Prednášky z Matematiky (4) — Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2018/2019

9. prednáška

Definície predikátov.
Sémantika relačnej logiky prvého rádu

15. apríla 2019

Obsah 9. prednášky

3.2
Syntax (opakovanie)

Symboly jazyka relačnej logiky prvého rádu

Definícia 3.3

Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu sú:

symboly (indivíduových) premenných z nejakej nekonečnej spočítateľnej množiny $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ (označujeme ich x, y, ...);

***mimologické* symboly:**

- ***symboly konštánt*** z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ (označované a, b, ...);
- ***predikátové symboly*** z nejakej spočít. množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ (ozn. P, R, ...);

***logické symboly*:**

- ***logické spojky*:** unárna $\neg$, binárne $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$,
- ***symbol rovnosti*** $\doteq$,
- ***kvantifikátory*:** ***existenčný kvantifikátor*** $\exists$ a ***všeobecný kvantifikátor*** $\forall$;

pomocné symboly (,) a **,** (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú vzájomne disjunktné.
Logické a pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.
Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená ***arita*** $\mathrm{ar}(P) \in \mathbb{N}^+$.

Atomické formuly relačnej logiky prvého rádu

Definícia 3.5 (Term)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu.
Symboly premenných z $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ a konštánt z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ súhrnne nazývame ***termy***.

Definícia 3.6 (Atomické formuly)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $t_1 \doteq t_2$,
kde t_1 a t_2 sú termy.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(t_1, \ldots, t_n)$,
kde P je predikátový symbol s aritou n a $t_1, \ldots, t_n$ sú termy.

Atomickými formulami (skrátene ***atómami***) jazyka $\mathcal{L}$
súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Formuly jazyka relačnej logiky prvého rádu

Definícia 3.7

Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ všetkých ***formúl*** jazyka relačnej logiky prvého rádu $\mathcal{L}$ je *najmenšia* množina postupností symbolov jazyka $\mathcal{L}$, pre ktorú platí:

- Všetky atomické formuly z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ sú formulami z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (teda $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).
- Ak A je formula z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj $\neg A$ je formula z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (***negácia*** A).
- Ak A a B sú formuly z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$ sú formuly z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (***konjunkcia***, ***disjunkcia***, ***implikácia*** A a B).
- Ak x je indivíduová premenná a A je formula z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj $\exists x\, A$ a $\forall x\, A$ sú formuly z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (***existenčná*** a ***všeobecná kvantifikácia*** formuly A vzhľadom na x).

Dohoda 3.8

Formuly označujeme písmenami $A, B, C, \ldots$ s prípadnými indexmi.
$(A \leftrightarrow B)$ je skratka postupnosti symbolov $((A \to B) \land (B \to A))$.

3.2
Formalizácia v logike prvého rádu

Jednoznačnosť rozkladu formúl

Pre našu definíciu formúl platí:

Tvrdenie 3.9 (o jednoznačnosti rozkladu)

Pre každú formulu $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ v jazyku relačnej logiky prvého rádu $\mathcal{L}$ platí práve jedna z nasledujúcich možností:

- *Existuje práve jeden taký predikátový symbol $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ a práve jedna taká n-tica termov $t_1, \dots, t_n$ z $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, kde n je arita P, že $X = P(t_1, \dots, t_n)$.*
- *Existuje práve jedna dvojica termov t_1, t_2 z $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ taká, že $X = t_1 \doteq t_2$.*
- *Existuje práve jedna formula $A \in \mathcal{E}$ taká, že $X = \neg A$.*
- *Existujú práve jedna dvojica formúl $A, B \in \mathcal{E}$ a jedna spojka $b \in \{\land, \lor, \rightarrow\}$ také, že $X = (A\ b\ B)$.*
- *Existuje práve jedna formula $A \in \mathcal{E}$ a jedna indivíduová premenná $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ také, že $X = \forall x\, A$ alebo $X = \exists x\, A$.*

Vytvárajúci strom relačnej prvorádovej formuly

Definícia 3.10

Vytvárajúci strom T pre formulu X je binárny strom obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni T je formula X,
- ak vrchol obsahuje formulu v tvare $\neg A$, $\forall x\, A$, $\exists x\, A$, tak má práve jedno dieťa, ktoré obsahuje formulu A,
- ak vrchol obsahuje formulu v tvare $(A\ b\ B)$, kde b je jedna z binárnych spojok, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu A a pravé formulu B,
- vrcholy obsahujúce atómy sú listami.

