Prednášky z Matematiky (4) — Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2018/2019

10. prednáška

Logika prvého rádu s funkčnými symbolmi
Tablá pre logiku prvého rádu

29. apríla 2019

Obsah 10. prednášky

3 Logika prvého rádu
- Logika prvého rádu (s funkčnými symbolmi)
  - Syntax logiky prvého rádu (s funkčnými symbolmi)
  - Sémantika logiky prvého rádu s funkčnými symbolmi
- Voľné a viazané premenné
- Substitúcia
- Tablá pre logiku prvého rádu

3.4 Logika prvého rádu (s funkčnými symbolmi)

3.4.1 Syntax logiky prvého rádu (s funkčnými symbolmi)

Mimologické symboly v relačnej logike

V doterajšej — **relačnej** — logike prvého rádu
boli dva druhy mimologických symbolov:

symboly **konštánt**: mená **konkrétnych význačných objektov alebo hodnôt**

- $\mathtt{Diana}$, $\mathtt{StephenHawking}$, $\mathtt{90min}$, 0, 1, π;

predikátové symboly: mená **vlastností** a **vzťahov** objektov/hodnôt

- $\mathtt{žena}^1$, $\mathtt{profesor}^1$, $\mathtt{zapísaný}^2$, $\mathtt{hodnotený}^3$, $<^2$;

Okrem nich používame

symboly **premenných**: **dočasné** mená objektov/hodnôt,
ktorých vlastnosti popisuje kvantifikovaná formula
(ako riadiaca premenná cyklu)

- x, t, kto, $čo$, $komu$

Vzťahy s jednoznačne určenými objektmi

V niektorých vzťahoch jeden z účastníkov/jedna z hodnôt

- pre každú kombináciu ostatných účastníkov **existuje**
- a je **jednoznačne určený**

Vzťahy s jednoznačne určenými objektmi

- Každý človek má **práve jednu** biologickú matku

  $$\forall x\big(\texttt{človek}(x) \to \exists y(\texttt{rodič}(y,x) \land \texttt{žena}(y))\big)$$
  $$\begin{aligned}\forall x\,\forall y_1\,\forall y_2\big((&\texttt{človek}(x) \land \texttt{rodič}(y_1,x) \land \texttt{žena}(y_1) \land \\ &\texttt{rodič}(y_2,x) \land \texttt{žena}(y_2)) \to \\ &y_1 \doteq y_2\big)\end{aligned}$$

  Podobné vzťahy: otec, najlepšia kamarátka, ...;

  ale aj atribúty: dátum narodenia, výška, ...

- Každý študent dostane z každej úlohy **práve jedno** hodnotenie

  $$\forall x\,\forall u((\texttt{študent}(x) \land \texttt{úloha}(u)) \to \exists z\,\texttt{hodnotenie}(x,u,z))$$
  $$\begin{aligned}\forall x\,\forall u\,\forall z_1\,\forall z_2\big((&\texttt{študent}(x) \land \texttt{úloha}(u) \land \\ &\texttt{hodnotenie}(x,u,z_1) \land \texttt{hodnotenie}(x,u,z_2)) \to \\ &z_1 \doteq z_2\big)\end{aligned}$$

  Podobne: cena tovaru so zľavou podľa množstva,

  prvorodené dieťa rodičov, súčet čísel, prienik množín, ...

Funkčné symboly

- Relácii, v ktorej posledná zložka n-tíc je jednoznačne určená, hovoríme …
- V logike prvého rádu sa funkcie označujú **funkčnými symbolmi**
  - Tretí druh mimologických symbolov
- Aplikujú sa na argumenty — ostatné objekty vo vzťahu: $\mathtt{matka}(\mathtt{Adelka})$, $\mathtt{hodnotenie}(\mathtt{Igor}, \mathtt{tu08})$, …
- **Čo označujú** tieto postupnosti symbolov? **Aký význam** majú?

  $\mathtt{matka}(\mathtt{Adelka})$: Adelkina mama

  $\mathtt{hodnotenie}(\mathtt{Igor}, \mathtt{tu08})$: číslo, počet Igorovych bodov z 8. t. ú.

▶ Významom je teda **objekt**

⚠ Významom $(\mathtt{rodič}(\mathtt{Magda}, \mathtt{Adelka}) \land \mathtt{žena}(\mathtt{Magda}))$ je pravdivostná hodnota

Termy s funkčnými symbolmi

- Doteraz sme mali dva druhy výrazov:

  termy (konštanty, premenné) — významom je **objekt**
  formuly — významom je **pravdivostná hodnota**
- Výrazy s funkčnými symbolmi sú **nový druh termov**
- Termy s funkčnými symbolmi môžu byť argumentmi
  - predikátových symbolov:

    $\mathtt{teta}(\mathtt{matka}(\mathtt{Adelka}), \mathtt{Cyril})$:
    Adelkina mama je Cyrilovou tetou,
    $\mathtt{dostatočné}(\mathtt{hodnotenie}(\mathtt{Igor}, \mathtt{tu08}))$:
    Igorovo hodnotenie z 8. s. ú. je dostatočné,
  - ale aj argumentmi funkčných symbolov:

    $\mathtt{matka}(\mathtt{matka}(\mathtt{Cyril}))$:
    Cyrilova stará mama z matkinej strany

Definičný obor a obor hodnôt

- Vnorené termy nedávajú vždy zmysel: $\mathtt{hodnotenie}(\mathtt{hodnotenie}(\mathtt{Igor}, \mathtt{tu08}), \mathtt{tu03})$
- Hodnota funkčného symbolu je **definovaná pre všetky argumenty**
- Akou formulou môžeme vyjadiť, že hodnota funkčného symbolu
  - nás zaujíma iba pre nejaký druh argumentov — definičný obor
  - je nejakého druhu — obor hodnôt?
  - $\forall x \big(\mathtt{človek}(x) \to \mathtt{človek}(\mathtt{matka}(x))\big)$
  - $\forall x \big(\mathtt{človek}(x) \to \mathtt{žena}(\mathtt{matka}(x))\big)$
  - $\forall x\, \forall u \big(\mathtt{študent}(x) \land \mathtt{úloha}(u) \to \mathbb{Q}(\mathtt{hodnotenie}(x, u))\big)$

Definícia syntaxe logiky prvého rádu

- Definície syntaxe logiky prvého rádu sa *mierne líšia*
  od doterajších definícií syntaxe *relačnej* logiky prvého rádu
- Musíme:
  - pridať *funkčné symboly* medzi symboly jazyka,
  - rozšíriť termy o *aplikácie funkčných symbolov* a ich *vnáranie*
- Atomické formuly a formuly zadefinujeme
  zdanlivo rovnako ako doteraz,
  ale *využitím nových termov*

Symboly jazyka logiky prvého rádu

Definícia 3.29

Symbolmi jazyka logiky prvého rádu $\mathcal{L}$ sú:

symboly (indivíduových) premenných z nejakej nekonečnej spočítateľnej množiny $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ (označujeme ich $x, y, \dots$);

mimologické symboly:

- ***symboly konštánt*** z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ ($a, b, \dots$),
- ***funkčné symboly*** z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ ($f, g, \dots$),
- ***predikátové symboly*** z nejakej spočít. množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ ($P, R, \dots$);

logické symboly:

- ***logické spojky:*** unárna $\neg$, binárne $\land$, $\lor$, $\to$,
- ***symbol rovnosti*** $\doteq$,
- ***kvantifikátory:*** ***existenčný*** $\exists$ a ***všeobecný*** $\forall$;

pomocné symboly: $($, $)$ a **,** (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú vzájomne disjunktné.
Logické a pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}, \mathcal{C}_{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}, \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.
Každému symbolu $s \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ je priradená *arita* $\mathrm{ar}(s) \in \mathbb{N}^+$.

