimal Control Methods

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 6.4.1 Direct single shooting

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit.

Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 6.4.2 Direct multiple shooting

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 6.4.3 Direct collocation

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 6.5 Numerical Optimization

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 6.5.1 Convexity

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 6.5.2 Optimality conditions

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent

blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 6.5.3 First order optimality conditions

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 6.5.4 Second order optimality conditions

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 6.5.5 Sequential quadratic programming

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 6.5.6 Nonlinear interior point methods

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 6.6 Model Predictive Control

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent

6.7. Results 61

blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 6.6.1 Output model predictive control

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

#### 6.6.2 Optimal control generation with model predictive control

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 6.7 Results

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh

lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## 6.8 Summary

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesentimperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut

6.8. Summary 63

porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet antelobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectustellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia loremsit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## References

- Bailey, P. E., D. K. Lowenthal, V. Ravi, B. Rountree, M. Schulz, and B. R. De Supinski (2014). "Adaptive configuration selection for power-constrained heterogeneous systems". In: 2014 43rd International Conference on Parallel Processing. IEEE, pp. 371–380 (cit. on p. 11).
- Barik, R., N. Farooqui, B. T. Lewis, C. Hu, and T. Shpeisman (2016). "A black-box approach to energy-aware scheduling on integrated CPU-GPU systems". In: *Proceedings of the* 2016 International Symposium on Code Generation and Optimization. ACM, pp. 70–81 (cit. on p. 11).
- Bellman, R. E. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton: Princeton University Press (cit. on p. 51).
- Böhme, T. J. and B. Frank (2017). "Indirect Methods for Optimal Control". In: *Hybrid Systems, Optimal Control and Hybrid Vehicles: Theory, Methods and Applications*. Cham: Springer International Publishing, pp. 215–231 (cit. on p. 51).
- Bryson, A. E. and Y.-C. Ho (1975). *Applied optimal control: optimization, estimation and control.* Hemisphere Publishing Corporation (cit. on pp. 51, 52).
- Calore, E., S. F. Schifano, and R. Tripiccione (2015). "Energy-performance tradeoffs for HPC applications on low power processors". In: *European Conference on Parallel Processing*. Springer, pp. 737–748 (cit. on p. 12).
- Camacho, E. F. and C. B. Alba (2007). *Model predictive control.* London: Springer-Verlag (cit. on p. 52).
- Chowdhury, P. and C. Chakrabarti (2005). "Static task-scheduling algorithms for battery-powered DVS systems". In: *IEEE transactions on very large scale integration (VLSI)* systems 13.2, pp. 226–237 (cit. on p. 10).
- Dressler, F. and G. Fuchs (2005). "Energy-aware operation and task allocation of autonomous robots". In: *Proceedings of the Fifth International Workshop on Robot Motion and Control, 2005. RoMoCo'05.* IEEE, pp. 163–168 (cit. on p. 11).
- García-Martín, E., C. F. Rodrigues, G. Riley, and H. Grahn (2019). "Estimation of energy consumption in machine learning". In: *Journal of Parallel and Distributed Computing* 134, pp. 75–88 (cit. on p. 11).
- Goraczko, M., J. Liu, D. Lymberopoulos, S. Matic, B. Priyantha, and F. Zhao (2008). "Energy-optimal software partitioning in heterogeneous multiprocessor embedded systems". In: 2008 45th ACM/IEEE Design Automation Conference. IEEE, pp. 191–196 (cit. on p. 11).
- Hasan, A., M. Skriver, and T. A. Johansen (2018). "Exogenous kalman filter for state-of-charge estimation in lithium-ion batteries". In: 2018 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA). IEEE, pp. 1403–1408 (cit. on p. 10).

66 References

Hong, I., D. Kirovski, G. Qu, M. Potkonjak, and S. M. B (1999). "Power optimization of variable-voltage core-based systems". In: *IEEE Transactions on Computer-Aided Design* of *Integrated Circuits and Systems* 18.12, pp. 1702–1714 (cit. on p. 10).