Príklad 3.11

Zostrojme vytvárajúci strom pre formulu $\forall x((\exists y\, R(x, y) \land \exists z\, R(y, z)) \to x \doteq y)$.

Formuly jazyka relačnej logiky prvého rádu

Otestujte sa IX.1

Ktoré z nasledujúcich postupností symbolov sú formulami relačnej logiky prvého rádu, ak vhodne zvolíme jazyk?

- a $\forall x\, \mathtt{človek}(x) \land \mathtt{žena}(\mathtt{Eva})$
- b $\mathtt{chytá}(\mathtt{mačka}(\mathtt{Muro}), \mathtt{myš}(y))$
- c $(\neg \mathtt{prší} \lor \exists x(\mathtt{zmoknutý}(x)))$
- d $(\forall x \neg\, x \doteq \mathtt{Eva} \to \neg \exists x\, x \doteq x)$

Ak postupnosť nie je formulou,
ako sa dá správne vyjadriť pravdepodobne zamýšľaný význam?

3.2.5
Definície predikátov

Pojmy

- V mnohých doménach sú zaujímavé komplikovanejšie **kombinácie** vlastností alebo vzťahov:
  - x má spoločného rodiča s y, ale x je rôzne od y:
    $\exists z(\texttt{rodič}(z, x) \land \texttt{rodič}(z, y)) \land \neg x \doteq y$
  - x je živočích, ktorý konzumuje iba rastliny:
    $\big(\texttt{živočích}(x) \land \forall y(\texttt{konzumuje}(x, y) \to \texttt{rastlina}(y))\big)$
- Často sa vyskytujúce kombinácie vzťahov a vlastností je výhodné:
  - **pomenovať**
  - a jasne **vyjadriť význam** nového mena
    pomocou doteraz známych vlastností a vzťahov,

  teda ***zadefinovať pojem***

Definície pojmov

Definícia 3.12 (neformálna)

Definícia je tvrdenie, ktoré vyjadruje význam pojmu.

Explicitná definícia (najčastejší druh definície) je
ekvivalencia medzi pojmom a opisom jeho významu,
v ktorom sa definovaný pojem sám *nevyskytuje*.

Príklad 3.13

- x je *súrodencom* y práve vtedy, keď x má spoločného rodiča s y, ale x je rôzne od y
  $$\forall x \forall y \big(\mathtt{súrodenec}(x, y) \leftrightarrow (\exists z(\mathtt{rodič}(z, x) \land \mathtt{rodič}(z, y)) \land \neg\, x \doteq y)\big)$$
- x je *bylinožravec* vtedy a len vtedy, keď x je živočích, ktorý konzumuje iba rastliny
  $$\forall x \big(\mathtt{bylinožravec}(x) \leftrightarrow (\mathtt{živočích}(x) \land \forall y(\mathtt{konzumuje}(x, y) \to \mathtt{rastlina}(y)))\big)$$

Explicitná def. a nutná a postačujúca podmienka

Poznámka 3.14

Všimnite si:

- Definícia pojmu *súrodenec* vyjadruje **nutnú aj postačujúcu** podmienku toho, aby medzi dvoma ľuďmi existoval súrodenecký vzťah.
- Definícia pojmu *bylinožravec* vyjadruje nutnú aj postačujúcu podmienkou toho, aby niečo bolo bylinožravcom.

V prípade súrodencov to znamená:

- Pre každú dvojicu objektov x a y, ktoré označíme za súrodencov, **musí** existovať ich spoločný rodič a musia byť navzájom rôzne.
- Každé dva navzájom rôzne objekty x a y, ktoré majú spoločného rodiča, **musia** byť súrodenci.

Podobne pre iné definície.