Príklady a účel symbolov

Príklad 3.30

Symboly konštánt označujú **konkrétne význačné objekty alebo hodnoty**

- $\mathtt{Adelka}$, $\mathtt{Igor}$, $\mathtt{tu08}$, 0, 1, $\emptyset$, π;

Predikátové symboly označujú **vlastnosti** a **vzťahy** objektov/hodnôt

- $\mathtt{žena}^1$, $\mathtt{profesor}^1$, $\mathtt{zapísaný}^2$, $\mathtt{hodnotený}^3$, $<^2$;

Funkčné symboly označujú **vzťahy**, v ktorých je
jeden účastník jednoznačne určený ostatnými účastníkmi:

- $\mathtt{matka}^1$, $\mathtt{hodnotenie}^2$, $+^2$, $*^2$, $\cap^2$

Symboly premenných **dočasne** označujú objekty/hodnoty,
ktorých vlastnosti popisuje kvantifikovaná formula
(ako riadiaca premenná cyklu)

- x, t, kto, $čo$, $komu$

Označovanie symbolov jazyka logiky prvého rádu

Dohoda 3.31

- Sadzba **konkrétnych** symbolov:
  - *symboly premenných* — neproporčná italika: x, u_7, …;
  - *ostatné* (konštánt, funkčné, predikátové) — zvislá egyptienka: $\texttt{Adelka}$, $\texttt{súrodenec}$, $\texttt{cena}$, ….
- Zvyčajné **označovanie nekonkrétnych symbolov** (***meta premenné***):

  premenných: malé písmená z konca abecedy x, y, z;
  konštánt: malé písmená zo začiatku abecedy a, b, c;
  funkčných: f, g, h;
  predikátových: P, Q, R

  všetky podľa potreby s prípadnými dolnými indexmi.
- Aritu budeme niekedy písať ako horný index symbolov, konkrétnych aj nekonkrétnych: $\texttt{matka}^1$, $<^2$, P^5.

Termy jazyka logiky prvého rádu

Definícia 3.32

Množina $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ ***termov*** jazyka logiky prvého rádu $\mathcal{L}$
je najmenšia množina postupností symbolov jazyka $\mathcal{L}$, pre ktorú platí:

- každý symbol premennej $x \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ je termom;
- každý symbol konštanty $c \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ je termom;
- ak f je funkčný symbol s aritou n a $t_1, \dots, t_n$ sú termy,
  tak aj $f(t_1, \dots, t_n)$ je termom.

Inak povedané:

- $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} \cup \mathcal{C}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$;
- ak $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, $\mathrm{ar}(f) = n$ a $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$,
  tak aj $f(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.

Dohoda 3.33

Termy označujeme písmenami t, s, r s prípadnými dolnými indexmi.

Termy jazyka logiky prvého rádu

Príklad 3.34

Termy označujú objekty — pomenované symbolmi *konštánt*:

- Diana, Igor, $\mathrm{tu08}$, 0, 1, $\emptyset$

nepomenované, označené *premennými*:

- x, u_3, $niekto$, $čo$, $\ldots$

alebo **nepriamo** pomenované pomocou *funkčných* vzťahov:

- $\mathrm{matka}(\mathrm{Adelka})$, $\mathrm{matka}(x)$, $\mathrm{hodnotenie}(\mathrm{Igor}, x)$, $+(k, 1)$, $\cap(X, Y)$.

Termy možno **ľubovoľne vnárať**:

- $\mathrm{matka}(\mathrm{matka}(\mathrm{matka}(\mathrm{Adelka})))$, $*(*(x, 1), +(1, 1))$, $\cap(\cup(X, \emptyset), Y)$.

Atomické formuly jazyka logiky prvého rádu

Definícia 3.35 (Atomické formuly)

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $t_1 \doteq t_2$, kde t_1 a t_2 sú termy.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(t_1, \ldots, t_n)$, kde P je predikátový symbol s aritou n a $t_1, \ldots, t_n$ sú termy.

Atomickými formulami (skrátene ***atómami***) jazyka $\mathcal{L}$ súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Príklady atomických formúl

Príklad 3.36

Predikátové atomické formuly formalizujú **jednoduché výroky** o **vlastnostiach** objektov označených termami:

- $\mathtt{úloha}(\mathtt{tu08})$, $\mathtt{žena}(\mathtt{matka}(x))$, $\mathtt{párne}(+(1, \mathtt{x}))$

a o **vzťahoch** objektov:

- $\mathtt{zapísaný}(\mathtt{Evka}, x)$, $\mathtt{rodič}(\mathtt{matka}(\mathtt{Adelka}), \mathtt{Oliverko})$, $<(+(1, 1), 0)$, $\mathtt{disjunktné}(Z, \cap(X, Y))$, $\mathtt{hodnotený}(\mathtt{matka}(\mathtt{Adelka}), x, \mathtt{A})$.

Rovnostné atómy vyjadrujú, že dva termy označujú **ten istý** objekt:

- $\mathtt{A} \doteq x$, $\quad \mathtt{matka}(\mathtt{Adelka}) \doteq \mathtt{matka}(\mathtt{Oliverko})$, $+(1, 0) \doteq 1$, $\quad \cap(X, Y) \doteq \emptyset$.

Formuly jazyka logiky prvého rádu

Definícia 3.37

Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ ***formúl*** jazyka logiky prvého rádu $\mathcal{L}$
je najmenšia množina postupností symbolov jazyka $\mathcal{L}$, pre ktorú platí:

- Všetky atomické formuly z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ sú formulami z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.
- Ak A je formula z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj $\neg A$ je formula z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (*negácia* A).
- Ak A a B sú formuly z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$,
  tak aj $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$ sú formuly z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$
  (*konjunkcia*, *disjunkcia*, *implikácia* A a B).
- Ak x je indivíduová premenná a A je formula z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$,
  tak aj $\exists x\, A$ a $\forall x\, A$ sú formuly z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$
  (*existenčná* a *všeobecná kvantifikácia* formuly A vzhľadom na x).

Skracovanie zápisu formúl

Dohoda 3.38

Zápis formúl môžeme skracovať nasledujúcim spôsobom:

1. Negáciu rovnostného atómu $\neg s \doteq t$ skrátene zapisujeme $s \not\doteq t$.
2. Ak $\circ \in \{\wedge, \vee\}$, tak $((A \circ B) \circ C)$ môžeme skrátiť na $(A \circ B \circ C)$.
3. Binárnym spojkám priradíme **prioritu**: **najvyššiu** prioritu má $\wedge$, **strednú** $\vee$, **najnižšiu** $\rightarrow$.
4. Ak spojka $\circ$ má **vyššiu** prioritu ako $\diamond$, tak v každej formule môžeme podformulu $((A \circ B) \diamond X)$ skrátiť na $(A \circ B \diamond X)$ a symetricky $(X \diamond (A \circ B))$ skrátiť na $(X \diamond A \circ B)$.
5. Vonkajší pár zátvoriek okolo celej formuly môžeme vždy vynechať, napr. $(\forall x(a \doteq x \vee P(x)) \rightarrow P(b))$ skrátime na $\forall x(a \doteq x \vee P(x)) \rightarrow P(b)$.

⚠ **Neodstraňujeme** (ale ani nepridávame) zátvorky okolo priamych podformúl negácie a kvantifikátorov, implikácie vnorenej v implikácii

Skracovanie zápisu formúl

Príklad 3.39

Formulu

$$\Big(\exists x\, \forall y\big(S(x) \land (P(y) \to (\neg Z(x,y) \lor R(x,y)))\big)\Big) \to \forall x\big((U(x) \land V(x)) \to Q(x)\big)\Big)$$

môžeme maximálne skrátiť na

$$\exists x\, \forall y\big(S(x) \land (P(y) \to \neg Z(x,y) \lor R(x,y))\big) \to \forall x\big(U(x) \land V(x) \to Q(x)\big).$$

Skrátený zápis

$$P(a,x) \land (x \doteq b \lor P(x,b) \lor R(x)) \to P(f(a),x) \lor b \doteq f(x) \land P(a,b)$$

vznikol z formuly

$$\Big(\big(P(a,x) \land ((x \doteq b \lor P(x,b)) \lor R(x))\big) \to \big(P(f(a),x) \lor (b \doteq f(x) \land P(a,b))\big)\Big).$$

3.4.2
Sémantika logiky prvého rádu s funkčnými symbolmi

Štruktúry

Rozšírme štruktúru tak, aby dávala význam aj funkčným symbolom:

Definícia 3.40

Nech $\mathcal{L}$ je jazyk logiky prvého rádu.
Štruktúrou pre jazyk $\mathcal{L}$ nazývame dvojicu $\mathcal{M} = (M, i)$, kde

doména M štruktúry $\mathcal{M}$ je ľubovoľná **neprázdna** množina;

interpretačná funkcia i štruktúry $\mathcal{M}$ je zobrazenie, ktoré

- každému symbolu konštanty c jazyka $\mathcal{L}$ priraďuje prvok $i(c) \in M$;
- každému funkčnému symbolu f jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje funkciu $i(f)\colon M^n \to M$;
- každému predikátovému symbolu P jazyka $\mathcal{L}$ s aritou n priraďuje množinu $i(P) \subseteq M^n$.

Štruktúry — príklad

Príklad 3.41

Nájdime štruktúru pre jazyk $\mathcal{L}$, v ktorom

- $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots\}$,
- $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{Adelka}, \mathtt{Oliverko}\}$,
- $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{matka}^1\}$,
- $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{rodič}^2, \mathtt{žena}^1\}$.

Ohodnotenie premenných

Zmena definície štruktúry neovplyvňuje ohodnotenia premenných

Definícia 3.42

Nech $\mathcal{M} = (M, i)$ je štruktúra pre jazyk logiky prvého rádu $\mathcal{L}$.
Ohodnotenie (indivíduových) premenných je ľubovoľná funkcia $e\colon \mathcal{V}_{\mathcal{L}} \to M$ (priraďuje premenným prvky domény).

Zápisom $\boldsymbol{e(x/v)}$ označíme ohodnotenie indivíduových premenných, ktoré priraďuje premennej x hodnotu v z domény M [teda $e(x/v)(x) = v$]
a všetkým ostatným premenným rovnakú hodnotu ako e
[teda $e(x/v)(y) = e(y)$].

Príklad 3.43

Nech $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{x, y\}$ a nech $\mathcal{M} = (\{\text{Magdaléna U.}, \text{Adela U.}, \text{Oliver U.}\}, i)$.
Potom ohodnotením indivíduových premenných je napríklad

$$e = \{x \mapsto \text{Magdaléna U.}, y \mapsto \text{Adela U.}\}$$

$$\text{a } e(y/\text{Oliver U.}) = \{x \mapsto \text{Magdaléna U.}, y \mapsto \text{Oliver U.}\}$$

Hodnota termu

Termy s funkčnými symbolmi môžu byť vnorené,
vyhodnocujeme ich rekurzívne

Definícia 3.44

Nech $\mathcal{M} = (M, i)$ je štruktúra pre jazyk logiky prvého rádu $\mathcal{L}$,
nech e je ohodnotenie premenných.
Hodnotou termu t v štruktúre $\mathcal{M}$ pri ohodnotení premenných e
je prvok z M označovaný $\boldsymbol{t^{\mathcal{M}}[e]}$ a zadefinovaný induktívne nasledovne:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x^{\mathcal{M}}[e]} &= e(x), \text{ ak } x \text{ je premenná,}\\
\boldsymbol{a^{\mathcal{M}}[e]} &= i(a), \text{ ak } a \text{ je konštanta,}\\
\boldsymbol{\big(f(t_1, \dots, t_n)\big)^{\mathcal{M}}[e]} &= i(f)(t_1^{\mathcal{M}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[e]), \text{ ak } t_1, \dots, t_n \text{ sú termy.}
\end{aligned}
$$

Hodnota termov

Príklad 3.45

Vyhodnoťme termy

$$t_1 = \mathtt{Adelka}, \qquad t_3 = \mathtt{matka}(\mathtt{Adelka}),$$
$$t_2 = x, \qquad t_4 = \mathtt{matka}(y),$$
$$t_5 = \mathtt{matka}(\mathtt{matka}(\mathtt{Oliverko}))$$

v štruktúre z príkladu 3.41 pri ohodnotení
$e = \{x \mapsto$ Oliver U.$,\ y \mapsto$ Magdaléna U.$, \ldots\}$.

Splnenie formuly v štruktúre

Definícia 3.46

Nech $\mathcal{M} = (M, i)$ je štruktúra, e je ohodnotenie premenných.
Relácia ***štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa formulu A pri ohodnotení e*** (skrátene $\mathcal{M} \models A[e]$) má nasledovnú induktívnu definíciu:

- $\mathcal{M} \models t_1 \doteq t_2[e]$ vtt $t_1^{\mathcal{M}}[e] = t_2^{\mathcal{M}}[e]$,
- $\mathcal{M} \models P(t_1, \dots, t_n)[e]$ vtt $\left(t_1^{\mathcal{M}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{M}}[e]\right) \in i(P)$,
- $\mathcal{M} \models \neg A[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \land B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ a zároveň $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \lor B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models (A \to B)[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models A[e]$ alebo $\mathcal{M} \models B[e]$,
- $\mathcal{M} \models \exists x\, A[e]$ vtt pre nejaký prvok $m \in M$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,
- $\mathcal{M} \models \forall x\, A[e]$ vtt pre každý prvok $m \in M$ máme $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,

pre všetky arity $n > 0$, všetky predikátové symboly P s aritou n, všetky termy $t_1, t_2, \dots, t_n$, všetky premenné x a všetky formuly A, B.

Splnenie formuly v štruktúre

Príklad 3.47

Zistime, či sú v štruktúre z príkladu 3.41 splnené formuly:

- $\mathtt{rodič}(\mathtt{matka}(\mathtt{Adelka}), \mathtt{Oliverko})$,
- $\neg\, \mathtt{matka}(\mathtt{Oliverko}) \doteq y$,
- $\mathtt{rodič}(x, y) \rightarrow \mathtt{žena}(y)$,
- $\forall x\, \forall y\, (\mathtt{rodič}(x, y) \land \mathtt{žena}(x) \leftrightarrow \mathtt{matka}(y) \doteq x)$.

pri ohodnotení $e_1 = \{x \mapsto {}_{\text{Magdaléna U.}}, y \mapsto {}_{\text{Iveta T.}}, \ldots\}$.

Splnenie množiny formúl

Definícia 3.48

Nech S je množina formúl jazyka $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, nech e je ohodnotenie výrokových premenných.
Štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa množinu S pri ohodnotení e (skrátene $\mathcal{M} \models S[e]$) vtt pre všetky formuly X z S platí $\mathcal{M} \models X[e]$.

Splniteľnosť, nesplniteľnosť, platnosť

Definícia 3.49

Nech X je formula jazyka $\mathcal{L}$ a nech S je množina formúl jazyka $\mathcal{L}$.

Formula X je ***splniteľná*** vtt aspoň jedna štruktúra $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ spĺňa X pri aspoň jednom ohodnotení e.

Množina formúl S je ***splniteľná*** vtt aspoň jedna štruktúra $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ spĺňa S pri aspoň jednom ohodnotení e.

Formula X (množina formúl S) je ***nesplniteľná*** vtt nie je splniteľná.

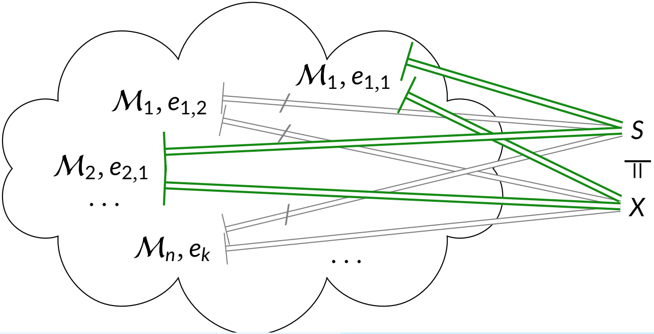
Definícia 3.50

Nech X je formula v jazyku $\mathcal{L}$.
Formula X je ***platná*** (skrátene $\models \boldsymbol{X}$) vtt
každá štruktúra $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ spĺňa X pri každom ohodnotení e.

Prvorádové vyplývanie

Definícia 3.51

Nech X je formula v jazyku $\mathcal{L}$, nech S je množina formúl v jazyku $\mathcal{L}$.
Formula X ***(prvorádovo) vyplýva*** z S
(tiež X je ***logickým dôsledkom*** S, skrátene $\boldsymbol{S \models X}$)
vtt pre každú štruktúru $\mathcal{M}$ pre $\mathcal{L}$ a každé ohodnotenie e platí, že
ak $\mathcal{M}$ spĺňa S pri e, tak $\mathcal{M}$ spĺňa X pri e.



3.5 Voľné a viazané premenné

Oblasť platnosti kvantifikátora

Dohoda 3.52

Nech $\mathcal{L}$ je ľubovoľný jazyk logiky prvého rádu. Všetky symboly, termy a formuly v nasledujúcich definíciách a tvrdeniach sú v jazyku $\mathcal{L}$.

Definícia 3.53 (Oblasť platnosti kvantifikátora)

Nech A je postupnosť symbolov, nech B je formula, nech $Q \in \{\forall, \exists\}$, nech x je premenná.
V postupnosti $A = \ldots Qx\, B \ldots$ sa výskyt formuly $Qx\, B$ nazýva ***oblasť platnosti kvantifikátora Qx v A***.

Príklad 3.54

Vyznačme všetky oblasti platnosti kvantifikátora $\forall x$ vo formule

$$\forall x\, P(x) \land R(x, x) \to \forall x(R(x, y) \land \exists y\, P(y)) \lor \forall y\, P(y).$$

Voľné a viazané výskyty premenných

Definícia 3.55 (Voľné a viazané výskyty premenných)

Nech A je postupnosť symbolov, nech x je premenná.

Výskyt premennej x v A je ***viazaný*** vtt
sa *nachádza v niektorej* oblasti platnosti kvantifikátora $\forall x$ alebo $\exists x$ v A.

Výskyt premennej x A je ***voľný*** vtt
sa *nenachádza v žiadnej* oblasti platnosti kvantifikátora $\forall x$ ani $\exists x$ v A.

Príklad 3.56

$$\neg \mathtt{zapísaný}(x, y) \land \mathtt{absolvuje}(x, y)$$
$$\neg \mathtt{zapísaný}(x, y) \land \exists \underline{y}\, \mathtt{absolvuje}(x, \underline{y})$$
$$\exists \underline{y} (\neg \mathtt{zapísaný}(x, \underline{y}) \land \mathtt{absolvuje}(x, \underline{y}))$$
$$\forall \underline{x} \exists \underline{y} (\neg \mathtt{zapísaný}(\underline{x}, \underline{y}) \land \mathtt{absolvuje}(\underline{x}, \underline{y}))$$
$$\forall \underline{x} (\neg \mathtt{zapísaný}(\underline{x}, y) \land \exists \underline{y}\, \mathtt{absolvuje}(\underline{x}, \underline{y}))$$

Voľné a viazané premenné

Definícia 3.57 (Voľné a viazané premenné)

Nech A je formula alebo term, nech x je premenná.

Premenná x je ***viazaná*** v A vtt

x sa vyskytuje v A a *všetky* výskyty x v A sú viazané.

Premenná x je ***voľná*** v A vtt x má v A *aspoň jeden voľný výskyt*.

Množinu voľných premenných formuly A označíme free(A).

Príklad 3.58

$$
\begin{array}{llll}
\mathrm{free}(& \neg\mathtt{zapísaný}(x, y) \land \mathtt{absolvuje}(z, y) &) = \{x, y, z\} \\
\mathrm{free}(& \neg\mathtt{zapísaný}(x, y) \land \exists \underline{y}\, \mathtt{absolvuje}(z, \underline{y}) &) = \{x, y, z\} \\
\mathrm{free}(& \exists \underline{y} (\neg\mathtt{zapísaný}(x, \underline{y}) \land \mathtt{absolvuje}(z, \underline{y})) &) = \{x, z\} \\
\mathrm{free}(& \exists \underline{y} (\neg\mathtt{zapísaný}(x, \underline{y}) \land \forall \underline{z}\, \mathtt{absolvuje}(\underline{z}, \underline{y})) &) = \{x\} \\
\mathrm{free}(& \exists \underline{y} \exists \underline{z} (\forall \underline{x} \neg\mathtt{zapísaný}(\underline{x}, \underline{y}) \land \mathtt{absolvuje}(\underline{z}, \underline{y})) &) = \{\}
\end{array}
$$

Voľné a viazané premenné

Tvrdenie 3.59

Pre každú indivíduovú premennú x, každý symbol konštanty a, každú aritu $n > 0$, každý funkčný symbol f s aritou n, každý predikátový symbol P s aritou n, všetky termy $t_1, t_2, \ldots, t_n$ a všetky formuly A, B platí:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{free}\big(\, x \,\big) &= \{x\} \\
\mathrm{free}\big(\, a \,\big) &= \{\} \\
\mathrm{free}\big(\, f(t_1, \ldots, t_n) \,\big) &= \mathrm{free}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{free}(t_n) \\
\mathrm{free}\big(\, t_1 \doteq t_2 \,\big) &= \mathrm{free}(t_1) \cup \mathrm{free}(t_2) \\
\mathrm{free}\big(\, P(t_1, \ldots, t_n) \,\big) &= \mathrm{free}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{free}(t_n) \\
\mathrm{free}\big(\, \neg A \,\big) &= \mathrm{free}(A) \\
\mathrm{free}\big(\, A \land B \,\big) &= \mathrm{free}\big(\, A \lor B \,\big) = \mathrm{free}\big(\, A \to B \,\big) = \mathrm{free}(A) \cup \mathrm{free}(B) \\
\mathrm{free}\big(\, \forall x\, A \,\big) &= \mathrm{free}\big(\, \exists x\, A \,\big) = \mathrm{free}(A) \setminus \{x\}
\end{aligned}
$$

Voľné premenné a splnenie formuly

Tvrdenie 3.60

Nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, nech e_1 a e_2 sú ohodnotenia, nech X je formula jazyka $\mathcal{L}$, nech S je množina formúl jazyka $\mathcal{L}$.

- *Ak sa ohodnotenia e_1 a e_2 zhodujú na voľných premenných formuly X (teda $e_1(x) = e_2(x)$ pre každú $x \in \mathrm{free}(X)$), tak $\mathcal{M} \models X[e_1]$ vtt $\mathcal{M} \models X[e_2]$.*
- *Ak sa ohodnotenia e_1 a e_2 zhodujú na voľných premenných všetkých formúl z S, tak $\mathcal{M} \models S[e_1]$ vtt $\mathcal{M} \models S[e_2]$.*

Inými slovami: Splnenie formuly (množiny formúl) v štruktúre závisí iba od ohodnotenia jej voľných premenných.

Uzavreté formuly a teórie

Definícia 3.61 (Uzavretá formula, teória)

Formula A jazyka $\mathcal{L}$ je ***uzavretá*** vtt
neobsahuje žiadne voľné výskyty premenných (teda $\text{free}(x) = \emptyset$).

Teóriou v jazyku $\mathcal{L}$ je každá
spočítateľná množinu uzavretých formúl jazyka $\mathcal{L}$.

Tvrdenie 3.62

Nech X je uzavretá formula jazyka $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$, nech e_1 a e_2 sú ohodnotenia. Potom $\mathcal{M} \models X[e_1]$ vtt $\mathcal{M} \models X[e_2]$.

Neformálnejšie:
Splnenie uzavretej formuly v štruktúre nezávisí od ohodnotenia.

Splnenie formuly a množiny formúl v štruktúre

Definícia 3.63 (Splnenie v štruktúre)

Nech X je formula jazyka $\mathcal{L}$, nech S je množina formúl jazyka $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$.

Štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa formulu X (skrátene $\mathcal{M} \models X$) vtt
štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa X pri *každom ohodnotení e*.

Štruktúra $\mathcal{M}$ spĺňa množinu S (skrátene $\mathcal{M} \models S$) vtt
pre každú formulu A z S platí $\mathcal{M} \models A$.

Nezávislosť od ohodnotení

Dôsledok 3.64

Nech X je uzavretá formula jazyka $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$.
Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

- **a** $\mathcal{M} \models X$ *(teda* $\mathcal{M} \models X[e]$ *pre každé* e*),*
- **b** $\mathcal{M} \models X[e]$ *pri aspoň jednom ohodnotení* e*.*

Dôsledok 3.65

Nech T je teória v jazyku $\mathcal{L}$, nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$.
Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

- **a** $\mathcal{M} \models T$,
- **b** $\mathcal{M} \models T[e]$ *pre všetky ohodnotenia* e*,*
- **c** $\mathcal{M} \models T[e]$ *pre aspoň jedno ohodnotenie* e*.*

3.6 Substitúcia

Substitúcia

Definícia 3.66 (Substitúcia)

Substitúciou (v jazyku $\mathcal{L}$) nazývame každé zobrazenie $\sigma\colon V \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ z nejakej množiny indivíduových premenných $V \subseteq \mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ do termov jazyka $\mathcal{L}$.

Príklad 3.67

Keď $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{u, v, \ldots, z\}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{Adelka}, \mathtt{Oliverko}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\mathtt{matka}^1\}$, napríklad $\sigma_1 = \{x \mapsto \mathtt{Adelka}, y \mapsto \mathtt{matka}(u)\}$ je substitúcia.

Problémy s dosadzovaním

Substitúcie chceme použiť na
dosádzanie za premenné v termoch a formulách.
Musíme si však dať pozor na niektoré špeciálne prípady:

Príklad 3.68

Nech $A = \forall x\, B$, kde $B = \exists \underline{y} (\texttt{rodič}(y, x) \land x \not\doteq y)$.

- A hovorí, že každý má rodiča, ktorým nie je ona sama/on sám
- A je splniteľná
- Ak $\mathcal{M} \models A$, tak $\mathcal{M} \models B\,[e(x/m)]$ pre každé $m \in \mathcal{M}$
- Keby sme dosadili podľa $\sigma_2 = \{x \mapsto \underline{y}\}$ do B, dostaneme $B' = \exists y(\texttt{rodič}(y, y) \land y \not\doteq y)$
- $\mathcal{M} \not\models A'\,[e]$ pre všetky e (dokonca je A' je nesplniteľná)
- B' **významovo nezodpovedá** B **pri žiadnom ohodnotení** e
- σ nezodpovedá žiadnemu ohodnoteniu e

Substituovateľnosť a aplikovateľnosť substitúcie

Definícia 3.69 (Substituovateľnosť, aplikovateľnosť substitúcie)

Nech A postupnosť symbolov (term alebo formula), nech t je term, x je premenná, nech $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_n \mapsto t_n\}$ je substitúcia.

Term t je ***substituovateľný*** za premennú x v A vtt
pre žiadnu premennú y vyskytujúcu sa v t
žiaden voľný výskyt premennej x v A
sa nenachádza v oblasti platnosti kvantifikátora $\exists y$ ani $\forall y$ v A.

Substitúcia σ je ***aplikovateľná*** na A vtt
term t_i je substituovateľný za x_i v A pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$.

Substituovateľnosť a aplikovateľnosť substitúcie

Príklad 3.70

Nech $B = \exists \underline{y}\,(\mathtt{rodi\check{c}}(x, \underline{y}) \land x \not\doteq \underline{y})$.

- Za premennú x **nie je substituovateľný** v B žiaden term, v ktorom sa vyskytuje y, napr. y, $\mathtt{matka}(y)$, …
- Substitúcie $\{x \mapsto y\}$, $\{x \mapsto \mathtt{matka}(y)\}$, … **nie sú aplikovateľné** na B

Substitúcia do postupnosti symbolov

Definícia 3.71 (Substitúcia do postupnosti symbolov)

Nech A je postupnosť symbolov,
nech $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$ je substitúcia.
Ak σ je aplikovateľná na A, tak $\boldsymbol{A\sigma}$ je postupnosť symbolov, ktorá vznikne *súčasným* nahradením každého *voľného* výskytu premennej x_i v A termom t_i.

Príklad 3.72

Nech $B = \exists \underline{y}(\mathtt{rodič}(x, \underline{y}) \land x \not\doteq \underline{y})$,

$$\sigma = \{x \mapsto \mathtt{matka}(\mathtt{Oliverko}), \underline{y} \mapsto z\}.$$

Substitúcia σ **je aplikovateľná** na B. V B je voľná iba premenná x, dosadíme za ňu term $\mathtt{matka}(\mathtt{Oliverko})$, ktorý neobsahuje premenné. Všetky výskyty y sú viazané, za ne sa nedosádza.

$$B\sigma = \exists \underline{y}(\mathtt{rodič}(\mathtt{matka}(\mathtt{Oliverko}), \underline{y}) \land \mathtt{matka}(\mathtt{Oliverko}) \not\doteq \underline{y})$$

Substitúcia do termov a formúl rekurzívne

Tvrdenie 3.73

Pre každú substitúciu $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$, každú premennú $y \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, každý symbol konštanty $a \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, každý funkčný symbol $f^k \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, každý predikátový symbol $P^k \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, každé $i \in \{1, \ldots, n\}$, každú spojku $\diamond \in \{\land, \lor, \to\}$, všetky formuly A a B a všetky termy $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ platí:

$$x_i\sigma = t_i \qquad y\sigma = y \qquad a\sigma = a \qquad (f(s_1, \ldots, s_k))\sigma = f(s_1\sigma, \ldots, s_k\sigma)$$

$$(s_1 \doteq s_2)\sigma = (s_1\sigma \doteq s_2\sigma) \qquad (P(s_1, \ldots, s_k))\sigma = P(s_1\sigma, \ldots, s_k\sigma)$$

$$(\neg A)\sigma = \neg(A\sigma) \qquad ((A \diamond B))\sigma = (A\sigma \diamond B\sigma)$$

$$(\forall y\, A)\sigma = \forall y\, (A\sigma) \qquad (\exists y\, A)\sigma = \exists y\, (A\sigma)$$

$$(\forall x_i\, A)\sigma = \forall x_i\, (A\sigma_i) \qquad (\exists x_i\, A)\sigma = \exists x_i\, (A\sigma_i),$$

kde $\sigma_i = \sigma \setminus \{x_i \mapsto t_i\}$, za predpokladu, že σ je v danom prípade aplikovateľná.

Substitúcia a hodnota termu

Príklad 3.74

Zoberme štruktúru $\mathcal{M} = (M, i)$, kde

$$M = \{\text{🚺}_{\text{Magdaléna U.}}, \text{🚺}_{\text{Iveta T.}}, \text{🚺}_{\text{Adela U.}}, \text{🚹}_{\text{Oliver U.}}, \text{🌍}\},$$

$$i(\mathtt{Adelka}) = \text{🚺}_{\text{Adela U.}}, \qquad i(\mathtt{Oliverko}) = \text{🚹}_{\text{Oliver U.}}$$

$$i(\mathtt{matka}) = \{(\text{🚺}_{\text{Adela U.}}, \text{🚺}_{\text{Magdaléna U.}}), (\text{🚹}_{\text{Oliver U.}}, \text{🚺}_{\text{Magdaléna U.}}), (\text{🚺}_{\text{Magdaléna U.}}, \text{🚺}_{\text{Iveta T.}}), (\text{🚺}_{\text{Iveta T.}}, \text{🌍}), (\text{🌍}, \text{🌍})\}$$

Nech $e = \{x \mapsto \text{🚺}_{\text{Adela U.}}, y \mapsto \text{🚹}_{\text{Oliver U.}}\}$, $\quad \sigma_1 = \{x \mapsto \mathtt{matka}(y)\}$.

Ako ovplyvňuje substitúcia **hodnotu** termu, napr. $\mathtt{matka}(x)$?

$$((\mathtt{matka}(x))\sigma_1)^{\mathcal{M}}[e] = (\mathtt{matka}(\mathtt{matka}(y)))^{\mathcal{M}}[e]$$

$$= i(\mathtt{matka})(i(\mathtt{matka})(\text{🚹}_{\text{Oliver U.}})) = i(\mathtt{matka})(\text{🚺}_{\text{Magdaléna U.}}) = \text{🚺}_{\text{Iveta T.}}$$

$$= (\mathtt{matka}(x))^{\mathcal{M}}[e(x/\text{🚺}_{\text{Magdaléna U.}})]$$

$$= (\mathtt{matka}(x))^{\mathcal{M}}[e(x/(\mathtt{matka}(y))^{\mathcal{M}}[e])]$$

Substitúcia a hodnota termu

Hodnota termu $t\sigma$ po substitúcii $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$
pri ohodnotení e
sa rovná hodnote pôvodného termu t pri takom ohodnotení e', ktoré

- každej substituovanej premennej x_i
  priradí hodnotu za ňu substituovaného termu t_i pri ohodnotení e,
- ostatným premenným priraďuje rovnaké hodnoty ako e.

Tvrdenie 3.75

*Nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, e je ohodnotenie premenných,
t je term a $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$ je substitúcia.
Potom $(t\sigma)^{\mathcal{M}}[e] = t^{\mathcal{M}}[e(x_1/t_1^{\mathcal{M}}[e]) \cdots (x_n/t_n^{\mathcal{M}}[e])]$.*

Substitúcia a splnenie formuly

Tvrdenie 3.76

Nech A je formula jazyka $\mathcal{L}$ a nech $\sigma = \{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_n \mapsto t_n\}$ je substitúcia aplikovateľná na A. Nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre $\mathcal{L}$ a nech e je ohodnotenie indivíduových premenných.
Potom $\mathcal{M} \models A\sigma[e]$ vtt $\mathcal{M} \models A[e(x_1/t_1^{\mathcal{M}}[e]) \cdots (x_n/t_n^{\mathcal{M}}[e])]$.

Inak povedané:
Štruktúra spĺňa formulu $A\sigma$ po substitúcii pri ohodnotení e
vtt spĺňa pôvodnú formulu A pri takom ohodnotení e',
ktoré každej substituovanej premennej x_i priradí hodnotu za ňu
substituovaného termu t_i pri ohodnotení e
a ostatným premenným priraďuje rovnaké hodnoty ako e.

3.7

Tablá pre logiku prvého rádu

Dokazovanie vyplývania a platnosti

- Nájdením štruktúry a ohodnotenia vieme ukázať splniteľnosť, neplatnosť, nevyplývanie
- Ako ale ukážeme vyplývanie, platnosť, nesplniteľnosť?
- Podľa definícií vyžadujú skúmanie **všetkých štruktúr a ohodnotení** — nekonečne veľa možností
- Pokúsme sa ale o dôkaz

Dokazovanie vyplývania

Príklad 3.77

Dokážme, že $\{\exists x\, \mathtt{muž}(x) \land \exists x\, \mathtt{žena}(x)\} \models \exists x(\mathtt{muž}(x) \lor \mathtt{žena}(x))$,
teda že pre každú štruktúru $\mathcal{M}$ a každé ohodnotenie e:
Ak $\mathcal{M} \models \{\exists x\, \mathtt{muž}(x) \land \exists x\, \mathtt{žena}(x)\}\,[e]$, tak $\mathcal{M} \models \exists x(\mathtt{muž}(x) \lor \mathtt{žena}(x))\,[e]$.

Sporom: Predpokladajme, že tvrdenie neplatí,
teda v **nejakej** štruktúre $\mathcal{M} = (M, i)$ a pri **nejakom** ohodnotení e,
(1) $\mathcal{M} \boldsymbol{\models} \{\exists x\, \mathtt{muž}(x) \land \exists x\, \mathtt{žena}(x)\}\,[e]$, ale (2) $\mathcal{M} \boldsymbol{\not\models} \exists x(\mathtt{muž}(x) \lor \mathtt{žena}(x))\,[e]$.
Podľa (1) máme (3) $\mathcal{M} \models \exists x\, \mathtt{muž}(x)\,[e]$ a (4) $\mathcal{M} \models \exists x\, \mathtt{žena}(x)\,[e]$.
Podľa (3) $\mathcal{M} \models \mathtt{muž}(x)\,[e(x/m_1)]$ pre nejaké $m_1 \in M$,
teda (5) $\mathcal{M} \models \mathtt{muž}(y)\,[e']$, kde y je nová premenná a $e' = e(y/m_1)$.
Podľa (4) podobne $\mathcal{M} \models \mathtt{žena}(x)\,[e(x/m_2)]$ pre nejaké $m_2 \in M$
(m_2 je pravdepodobne **iné** ako m_1!),
teda (6) $\mathcal{M} \models \mathtt{žena}(z)\,[e'']$, kde z je nová premenná a $e'' = e(z/m_2)$.
Podľa (2) ale $\mathcal{M} \not\models \mathtt{muž}(x) \lor \mathtt{žena}(x)\,[e(x/m)]$ pre všetky $m \in M$, teda aj
$\mathcal{M} \not\models \mathtt{muž}(x) \lor \mathtt{žena}(x)\,[e(x/m_2)]$, čiže (7) $\mathcal{M} \not\models \mathtt{muž}(z) \lor \mathtt{žena}(z)\,[e'']$.
Potom ale (8) $\mathcal{M} \not\models \mathtt{muž}(z)\,[e'']$ a (9) $\mathcal{M} \not\models \mathtt{žena}(z)\,[e'']$, čo je však v spore s (6).

Označené formuly logiky prvého rádu

Podobne ako vo výrokovej logike môžeme zaviesť označovanie formúl logiky prvého rádu znamienkami **T** a **F**.

Definícia 3.78

Nech $\mathcal{M}$ je štruktúra pre jazyk $\mathcal{L}$, e je ohodnotenie a X je formula jazyka $\mathcal{L}$. Potom

- $\mathcal{M} \models \mathbf{T}\, X[e]$ vtt $\mathcal{M} \models X[e]$;
- $\mathcal{M} \models \mathbf{F}\, X[e]$ vtt $\mathcal{M} \not\models X[e]$.

Definície splniteľnosti, nesplniteľnosti a substitúcie sa dajú priamočiaro rozšíriť na označené formuly X^+ a ich množiny S^+.

Tablové pravidlá pre logiky prvého rádu

Definícia 3.79

Pravidlami tablového kalkulu pre logiku prvého rádu sú pravidlá typu α a β pre výrokovú logiku a pravidlá:

$$\gamma \qquad \frac{\mathbf{T}\,\forall x\, A}{\mathbf{T}\, A\{x \mapsto t\}} \qquad \frac{\mathbf{F}\,\exists x\, A}{\mathbf{F}\, A\{x \mapsto t\}} \qquad \text{jednotne: } \frac{\gamma(x)}{\gamma_1(t)}$$

$$\delta \qquad \frac{\mathbf{F}\,\forall x\, A}{\mathbf{F}\, A\{x \mapsto y\}} \qquad \frac{\mathbf{T}\,\exists x\, A}{\mathbf{T}\, A\{x \mapsto y\}} \qquad \text{jednotne: } \frac{\delta(x)}{\delta_1(y)}$$

kde A je formula, x je premenná, t je term substituovateľný za x v A a y je premenná substituovateľná za x v A.
Pri operácii rozšírenia vetvy tabla π o dôsledok niektorého z pravidiel typu δ navyše musí platiť, že **premenná y nemá voľný výskyt v žiadnej formule na vetve π**.

Korektnosť pravidiel γ a δ

Tvrdenie 3.80 (Korektnosť pravidiel γ a δ)

Nech S je množina označených formúl v jazyku $\mathcal{L}$, nech x a y sú premenné, nech t je term.

- *Ak $\gamma(x) \in S$ a t je substituovateľný za x v $\gamma_1(x)$, tak S je splniteľná vtt $S \cup \{\gamma_1(t)\}$ je splniteľná.*
- *Ak $\delta(x) \in S$, y je substituovateľná za x v $\delta_1(x)$ a y sa nemá voľný výskyt v S, tak S je splniteľná vtt $S \cup \{\delta_1(y)\}$ je splniteľná.*

Korektnosť pravidiel γ a δ

Dôkaz (čiastočný, pre pravidlo δ v smere $\Rightarrow$).

Zoberme ľubovoľné S, x, y, t a $\delta(x)$ spĺňajúce predpoklady tvrdenia. Nech S je splniteľná, teda existuje štruktúra $\mathcal{M}$ a ohodnotenie e také, že $\mathcal{M} \models S[e]$. Preto aj $\mathcal{M} \models \delta(x)[e]$. Podľa tvaru $\delta(x)$ môžu nastať nasledujúce dva prípady.

- Ak $\delta(x) = \mathbf{T}\,\exists x A$ pre nejakú formulu A, tak podľa def. 3.78 $\mathcal{M} \models \exists x A[e]$ a podľa def. spĺňania máme nejakého *svedka* $m \in M$ takého, že $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$. Podľa tvr. 3.76 potom $\mathcal{M} \models A\{x \mapsto y\}[e(x/m)(y/m)]$. Prem. x nie je voľná v $A\{x \mapsto y\}$, preto podľa tvr. 3.60 $\mathcal{M} \models A\{x \mapsto y\}[e(y/m)]$, teda $\mathcal{M} \models \mathbf{T}\,A\{x \mapsto y\}[e(y/m)]$, teda $\mathcal{M} \models \delta_1(y)[e(y/m)]$.
- Ak $\delta(x) = \mathbf{F}\,\forall y A$ pre nejakú formulu A, tak podľa def. 3.78 $\mathcal{M} \not\models \forall x A[e]$ a podľa def. spĺňania neplatí, že $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$ pre každé $m \in M$. Preto máme nejaký *kontrapríklad* $m \in M$ taký, že $\mathcal{M} \not\models A[e(x/m)]$. Podľa tvr. 3.76 potom $\mathcal{M} \not\models A\{x \mapsto y\}[e(x/m)(y/m)]$. Prem. x nie je voľná v $A\{x \mapsto y\}$, preto podľa tvr. 3.60 $\mathcal{M} \not\models A\{x \mapsto y\}[e(y/m)]$, teda $\mathcal{M} \models \mathbf{F}\,A\{x \mapsto y\}[e(y/m)]$, čiže $\mathcal{M} \models \delta_1(y)[e(y/m)]$.

Navyše y nie je voľná v žiadnej formule z S, preto $\mathcal{M} \models S[e(y/m)]$. Teda $\mathcal{M} \models (S \cup \{\delta_1(y)\})[e(y/m)]$. Preto je $S \cup \{\delta_1(y)\}$ splniteľná. □

Časté chyby pri pravidlách γ a δ

Dosadenie premennej, ktorá sa už na vetve vyskytuje voľná pri pravidle δ:

1. $\mathbf{T}\,P(u)$
2. $\mathbf{F}\,\forall x\,P(x)$

súčasne splniteľné

1. $\mathbf{T}\,P(u)$
2. $\mathbf{F}\,\forall x\,P(x)$
3. $\mathbf{F}\,P(u)$ „$\delta 2$“$\{x \mapsto u\}$

súčasne **ne**splniteľné

1. $\mathbf{T}\,P(u)$
2. $\mathbf{F}\,\forall x\,P(x)$
3. $\mathbf{F}\,P(v)$ $\delta 2\{x \mapsto v\}$

súčasne splniteľné

Časté chyby pri pravidlách γ a δ

Použitie pravidla na kvantifikátor „*vnútri*“ formuly:

1. $\mathbf{T}\,\neg Q(u)$
2. $\mathbf{T}\,P(u)$
3. $\mathbf{T}\,(\forall x\, P(x) \to \forall y\, Q(y))$

súčasne splniteľné

1. $\mathbf{T}\,\neg Q(u)$
2. $\mathbf{T}\,P(u)$
3. $\mathbf{T}\,(\boxed{\forall x\, P(x)} \to \forall y\, Q(y))$
4. $\mathbf{T}\,(\boxed{P(u)} \to \forall y\, Q(y))$ „$\gamma 3$“ ⛔

⛔ súčasne **ne**splniteľné

1. $\mathbf{T}\,\neg Q(u)$
2. $\mathbf{T}\,P(u)$
3. $\mathbf{T}\,(\forall x\, P(x) \boxed{\to} \forall y\, Q(y))$

4. $\mathbf{F}\,\forall x\, P(x)$ $\beta 3$ ✅	5. $\mathbf{T}\,\forall y\, Q(y)$ $\beta 3$ ✅
6. $\mathbf{F}\,P(v)$ $\delta 4$ ✅	7. $\mathbf{T}\,Q(u)$ $\gamma 3$ ✅
	8. $\mathbf{F}\,Q(u)$ $\alpha 1$
	$*\,7, 8$

✅ ľavá vetva je splniteľná

Tablový kalkul pre logiku prvého rádu

Princíp tablových dôkazov ostáva nezmenený:

- Ak chceme dokázať, že formula X je platná, hľadáme uzavreté tablo pre **F** X. Predpokladáme teda, že v nejakej štruktúre a nejakom ohodnotení je X nesplnená a ukážeme spor.
- Podobne pre prvorádové vyplývanie $T \models X$ predpokladáme, že v nejakej štruktúre a nejakom ohodnotení sú splnené všetky formuly z T (**T** Y pre $Y \in T$), ale X je nesplnená (**F** X) a ukážeme spor.

Príklad 3.81

Dokážme:

$$\{\exists x\, \mathtt{muž}(x) \land \exists x\, \mathtt{žena}(x)\} \models \exists x(\mathtt{muž}(x) \lor \mathtt{žena}(x))$$

$$\{\forall x\, \mathtt{hračka}(\mathtt{najobľúbenejšia\_hračka}(x))\} \models$$
$$\neg \exists x(\mathtt{hračka}(x) \land \neg\mathtt{jednorožec}(x)) \to$$
$$\forall x\, \mathtt{jednorožec}(\mathtt{najobľúbenejšia\_hračka}(x))$$

Literatúra

Martin Davis and Hillary Putnam. A computing procedure for quantification theory. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 7:201–215, 1960.

Martin Davis, George Logemann, and Donald Loveland. A machine program for theorem-proving. *Communications of the ACM*, 5(7):394–397, 1962.

Michael Genesereth and Eric Kao. *Introduction to Logic*. Morgan & Claypool, 2013. ISBN 9781627052481.

Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf.