

---

## Matematika 4 — Logika pre informatikov

### Teoretická úloha 10

---

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **6. mája 2019 o 11:30** na prednáške.

Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Ohodnotené riešenia poskytneme k nahliadnutiu, ale **nevrátime** vám ich, uchovajte si kópiu. Na riešenia všetkých úloh sa vzťahujú všeobecné **pravidlá** zverejnené na adrese [https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course/Mathematics\\_4/sk#pravidla-uloh](https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course/Mathematics_4/sk#pravidla-uloh).

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky, v ktorej nájdete ďalšie úlohy na precvičovanie a vzorové riešenia: <https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf>.

Pri riešení niektorých úloh vám môže pomôcť prieskumník štruktúr (<https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/structure-explorer/>).

**Cvičenie 10.1.** (3.4.1) Nájdite štruktúru, ktorá splní prvorádovú teóriu  $T = \{A_1, \dots, A_6\}$  v jazyku  $\mathcal{L}$ , kde  $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{u, v, w, x, y, z\}$ ,  
 $C_{\mathcal{L}} = \{\text{Andrea, Danka, Hanka, Janka, Max, Nikita}\}$ ,  
 $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\text{manžel}^1, \text{manželka}^1, \text{prvorodené\_dieťa}^2\}$ ,  
 $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{Lekár}^1, \text{Manželia}^2, \text{Muž}^1, \text{Právnik}^1, \text{Žena}^1\}$ .

$$(A_1) \quad \forall x \forall y (\text{Manželia}(x, y) \rightarrow \text{Manželia}(y, x))$$

$$(A_2) \quad \forall x \forall y (\text{Manželia}(x, y) \rightarrow (\text{Muž}(x) \rightarrow x \doteq \text{manžel}(y)) \wedge (\text{Žena}(x) \rightarrow x \doteq \text{manželka}(y)))$$

$$(A_3) \quad \forall x \forall y (\text{Manželia}(x, y) \wedge \text{Muž}(x) \wedge \text{Žena}(y) \rightarrow \text{Lekár}(\text{prvorodené\_dieťa}(x, y)) \vee \text{Právnik}(\text{prvorodené\_dieťa}(x, y)))$$

$$(A_4) \quad \text{Manželia}(\text{Hanka}, \text{Max}) \wedge \text{Žena}(\text{Hanka}) \wedge \text{Muž}(\text{Max})$$

$$(A_5) \quad \text{Manželia}(\text{Danka}, \text{Janka}) \wedge \text{Žena}(\text{Danka}) \wedge \text{Žena}(\text{Janka})$$

$$(A_6) \quad \text{Manželia}(\text{Andrea}, \text{Nikita}) \wedge \text{Muž}(\text{Andrea})$$

**Cvičenie 10.2.** (3.5.1, 3.5.2) Pre každú z nasledujúcich formúl

- vyznačte oblasti platnosti kvantifikátorov,
- určte množinu voľných premenných,
- zistite, či je substitúcia aplikovateľná,
- ak je substitúcia aplikovateľná, určte výsledok substitúcie.

$$\text{a) } (P(y) \wedge \exists x (Q(x, y) \vee R(x)) \rightarrow S(x)) \{x \mapsto c, y \mapsto f(x)\}$$

$$\text{b) } \forall z (P(x, z) \wedge \exists w (R(w) \rightarrow Q(x, g(y, z)))) \rightarrow P(z, w) \\ \{x \mapsto f(y), y \mapsto g(x, y), w \mapsto g(a, z) \mapsto z\}$$

**Cvičenie 10.3.** (3.3.2, 3.6.1, 3.6.2, 3.6.3, 3.6.4) Rozhodnite, či formula je platná, resp. či vyplýva z teórie. Platnosť/vyplývanie dokážte tablom, neplatnosť/nevyplývanie nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom.

- a)  $\models \forall x(\text{hladná}(x) \wedge \neg \text{vyspatá}(x)) \leftrightarrow (\forall x \text{ hladná}(x) \wedge \neg \exists x \text{ vyspatá}(x))$ ,
- b)  $\models \forall x(\forall y R(x, g(x, y)) \rightarrow \forall y R(x, y))$ ,
- c)  $\models \exists x(\text{pije}(x) \rightarrow \forall y \text{ pije}(y))$ ,
- d)  $\{\forall x(P(g(x)) \rightarrow \exists y Q(x, g(y)))\} \models \exists x(P(x) \rightarrow \forall y \exists z Q(f(y), z))$ .

## Hodnotená časť

**Úloha 10.1.** (3.6.4) Rozhodnite, či formula vyplýva z teórie. Vyplývanie dokážte tablom, nevyplývanie nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom.

- a)  $\{\neg \exists x \neg \exists y(\text{panovník}(x) \rightarrow \text{panovník}(\text{potomok}(x, y)))\} \models \neg \exists x \exists y(\text{panovník}(x) \wedge \neg \text{panovník}(\text{potomok}(x, y)))$
- b)  $\{\neg \exists x \exists y(\text{panovník}(x) \wedge \neg \text{panovník}(\text{potomok}(x, y)))\} \models \neg \exists x \neg \exists y(\text{panovník}(x) \rightarrow \text{panovník}(\text{potomok}(x, y)))$
- c)  $\{\forall x(P(x) \wedge \exists y \forall z Q(f(x, y), z))\} \models \exists x(P(g(x)) \wedge \forall y Q(x, g(y)))$