- Hong, S. and H. Kim (2010). "An integrated GPU power and performance model". In: *ACM SIGARCH Computer Architecture News*. Vol. 38. 3. ACM, pp. 280–289 (cit. on p. 11).
- Kanellakis, C. and G. Nikolakopoulos (2017). "Survey on computer vision for UAVs: Current developments and trends". In: *Journal of Intelligent & Robotic Systems* 87.1, pp. 141–168 (cit. on p. 11).
- Kirk, D. E. (2004). *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation (cit. on pp. 49, 50, 52).
- Kreciglowa, N., K. Karydis, and V. Kumar (2017). "Energy efficiency of trajectory generation methods for stop-and-go aerial robot navigation". In: *2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. IEEE, pp. 656–662 (cit. on p. 11).
- Kwon, W. H. and S. H. Han (2005). *Receding horizon control: model predictive control for state models*. London: Springer-Verlag (cit. on p. 52).
- LaValle, S. M. (2006). *Planning algorithms*. Cambridge university press (cit. on p. 51).
- Luo, J. and N. K. Jha (2001). "Battery-aware static scheduling for distributed real-time embedded systems". In: *Proceedings of the 38th annual Design Automation Conference*. ACM, pp. 444–449 (cit. on p. 10).
- Marowka, A. (2017). "Energy-aware modeling of scaled heterogeneous systems". In: *International Journal of Parallel Programming* 45.5, pp. 1026–1045 (cit. on p. 10).
- Mei, Y., Y.-H. Lu, Y. C. Hu, and C. G. Lee (2004). "Energy-efficient motion planning for mobile robots". In: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004. Vol. 5. IEEE, pp. 4344–4349 (cit. on p. 11).
- (2005). "A case study of mobile robot's energy consumption and conservation techniques". In: ICAR'05. Proceedings., 12th International Conference on Advanced Robotics, 2005. IEEE, pp. 492–497 (cit. on p. 11).
- Nikov, K., J. L. Nunez-Yanez, and M. Horsnell (2015). "Evaluation of hybrid run-time power models for the ARM big. LITTLE architecture". In: 2015 IEEE 13th International Conference on Embedded and Ubiquitous Computing. IEEE, pp. 205–210 (cit. on p. 12).
- Nocedal, J. and S. Wright (2006). *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media (cit. on p. 49).
- Nunez-Yanez, J. and G. Lore (2013). "Enabling accurate modeling of power and energy consumption in an ARM-based System-on-Chip". In: *Microprocessors and Microsystems* 37.3, pp. 319–332 (cit. on p. 12).
- Paulen, R. and M. Fikar (2016). "Solution of Optimal Control Problems". In: Optimal Operation of Batch Membrane Processes. Cham: Springer International Publishing, pp. 37–56 (cit. on p. 51).
- Poe, W. A. and S. Mokhatab (2017). "Process Control". In: *Modeling, Control, and Optimization of Natural Gas Processing Plants*. Ed. by W. A. Poe and S. Mokhatab. Boston: Gulf Professional Publishing, pp. 97–172 (cit. on p. 51).
- Pontryagin, L. S., E. Mishchenko, V. Boltyanskii, and R. Gamkrelidze (1962). *The mathematical theory of optimal processes*. Wiley (cit. on p. 51).
- Public Deliverables of the TeamPlay Horizon2020 Project (2019). https://teamplay-h2020.eu/index.php?page=deliverables. Accessed: 2019-08-25 (cit. on p. 12).
- Rao, R., S. Vrudhula, and D. N. Rakhmatov (2003). "Battery modeling for energy aware system design". In: *Computer* 36.12, pp. 77–87 (cit. on p. 10).
- Rao, S. S. (2019). Engineering optimization: theory and practice. John Wiley & Sons (cit. on p. 52).

References 67

Rawlings, J. B., D. Q. Mayne, and M. Diehl (2017). Model predictive control: theory, computation, and design. Vol. 2. Madison, Wisconsin: Nob Hill Publishing (cit. on pp. 49–52).

- Rossiter, J. A. (2004). *Model-based predictive control: a practical approach*. Boca Raton, Florida: CRC press (cit. on p. 52).
- Sadrpour, A., J. Jin, and A. G. Ulsoy (2013a). "Mission Energy Prediction for Unmanned Ground Vehicles Using Real-time Measurements and Prior Knowledge". In: *Journal of Field Robotics* 30.3, pp. 399–414 (cit. on p. 12).
- Sadrpour, A., J. Jin, and A. G. Ulsoy (2013b). "Experimental validation of mission energy prediction model for unmanned ground vehicles". In: *2013 American Control Conference*. IEEE, pp. 5960–5965 (cit. on p. 12).
- Seewald, A., E. Ebeid, and U. P. Schultz (2019). "Dynamic Energy Modelling for SoC Boards: Initial Experiments". In: *HLPGPU 2019: High-Level Programming for Heterogeneous and Hierarchical Parallel Systems*, p. 4 (cit. on p. 12).
- Seewald, A., H. Garcia de Marina, and U. P. Schultz (n.d.). Energy-Aware Dynamic Planning Algorithm for Autonomous UAVs. In preparation (available online: https://github.com/adamseew/iros-2021) (cit. on p. 19).
- Seewald, A., U. P. Schultz, E. Ebeid, and H. S. Midtiby (2019). "Coarse-Grained Computation-Oriented Energy Modeling for Heterogeneous Parallel Embedded Systems". In: *International Journal of Parallel Programming*, pp. 1–22 (cit. on p. 9).
- Sethi, S. P. (2019). Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics. Cham: Springer International Publishing (cit. on pp. 49–52).
- Simon, D. (2006). Optimal state estimation: Kalman, H infinity, and nonlinear approaches. John Wiley & Sons (cit. on p. 52).
- Stengel, R. F. (1994). Optimal control and estimation. Courier Corporation (cit. on p. 52).
- Uragun, B. (2011). "Energy efficiency for unmanned aerial vehicles". In: 2011 10th International Conference on Machine Learning and Applications and Workshops. Vol. 2. IEEE, pp. 316–320 (cit. on p. 11).
- Von Stryk, O. and R. Bulirsch (1992). "Direct and indirect methods for trajectory optimization". In: *Annals of operations research* 37.1, pp. 357–373 (cit. on p. 49).
- Wang, L. (2009). *Model predictive control system design and implementation using Matlab.* London: Springer Science & Business Media (cit. on p. 52).
- Wu, G., J. L. Greathouse, A. Lyashevsky, N. Jayasena, and D. Chiou (2015). "GPGPU performance and power estimation using machine learning". In: 2015 IEEE 21st International Symposium on High Performance Computer Architecture (HPCA). IEEE, pp. 564–576 (cit. on p. 11).

# Index

Mauris, 43

Nunc, 43, 45, 46