Algebra Zadanie 4 - Lista 6

April 2020

Treść zadania:

Zadanie 4. Rozwiąż przy użyciu wzorów Cramera, tj $x_i = \frac{det(A_{x_i})}{det(A)}$, układy równań:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} cos\ \alpha & sin\ \alpha \\ -sin\ \alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\ \beta \\ sin\ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Pierwszy układ:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Macierze A, A_{x_1} oraz A_{x_2} wyglądają następująco:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix}, A_{x_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 17 & 16 \end{bmatrix}, A_{x_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 17 \end{bmatrix}$$

Liczymy ich wyznaczniki za pomocą metody Sarrusa.

$$det(A) = 2 \cdot 16 - 2 \cdot (-1) = 33$$
$$det(A_{x_1}) = 1 \cdot 16 - 17 \cdot (-1) = 33$$
$$det(A_{x_2}) = 2 \cdot 17 - 1 \cdot 1 = 33$$

Obliczamy rozwiązanie korzystając ze wzorów Cramera:

$$x_1 = x_2 = \frac{33}{33} = 1$$

Drugi układ:

$$\begin{bmatrix} cos\ \alpha & sin\ \alpha \\ -sin\ \alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\ \beta \\ sin\ \beta \end{bmatrix}$$

Macierze A, A_{x_1} oraz A_{x_2} wyglądają następująco:

$$A = \begin{bmatrix} cos\ \alpha & sin\ \alpha \\ -sin\ \alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix}, A_{x_1} = \begin{bmatrix} cos\ \beta & sin\ \alpha \\ sin\ \beta & cos\ \alpha \end{bmatrix}, A_{x_2} = \begin{bmatrix} cos\ \alpha & cos\ \beta \\ -sin\ \alpha & sin\ \beta \end{bmatrix}$$

Liczymy ich wyznaczniki za pomocą metody Sarrusa.

$$det(A) = cos\ \alpha \cdot cos\ \alpha - sin\ \alpha \cdot (-sin\ \alpha) = sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$
$$det(A_{x_1}) = cos\ \beta \cdot cos\ \alpha - sin\ \beta \cdot sin\ \alpha = cos(\alpha + \beta)$$
$$det(A_{x_2}) = cos\ \alpha \cdot sin\ \beta - cos\ \beta \cdot (-sin\ \alpha) = sin\ \alpha \cdot cos\ \beta + sin\ \beta \cdot cos\ \alpha = sin(\alpha + \beta)$$

Obliczamy rozwiązanie korzystając ze wzorów Cramera:

$$x_1 = \frac{cos(\alpha+\beta)}{1} = cos(\alpha + \beta),\ x_2 = \frac{sin(\alpha+\beta)}{1} = sin(\alpha + \beta)$$

Trzeci układ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Macierze A, A_{x_1}, A_{x_2} oraz A_{x_3} wyglądają następująco:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, A_{x_1} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, A_{x_2} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, A_{x_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Liczymy ich wyznaczniki za pomocą metody Sarrusa.

$$det(A) = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 = 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 = 4$$
$$det(A_{x_1}) = 6 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 \cdot 1 = 6 + 2 - 2 + 6 = 12$$
$$det(A_{x_2}) = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) \cdot 1 = 6 - 2 - 2 + 6 = 8$$
$$det(A_{x_3}) = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot 6 - 6 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 2 - (-1) \cdot 0 \cdot 1 = 2 + 6 - 6 + 2 = 4$$

Obliczamy rozwiązanie korzystając ze wzorów Cramera:

$$x_1 = \frac{12}{4} = 3,\ x_2 = \frac{8}{4} = 2,\ x_3 = \frac{4}{4} = 1$$