Použitie pojmov

Využitím definovaného pojmu

- skracujeme tvrdenia:
  - králiky sú bylinožravce:
    $\forall x(\texttt{králik}(x) \rightarrow \texttt{bylinožravec}(x))$
- jednoduchšie definujeme ďalšie pojmy:
  - *x* je *sestrou* *y* práve vtedy, keď *x* je žena, ktorá je súrodencom *y*:
    $\forall x \forall y \big(\texttt{sestra}(x, y) \leftrightarrow (\texttt{žena}(x) \land \texttt{súrodenec}(x, y))\big)$

Vyskúšajte si IX.2

Zadefinujte pojem *teta* (chápaný ako vzťah dvoch ľudí) neformálne (v slovenčine) aj formálne (formulou logiky prvého rádu).

3.3

Sémantika relačnej logiky prvého rádu

Význam atomických formúl — výroková logika

Významom atomických formúl je pravdivostná hodnota

Výroková logika:

- Atomické formuly sú výrokové premenné — nemajú *žiadnu štruktúru*

$$\texttt{študent\_Evka}, \quad \texttt{zapísaný\_Evka\_LPI}$$

- Význam im **priamo** priraďuje **ohodnotenie**

$$v = \{\texttt{študent\_Evka} \mapsto t, \quad \texttt{zapísaný\_Evka\_LPI} \mapsto f\}$$

- Rôzne ohodnotenia — rôzne stavy sveta

Význam atomických formúl — logika prvého rádu

Významom atomických formúl je pravdivostná hodnota
Logika *prvého rádu*:

- Atomické formuly **majú štruktúru**:
  predikátový symbol/rovnosť a jeho argumenty (termy)

$$\mathtt{študent}(\mathtt{Evka}),\quad \mathtt{zapísaný}(\mathtt{Evka}, x),\quad x \doteq \mathtt{LPI},$$
$$\mathtt{hodnotený}(\mathtt{Ferko}, \mathtt{LPI}, \mathtt{C})$$

- **Termy** (symboly konštánt a *indivíduových* premenných)

$$\mathtt{Evka},\quad \mathtt{Ferko},\quad \mathtt{LPI},\quad \mathtt{A},\quad \ldots$$
$$u,\quad x,\quad \ldots$$

  označujú objekty

- **Predikátové symboly**

$$\mathtt{študent}^1,\quad \mathtt{zapísaný}^2,\quad \mathtt{hodnotený}^3$$

  označujú vlastnosti alebo vzťahy objektov

Vlastnosti a vzťahy matematicky

Aký **matematický** objekt zodpovedá…

- **vlastnosti** objektov?
  - **Množina objektov** s vlastnosťou
  - $\{\, x \mid x$ je študent/-ka $\} = \{$🚺$_{\text{Alica}}$, 🚹$_{\text{Bonifác}}$, 🚹$_{\text{Cyril}}$, 🚺$_{\text{Eva}}$, 🚹$_{\text{František}}$, $\ldots\}$
- **vzťahu** niekoľkých objektov?
  - **Usporiadaná *n*-tica**
  - (🚹$_{\text{Cyril}}$, $\texttt{1-AIN-221}$, 2.5)
- **všetkým vzťahom rovnakého druhu**?
  - ***n*-árna relácia** (množina usporiadaných *n*-tíc)
  - {(🚺$_{\text{Alica}}$, $\texttt{1-AIN-221}$, 1.5), (🚺$_{\text{Alica}}$, $\texttt{1-AIN-412}$, 1),
    (🚹$_{\text{Bonifác}}$, $\texttt{1-AIN-221}$, 2), (🚹$_{\text{Cyril}}$, $\texttt{1-AIN-221}$, 2.5),
    (🚹$_{\text{Cyril}}$, $\texttt{1-AIN-222}$, 4), (🚹$_{\text{František}}$, $\texttt{1-AIN-412}$, 2)}

Význam mimologických symbolov

Priradenie významu symbolom nejakého jazyka $\mathcal{L}$ relačnej logiky 1. rádu:

1. Vyberieme **doménu** M —
   množinu objektov v časti sveta, ktorá nás zaujíma

   $$M = \{\text{Alica}, \text{Bonifác}, \text{Cyril}, \text{Eva}, \text{František}, \ldots, \text{Dr. Žinčica}, \text{prof. Kováčová}, \text{1-AIN-221}, \text{1-AIN-222}, \text{1-AIN-412}, \ldots, 1, \ldots, 4, \ldots\}$$

2. **Interpretujeme** mimologické symboly v tejto doméne:

   symboly konštánt ako **objekty z domény**

   $$i(\mathtt{Evka}) = \text{Eva}, \quad i(\mathtt{Ferko}) = \text{František}, \quad i(\mathtt{LPI}) = \text{1-AIN-412},$$
   $$i(\mathtt{A}) = 1, \quad i(\mathtt{B}) = 1.5, \quad i(\mathtt{B}) = 2, \quad \ldots, \quad i(\mathtt{Fx}) = 4, \quad \ldots$$

   predikátové symboly podľa arity ako **množiny prvkov** domény

   $$i(\mathtt{študent}^1) = \{\text{Alica}, \text{Bonifác}, \text{Cyril}, \text{Eva}, \text{František}, \ldots\}$$

   alebo ako **množiny *n*-tíc prvkov** domény

   $$i(\mathtt{hodnotený}^3) = \{(\text{Alica}, \text{1-AIN-221}, 1.5), (\text{Alica}, \text{1-AIN-412}, 1), (\text{Bonifác}, \text{1-AIN-221}, 2), (\text{Cyril}, \text{1-AIN-221}, 2.5), \ldots\}$$

Dvojica (M, i) — **štruktúra** pre jazyk $\mathcal{L}$

Štruktúra

Definícia 3.15

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu.
Štruktúrou pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (M, i)$, kde

doména M štruktúry $\mathcal{M}$ je ľubovoľná **neprázdna** množina;

interpretačná funkcia i štruktúry $\mathcal{M}$ je zobrazenie, ktoré

- každému symbolu konštanty c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in M$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq M^n$.

Dohoda 3.16

Štruktúry označujeme veľkými *písanými* písmenami $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, ….
Doménu označujeme *rovnakým*, ale *tlačeným* písmenom ako štruktúru.

Štruktúra ako informatický objekt

Štruktúru sme definovali pomocou *matematických* objektov.

Aký **informatický** objekt zodpovedá štruktúre?

Databáza:

- Predikátové symboly a ich arita $\sim$ veľmi zjednodušená schéma DB
- Interpretácia predikátových symbolov $\sim$ konkrétne tabuľky s dátami

$i(\texttt{študent}^1)$

1
Alica
Bonifác
Cyril
Eva
…

$i(\texttt{zapísaný}^2)$

1	2
Eva	1-AIN-221
Alica	1-AIN-221
Alica	1-AIN-412
Bonifác	1-AIN-221
Cyril	1-AIN-221
Cyril	1-AIN-222
…	

$i(\texttt{hodnotený}^3)$

1	2	3
Alica	1-AIN-221	1.5
Alica	1-AIN-412	1
Bonifác	1-AIN-221	2
Cyril	1-AIN-221	2.5
Cyril	1-AIN-222	4
František	1-AIN-412	2
…		

Štruktúry — upozornenia

- Štruktúr pre daný jazyk je **nekonečne veľa**
- Doména štruktúry
  - môže mať ľubovoľné prvky
  - nijak **nesúvisí** s intuitívnym významom interpretovaného jazyka

    Jazyk o vysokoškolských vzťahoch — číselná doména štruktúry
  - môže byť **nekonečná**
- Interpretácia symbolov konštánt:
  - Každej konštante je priradený objekt domény
  - Nie každý objekt domény musí byť priradený nejakej konštante
  - Rôznym konštantám môže byť priradený rovnaký objekt
- Interpretácie predikátových symbolov môžu byť *nekonečné*
- Štruktúra nedefinuje význam jednej zložky atomických formúl — indivíduových premenných

Ohodnotenie premenných

Definícia 3.17

Nech $\mathcal{M} = (M, i)$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$.
Ohodnotenie (indivíduových) premenných je ľubovoľná funkcia $e \colon \mathcal{V}_{\mathcal{L}} \to M$ (priraďuje premenným prvky domény).

Zápisom $\boldsymbol{e(x/v)}$ označíme ohodnotenie indivíduových premenných, ktoré priraďuje premennej x hodnotu v z domény M
a všetkým ostatným premenným rovnakú hodnotu ako im priraďuje e.

Nech

$$\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{x, y\} \qquad M = \{\text{🚺}_{\text{Alica}}, \text{🚹}_{\text{Bonifác}}, \text{🚹}_{\text{Cyril}}, \text{🚺}_{\text{Eva}}, \text{🚹}_{\text{František}}, 1, 1.5, \ldots, 4\}.$$

Ohodnotením (indivíduových) premenných je napríklad

$$e = \{x \mapsto \text{🚺}_{\text{Eva}}, y \mapsto \text{🚹}_{\text{Bonifác}}\}$$

Potom

$$e(y/2.5) = \{x \mapsto \text{🚺}_{\text{Eva}}, y \mapsto 2.5\}$$

Hodnota termov

Definícia 3.18

Nech $\mathcal{M} = (M, i)$ je štruktúra, e je ohodnotenie premenných.
Hodnotou termu t v štruktúre $\mathcal{M}$ pri ohodnotení premenných e je prvok $t^{\mathcal{M}}[e]$ z M určený nasledovne:

- $t^{\mathcal{M}}[e] = e(x)$, ak t je premenná $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$,
- $t^{\mathcal{M}}[e] = i(a)$, ak t je konštanta $a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$.

Splnenie atomickej formuly v štruktúre

Určenie významu atomickej formuly, napr. $\mathtt{zapísaný}(\mathtt{Ferko}, y)$,
v danej štruktúre, napr. $\mathcal{M} = (M, i)$, kde

$$M = \{\text{Alica}, \text{Bonifác}, \text{Cyril}, \text{Eva}, \text{František}, 1, 1.5, \ldots, 3, 4, \mathtt{1\text{-}AIN\text{-}221}, \mathtt{1\text{-}AIN\text{-}222}, \mathtt{1\text{-}AIN\text{-}412}\}$$

$i(\mathtt{Evka}) = \text{Eva}$,

$i(\mathtt{Ferko}) = \text{František}$,

$i(\mathtt{LPI}) = \mathtt{1\text{-}AIN\text{-}412}$

$i(\mathtt{študent}) = \{\text{Alica}, \text{Bonifác}, \text{Cyril}, \text{Eva}, \text{František}\}$

$i(\mathtt{zapísaný}) = \{(\text{Alica}, \mathtt{1\text{-}AIN\text{-}221}), (\text{Alica}, \mathtt{1\text{-}AIN\text{-}412}), (\text{Bonifác}, \mathtt{1\text{-}AIN\text{-}221}), (\text{Cyril}, \mathtt{1\text{-}AIN\text{-}221}), (\text{Cyril}, \mathtt{1\text{-}AIN\text{-}222}), (\text{Eva}, \mathtt{1\text{-}AIN\text{-}221})\}$

a pri ohodnotení premenných, napr. $e = \{x \mapsto 1, y \mapsto \mathtt{1\text{-}AIN\text{-}221}\}$:

1. vyhodnotíme termy vo formule:
   $\mathtt{Ferko}^{\mathcal{M}}[e] = i(\mathtt{Ferko}) = \text{František}$, $\quad y^{\mathcal{M}}[e] = e(y) = \mathtt{1\text{-}AIN\text{-}221}$
2. zistíme, či $(\text{František}, \mathtt{1\text{-}AIN\text{-}221}) \in i(\mathtt{zapísaný})$:
   v tomto prípade **nie**

Takže štruktúra $\mathcal{M}$ ***nespĺňa*** formulu $\mathtt{zapísaný}(\mathtt{Ferko}, y)$ pri ohodnotení e

Splnenie existenčne kvantifikovanej formuly

- Vyhodnotenie splnenia formuly s **výrokovými spojkami** v štruktúre pri ohodnotení — rovnaké ako vo výrokovej logike
- Ako vyhodnotíme splnenie formuly s **kvantifikátormi**?

Splnenie existenčne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \exists y\, \text{zapísaný}(y, \text{LPI})\,[e]$?

1. Vyskúšame **všetky** ohodnotenia, ktoré postupne priraďujú kvantifikovanej premennej jednotlivé prvky domény:

m	$e(y/m)$	$\mathcal{M} \models \text{zapísaný}(y, \text{LPI})\,[e(y/m)]$
Alica	$\{x \mapsto 1, y \mapsto$ Alica$\}$	áno
Bonifác	$\{x \mapsto 1, y \mapsto$ Bonifác$\}$	nie
Cyril	$\{x \mapsto 1, y \mapsto$ Cyril$\}$	nie
Eva	$\{x \mapsto 1, y \mapsto$ Eva$\}$	nie
František	$\{x \mapsto 1, y \mapsto$ František$\}$	nie
1	$\{x \mapsto 1, y \mapsto 1\}$	nie
...		
1-AIN-412	$\{x \mapsto 1, y \mapsto \text{1-AIN-421}\}$	nie

2. $\mathcal{M} \models \exists y\, \text{zapísaný}(y, \text{LPI})\,[e]$ vtt
pre aspoň jedno $m \in M$ máme $\mathcal{M} \models \text{zapísaný}(y, \text{LPI})\,[e(y/m)]$;
pravá strana je pravdivá pre $m =$ Alica — ***svedok***

Splnenie všeobecne kvantifikovanej formuly

$\mathcal{M} \models \forall x(\mathtt{študent}(x) \rightarrow \mathtt{zapísaný}(x, y))\,[e]$?

Nech $A = \mathtt{študent}(x)$, $B = \mathtt{zapísaný}(x, y)$

1. Vyskúšame **všetky** ohodnotenia, ktoré postupne priraďujú kvantifikovanej premennej jednotlivé prvky domény:

m	$\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$	$\mathcal{M} \models B[e(x/m)]$	$\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)[e(x/m)]$
Alica	áno	áno	áno
Bonifác	áno	áno	áno
Cyril	áno	áno	áno
Eva	áno	áno	áno
František	áno	nie	nie
1	nie	nie	áno
...			
1-AIN-412	nie	nie	áno

2. $\mathcal{M} \models \forall x\,(\mathtt{študent}(x) \rightarrow \mathtt{zapísaný}(x, y))\,[e]$ vtt **pre všetky** $m \in M$ máme $\mathcal{M} \models (\mathtt{študent}(x) \rightarrow \mathtt{zapísaný}(x, y))\,[e(x/m)]$; pravá strana je nepravdivá pre $m =$ František — ***kontrapríklad***

Viazané premenné a splnenie

Pri určovaní splnenia formuly $\forall x A$, $\exists x A$ v štruktúre $\mathcal{M}$ pri ohodnotení e

- **Nezáleží** na pôvodnej hodnote $e(x)$ pre kvantifikovanú premennú x
- Hovoríme, že premenná x je **viazaná** kvantifikátorom
- Podobné ako formálny parameter funkcie v programovaní
- **Môže záležať** na hodnote $e(y)$ premenných $y \neq x$

Splnenie formuly v štruktúre

Definícia 3.19

Nech $\mathcal{M} = (M, i)$ je štruktúra, e je ohodnotenie premenných.
Relácia ***štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa formulu A pri ohodnotení e*** (skrátene $\mathcal{M} \models A[e]$) má nasledovnú induktívnu definíciu:

- $\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[e]$ vtt $t_1^{\mathcal{M}}[e] = t_2^{\mathcal{M}}[e]$,
- $\mathcal{M} \models P(t_1, \dots, t_n)[e]$ vtt $\left(t_1^{\mathcal{M}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[e]\right) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ a zároveň $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models \exists x A[e]$ vtt pre **nejaký** prvok $m \in M$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,
- $\mathcal{M} \models \forall x A[e]$ vtt pre **každý** prvok $m \in M$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,

pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly P s aritou n, všetky termy $t_1, t_2, \dots, t_n$, všetky premenné x a všetky formuly A, B.

Splnenie množiny formúl

Definícia 3.20

Nech S je množina formúl jazyka $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, nech e je ohodnotenie výrokových premenných.
Štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa množinu S pri ohodnotení e (skrátene $\mathcal{M} \models S[e]$) vtt pre všetky formuly X z S platí $\mathcal{M} \models X[e]$.

Príklad 3.21

Nájdime štruktúru a ohodnotenie, ktoré spĺňajú množinu $S_{\text{spolubývajúce}} = \{A_1, \ldots, A_6\}$ prvých 6 formúl o spolubývajúcich:

$$\begin{aligned}
A_1 &= (\text{má_rada}(\text{Biba}, \text{Ciri}) \lor \text{má_rada}(\text{Biba}, \text{Dada})),\\
A_2 &= \forall x(\text{má_rada}(\text{Biba}, x) \to \text{má_rada}(\text{Aďa}, x)),\\
A_3 &= \forall x(\text{má_rada}(x, \text{Ciri}) \to \text{má_rada}(\text{Ciri}, x)),\\
A_4 &= \exists x(\text{má_rada}(x, \text{Biba}) \land \text{má_rada}(\text{Biba}, x)),\\
A_5 &= \forall x\, \neg\text{má_rada}(x, x), \qquad A_6 = \forall x\, \exists y\, \text{má_rada}(x, y)
\end{aligned}$$

Splniteľnosť

Definícia 3.22

Nech X je formula jazyka $\mathcal{L}$ a nech S je množina formúl jazyka $\mathcal{L}$.

Formula X je ***splniteľná*** vtt aspoň jedna štruktúra $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ spĺňa X pri aspoň jednom ohodnotení e.

Množina formúl S je ***splniteľná*** vtt aspoň jedna štruktúra $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ spĺňa S pri aspoň jednom ohodnotení e.

Formula X (množina formúl S) je ***nesplniteľná*** vtt nie je splniteľná.

Príklad 3.23

Dokážme, že množina všetkých 7 formúl o spolubývajúcich, teda $S_{\text{spolubývajúce}} \cup \{\exists x \forall y\, \texttt{má\_rada}(y, x)\}$, je nesplniteľná.

Platné formuly a prvorádové vyplývanie

Definícia 3.24

Nech X je formula v jazyku $\mathcal{L}$.
Formula X je ***platná*** (skrátene $\models X$) vtt
každá štruktúra $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ spĺňa X pri každom ohodnotení e.

Platné formuly sú prvorádovou *obdobou* tautológií.
Keď rovnaké atomické alebo kvantifikované podformuly nahradíme rovnakými výrokovými premennými, tak

- formula, z ktorej vznikne tautológia, je platná; ale
- *nie z každej platnej formuly vznikne tautológia*.

Definícia 3.25

Nech X je formula v jazyku $\mathcal{L}$, nech S je množina formúl v jazyku $\mathcal{L}$.
Formula X ***(prvorádovo) vyplýva z S*** (skrátene $S \models X$) vtt
pre každú štruktúru $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ a každé ohodnotenie e platí, že
ak $\mathcal{M}$ spĺňa S pri e, tak $\mathcal{M}$ spĺňa X pri e.

Platné formuly a prvorádové vyplývanie

Tvrdenie 3.26

Nech X je formula v jazyku $\mathcal{L}$.
Potom X je platná ($\models X$) vtt
X prvorádovo vyplýva z prázdnej množiny formúl ($\{\} \models X$).

Tvrdenie 3.27

Nech X je formula a S je množina formúl v spoločnom jazyku $\mathcal{L}$.
Potom z S vyplýva X vtt $S \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľná.

Literatúra

Martin Davis and Hillary Putnam. A computing procedure for quantification theory. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 7:201–215, 1960.

Martin Davis, George Logemann, and Donald Loveland. A machine program for theorem-proving. *Communications of the ACM*, 5(7):394–397, 1962.

Michael Genesereth and Eric Kao. *Introduction to Logic*. Morgan & Claypool, 2013. ISBN 9781627052481.

Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf.