Matematika 4 — Logika pre informatikov
Teoretická úloha 9

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **29. apríla 2019 o 11:30** na prednáške.

Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Ohodnotené riešenia poskytneme k nahliadnutiu, ale **nevrátime** vám ich, uchovajte si kópiu. Na riešenia všetkých úloh sa vzťahujú všeobecné **pravidlá** zverejnené na adrese https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh .

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky, v ktorej nájdete ďalšie úlohy na precvičovanie a vzorové riešenia: https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf .

Pri riešení niektorých úloh vám môže pomôcť prieskumník štruktúr (https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/structure-explorer/).

Cvičenie 9.1. Zahrajte si „formalizačný telefón“: Posúvajte si lístky s tvrdeniami v slovenčine alebo formulami a poradovými číslami. Ak dostanete lístok s tvrdením v slovenčine, na nový lístok ho sformalizujte. Ak dostanete lístok s formulou, zapíšte ju na nový lístok čo najprirodzenejšou slovenčinou. Na nový lístok napíšte nasledujúce poradové číslo a posuňte ho kolegyni/-ovi o 2 miesta ďalej. Pôvodný lístok uschovajte.

Keď hra obehne celé kolo, porovnajte pôvodnú a konečnú verziu tvrdenia či formuly. Všetky lístky odovzdajte vyučujúcemu.

Cvičenie 9.2. (3.3.2) Dokážte, že nasledujúce formuly *nie sú* ani platné ani nesplniteľné:

a) $\big(\forall x(P(x) \to Q(x)) \to \forall x(P(x) \land Q(x))\big)$,

b) $\big(\forall x\, \exists y(R(x,y) \to Q(x)) \to \forall x\, \forall y(R(x,y) \to Q(x))\big)$,

c) $\big(\forall x\, \exists y\, R(x,y) \to \exists x\, \forall y\, R(x,y)\big)$.

Všímajte si rozdiely vo význame ľavých a pravých strán implikácií.
Tieto formuly zachytávajú časté chyby pri formalizácii.

Cvičenie 9.3. (3.1.2, 3.2.1) Uvažujme doménu rodinných vzťahov, ktorú opisujeme jazykom $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu, ktorý obsahuje predikáty ako $\mathtt{žena}^1$, $\mathtt{muž}^1$, $\mathtt{rodič}^2$, $\mathtt{súrodenec}^2$, kde $\mathtt{žena}(x)$ znamená, že x je žena, $\mathtt{muž}(x)$ znamená, že x je muž, $\mathtt{rodič}(x, y)$ znamená, že x je (vlastným) rodičom y, $\mathtt{súrodenec}(x, y)$ znamená, že x je (pokrvným) súrodencom y, $\mathtt{manželia}(x, y)$ znamená, že x a y sú manželmi.

V prvorádovej logike napíšte definície nasledovných odvodených pojmov/predikátov (tak, ako ich poznáte z prirodzeného jazyka), ktorými rozšírime jazyk $\mathcal{L}$:

(D_1) $\mathtt{prastarý\_rodič}^2$

(D_2) $\mathtt{sesternica}^2$

(D_3) $\mathtt{macocha}^2$

(D_4) $\mathtt{jedináčik}^1$

⚠ Sesternica nie je sestra.

Cvičenie 9.4. (3.3.1) Zostrojte štruktúru $\mathcal{M} = (M, i)$ pre jazyk z predchádzajúcej úlohy ďalej rozšírený o symboly konštánt $\mathtt{Andrea}$, $\mathtt{Cyril}$, $\mathtt{Boris}$, $\mathtt{Diana}$ tak, aby $\mathcal{M}$ splnila všetky definície predikátov z úlohy 9.3 a súčasne nasledujúce formuly v každom ohodnotení:

(A_1) $(\mathtt{rodič}(\mathtt{Andrea}, \mathtt{Cyril}) \land \exists x\, \mathtt{rodič}(\mathtt{Andrea}, x) \land \mathtt{rodič}(\mathtt{Boris}, \mathtt{Diana}))$,

(A_2) $\exists x\, \exists y\, \exists z (\mathtt{rodič}(x, \mathtt{Andrea}) \land \mathtt{rodič}(x, \mathtt{Boris}) \land \mathtt{žena}(x) \land \mathtt{rodič}(y, \mathtt{Andrea}) \land \mathtt{rodič}(z, \mathtt{Andrea}))$

(A_3) $\forall x\, \neg \mathtt{rodič}(x, x) \land \forall x\, \forall y (\mathtt{rodič}(x, y) \to \neg \mathtt{rodič}(x, y))$,

(A_4) $\forall x \big((\mathtt{žena}(x) \lor \mathtt{muž}(x)) \land \neg(\mathtt{žena}(x) \land \mathtt{muž}(x))\big)$,

(A_5) $\forall x\, \forall y \big(\mathtt{rodič}(x, y) \to \exists z \big(\mathtt{rodič}(x, z) \land (\mathtt{muž}(y) \leftrightarrow \neg \mathtt{muž}(z))\big)\big)$

(A_6) $\forall p\, \forall q\, \forall r\, \forall x \big(\big(\mathtt{rodič}(p, x) \land \mathtt{rodič}(r, x) \land (\mathtt{žena}(p) \leftrightarrow \mathtt{žena}(r))\big) \to p \doteq r\big)$,

(A_7) $\forall x\, \forall y \big(\mathtt{súrodenec}(x, y) \leftrightarrow \big(\neg\, x \doteq y \land \exists z (\mathtt{rodič}(z, x) \land \mathtt{rodič}(z, y))\big)\big)$;

(B_1) $\exists x\, \exists y\, \mathtt{prastarý\_rodič}(x, y)$,

(B_2) $\exists x \big(\mathtt{jedináčik}(x) \land \forall y (\mathtt{rodič}(x, y) \to \mathtt{jedináčik}(y))\big)$,

(B_3) $\exists x\, \exists y (\mathtt{macocha}(x, y) \land \exists z\, \mathtt{rodič}(x, z))$.

Všímajte si, ktoré formuly skutočne vynútia pridanie nových objektov do domény a ktoré splníte aj pomocou existujúcich objektov.

Nezabudnite, že na splnenie definície nejakého predikátu musíte zabezpečiť, že všetky objekty (n-tice), ktoré patria do jeho interpretácie, majú požadované vlastnosti, a zároveň všetky objekty (n-tice), ktoré majú požadované vlastnosti, patria do jeho interpretácie.

Hodnotená časť

Úloha 9.1. (3.1.9) Zostrojte vytvárajúci strom pre formulu (A_8) z úlohy 9.3 nižšie.

Úloha 9.2. (3.2.2) Uvažujme relačný prvorádový jazyk $\mathcal{L}$ pre doménu vysokoškolského štúdia, kde $\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\mathtt{Evka}, \mathtt{Ferko}, \mathtt{LPI}, \mathtt{DDB}, \mathtt{A}, \mathtt{Fx}\}$ a $\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\text{A-čkar}^1, \text{aktívny}^1, \text{bakalárska-práca}^1, \text{dievča}^1, \text{diplomová-práca}^1, \text{dizertačná-práca}^1, \text{doktorand}^1, \text{predmet}^1, \text{PhD-program}^1, \text{profesor}^1, \text{študent}^1, \text{štud-program}^1, \text{učiteľ}^1, \text{záverečná-práca}^1, \text{absolvuje}^2, \text{autor}^2, \text{školiteľ}^2, \text{študuje}^2, \text{učí}^2, \text{zapísaný}^2, \text{hodnotený}^3\}$.

Sformalizujte nasledujúce definície pojmov v jazyku $\mathcal{L}$:

(D_1) Učiteľ sa definuje ako ten, kto učí nejaký predmet.

(D_2) Každý, kto je študuje nejaký PhD program, je doktorandom a nikto iný doktorandom nie je.

(D_3) Študent absolvuje predmet práve vtedy, keď je z neho hodnotený známkou inou ako Fx.

(D_4) A-čkar je práve taký študent, ktorý absolvoval aspoň jeden predmet a má známku A z každého predmetu, z ktorého je hodnotený.

Úloha 9.3. (3.3.3) Zostrojte štruktúru $\mathcal{M}$ pre jazyk $\mathcal{L}$ z úlohy 9.2 tak, aby pri každom ohodnotení splnila vaše definície z úlohy 9.2 a súčasne nasledujúce formuly:

(A_1) $\forall x\big(\text{študent}(x) \to \exists y(\text{štud-program}(y) \land \text{študuje}(x, y))\big)$

(A_2) $\forall x\big(\text{učiteľ}(x) \land \text{profesor}(x) \to \exists y(\text{študent}(y) \land \text{školiteľ}(x, y))\big)$

(A_3) $(\text{študent}(\mathtt{Evka}) \land \text{študent}(\mathtt{Ferko}) \land \text{dievča}(\mathtt{Evka}))$

(A_4) $(\text{predmet}(\mathtt{LPI}) \land \text{predmet}(\mathtt{DDB}) \land \neg\, \mathtt{LPI} \doteq \mathtt{DDB})$

(A_5) $(\text{zapísaný}(\mathtt{Evka}, \mathtt{DDB}) \land \text{zapísaný}(\mathtt{Ferko}, \mathtt{LPI}))$

(A_6) $\exists x(\text{zapísaný}(\mathtt{Ferko}, x) \land \neg\, x \doteq \mathtt{LPI}) \land \exists x(\text{zapísaný}(x, \mathtt{LPI}) \land \neg\, x \doteq \mathtt{Ferko})$

(A_7) $\exists x(\text{školiteľ}(x, \mathtt{Evka}) \land \neg\text{profesor}(x) \land \text{učiteľ}(x))$

(A_8) $$\forall x\Big(\Big(\text{predmet}(x) \land \exists y\big(\text{študent}(y) \land \text{zapísaný}(y, x) \land \big(\exists z(\text{študent}(z) \land \neg y \doteq z \land \text{zapísaný}(z, x)) \lor \text{dievča}(y)\big)\big)\Big) \to \text{aktívny}(x)\Big)$$

(A_9) $\forall x\big(\text{študent}(x) \to \big(\exists y\, \text{školiteľ}(y, x) \to \exists z(\text{záverečná-práca}(z) \land \text{autor}(x, z))\big)\big)$

(A_{10}) $\forall x\big(\text{záverečná-práca}(x) \to (\text{bakalárska-práca}(x) \lor \text{diplomová-práca}(x) \lor \text{dizertačná-práca}(x))\big)$

(A_{11}) $(\exists x\, \text{A-čkar}(x) \land \exists x\, \neg\text{A-čkar}(x))$