Prednášky z Matematiky (4) — Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Letný semester 2018/2019

Obsah

I. prednáška

O logike a tomto kurze
Syntax výrokovej logiky

18. februára 2019

1. Úvod

1.1. O logike

I.1 Čo je logika

- Logika je vedná disciplína, ktorá študuje formy usudzovania
  - filozofická, matematická, informatická, výpočtová
- Tri dôležité predmety záujmu:

  Jazyk zápis pozorovaní, definície pojmov, formulovanie teórií

  Syntax pravidlá zápisu tvrdení

  Sémantika význam tvrdení

  Usudzovanie (inferencia) odvodenie nových dôsledkov z doterajších poznatkov

  Dôkaz presvedčenie ostatných o správnosti záverov usudzovania

I.2 Poznatky a teórie

- V logike slúži **jazyk** na zápis tvrdení, ktoré vyjadrujú informácie — poznatky o svete
- Súbor poznatkov, ktoré považujeme za pravdivé, tvorí **teóriu**

Príklad 1.1 (Party time!). Máme troch nových známych — Kim, Jima a Sarah.
Organizujeme párty a chceme na ňu pozvať niektorých z nich.
Od spoločných kamarátov sme sa ale dozvedeli o ich požiadavkách:

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

I.3 Možné stavy sveta a modely

Tvrdenie (teória) rozdeľuje triedu **možných stavov sveta** (interpretácií) na dve podtriedy:

- $\models$ stavy, v ktorých je pravdivé — **modely** tvrdenia (teórie),
- $\not\models$ stavy, v ktorých je nepravdivé.

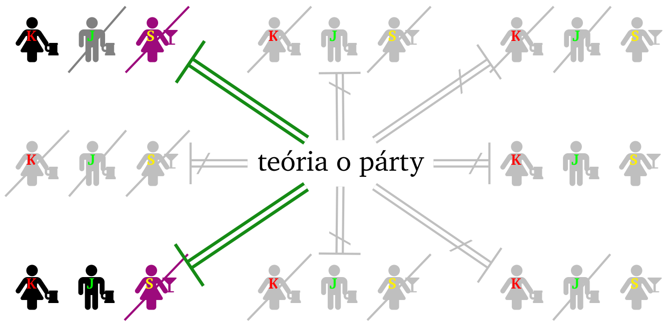
Tvrdenie aj teória môžu mať viacero modelov, ale aj žiaden.

Príklad 1.2. Vymenujme možné stavy prítomnosti Kim, Jima a Sarah na párty.
Zistime, v ktorých sú pravdivé jednotlivé tvrdenia našej teórie a celá teória.

I.4 Logické dôsledky

Logickými dôsledkami teórie sú tvrdenia, ktoré sú pravdivé vo **všetkých modeloch** teórie

Príklad 1.3. Logickým dôsledkom teórie (P1), (P2), (P3) je napríklad:
Sarah nepôjde na párty.



I.5 Logické usudzovanie

- Vymenovanie všetkých svetov je často nepraktické až nemožné
- Logické dôsledky môžeme *odvodzovať* ***usudzovaním*** (*inferovať*)
- Pri odvodení vychádzame z **premís** (*predpokladov*) a postupnosťou **úsudkov** dospievame k **záverom**

  Príklad 1.4. Vieme, že (P1) ak na párty pôjde Kim, tak nepôjde Sarah, a že (P2) ak pôjde Jim, tak pôjde Kim.

  > Predpokladajme, že na párty pôjde Jim.
  >
  > Teda podľa (P2) pôjde aj Kim.
  >
  > Teda podľa (P1) nepôjde Sarah.

  Teda podľa uvedenej úvahy: Ak na párty pôjde Jim, tak nepôjde Sarah.

- Ak sú všetky úsudky v odvodení správne, záver je logickým dôsledkom premís a odvodenie je jeho **dôkazom** z premís

I.6 Usudzovacie pravidlá

Už Aristoteles zistil, že niektoré **správne úsudky sa dajú rozpoznať podľa svojej *formy***, bez ohľadu na konkrétny obsah

Ak pôjde Jim, tak pôjde Kim.	Ak je dilítium dekryštalizované, tak antihmota neprúdi.
Pôjde Jim.	Dilítium je dekryštalizované.
Pôjde Kim.	Antihmota neprúdi.

Usudzovacie (inferenčné) pravidlo je *vzor* úsudkov daný formou tvrdení, s ktorými pracuje

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ak } A\text{, tak } B.\\ A.\end{array}\right\}\text{vzory premís}$$
$$\overline{\phantom{\text{Ak } A\text{, tak } B.}}$$
$$B. \qquad \text{vzor záveru}$$

I.7 Korektné usudzovacie pravidlá a dedukcia

Korektné pravidlo odvodí z pravdivých premís pravdivý záver

Príklad 1.5. Pravidlo *modus ponens*

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Ak } A\text{, tak } B.\\ A.\end{array}}{B.}$$

je korektné.

Dôkaz je teda **postupnosť použití korektných usudzovacích pravidiel** (najlepšie *samozrejmých* pre čitateľa dôkazu)

Dedukcia je usudzovanie, pri ktorom sa používajú iba korektné pravidlá

I.8 Nededuktívne pravidlá

Niektoré **nie korektné** usudzovacie pravidlá sú prakticky užitočné:

Indukcia — zovšeobecnenie:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Videl som tisíc havranov.}\\ \text{Žiaden nebol inej farby ako čiernej.}\end{array}}{\text{Všetky havrany sú čierne.}}$$

Platí aj pre biele bicykle?

Abdukcia — odvodzovanie možných príčin z následkov:

Ak je batéria vybitá, auto nenaštartuje.
Ak je nádrž prázdna, auto nenaštartuje.
Nádrž nie je prázdna.
Auto nenaštartovalo.

Batéria je vybitá.

Čo ak nám kuna prehrýzla káble?

Usudzovanie na základe analógie (podobnosti)

Venuša má atmosféru, podobne ako Zem.
Na Zemi sa prejavuje skleníkový efekt.

Na Venuši sa prejavuje skleníkový efekt.

A čo: Atmosféra Zeme je dýchateľná?

I.9 Nededuktívne pravidlá

- **Závery nededuktívnych pravidiel** treba považovať za **hypotézy** — plauzibilné, ale **neoverené** tvrdenia
- Hypotézy je **nutné preverovať!**
- Niektoré špeciálne prípady nededuktívnych pravidiel sú korektné, napríklad *matematická indukcia*
- Usudzovanie s nededuktívnymi pravidlami je teda *hypotetické*
- Hypotetické usudzovanie je dôležité pre umelú inteligenciu
  - Reprezentácia znalostí a inferencia (magisterský predmet)
- **V tomto kurze sa budeme zaoberať iba dedukciou**

I.10 Ťažkosti s prirodzeným jazykom

Prirodzený jazyk je problematický:

- Viacznačné slová: Miro *je* v poslucharni F1.
- Viacznačné tvrdenia: Videl som dievča v sále *s ďalekohľadom*.
- Ťažko syntakticky analyzovateľné tvrdenia:

Vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome prijímajú rozhodnutia na schôdzi vlastníkov dvojtretinovou väčšinou hlasov všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome, ak hlasujú o zmluve o úvere a o každom dodatku k nej, o zmluve o zabezpečení úveru a o každom dodatku k nej, o zmluve o nájme a kúpe veci, ktorú vlastníci bytov a nebytových priestorov v dome užívajú s právom jej kúpy po uplynutí dojednaného času užívania a o každom dodatku k nej, o zmluve o vstavbe alebo nadstavbe a o každom dodatku k nim, o zmene účelu užívania spoločných častí domu a spoločných zariadení domu a o zmene formy výkonu správy; ak sa rozhoduje o nadstavbe alebo o vstavbe v podkroví alebo povale, vyžaduje sa zároveň súhlas všetkých vlastníkov bytov a nebytových priestorov v dome na najvyššom poschodí. — *Zákon č. 182/1993 Z. z. SR v znení neskorších predpisov*

- Výnimky a obraty so špeciálnym ustáleným významom: *Ni*kto *nie* je dokonalý.

I.11 Formálne jazyky

Problémy prirodzených jazykov sa obchádzajú použitím **formálnych** jazykov

- Presne definovaná, zjednodušená syntax (pravidlá zápisu tvrdení) a sémantika (význam)
- Niekoľko formálnych jazykov už poznáte: aritmetika, jazyky fyzikálnych a chemických vzorcov, programovacie jazyky, ...
- Problémy z reálneho sveta opísané v prirodzenom jazyku musíme najprv **formalizovať**, a potom naň môžeme použiť logický aparát

I.12 Formalizácia poznatkov

- S formalizáciou ste sa už stretli — napríklad pri riešení slovných úloh

Karol je trikrát starší ako Mária.
Súčet Karolovho a Máriinho veku je 12 rokov. $\rightsquigarrow$
Koľko rokov majú Karol a Mária?

$$k = 3 \cdot m$$
$$k + m = 12$$

- Stretli ste sa už aj s formálnym jazykom výrokovej logiky

Príklad 1.6. Sformalizujme náš párty príklad:

P0: Niekto z trojice Kim, Jim, Sarah pôjde na párty.

P1: Sarah nepôjde na párty, ak pôjde Kim.

P2: Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim.

P3: Sarah nepôjde bez Jima.

I.13 Kalkuly — formalizácia usudzovania

- Pre mnohé logiky sú známe **kalkuly** —
  množiny usudzovacích pravidiel, ktoré sú

  korektné — odvodzujú iba logické dôsledky

  úplné — umožňujú odvodiť všetky logické dôsledky

- Kalkuly existujú aj v iných častiach matematiky
  - na počítanie s číslami, zlomkami (násobilka, aritmetika),
  - riešenie lineárnych rovníc (kalkul lineárnej algebry),
  - derivovanie, integrovanie, riešenie diferenciálnych rovníc (kalkul matematickej analýzy)

  ...

  Poznáte už aj jeden logický kalkul — ekvivalentné úpravy

  Sú korektné, ale nie vždy úplné

I.14 Výpočtová logika — automatizácia usudzovania

- Základná idea **výpočtovej logiky**:
  - Napíšeme program,
    ktorý systematicky aplikuje pravidlá logického kalkulu,
    kým neodvodí želaný dôsledok,
    alebo nevyčerpá všetky možnosti (nie vždy je ich konečne veľa!)

- Skutočnosť je komplikovanejšia, ale existuje množstvo automatických usudzovacích systémov
- *Jeden* z prienikov informatiky a logiky

I.15 Výpočtová logika — aplikácie

- Overovanie, dopĺňanie, hľadanie dôkazov matematických viet
- Špecifikácia a verifikácia hardvérových obvodov, programov, komunikačných protokolov
  - Špecifikácia a verifikácia programov (3. ročník)
  - Formálne metódy tvorby softvéru (magisterský)
- Logické programovanie
  - Programovacie paradigmy (3. ročník)
  - Výpočtová logika (magisterský)
  - Logické programovanie ASP (magisterský)
- Databázy — odvodzovanie neuložených faktov, optimalizácia dopytov
  - Deduktívne databázy (3. ročník)
- Sémantický web a integrácia dát z rôznych zdrojov
  - Reprezentácia znalostí a inferencia (magisterský)
  - Ontológie a znalostné inžinierstvo (magisterský)
- Analýza zákonov, regulácií, zmlúv

I.16

Spomeňte si I.1
Tvrdenie, ktoré je pravdivé vo všetkých svetoch, v ktorých je pravdivá teória, je jej

A. premisou,

B. logickým dôsledkom,

C. záverom,

D. implikáciou.

Spomeňte si I.2
Účelom dôkazu je presvedčiť ostatných o správnosti nášho úsudku. Preto musí pozostávať z ....

Spomeňte si I.3
Usudzovanie, pri ktorom používame iba také pravidlá, ktoré z pravdivých premís vždy odvodia pravdivé závery, sa nazýva:

A. abdukcia,

B. interpretácia,

C. formalizácia,

D. dedukcia,

E. indukcia,

F. inferencia.

1.2. O tomto kurze

I.17 Čím sa budeme zaoberať v tomto kurze

Teoreticky
- Jazykmi výrokovej a predikátovej logiky, ich syntaxou a sémantikou
- Korektnosťou usudzovacích pravidiel
- Korektnosťou a úplnosťou logických kalkulov
- Automatizovateľnými kalkulmi

Prakticky
- Vyjadrovaním problémov v jazyku logiky
- Automatizovaním riešenia problémov použitím SAT-solverov
- Manipuláciou symbolických stromových štruktúr (výrazov — formúl a termov)
- Programovaním vlastných jednoduchých automatických dokazovačov

Filozoficky
- Zamýšľanými a nezamýšľanými okolnosťami platnosti tvrdení
- Obmedzeniami vyjadrovania a usudzovania

I.18 Organizácia kurzu — rozvrh, kontakty, pravidlá

https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4

2. Výroková logika

2.1. Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku

I.19 Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku

Výrok – veta, o pravdivosti ktorej má zmysel uvažovať (zväčša oznamovacia).

Príklady 2.1.

- Miro je v poslucharni F1.
- Slnečná sústava má deviatu planétu.
- Mama upiekla koláč, ale Editka dostala z matematiky štvorku.
- Niekto zhasol.

Negatívne príklady

- Toto je čudné.
- Píšte všetci modrým perom!
- Prečo je obloha modrá?

Výrokom priraďujeme *pravdivostné hodnoty*

I.20 Opakovanie: Výroková logika v prirodzenom jazyku

Operácie s výrokmi – *logické spojky*

- Vytvárajú nové výroky, zložené (súvetia).
- Majú povahu *funkcií* na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov (*boolovských* funkcií), teda pravdivostná hodnota zloženého výroku závisí *iba* od pravdivostných hodnôt podvýrokov.

Príklad 2.2. Negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, ekvivalencia, ...

Negatívny príklad
Spojku „pretože" nepovažujeme za *logickú* spojku.

Pravdivostná hodnota výroku „Emka ochorela, pretože zjedla babôčku" sa nedá určiť funkciou na pravdivostných hodnotách spájaných výrokov.

I.21 (Meta) matematika výrokovej logiky

- Stredoškolský prístup príliš **neoddeľuje** samotný *jazyk* výrokovej logiky od jeho *významu* a vlastne ani jednu stránku *nedefinuje jasne*
- V tomto kurze sa budeme snažiť byť **presní**
  - *Zdanlivo* budeme o jednoduchých veciach hovoriť zložito
- Pojmy z výrokovej logiky budeme **definovať matematicky**
  - ako množiny, postupnosti, funkcie, atď. ⇠ Matematika (1), (3)
- Na praktických cvičeniach veľa pojmov **zadefinujete programátorsky**
  - ako reťazce, slovníky, triedy a ich metódy ⇠ Programovanie (1), (2)
- Budeme sa pokúšať **dokazovať** ich vlastnosti
- Budeme teda hovoriť *o formálnej logike* pomocou matematiky, ktorá je ale sama postavená na *logike v prirodzenom jazyku*
- Matematickej logike sa preto hovorí aj *meta* matematika, matematika ***o*** logike (a v konečnom dôsledku aj o matematike)

2.2. Syntax výrokovej logiky

I.22 Syntax výrokovej logiky

- Syntax sú pravidlá budovania viet v jazyku

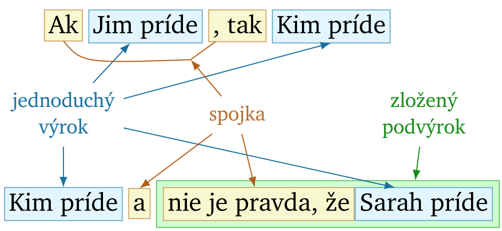
- Pri formálnych jazykoch sú popísané matematicky
- Nedajte sa tým odradiť, nie je to oveľa iné ako programovanie
- Viac sa budete formálnymi jazykmi zaoberať na Úvode do teoretickej informatiky
- Naše definície vychádzajú prevažne z kníh [Smullyan, 1979] a [Švejdar, 2002]

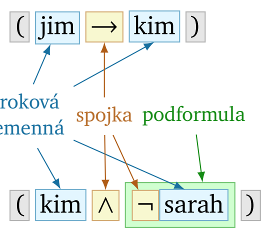
I.23 Syntax výrokovej logiky

Aké tvrdenia chceme zapisovať vo výrokovej logike?

- Jednoduché výroky, ktorých štruktúra nás nebude zaujímať
  - „Miro sa nachádza v F1“, „Kim príde“

  Ich formálnu verziu nazveme **výrokové premenné**
- Zložené výroky, tvorené podvýrokmi a spojkou:





  Ich formálnu verziu nazveme **formuly**
- Čo sú *základné* stavebné kamene týchto výrokov?
  - jednoduché výroky a spojky

  Tieto základné prvky nazveme **symboly**

I.24 Symboly jazyka výrokovej logiky

Definícia 2.3. *Symbolmi jazyka výrokovej logiky* sú:

- *výrokové premenné* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$, ktorej prvkami nie sú symboly $\neg$, $\land$, $\lor$, $\rightarrow$, (a), ani jej prvky tieto symboly neobsahujú;
- *logické* symboly (*logické spojky*): $\neg$, $\land$, $\lor$, $\rightarrow$
  (nazývané, v uvedenom poradí, *symbol negácie*, *symbol konjunkcie*, *symbol disjunkcie*, *symbol implikácie* a čítané „*nie*“, „*a*“, „*alebo*“, „*ak . . . , tak . . .* “);
- *pomocné* symboly: (a) (*ľavá zátvorka* a *pravá zátvorka*).

Spojka $\neg$ je *unárna* (má jeden argument).
Spojky $\land$, $\lor$, $\rightarrow$ sú *binárne* (spájajú dve formuly).

Poznámka 2.4. Definícia je **záväzná** dohoda o význame pojmov.

I.25 Symboly, výrokové premenné

Symbol je základný pojem, ktorý matematicky nedefinujeme (netvrdíme, že je to množina alebo podobne).
Je o čosi všeobecnejší ako pojem znak.

Príklad 2.5. Ako množinu výrokových premenných $\mathcal{V}$ môžeme zobrať všetky slová (teda konečné postupnosti) nad slovenskou abecedou a číslicami. Výrokovými premennými potom sú aj Jim, Kim, Sarah.

Dohoda

Výrokové premenné budeme *označovať* písmenami p, q, $\dots$, podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Výrokové premenné formalizujú jednoduché výroky.

I.26 Výrokové formuly

- Povedzme, že máme množinu výrokových premenných $\mathcal{V} = \{\text{kim}, \text{jim}, \text{sarah}\}$
- Ako môžu vyzerať formuly vybudované nad touto množinou?

- Samotné premenné, napr. sarah.
- Negácie premenných, napr. ¬sarah.
- Premenné alebo aj ich negácie spojené spojkou, napr. (¬kim ∨ sarah).
- Ale negovať a spájať spojkami môžeme aj zložitejšie formuly, napr. (¬(kim ∧ sarah) → (¬kim ∨ ¬sarah)).

• Ako presne popíšeme, čo je formula?

  Induktívnou definíciou:

  1. Povieme, čo sú základné formuly, ktoré sa nedajú rozdeliť na menšie formuly.
     ▶ Podobne ako 0 pri matematickej indukcii
  2. Opíšeme, ako sa z jednoduchších formúl skladajú zložitejšie.
     ▶ Podobne ako indukčný krok pri matematickej indukcii

I.27 Výrokové formuly

Definícia 2.6. *Množina $\mathcal{E}$ všetkých* výrokových formúl *nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$* je najmenšia množina postupností symbolov, pre ktorú platí:

i. každá výroková premenná $p \in \mathcal{V}$ je výrokovou formulou z $\mathcal{E}$ (hovoríme jej *atomická formula* alebo iba *atóm*);

ii. ak A je výroková formula z $\mathcal{E}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ je výrokovou formulou z $\mathcal{E}$ (*negácia* formuly A);

iii. ak A a B sú výrokové formuly z $\mathcal{E}$, tak aj $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ sú výrokovými formulami z $\mathcal{E}$ (nazývanými *konjunkcia*, *disjunkcia*, *implikácia* formúl A a B).

Dohoda
Výrokové formuly skrátene nazývame iba *formuly* a označujeme ich veľkými písmenami A, B, C, X, Y, Z, podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Príklad 2.7. Nech $\mathcal{V} = \{\text{kim}, \text{jim}, \text{sarah}\}$.
Ako vyzerá množina $\mathcal{E}$ všetkých výrokových formúl nad $\mathcal{V}$?

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} = \{&\text{kim}, \text{jim}, \text{sarah}, && \text{podľa (i)}\\
&\neg\text{kim}, \neg\text{jim}, \neg\text{sarah}, && \text{podľa (ii)}\\
&(\text{kim} \land \text{kim}), (\text{kim} \land \text{jim}), (\text{kim} \land \text{sarah}), && \text{podľa (iii) pre } \land\\
&(\text{kim} \land \neg\text{kim}), (\text{kim} \land \neg\text{jim}), (\text{kim} \land \neg\text{sarah}),\\
&(\text{jim} \land \text{kim}), (\text{jim} \land \text{jim}), (\text{jim} \land \text{sarah}),\\
&(\text{jim} \land \neg\text{kim}), (\text{jim} \land \neg\text{jim}), (\text{jim} \land \neg\text{sarah}),\\
&(\neg\text{kim} \land \text{kim}), (\neg\text{kim} \land \text{jim}), (\neg\text{kim} \land \text{sarah}), \dots,\\
&(\neg\text{jim} \land \neg\text{sarah}), \dots,\\
&(\text{sarah} \lor (\text{kim} \to \text{jim})), \dots, && \text{podľa (iii) pre } \to \text{ a potom pre } \lor\\
&(\neg(\text{kim} \land \text{sarah}) \lor (\neg\text{jim} \to \neg\text{sarah})), \dots\} && \text{podľa (iii) pre } \land, \to, \lor
\end{aligned}
$$

Definícia 2.8. *Vytvárajúcou postupnosťou* nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ je ľubovoľná konečná postupnosť postupností symbolov, ktorej každý člen

- je výroková premenná z $\mathcal{V}$, alebo
- má tvar $\neg A$, pričom A je niektorý predchádzajúci člen postupnosti, alebo
- má jeden z tvarov $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$, kde A a B sú niektoré predchádzajúce členy postupnosti.

Vytvárajúcou postupnosťou pre X je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je X.

Tvrdenie 2.9. *Postupnosť symbolov A je formulou vtedy a len vtedy, keď existuje vytvárajúca postupnosť pre A.*

Príklad 2.10. Nájdime vytvárajúcu postupnosť pre formulu $(\neg \mathrm{kim} \rightarrow (\mathrm{jim} \vee \mathrm{sarah}))$.

II. prednáška
Sémantika výrokovej logiky

25. februára 2019

II.1

Spomeňte si II.1
Ktoré z nasledujúcich postupností symbolov sú formulami nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{p, q, r, \ldots\}$?

A. $(p \lor \neg q \lor \neg r)$,

B. $(p \land \neg(q \to r))$,

C. $\neg(\neg(\neg p))$,

D. $(p \leftrightarrow \neg q)$.

II.2 Ekvivalencia

Dohoda
Pre každú dvojicu formúl A, $B \in \mathcal{E}$ je zápis $(A \leftrightarrow B)$ *skratka* za formulu $((A \to B) \land (B \to A))$.

II.3 Jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Čo keby sme zadefinovali „formuly“ takto?

Definícia „formúl“ ⚠

Množina $\mathcal{E}$ všetkých *výrokových „formúl“* nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ je najmenšia množina postupností symbolov, kde platí:

i. každá výroková premenná $p \in \mathcal{V}$ je „formulou“ z $\mathcal{E}$;

ii. ak A je „formula“ z $\mathcal{E}$, tak aj postupnosť symbolov $\neg A$ je „formulou“ z $\mathcal{E}$;

iii. ak A a B sú „formuly“ z $\mathcal{E}$, tak aj $A \land B$, $A \lor B$ a $A \to B$ sú „formulami“ z $\mathcal{E}$;

iv. ak A je „formula“ z $\mathcal{E}$, tak aj postupnosť symbolov (A) je „formulou“ z $\mathcal{E}$.

- Bola by potom $(jim \rightarrow kim \rightarrow \neg sarah)$ „formulou“?
- Aký by bol jej význam?

  Formulu by sme mohli čítať ako $A = (jim \rightarrow (kim \rightarrow \neg sarah))$ alebo ako $B = ((jim \rightarrow kim) \rightarrow \neg sarah)$.

  Čítanie A hovorí, že Sarah nepríde, ak prídu Jim a Kim súčasne. To neplatí v *práve jednej* situácii: keď všetci prídu.

  Čítanie B hovorí, že Sarah nepríde, ak alebo nepríde Jim alebo príde Kim. To však neplatí *v aspoň dvoch* rôznych situáciách: keď prídu všetci a keď príde Sarah a Kim, ale nie Jim.

II.4 Jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Pre našu definíciu formúl platí:

Tvrdenie 2.11 (o jednoznačnosti rozkladu). *Pre každú formulu $X \in \mathcal{E}$ nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ platí práve jedna z nasledujúcich možností:*

- *X je výroková premenná z $\mathcal{V}$.*
- *Existuje práve jedna formula $A \in \mathcal{E}$ taká, že $X = \neg A$.*
- *Existujú práve jedna dvojica formúl $A, B \in \mathcal{E}$ a jedna spojka $b \in \{\land, \lor, \rightarrow\}$ také, že $X = (A\, b\, B)$.*

II.5 Problémy s vytvárajúcou postupnosťou

Vytvárajúca postupnosť popisuje konštrukciu formuly podľa definície formúl:

$$jim, sarah, \neg jim, kim, \neg sarah, (\neg jim \land kim), ((\neg jim \land kim) \rightarrow \neg sarah)$$

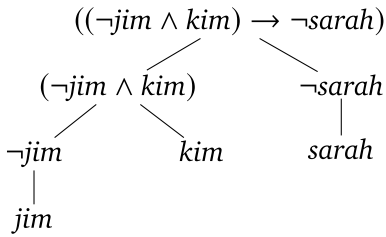
ale

- môže obsahovať „zbytočné“ prvky;
- nie je jasné *ktoré* z predchádzajúcich formúl sa *bezprostredne* použijú na vytvorenie nasledujúcej formuly.

Akou „dátovou štruktúrou“ vieme vyjadriť konštrukciu formuly bez týchto problémov?

II.6 Vytvárajúci strom

Konštrukciu si ale vieme predstaviť ako *strom*:



Takéto stromy voláme *vytvárajúce*.

Ako ich *presne* a *všeobecne* popíšeme — zadefinujeme?

II.7 Vytvárajúci strom formuly

Definícia 2.12. *Vytvárajúci strom T* pre formulu X je binárny strom obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni T je formula X,
- ak vrchol obsahuje formulu $\neg A$, tak má práve jedno dieťa, ktoré obsahuje formulu A,
- ak vrchol obsahuje formulu $(A\ b\ B)$, kde b je jedna z binárnych spojok, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu A a pravé formulu B,
- vrcholy obsahujúce výrokové premenné sú listami.

Uvažujme formulu:

$$((\neg jim \wedge kim) \to \neg sarah)$$

- Ako nazveme formuly, z ktorých vznikla?

$$sarah, \neg jim, (\neg jim \wedge kim), \ldots$$

- Ako nazveme formuly, z ktorých *bezprostredne/priamo* vznikla?

$$(\neg jim \wedge kim) \quad \text{a} \quad \neg sarah$$

- Ako tieto pojmy presne zadefinujeme?

II.9 Podformuly

Definícia 2.13 (Priama podformula)**.**

- Priamou podformulou $\neg A$ je formula A.
- Priamymi podformulami $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \to B)$ sú formuly A (*ľavá* priama podformula) a B (*pravá* priama podformula).

Definícia 2.14 (Podformula)**.** Vzťah *byť podformulou* je najmenšia relácia na formulách spĺňajúca:

- Ak X je priamou podformulou Y, tak X je podformulou Y.
- Ak X je podformulou Y a Y je podformulou Z, tak X je podformulou Z.

II.10 Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Miera zložitosti/veľkosti formuly:

- Jednoduchá: dĺžka, teda počet symbolov
  - Počíta aj pomocné symboly
  - Atóm má mieru 1, nič nemá mieru 0
- Lepšia: počet netriviálnych krokov pri konštrukcii formuly
  - pridanie negácie,
  - spojenie formúl spojkou

Lepšiu mieru nazývame *stupeň formuly*

Príklad 2.15. Aký je stupeň formuly $((p \vee \neg q) \wedge \neg(q \rightarrow p))$?

II.11 Meranie syntaktickej zložitosti formúl

Ako stupeň zadefinujeme?
Podobne ako sme zadefinovali formuly — induktívne:

1. určíme hodnotu stupňa pre atomické formuly,
2. určíme, ako zo stupňa priamych podformúl vypočítame stupeň z nich zloženej formuly.

II.12 Stupeň formuly

Definícia 2.16 (Stupeň formuly)**.**

- Výroková premenná je stupňa 0.
- Ak A je formula stupňa n, tak $\neg A$ je stupňa $n + 1$.
- Ak A je formula stupňa n_1 a B je formula stupňa n_2, tak $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú stupňa $n_1 + n_2 + 1$.

Definícia 2.16 (Stupeň formuly stručne, symbolicky). *Stupeň* $\deg(X)$ formuly $X \in \mathcal{E}$ definujeme pre každú výrokovú premennú $p \in \mathcal{V}$ a pre všetky formuly $A, B \in \mathcal{E}$ nasledovne:

$$
\begin{aligned}
&\deg(p) = 0,\\
&\deg(\neg A) = \deg(A) + 1,\\
&\deg((A \land B)) = \deg((A \lor B)) = \deg((A \to B)) = \deg(A) + \deg(B) + 1.
\end{aligned}
$$

II.13 Indukcia na stupeň formuly

Veta 2.17 (Princíp indukcie na stupeň formuly). *Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}$). Ak platí súčasne*

báza indukcie: *každá formula stupňa* 0 *má vlastnosť P,*

indukčný krok: *pre každú formulu X z predpokladu, že všetky formuly menšieho stupňa ako* $\deg(X)$ *majú vlastnosť P,*
vyplýva, že aj X má vlastnosť P,

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}$).

II.14 Množina výrokových premenných formuly

Definícia 2.18 (Množina výrok. prem. formuly [vars(X)]).

- Ak p je výroková premenná, množinou výrokových premenných atomickej formuly p je $\{p\}$.
- Ak V je množina výrokových premenných formuly A, tak V je tiež množinou výrok. prem. formuly $\neg A$.
- Ak V_1 je množina výrok. prem. formuly A a V_2 je množina výrok. prem. formuly B, tak $V_1 \cup V_2$ je množinou výrokových premenných formúl $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$.

Definícia 2.18 (Množina výrok. prem. formuly [vars(X)]).

- Ak p je výroková premenná, tak $\mathrm{vars}(p) = \{p\}$.
- Ak A a B sú formuly, tak $\mathrm{vars}(\neg A) = \mathrm{vars}(A)$ a $\mathrm{vars}((A \land B)) = \mathrm{vars}((A \lor B)) = \mathrm{vars}((A \to B)) = \mathrm{vars}(A) \cup \mathrm{vars}(B)$.

Spomeňte si II.2
Je nasledujúce tvrdenie pravdivé? Odpovedzte áno/nie.

> Vďaka jednoznačnosti rozkladu má každá formula práve jednu priamu podformulu.

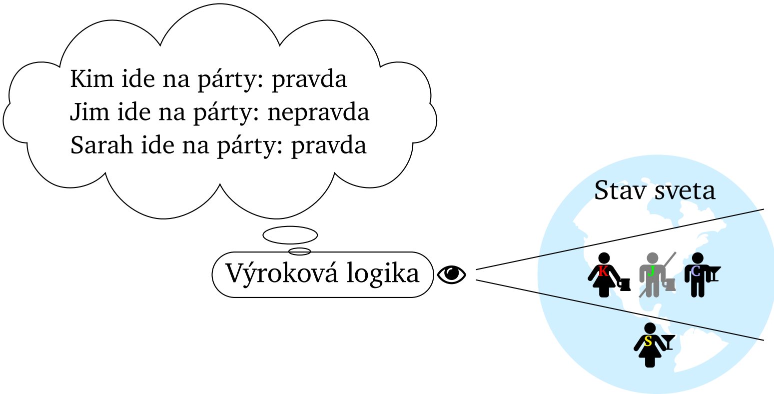
Spomeňte si II.3
Určte pre formulu $((p \lor \neg q) \land \neg(q \to p))$ jej:

i. priame podformuly,
ii. podformuly,
iii. vytvárajúci strom.

Spomeňte si II.4
Stupeň formuly $((\neg p \leftrightarrow q) \land q)$ je ....
$\mathrm{vars}(((\neg p \leftrightarrow q) \land q)) =$ ....

2.3. Sémantika výrokovej logiky

- Syntax jazyka výrokovej logiky hovorí iba o tom, ako sa zapisujú formuly ako postupnosti symbolov.
- Nehovorí nič o *význame* týchto postupností.
- Ten im dáva *sémantika* jazyka výrokovej logiky.



II.18 Predstava výrokovej logiky o svete

Výroková logika vníma svet *veľmi zjednodušene*.

Zaujíma ju iba

- obmedzené množstvo jednoduchých výrokov,
- ich pravdivosť alebo nepravdivosť v danom stave sveta.

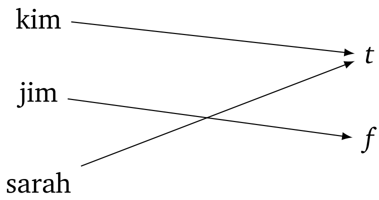
II.19 Formalizácia výrokového pohľadu na svet

- V matematickej výrokovej logike jednoduché výroky predstavujú výrokové premenné
- Ako vieme *programátorsky* popísať pravdivosť výrokových premenných v nejakom stave sveta?
- A *matematicky*?

II.20 Ohodnotenie výrokových premenných

Definícia 2.19. Nech (t, f) je usporiadaná dvojica *pravdivostných hodnôt*, $t \neq f$, pričom hodnota t predstavuje pravdu a f nepravdu.

Ohodnotením množiny výrokových premenných $\mathcal{V}$ nazveme každé zobrazenie v množiny $\mathcal{V}$ do množiny $\{t, f\}$ (teda každú funkciu $v \colon \mathcal{V} \to \{t, f\}$).



Výroková premenná p je *pravdivá* pri ohodnotení v, ak $v(p) = t$.
Výroková premenná p je *nepravdivá* pri ohodnotení v, ak $v(p) = f$.

II.21 Ohodnotenie výrokových premenných

Príklad 2.20. Zoberme $t \neq f$ (napr. $t = 1, f = 0$), $\mathcal{V} = \{\text{a}, \text{á}, \text{ä}, \ldots, \text{ž}, 0, \ldots, 9, \_\}^+$.

Dnešné ráno by popísalo ohodnotenie v_1 množiny $\mathcal{V}$, kde (okrem iného):

$$v_1(\text{svieti\_slnko}) = t \qquad v_1(\text{zobral\_som\_si\_čiapku}) = f$$

Pondelkové ráno pred týždňom opisuje ohodnotenie v_2, kde okrem iného

$$v_2(\text{svieti\_slnko}) = f \qquad v_2(\text{zobral\_som\_si\_čiapku}) = f$$

Jednu zo situácií v probléme pozývania kamarátov na párty by popísalo ohodnotenie, v ktorom (okrem iného):

$$v_3(\text{sarah}) = t \qquad v_3(\text{kim}) = f \qquad v_3(\text{jim}) = t$$

Prečo „okrem iného“?

Kde v informatickej praxi **nie je** $f = 0$ a $t = 1$?

II.22 Splňanie výrokových formúl

- Na formulu sa dá pozerať ako na **podmienku**,
  ktorú stav sveta buď **spĺňa** (je v tomto stave pravdivá)
  alebo **nespĺňa** (je v ňom nepravdivá).

- Z pravdivostného ohodnotenia výrokových premenných v nejakom stave sveta, vieme *jednoznačne* povedať,
  ktoré formuly sú v tomto stave splnené.

II.23 Splĺňanie výrokových formúl

Príklad 2.21. Nech v_3 je ohodnotenie množiny $\mathcal{V} = \{\mathrm{a}, \dots, \mathrm{z}\}^+$, také že

$$v_3(\mathrm{kim}) = t \qquad v_3(\mathrm{jim}) = f \qquad v_3(\mathrm{sarah}) = t.$$

Splĺňa svet s týmto ohodnotením formulu $(\neg\mathrm{jim} \to \neg\mathrm{sarah})$?

Zoberieme vytvárajúcu postupnosť, prejdeme ju zľava doprava:

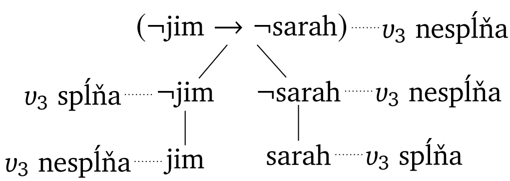
Formulu	jim	sarah	¬jim	¬sarah	(¬jim → ¬sarah)
ohodnotenie v_3	nesplĺňa	splĺňa	splĺňa	nesplĺňa	nesplĺňa

II.24 Splĺňanie výrokových formúl — vytvárajúci strom

Príklad 2.21 (pokračovanie).

$$v_3(\mathrm{kim}) = t \qquad v_3(\mathrm{jim}) = f \qquad v_3(\mathrm{sarah}) = t.$$

Iná možnosť je použiť vytvárajúci strom:



II.25 Splĺňanie výrokových formúl — program

- Proces zisťovania, či ohodnotenie splĺňa formulu, vieme naprogramovať:

```
  def satisfies(v, A):
...
```

- Veľmi podobne vieme zadefinovať splnenie matematicky.

II.26 Spĺňanie výrokových formúl — definícia

Definícia 2.22. Nech $\mathcal{V}$ je množina výrokových premenných. Nech v je ohodnotenie množiny $\mathcal{V}$. Pre všetky výrokové premenné p z $\mathcal{V}$ a všetky formuly A, B nad $\mathcal{V}$ definujeme:

- v spĺňa atomickú formulu p vtt $v(p) = t$;
- v spĺňa formulu $\neg A$ vtt v nespĺňa A;
- v spĺňa formulu $(A \wedge B)$ vtt v spĺňa A a v spĺňa B;
- v spĺňa formulu $(A \vee B)$ vtt v spĺňa A alebo v spĺňa B;
- v spĺňa formulu $(A \rightarrow B)$ vtt v nespĺňa A alebo v spĺňa B.

Dohoda

- Skratka *vtt* znamená *vtedy a len vtedy, keď.*
- Vzťah *ohodnotenie v spĺňa formulu X* skrátene zapisujeme $v \models X$, *ohodnotenie v nespĺňa formulu X* zapisujeme $v \not\models X$.
- Namiesto *v (ne)spĺňa X* hovoríme aj *X je (ne)pravdivá pri v.*

II.27 Spĺňanie výrokových formúl — definícia

Definícia 2.22 (symbolicky)**.** Nech $\mathcal{V}$ je množina výrokových premenných. Nech v je ohodnotenie množiny $\mathcal{V}$. Pre všetky výrokové premenné p z $\mathcal{V}$ a všetky formuly A, B nad $\mathcal{V}$ definujeme:

$$
\begin{array}{lll}
v \models p & \text{vtt} & v(p) = t; \\
v \models \neg A & \text{vtt} & v \not\models A; \\
v \models (A \wedge B) & \text{vtt} & v \models A \text{ a } v \models B; \\
v \models (A \vee B) & \text{vtt} & v \models A \text{ alebo } v \models B; \\
v \models (A \rightarrow B) & \text{vtt} & v \not\models A \text{ alebo } v \models B.
\end{array}
$$

Vzťah $\models$ je súčasťou programovacích jazykov — vyhodnocovanie boolovských výrazov

II.28 Spĺňanie výrokových formúl — príklad

Príklad 2.23. Nech v_3 je ohodnotenie množiny $\mathcal{V} = \{\mathrm{a}, \dots, \mathrm{z}\}^+$, také že

$$v_3(\mathrm{kim}) = t \qquad v_3(\mathrm{jim}) = f \qquad v_3(\mathrm{sarah}) = t.$$

Zistime, ktoré z formúl

$$((\mathrm{kim} \lor \mathrm{jim}) \lor \mathrm{sarah})$$

$$(\mathrm{kim} \to \neg\mathrm{sarah}) \qquad (\mathrm{jim} \to \mathrm{kim}) \qquad (\neg\mathrm{jim} \to \neg\mathrm{sarah})$$

ohodnotenie v_3 spĺňa a ktoré nespĺňa.

$\deg(X)$	$v_3 \models X$	$v_3 \not\models X$
0	kim, sarah	jim
1	$\neg$jim, (kim $\lor$ jim), (jim $\to$ kim)	$\neg$sarah
2	((kim $\lor$ jim) $\lor$ sarah)	(kim $\to$ $\neg$sarah)
3		($\neg$jim $\to$ $\neg$sarah)

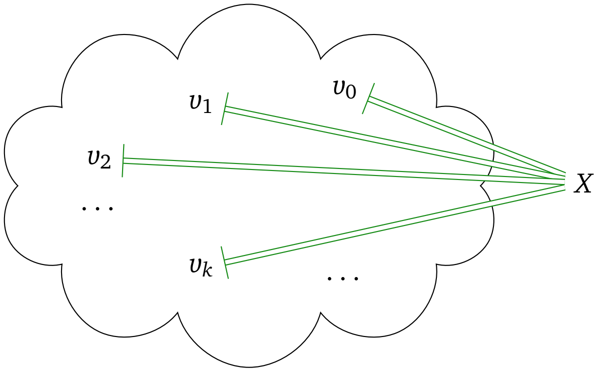
2.4. Tautológie, (ne)splniteľnosť, falzifikovateľnosť

II.29 Spĺňanie z hľadiska formuly

- Predchádzajúca definícia a príklad:
  spĺňanie **mnohých formúl jedným ohodnotením** (stavom sveta)
- Obráťme perspektívu:
  spĺňanie **jednej formuly mnohými ohodnoteniami**
- Ktoré stavy sveta vyhovujú podmienke vyjadrenej formulou?

Dohoda
V definíciách a tvrdeniach predpokladáme, že sme si *pevne zvolili* nejakú množinu výrokových premenných $\mathcal{V}$ a hodnoty t, f.
Formulou rozumieme formulu nad množinou výrok. prem. $\mathcal{V}$.
Ohodnotením rozumieme ohodnotenie množiny výrok. prem. $\mathcal{V}$.

II.30 Tautológia



Definícia 2.24. Formulu X nazveme *tautológiou* (skrátene $\models X$) vtt **každé** ohodnotenie výrokových premenných **spĺňa** X (teda **pre každé** ohodnotenie výrokových premenných v platí $v \models X$).

II.31 Tautológia — testovanie

- Ak máme nekonečne veľa výrokových premenných,
  máme aj nekonečne veľa ohodnotení
- Musíme skúmať **všetky**, aby sme zistili, či je formula X tautológiou?

II.32 Tautológia — testovanie

Tvrdenie 2.25. *Splnenie výrokovej formuly pri ohodnotení výrokových premenných závisí iba od ohodnotenia konečného počtu výrokových premenných, ktoré sa v nej vyskytujú.*

Presnejšie:
Pre každú formulu X a všetky ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré zhodujú na množine $\mathrm{vars}(X)$ *výrokových premenných vyskytujúcich sa v X, platí $v_1 \models X$ vtt $v_2 \models X$.*

- Takže stačí skúmať ohodnotenia, ktoré sa **líšia** na výrokových premenných **vyskytujúcich** sa v X, ktorých je iba konečne veľa
- **Koľko** je takých ohodnotení?

Príklad 2.26. Zistime, či je $X = (\neg(p \land q) \to (\neg p \lor \neg q))$ tautológiou.

Preskúmame všetky rôzne ohodnotenia výrokových premenných, ktoré sa vyskytujú v X:

v							
p	q	$(p \land q)$	$\neg(p \land q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \lor \neg q)$	$(\neg(p \land q) \to (\neg p \lor \neg q))$
f	f	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$	$\models$
t	f	$\not\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\models$
f	t	$\not\models$	$\models$	$\models$	$\not\models$	$\models$	$\models$
t	t	$\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\not\models$	$\models$

Pretože všetky skúmané ohodnotenia spĺňajú X, je X tautológiou.

Dôkaz. Indukciou na stupeň formuly X.

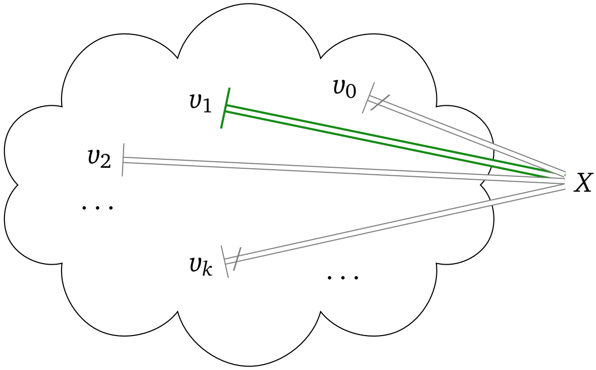
Báza: Nech X je stupňa 0. Podľa vety o jednoznačnosti rozkladu a definície stupňa musí byť $X = p$ pre nejakú výrokovú premennú. Zoberme ľubovoľné ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré sa zhodujú na premenných v X, teda aj na p. Podľa definície spĺňania $v_1 \models p$ vtt $v_1(p) = t$ vtt $v_2(p) = t$ vtt $v_2 \models p$.

Krok: Nech X je stupňa $n > 0$ a tvrdenie platí pre všetky formuly stupňa nižšieho ako n (indukčný predpoklad). Zoberme ľubovoľné ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré sa zhodujú na premenných v X. Podľa definície stupňa a jednoznačnosti rozkladu nastáva práve jeden z prípadov:

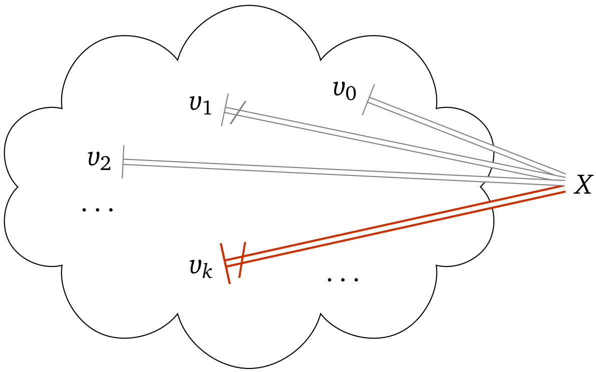
- $X = \neg A$ pre práve jednu formulu A. Pretože $\deg(X) = \deg(A) + 1 > \deg(A)$, podľa ind. predpokladu tvrdenie platí pre A. Ohodnotenia v_1 a v_2 sa zhodujú na premenných v A (rovnaké ako v X). Preto $v_1 \models A$ vtt $v_2 \models A$, a teda $v_1 \models \neg A$ vtt $v_1 \not\models A$ vtt $v_2 \not\models A$ vtt $v_2 \models \neg A$.

- $X = (A \land B)$ pre práve jednu dvojicu formúl A, B. Pretože $\deg(X) = \deg(A) + \deg(B) + 1 > \deg(A)$ aj $\deg(B)$, podľa ind. predpokladu pre A aj B tvrdenie platí. Podobne pre ďalšie binárne spojky.

□

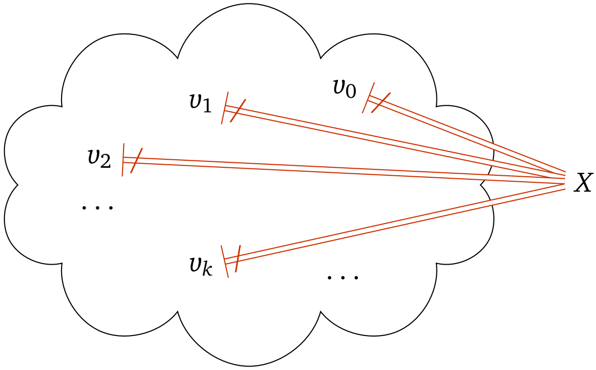


Definícia 2.27. Formulu X nazveme *splniteľnou*
vtt **nejaké** ohodnotenie výrokových premenných **spĺňa** X
(teda **existuje** také ohodnotenie výrokových premenných v, že $v \models X$).



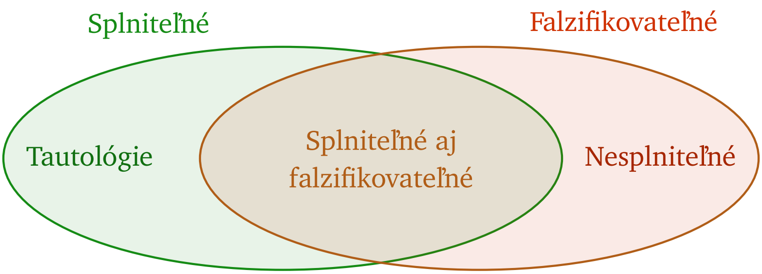
Definícia 2.28. Formulu X nazveme *falzifikovateľnou*
vtt **nejaké** ohodnotenie výrokových premenných **nespĺňa** X
(teda **existuje** také ohodnotenie výrokových premenných v, že $v \not\models X$).

II.37 Nesplniteľnosť



Definícia 2.29. Formulu X nazveme *nesplniteľnou*
vtt **každé** ohodnotenie výrokových premenných **nespĺňa** X
(teda **pre každé** ohodnotenie výrokových premenných v platí $v \not\models X$).

II.38 „Geografia“ výrokových formúl podľa spĺňania



- Tautológie sú výrokovologické pravdy. Sú zaujímavé najmä pre klasický pohľad na logiku ako skúmanie správneho usudzovania.
- Vo výpočtovej logike je zaujímavá splniteľnosť a konkrétne spĺňajúce ohodnotenia.

Obrázok podľa [Papadimitriou, 1994]

Zamyslite sa II.5
Ak formula *nie* je falzifikovateľná, je:

A. splniteľná, B. nesplniteľná, C. tautológia.

III. prednáška

Vyplývanie a ekvivalencia

4. marca 2019

III.1 Tautológie a (ne)splniteľnosť

Tvrdenie 2.30. *Formula X je tautológia vtt keď $\neg X$ je nesplniteľná.*

Dôkaz. ($\Rightarrow$) Nech X je tautológia, teda je splnená pri každom ohodnotení výrokových premenných. To znamená, že $\neg X$ je nesplnená pri každom ohodnotení (podľa definície splnenia formuly ohodnotením), a teda $\neg X$ je nesplniteľná.

($\Leftarrow$) Opačne, nech $\neg X$ je nesplniteľná. To znamená, že pri každom ohodnotení výrokových premenných je $\neg X$ nesplnená. Podľa definície spĺňania je teda X pri každom ohodnotení splnená, a teda je tautológia. $\square$

III.2 Teórie

Neformálne slovom *teória* označujeme nejaký súbor presvedčení o fungovaní sveta alebo jeho časti.

Definícia 2.31. *(Výrokovologickou) teóriou* nazývame každú množinu výrokových formúl.

Dohoda

Teórie budeme označovať písmenami T, S, podľa potreby s indexmi.

Príklad 2.32. Formalizácia problému pozývania známych na párty je teóriou:

$$\begin{aligned} T_{\text{party}} = \{\, & ((\text{kim} \lor \text{jim}) \lor \text{sara}), && (\text{kim} \to \neg\text{sara}), \\ & (\text{jim} \to \text{kim}), && (\neg\text{jim} \to \neg\text{sara}) \,\} \end{aligned}$$

III.3 Splnenie teórie, model

Pojem spĺňania sa jednoducho rozšíri na teórie.

Definícia 2.33. Nech T je teória, nech v je ohodnotenie výrokových premenných. Ohodnotenie *v spĺňa teóriu T* (skrátene $v \models T$) vtt v spĺňa každú formulu X z množiny T. Spĺňajúce ohodnotenie nazývame *modelom* teórie T.

Príklad 2.34. Aké ohodnotenie spĺňa (teda je modelom) T_{party}?

Tvrdenie 2.35. *Splnenie teórie T pri ohodnotení výrokových premenných závisí iba od ohodnotenia výrokových premenných, ktoré sa vyskytujú vo formulách v T.*

Presná formulácia je podobná ako pri spĺňaní formúl. Dôkaz sporom, lebo množina formúl môže byť nekonečná.

2.5. Výrokovologické vyplývanie

III.4 Splniteľnosť teórie

- Kedy je teória „zlá“?
- Keď nepopisuje žiaden svet (stav sveta).
- „Dobrá“ je teda taká teória, ktorá má aspoň jeden model.

Definícia 2.36. Teória T je *súčasne výrokovologicky splniteľná* (skrátene *splniteľná*) vtt existuje aspoň jeden model T.

Teória je *nesplniteľná* vtt nie je splniteľná.

Príklad 2.37. T_{party} je súčasne splniteľná množina formúl.

$T_{\text{party}} \cup \{\text{sara}\}$ je súčasne nesplniteľná množina formúl.

III.5 Logické dôsledky a vyplývanie

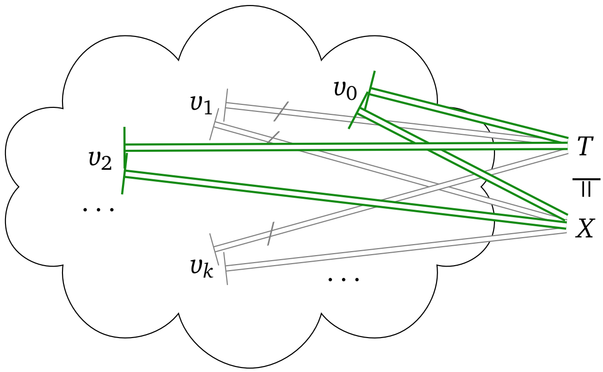
- Aký je *účel* teórií? Kedy je teória užitočná?
  - Keď z nej dokážeme *odvodiť* (uvažovaním alebo počítaním) *doteraz neznáme skutočnosti* (teda nezapísané v teórii), ktoré platia vo všetkých stavoch sveta spĺňajúcich teóriu.

- Takéto skutočnosti nazývame **logickými dôsledkami teórie** a hovoríme, že z nej *vyplývajú*.

Príklad 2.38. Všimnime si, že v *každom* ohodnotení, ktoré spĺňa T_{party}, je splnená aj premenná *kim*.

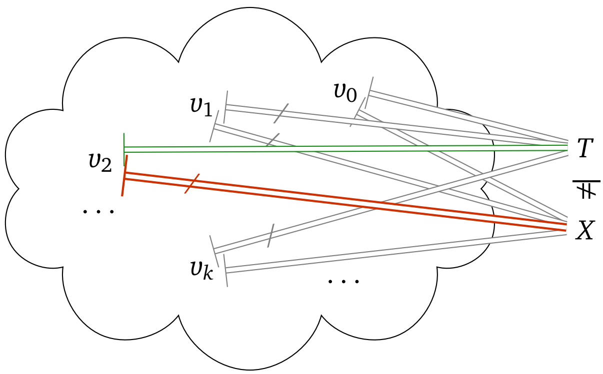
Ktorá ďalšia formula vyplýva z T_{party}?

III.6 Výrokovologické vyplývanie



Definícia 2.39 (Výrokovologické vyplývanie). Z teórie T *výrokovologicky vyplýva* formula X (tiež X je *výrokovologickým dôsledkom* T, skrátene $T \models X$) vtt každé ohodnotenie výrokových premenných, ktoré spĺňa T, spĺňa aj X.

III.7 Nevyplývanie



Príklad 2.40. Ktoré atomické formuly a ich negácie nevyplývajú z T_{party}?

Vyplýva z T_{party} formula $(kim \rightarrow jim)$?

III.8 Vyplývanie a (ne)splniteľnosť

Použitie SAT solvera na rozhodovanie vyplývania je založené na:

Tvrdenie 2.41. *Formula X výrokovologicky vyplýva z teórie T vtt množina $T \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľná.*

Prečo je to tak?

III.9 Vyplývanie a (ne)splniteľnosť — dôkaz

Dôkaz. Nech $T = \{X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\}$.

($\Rightarrow$) Predpokladajme, že X vyplýva z množiny T. Nech v je ľubovoľné ohodnotenie $\mathcal{V}$. Potrebujeme ukázať, že v nespĺňa $T \cup \{\neg X\}$. Máme dve možnosti:

- Ak v nespĺňa T, tak nespĺňa niektorú formulu X_i z T. Formula X_i patrí aj do $T \cup \{\neg X\}$, preto v nespĺňa ani $T \cup \{\neg X\}$.
- Ak v spĺňa T, tak v musí spĺňať aj X (definícia vyplývania). Potom ale v nespĺňa $\neg X$, a teda v nespĺňa ani $T \cup \{\neg X\}$.

V oboch prípadoch v nespĺňa $T \cup \{\neg X\}$. Pretože v bolo ľubovoľné, môžeme zovšeobecniť, že žiadne v nespĺňa $T \cup \{\neg X\}$, teda $T \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľná.

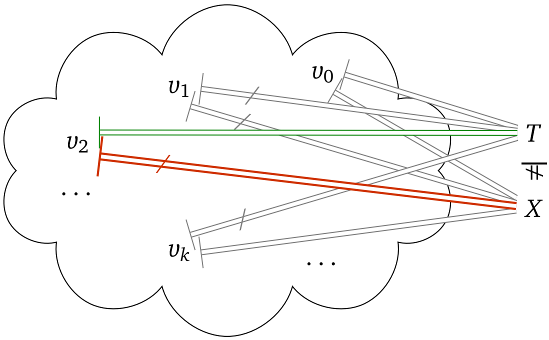
($\Leftarrow$) Opačne, nech $T \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľná a nech v je ľubovoľné ohodnotenie $\mathcal{V}$. Potrebujeme ukázať, že ak v spĺňa T, tak potom v spĺňa aj X. Ak v spĺňa T, potom spĺňa každé X_i. Keďže ale $T \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľná, v nespĺňa $T \cup \{\neg X\}$, preto v musí nespĺňať $\neg X$ (jediná zostávajúca formula z $T \cup \{\neg X\}$), čo znamená, že v spĺňa X. Pretože v bolo ľubovoľné, môžeme zovšeobecniť, že pre každé v platí, že ak v spĺňa T, tak v spĺňa aj X, teda X vyplýva z T. $\square$

III.10 Nezávislosť

Definícia 2.42. Formula X je *nezávislá* od teórie T, ak existuje dvojica ohodnotení v_1, v_2 spĺňajúcich T, pričom v_1 spĺňa X, ale v_2 nespĺňa X.

Príklad 2.43. Ktorá atomická formula je nezávislá od T_{party}?
Je aj jej negácia nezávislá od T_{party}?

III.11 Nevyplývanie a negácia formuly



Otázka. Ak z T **ne**vyplýva formula X, je pravda, že z T vyplýva formula $\neg X$?

Nie! Na to, aby z T nevyplývala formula X, stačí, keď *existuje jediné* ohodnotenie, ktoré spĺňa T, ale nespĺňa X.
Na to, aby z T vyplývala formula $\neg X$, je nutné, aby všetky ohodnotenia, ktoré spĺňajú T, nespĺňali X (a teda spĺňali $\neg X$).

III.12 Vzťahy vyplývania, implikácií a tautológií

Tvrdenie 2.44. *Nech S a T sú teórie, $S \subseteq T$, A je formula.*
Ak $S \models A$, tak $T \models A$.

Tvrdenie 2.45. *Nech T je teória, nech A, B, A_1, A_2, …, A_n sú formuly.*

a) $T \cup \{A\} \models B$ *vtt* $T \models (A \to B)$.

b) $\{\} \models A$ *vtt* A *je tautológia* ($\models A$).

c) Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

i. $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \models B$

ii. $\{((\cdots(A_1 \land A_2) \land \cdots) \land A_n)\} \models B$

iii. $\{\} \models ((\cdots(A_1 \land A_2) \land \cdots) \land A_n) \to B)$

iv. $\models (((\cdots(A_1 \land A_2) \land \cdots) \land A_n) \to B)$

III.13 Hlasujte

Spomeňte si III.1
Formula X vyplýva z teórie T vtt každý model T spĺňa X.
Pravda alebo nepravda?

2.6. Ekvivalencia formúl

III.14 Ekvivalencia formúl

Ako vieme pomocou doterajších **sémantických** pojmov vyjadriť,
že dve formuly sú ekvivalentné?

Definícia 2.46. Dve formuly X a Y sú *(výrokovologicky) ekvivalentné* ($X \Leftrightarrow Y$) vtt
pre každé ohodnotenie v výrokových premenných platí,
že v spĺňa X vtt v spĺňa Y.

III.15 Ekvivalencia formúl a skratka $\leftrightarrow$

Ako súvisí sémanticky zadefinovaná ekvivalencia formúl so skratkou $\leftrightarrow$?
Podľa dohody z 2. prednášky je $(X \leftrightarrow Y)$ je skráteným zápisom $((X \to Y) \land (Y \to X))$.

Tvrdenie 2.47. *Formuly X a Y sú výrokovologicky ekvivalentné vtt formula $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia.*
Skrátene: Pre všetky formuly X a Y platí, že $X \Leftrightarrow Y$ vtt $\models (X \leftrightarrow Y)$.

III.16 Ekvivalencia a vyplývanie

Ako súvisí ekvivalencia formúl s vyplývaním?

Tvrdenie 2.48. *Formuly X a Y sú ekvivalentné vtt $\{X\} \models Y$ a $\{Y\} \models X$.*

Dôkaz. ($\Rightarrow$) Nech X a Y sú ekvivalentné formuly. Chceme dokázať, že $\{X\} \models Y$, teda že (podľa definície vyplývania) pre každé ohodnotenie v platí, že ak $v \models \{X\}$, tak $v \models Y$.

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie, nech $v \models \{X\}$. Potom $v \models X$ (podľa definície splnenia teórie), a teda $v \models Y$ (z predpokladu a podľa definície ekvivalencie). Teda platí, že ak $v \models \{X\}$, tak $v \models Y$. Pretože v bolo ľubovoľné, môžeme túto vlastnosť zovšeobecniť na všetky ohodnotenia, a teda $\{X\} \models Y$.

Dôkaz $\{Y\} \models X$ je podobný.

($\Leftarrow$) Nech X a Y sú formuly a nech $\{X\} \models Y$ a $\{Y\} \models X$. Chceme dokázať, že X a Y sú ekvivalentné.

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie. Ak $v \models X$, tak $v \models \{X\}$ a podľa prvého predpokladu $v \models Y$. Ak $v \models Y$, tak $v \models \{Y\}$ a podľa druhého predpokladu $v \models X$. Teda $v \models X$ vtt $v \models Y$. Pretože v bolo ľubovoľné, môžeme túto vlastnosť zovšeobecniť na všetky ohodnotenia, a teda X a Y sú ekvivalentné. ◻

III.17 Tranzitivita ekvivalencie

„je tautológia“

Tvrdenie 2.49 (Tranzitivita ekvivalencie)**.** *Nech X, Y a Z sú formuly. Ak X je ekvivalentná s Y a Y je ekvivalentná so Z, tak X je ekvivalentná so Z.*

sémantická ekvivalencia formúl
(„X a Y sú výrokovologicky ekvivalentné“,
teda „pre každé ohodnotenie v platí,
že $v \models X$ vtt $v \models Y$“)

ekvivalencia
slovenských
výrokov
(„vtedy a len
vtedy, keď“)

syntaktická
ekvivalencia
(postup. symbolov
$((X \to Y) \land$
$(Y \to X)))$

Dôkaz. Nech X, Y a Z sú formuly. Nech X je ekvivalentná s Y a Y je ekvivalentná so Z. Nech v je ľubovoľné ohodnotenie.

Ak $v \models X$, tak $v \models Y$ podľa prvého predpokladu, a teda $v \models Z$ podľa druhého predpokladu.

Nezávisle od toho, ak $v \models Z$, tak $v \models Y$ podľa druhého predpokladu, a teda $v \models X$ podľa prvého predpokladu.

Preto $v \models X$ vtt $v \models Z$. Zovšeobecnením na všetky ohodnotenia dostávame, že X a Z sú ekvivalentné. □

2.6.1. Ekvivalentné úpravy

III.18 Ekvivalentné úpravy

- Už ste určite ekvivalente upravovali formuly
- Aké kroky ste pri tom robili?

Príklad 2.50 (Nahradenie podformuly ekvivalentnou).

$$A = \neg\neg(r \land q) \qquad B = (r \land q) \qquad X = (p \rightarrow \neg\, \neg\neg(r \land q)\,)$$

$$\rightsquigarrow$$

$$Y = (p \rightarrow \neg\, (r \land q)\,)$$

Nahradenie podformuly A vo formule X formulou B, ktorá je ekvivalentná s A

III.19 Pravidlá ekvivalentných úprav

- Ako vieme, že A a B sú ekvivalentné?
  - Môžeme odvodiť sémanticky
  - V skutočnosti ste *dosadili* $(r \land q)$ za p v *známej ekvivalencii* medzi $\neg\neg p$ a p (princíp dvojitej negácie)

Príklad 2.51 (Dosadenie za premennú v ekvivalentných formulách). $C = \neg\neg\, p \qquad D = p$

$$\rightsquigarrow \qquad \rightsquigarrow$$

$$A = \neg\neg\, (r \land q) \quad B = (r \land q)$$

III.20 Korektnosť ekvivalentných úprav

- *Prečo* sú tieto úpravy *korektné* (správne)?
- Teda:
  Prečo, ak je C ekvivalentné s D,
  tak je aj A ekvivalentné s B a X ekvivalentné s Y?

III.21 Substitúcia

Oba druhy dosadení pri ekvivalentných úpravách sú *substitúcie*

Definícia 2.52 (Substitúcia)**.** Nech X, A, B sú formuly.
Substitúciou B za A v X (skrátene $X[A|B]$)) nazývame formulu, ktorá vznikne nahradením každého výskytu A v X formulou B.

III.22 Substitúcia ako cyklus

Substitúciu si vieme predstaviť ako cyklus prechádzajúci cez X:

Substitúcia ako cyklus

```
def X[A|B]:
  Y = ""
  i = 0
  while i < len(X):
    if X[i : i + len(A)] == A:
      Y += B
      i += len(A)
    else:
      Y += X[i]
      i += 1
  return Y
```

III.23 Substitúcia rekurzívne

Substitúciu si vieme predstaviť aj ako rekurzívne definovanú operáciu: (pu02)

Substitúcia rekurzívne
Pre všetky formuly A, B, X, Y, všetky výrokové premenné p a všetky binárne spojky $b \in \{\land, \lor, \rightarrow\}$:

$$\begin{aligned} X[A|B] &= B, && \text{ak } A = X \\ p[A|B] &= p, && \text{ak } A \neq p \\ (\neg X)[A|B] &= \neg(X[A|B]), && \text{ak } A \neq \neg X \\ (X\, b\, Y)[A|B] &= ((X[A|B])\, b\, (Y[A|B])), && \text{ak } A \neq (X\, b\, Y). \end{aligned}$$

III.24 Korektnosť ekvivalentných úprav

Korektnosť ekvivalentných úprav vyjadrujú nasledujúce tvrdenia:

Tvrdenie 2.53 (Dosadenie do ekvivalentných formúl)**.** *Nech A a B sú navzájom ekvivalentné formuly, p je výroková premenná a Y je formula. Potom formuly $A[p|Y]$ a $B[p|Y]$ sú ekvivalentné.*

Veta 2.54 (Ekvivalentné úpravy)**.** *Nech X je formula, A a B sú ekvivalentné formuly. Potom formuly X a $X[A|B]$ sú tiež ekvivalentné.*

III.25 Sémantické vlastnosti substitúcie

Obe tvrdenia o korektnosti sú dôsledkami nasledujúcej lemy:

Lema 2.55. *Nech X je výroková formula, p je výroková premenná, A je formula a v je ohodnotenie výrokových premenných. Potom $v \models X[p|A]$ vtt $v_{p|A} \models X$, kde $v_{p|A}$ je ohodnotenie, pre ktoré platí:*

- *$v_{p|A}(r) = v(r)$, ak r je výroková premenná a $p \neq r$;*
- *$v_{p|A}(p) = t$, ak $v \models A$;*
- *$v_{p|A}(p) = f$, ak $v \not\models A$.*

O jej platnosti sa môžeme presvedčiť indukciou na stupeň formuly X.

Veta 2.56. *Nech A, B a C sú ľubovoľné formuly, $\top$ je ľubovoľná tautológia a $\bot$ je ľubovoľná nesplniteľná formula.*
Nasledujúce dvojice formúl sú ekvivalentné:

$(A \land (B \land C))$ *a* $((A \land B) \land C)$	asociatívnosť
$(A \lor (B \lor C))$ *a* $((A \lor B) \lor C)$	
$(A \land B)$ *a* $(B \land A)$	komutatívnosť
$(A \lor B)$ *a* $(B \lor A)$	
$(A \land (B \lor C))$ *a* $((A \land B) \lor (A \land C))$	distributívnosť
$(A \lor (B \land C))$ *a* $((A \lor B) \land (A \lor C))$	
$\neg(A \land B)$ *a* $(\neg A \lor \neg B)$	de Morganove
$\neg(A \lor B)$ *a* $(\neg A \land \neg B)$	pravidlá
$\neg\neg A$ *a* A	dvojitá negácia

Veta 2.56 (Pokračovanie)**.**

$(A \land A)$ *a* A	idempotencia
$(A \lor A)$ *a* A	
$(A \land \top)$ *a* A	identita
$(A \lor \bot)$ *a* A	
$(A \lor (A \land B))$ *a* A	absorpcia
$(A \land (A \lor B))$ *a* A	
$(A \lor \neg A)$ *a* $\top$	vylúčenie tretieho *(tertium non datur)*
$(A \land \neg A)$ *a* $\bot$	spor
$(A \to B)$ *a* $(\neg A \lor B)$	nahradenie $\to$

2.6.2. Konjunktívna a disjunktívna normálna forma

III.28 Konjunkcia a disjunkcia postupnosti formúl

Dohoda

Nech $A_1, A_2, \dots, A_n$ je konečná postupnosť formúl.

- *Konjunkciu postupnosti formúl* $A_1, \dots, A_n$, teda $(((A_1 \land A_2) \land A_3) \land \cdots \land A_n)$, skrátene zapisujeme $(A_1 \land A_2 \land A_3 \land \cdots \land A_n)$, prípadne $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i$.
  - Konjunkciu *prázdnej* postupnosti formúl ($n = 0$) označujeme $\top$. Chápeme ju ako ľubovoľnú tautológiu, napríklad $(p_1 \lor \neg p_1)$.
- *Disjunkciu postupnosti formúl* $A_1, \dots, A_n$, teda $(((A_1 \lor A_2) \lor A_3) \lor \cdots \lor A_n)$, skrátene zapisujeme $(A_1 \lor A_2 \lor A_3 \lor \cdots \lor A_n)$, prípadne $\bigvee_{i=1}^{n} A_i$.
  - Disjunkciu *prázdnej* postupnosti formúl označujeme $\bot$ alebo $\square$. Chápeme ju ako ľubovoľnú nesplniteľnú formulu, napríklad $(p_1 \land \neg p_1)$.
- Pre $n = 1$ chápeme samotnú formulu A_1 ako konjunkciu aj ako disjunkciu jednoprvkovej postupnosti formúl A_1.

III.29 Konjunktívny a disjunktívny normálny tvar

Definícia 2.57.

Literál je výroková premenná alebo negácia výrokovej premennej.

Klauzula (tiež „klauza“) je *disjunkcia* literálov.

Formula v disjunktívnom normálnom tvare (DNF) je *disjunkcia* formúl, z ktorých každá je konjunkciou literálov.

Formula v konjunktívnom normálnom tvare (CNF) je *konjunkcia* klauzúl.

Príklad 2.58. Ktoré z nasledujúcich formúl sú literálmi, klauzulami, sú v CNF, v DNF?

$$
\begin{aligned}
A_1 &= p & A_6 &= ((p \land \neg q) \lor (\neg p \land r) \lor (\neg p \land q \land \neg r)) \\
A_2 &= \neg q & A_7 &= ((\neg p \lor q \lor \neg r) \land (q \to r)) \\
A_3 &= \square & A_8 &= ((\neg p \lor \neg q) \land (p \lor r) \land (p \lor q \lor \neg r)) \\
A_4 &= (p \lor \neg q) & A_9 &= ((\neg p \lor (p \land r)) \land (p \lor q \lor \neg r)) \\
A_5 &= (p \land \neg q) & A_{10} &= ((\neg p \lor p \lor r) \land (\neg(p \lor q) \lor \neg r))
\end{aligned}
$$

IV. prednáška
CNF
Hilbertovský kalkul

11. marca 2018

IV.1 Existencia DNF a CNF

Veta 2.59. 1. *Ku každej formule X existuje ekvivalentná formula D v disjunktívnom normálnom tvare.*

2. *Ku každej formule X existuje ekvivalentná formula C v konjunktívnom normálnom tvare.*

Dôkaz. 1. Zoberme všetky ohodnotenia $v_1, \ldots, v_n$ také, že $v_i \models X$ a $v_i(q) = f$ pre všetky premenné $q \notin \text{vars}(X)$. Pre každé v_i zostrojme formulu C_i ako konjunkciu obsahujúcu p, ak $v_i(p) = t$, alebo $\neg p$, ak $v_i(p) = f$, pre každú $p \in \text{vars}(X)$. Očividne formula $D = \bigvee_{1 \leq i \leq n} C_i$ je v DNF a je ekvivalentná s X (vymenúva všetky možnosti, kedy je X splnená).

2. K $\neg X$ teda existuje ekvivalentná formula D v DNF. Znegovaním D a aplikáciou de Morganových pravidiel dostaneme formulu C v CNF, ktorá je ekvivalentná s X. □

IV.2 CNF — trochu lepší prístup

- Skúmanie všetkých ohodnotení nie je ideálny spôsob ako upraviť formulu do CNF — najmä keď má veľa premenných a jej splniteľnosť chceme rozhodnúť SAT solverom.
- Je nejaký lepší *systematický* postup?

- Všimnime si:

  CNF je konjunkcia disjunkcií literálov — výrokových premenných alebo ich negácií

  Teda:

  – CNF **neobsahuje implikácie** — ako sa ich zbavíme?
  – **Negácia** sa vyskytuje **iba pri výrokových premenných** — ako ju tam dostaneme, ak to tak nie je (napr. $\neg(A \vee B)$)?
  – **Disjunkcie** sa nachádzajú iba **vnútri konjunkcií** — ako presunieme „vonkajšie" disjunkcie „dovnútra" konjunkcií (napr. $(A \vee (B \wedge C))$)?

IV.3 CNF — trochu lepší prístup — algoritmus

Algoritmus CNF

1. Nahradíme implikáciu disjunkciou:
   - $(A \rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg A \vee B)$.
2. Presunieme $\neg$ dovnútra pomocou de Morganových pravidiel a pravidla dvojitej negácie.
3. „Roznásobíme" $\wedge$ s $\vee$ podľa distributívnosti a komutatívnosti:
   - $(A \vee (B \wedge C)) \quad \Leftrightarrow \quad ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
   - $((B \wedge C) \vee A) \quad \Leftrightarrow (A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \Leftrightarrow$ $((B \vee A) \wedge (A \vee C)) \Leftrightarrow \quad ((B \vee A) \wedge (C \vee A))$
4. Prezátvorkujeme na požadovaný tvar pomocou asociatívnych pravidiel.

Tvrdenie 2.60. *Výsledná formula alg. CNF je ekvivalentná s pôvodnou a je v CNF.*

Príklad 2.61.

1. $((a \vee \neg b) \to \neg(c \vee (d \wedge \neg e)))$
2. $(\neg(a \vee \neg b) \vee \neg(c \vee (d \wedge \neg e)))$ [1 — nahradenie implikácie]
3. $((\neg a \wedge \neg\neg b) \vee \neg(c \vee (d \wedge \neg e)))$ [2 — de Morganovo pravidlo]
4. $((\neg a \wedge b) \vee \neg(c \vee (d \wedge \neg e)))$ [2 — dvojitá negácia]
5. $((\neg a \wedge b) \vee (\neg c \wedge \neg(d \wedge \neg e)))$ [2 — de Morganovo pravidlo]
6. $((\neg a \wedge b) \vee (\neg c \wedge (\neg d \vee \neg\neg e)))$ [2 — de Morganovo pravidlo]
7. $((\neg a \wedge b) \vee (\neg c \wedge (\neg d \vee e)))$ [2 — dvojitá negácia]
8. $(((\neg a \wedge b) \vee \neg c) \wedge ((\neg a \wedge b) \vee (\neg d \vee e)))$ [3 — distributívnosť]
9. $(((\neg a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg c)) \wedge ((\neg a \vee (\neg d \vee e)) \wedge (b \vee (\neg d \vee e))))$ [3]
10. $((\neg a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee (\neg d \vee e)) \wedge (b \vee (\neg d \vee e)))$ [4]
11. $((\neg a \vee \neg c) \wedge (b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg d \vee e) \wedge (b \vee \neg d \vee e))$ [4 — asoc.]

IV.5 Prečo iba *trochu* lepší prístup?

Distribúcia $\vee$ cez $\wedge$ spôsobuje nárast formuly:

- $A_2 = ((p_1 \wedge q_1) \vee (p_2 \wedge q_2))$
  $C_2 = ((p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \vee q_2) \wedge (q_1 \vee p_2) \wedge (q_1 \vee q_2))$
  $A_2 \Leftrightarrow C_2, \quad \deg(A_2) = 3, \quad \deg(B_2) = 7$

- $A_3 = ((p_1 \wedge q_1) \vee (p_2 \wedge q_2) \vee (p_3 \wedge q_3))$
  $$\begin{aligned} C_3 = \big(&(p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee q_3) \\ &\wedge (p_1 \vee q_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee q_2 \vee q_3) \\ &\wedge (q_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (q_1 \vee p_2 \vee q_3) \\ &\wedge (q_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (q_1 \vee p_2 \vee q_3)\big), \end{aligned}$$
  $A_3 \Leftrightarrow C_3, \qquad \deg(A_3) = 5, \qquad \deg(C_3) = 23$

- $A_n = ((p_1 \wedge q_1) \vee \cdots \vee (p_n \wedge q_n))$
  Koľko klauzúl bude obsahovať C_n? $\qquad 2^n$
  Akého bude stupňa? $\qquad (n-1) \cdot 2^n + (2^n - 1) = n \cdot 2^n - 1$

IV.6 Obmedzenie exponenciálneho rastu CNF

Otázka. Dá sa vyhnúť exponenciálnemu nárastu formuly $A_n = ((p_1 \wedge q_1) \vee \cdots \vee (p_n \wedge q_n))$ kvôli distributívnosti?

1. Zoberme *nové* výrokové premenné $r_1, \ldots, r_n, s$
2. Vyjadrime, že r_i je ekvivalentným zástupcom konjunkcie $(p_i \wedge q_i)$: $(r_i \leftrightarrow (p_i \wedge q_i))$
3. Použime r_i na vyjadrenie, že s je ekvivalentným zástupcom disjunkcie A_n: $(s \leftrightarrow (r_1 \vee \cdots \vee r_n))$
4. A_n teda môžeme nahradiť formulou $(s \wedge (s \leftrightarrow (r_1 \vee \cdots \vee r_n)) \wedge (r_1 \leftrightarrow (p_1 \wedge q_1)) \wedge \cdots \wedge (r_n \leftrightarrow (p_n \wedge q_n)))$

Ekvivalentnými úpravami

- druhý konjunkt upravíme na $n + 1$ klauzúl,
- ďalších n na 3 klauzuly každý

spolu iba $4 \cdot n + 2$ klauzúl!

IV.7 Cejtinova transformácia do CNF

Cejtinova transformácia (angl. Tseytin transformation)

- algoritmus nájdenia CNF použitím tohto princípu
  na všetky podformuly
- výsledok Cejtinovej transformácie **nie je ekvivalentný** s X,
  iba **ekvisplniteľný**

Definícia 2.62. Formuly X a Y sú *rovnako splniteľné* (*ekvisplniteľné*, equisatisfiable) práve vtedy, keď X je splniteľná vtt Y je splniteľná.

Tvrdenie 2.63. *Ak X a Y sú ekvivalentné, sú aj rovnako splniteľné.*

Príklad 2.64 (Ekvivalentnosť vs. ekvisplniteľnosť). Sú $(p \rightarrow q)$ a $(p \wedge r)$ rovnako splniteľné? Sú ekvivalentné?

Pri úprave formuly do CNF pre SAT solver

- *nepotrebujeme* zachovať ekvivalenciu
- *stačí* ekvisplniteľnosť

Cejtinova transformácia

1. Zostrojíme vytvárajúci strom pre formulu X a označíme formuly v ňom $X_0, X_1, X_2, \dots$ tak, aby $X_0 = X$.
2. Pre každú formulu X_i, ak $X_i = p$ pre nejakú $p \in \mathcal{V}$, označíme $y_i = p$, inak označíme ako y_i novú výrokovú premennú,
   ktorá bude „reprezentovať“ formulu X_i.
3. Vytvoríme formuly, ktoré popisujú vzťah medzi X_i a jej priamymi podformulami prostredníctvom „reprezentačných“ premenných:
   - ak X_i je tvaru $\neg X_j$ pre nejaké X_j, pridáme $(y_i \leftrightarrow \neg y_j)$,
   - ak X_i je tvaru $(X_j \wedge X_k)$, pridáme $(y_i \leftrightarrow (y_j \wedge y_k))$,
   - ak X_i je tvaru $(X_j \vee X_k)$, pridáme $(y_i \leftrightarrow (y_j \vee y_k))$,
   - ak X_i je tvaru $(X_j \rightarrow X_k)$ pridáme $(y_i \leftrightarrow (y_j \rightarrow y_k))$,
4. Pridáme formulu y_0 (chceme aby formula X bola pravdivá).
5. Všetky nové formuly z krokov 3 a 4 prevedieme do CNF (je to jednoduché) a spojíme konjunkciou.

Príklad 2.65.

$$y_0$$

$$X_0 = ((a \vee \neg b) \rightarrow \neg(c \vee (d \wedge \neg e))) \qquad (y_0 \leftrightarrow (y_1 \rightarrow y_2))$$

$$X_1 = (a \vee \neg b) \quad X_2 = \neg(c \vee (d \wedge \neg e)) \quad (y_1 \leftrightarrow (a \vee y_3)) \; (y_2 \leftrightarrow \neg y_4)$$

$$a \quad X_3 = \neg b \quad X_4 = (c \vee (d \wedge \neg e)) \qquad (y_3 \leftrightarrow \neg b) \;\; (y_4 \leftrightarrow (c \vee y_5))$$

$$b \qquad c \quad X_5 = (d \wedge \neg e) \qquad (y_5 \leftrightarrow (d \wedge y_6))$$

$$d \quad X_6 = \neg e \qquad (y_6 \leftrightarrow \neg e)$$

$$e$$

$$\big(y_0 \wedge (y_0 \leftrightarrow (y_1 \rightarrow y_2)) \wedge \cdots \wedge (y_6 \leftrightarrow \neg e)\big) \Leftrightarrow$$
$$(y_0 \wedge (\neg y_0 \vee \neg y_1 \vee y_2) \wedge (y_1 \vee y_0) \wedge (\neg y_2 \vee y_0) \wedge \cdots \wedge (\neg y_6 \vee \neg e) \wedge (e \vee y_6))$$

Tvrdenie 2.66. *Pre výslednú formulu Y algoritmu Cejtinovej transformácie formuly X platí:*

- *Y je v CNF,*
- *stupeň Y je lineárny vzhľadom na stupeň X,*
- *Y je ekvisplniteľná s X.*

Lema 2.67. *Nech $X = (A c B)$ je formula, kde $c \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$. Nech $p, q, r \in \mathcal{V}$ sa nevyskytujú v X. Potom X a $Y = (p \wedge (p \leftrightarrow (q\, c\, r)) \wedge (q \leftrightarrow A) \wedge (r \leftrightarrow B))$ sú ekvisplniteľné.*

2.7. Logické kalkuly

- Pomocou substitúcie ekvivalentných formúl vieme dokázať, že dve formuly sú ekvivalentné bez toho, aby sme vyšetrovali všetky ohodnotenia ich výrokových premenných.

- Výhodné pri formulách s veľkým počtom premenných.

- Formulu $X = ((a \lor \neg b) \rightarrow \neg(c \lor (d \land \neg e)))$ sme upravili do CNF $Y = ((\neg a \lor \neg c) \land (b \lor \neg c) \land (\neg a \lor \neg d \lor e) \land (b \lor \neg d \lor e))$ pomocou 12 substitúcií ekvivalentných podformúl.

- Zároveň sme dokázali, že X a Y sú ekvivalentné.

- Na dôkaz ich ekvivalencie tabuľkovou metódou by sme potrebovali vyšetriť 32 prípadov.

IV.13 Ekvivalencia syntakticky vs. sémanticky

- Tabuľková metóda je **sémantická**
  - využíva ohodnotenia výrokových premenných
    a spĺňanie formúl ohodnoteniami

- Substitúcie ekvivalentných formúl sú **syntaktickou** metódou
  - pracujú iba s postupnosťami symbolov, nie s ohodnoteniami

- Navyše sú **deduktívnou** metódou
  - odvodíme *iba* formuly ekvivalentné s pôvodnou

IV.14 Kalkuly — dokazovanie vyplývania syntakticky

- Ak začneme nejakou formulou a budeme substituovať ekvivalentné podformuly, dostávame postupne rôzne formuly, ktoré sú ale stále ekvivalentné s pôvodnou formulou.

- Čo keby sme začali s tautológiou?
  - Dostávame stále tautológie.

- Logiku viac zaujíma vyplývanie ako ekvivalencia a tautológie
- Vyplývanie dôsledkov z teórií sme doteraz dokazovali sémanticky — vyšetrovaním všetkých ohodnotení.
- Na tento účel ale existujú aj syntaktické metódy — *kalkuly*.
- Ukážeme si tri kalkuly:

  hilbertovský — klasický, lineárny, pomerne ťažkopádny

  tablový — stromový, prirodzenejší

  rezolvenciu — lineárny, strojový

2.8. Hilbertovský kalkul

IV.15 Hilbertovský kalkul — axiómy a pravidlo

Definícia 2.68. *Hilbertovský kalkul* sa skladá z axióm vytvorených podľa nasledujúcich schém axióm pre všetky formuly A, B, C:

(A1) $(A \to (B \to A))$

(A2) $\big((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))\big)$

(A3) $((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$

(A4) $((A \land B) \to A)$, $((A \land B) \to B)$

(A5) $(A \to (B \to (A \land B)))$

(A6) $(A \to (A \lor B))$, $(B \to (A \lor B))$

(A7) $\big((A \to C) \to \big((B \to C) \to ((A \lor B) \to C)\big)\big)$

a pravidla *modus ponens*:

(MP) $\dfrac{A \quad (A \to B)}{B}$

pre všetky formuly A a B.

[Švejdar, 2002, §1.3]

Definícia 2.69. *(Formálnym hilbertovským) dôkazom* z množiny predpokladov S je postupnosť formúl $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, v ktorej každá formula Y_i je

- predpoklad z množiny S, alebo
- záver odvodzovacieho pravidla, ktorého premisy sa nachádzajú v postupnosti pred Y_i, teda špeciálne
  - Y_i je axióma, inštancia jednej zo schém (A1)–(A7), alebo
  - existujú $j < i$ a $k < i$ také, že Y_i je záver pravidla (MP) pre formuly Y_j a $Y_k = (Y_j \rightarrow Y_i)$.

Dôkazom formuly X z S je taký dôkaz z S, ktorého posledným členom je X.

Formula X je *dokázateľná* z množiny predpokladov S (skrátene $S \vdash X$) vtt existuje dôkaz X z S.

[Švejdar, 2002, §1.3]

Príklad 2.70. Nájdime dôkaz formuly $Z = (X \rightarrow X)$ z množiny predpokladov $\{\}$
(pre ľubovoľnú formulu X):

$Y_1 = (X \rightarrow (X \rightarrow X))$ — inštancia (A1) pre $A = B = X$

$Y_2 = (X \rightarrow ((X \rightarrow X) \rightarrow X))$ — inšt. (A1) pre $A = X$, $B = (X \rightarrow X)$

$Y_3 = ((X \rightarrow ((X \rightarrow X) \rightarrow X)) \rightarrow ((X \rightarrow (X \rightarrow X)) \rightarrow (X \rightarrow X)))$ — inšt. (A2) pre $A = C = X$, $B = (X \rightarrow X)$

$Y_4 = ((X \rightarrow (X \rightarrow X)) \rightarrow (X \rightarrow X))$ — záver (MP) pre Y_2 a Y_3

$Y_5 = (X \rightarrow X)$ — záver (MP) pre Y_1 a Y_4

IV.18 Veta o dedukcii

Veta 2.71 (o dedukcii). $S \cup \{X\} \vdash Y$ *vtt* $S \vdash (X \rightarrow Y)$

Dôkaz. ($\Leftarrow$) Nech $Y_1, \dots, Y_n$ je dôkaz $(X \rightarrow Y)$ z S. Potom $Y_1, \dots, Y_n, X, Y$ je dôkaz Y z $S \cup \{X\}$.

($\Rightarrow$) Nech $Y_1, \dots, Y_n$ je dôkaz Y z $S \cup \{X\}$. Úplnou indukciou na k dokážeme, že $S \vdash (X \rightarrow Y_k)$.

Báza: Nech $k = 1$. Y_1 nemohla byť odvodená pravidlom (MP), takže je buď axióma, alebo patrí do S, alebo je X. V treťom prípade použijeme dôkaz $(X \rightarrow X)$ z predchádzajúceho príkladu 2.70. V prvých dvoch prípadoch je postupnosť $Y_1, (Y_1 \rightarrow (X \rightarrow Y_1)), (X \rightarrow Y_1)$ dôkazom $(X \rightarrow Y_1)$.

Ind. krok: Nech $k > 1$ a platí IP: pre všetky $j < k$ máme $S \vdash (X \rightarrow Y_j)$.

Ak Y_k je axióma, patrí do S, alebo je X, postupujeme ako pre $k = 1$.

Ak je Y_k záverom pravidla (MP) pre Y_i a $Y_j = (Y_i \rightarrow Y_k)$, tak $i, j < k$ a platí pre ne IP. Teda existuje dôkaz $A_1, \dots, A_a$ formuly $A_a = (X \rightarrow Y_i)$ z S a dôkaz $B_1, \dots, B_b$ formuly $B_b = (X \rightarrow (Y_i \rightarrow Y_k))$ z S. Dôkazom formuly $(X \rightarrow Y_k)$ potom je: $A_1, \dots, A_a, B_1, \dots, B_b, ((X \rightarrow (Y_i \rightarrow Y_k)) \rightarrow ((X \rightarrow Y_i) \rightarrow (X \rightarrow Y_k))), ((X \rightarrow Y_i) \rightarrow (X \rightarrow Y_k)), (X \rightarrow Y_k)$. □

IV.19 Dokazovanie s vetou o dedukcii

Príklad 2.72. Ukážme $\{\} \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ (pre ľubovoľné formuly A, B a C).

Podľa vety o dedukcii máme $\{\} \vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ vtt $\{(A \rightarrow B)\} \vdash ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ vtt $\{(A \rightarrow B), (B \rightarrow C)\} \vdash (A \rightarrow C)$ vtt $\{(A \rightarrow B), (B \rightarrow C), A\} \vdash C$.

Posledný dôkaz nájdeme veľmi ľahko:

$Y_1 = A$	predpoklad
$Y_2 = (A \rightarrow B)$	predpoklad
$Y_3 = B$	(MP) pre Y_1 a Y_2
$Y_4 = (B \rightarrow C)$	predpoklad

$$Y_5 = C \qquad \text{(MP) pre } Y_3, Y_4$$

Podľa úvodnej úvahy teda $\{\} \vdash ((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)))$ (ale nevieme, ako tento dôkaz presne vyzerá).

IV.20 Dokazovanie s vetou o dedukcii

Príklad 2.73. Ukážme $\{\} \vdash (\neg X \to (X \to Y))$ (pre ľubovoľné formuly X a Y).

$$Y_1 = (\neg X \to (\neg Y \to \neg X)) \qquad \text{(A1) pre } A = \neg X, B = \neg Y$$

$$Y_2 = ((\neg Y \to \neg X) \to (X \to Y)) \qquad \text{(A3) pre } A = Y, B = X$$

$$\vdots \qquad \text{dôkaz z príkladu 2.72}$$

$$Y_3 = Y_n = \big((\neg X \to (\neg Y \to \neg X)) \to \big(((\neg Y \to \neg X) \to (X \to Y)) \to (\neg X \to (X \to Y))\big)\big)$$

$$Y_{n+1} = \big(((\neg Y \to \neg X) \to (X \to Y)) \to (\neg X \to (X \to Y))\big) \qquad \text{(MP) pre } Y_1 \text{ a } Y_n$$

$$Y_{n+2} = (\neg X \to (X \to Y)) \qquad \text{(MP) pre } Y_2 \text{ a } Y_{n+1}$$

IV.21 Korektnosť a úplnosť hilbertovského kalkulu

Veta 2.74. *Pre každú množinu formúl S a každú formulu X platí:*

(korektnosť) *ak je X dokázateľná z S ($S \vdash X$),*
tak X výrokovologicky vyplýva z S ($S \models X$);

(úplnosť) *ak X výrokovologicky vyplýva z S ($S \models X$),*
tak X je dokázateľná z S ($S \vdash X$).

IV.22 Korektnosť a úplnosť hilbertovského kalkulu

Korektnosť (angl. soundness) hilbertovského kalkulu vyplýva matematickou indukciou na dĺžku dôkazu z korektnosti pravidiel:

> Ak S je množina výrokových formúl a ak
>
> $$\frac{A_1 \quad \cdots \quad A_n}{A}$$
>
> je pravidlo (axióma alebo (MP)), potom ak $A_1, \ldots, A_n$ súčasne vyplývajú z S, tak aj A vyplýva z S.

Úplnosť (angl. completeness) je komplikovanejšia.

IV.23

Vyskúšajte si IV.1
Ukážte $\{\} \vdash (\neg\neg X \to X)$.

V. prednáška

Tablový kalkul a jeho korektnosť

18. marca 2019

Logické kalkuly (opakovanie)

V.1 Logické kalkuly — vyplývanie syntakticky

Logický kalkul je *formálny/syntaktický* systém na dokazovanie vyplývania

- Manipulácia postupnosťami symbolov
- Pri používaní sa netreba odvolávať na sémantiku (ohodnotenia)

Zvyčajne má dve zložky:

***Axiómy* alebo ich schémy** — „základné pravdy“

Napríklad hilbertovské schémy axióm:

- $(A \to (B \to A))$
- $\big((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))\big)$
- $((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$
- $((A \land B) \to A), \quad ((A \land B) \to B)$
- $(A \to (B \to (A \land B)))$
- $(A \to (A \lor B)), \quad (B \to (A \lor B))$
- $\big((A \to C) \to \big((B \to C) \to ((A \lor B) \to C)\big)\big)$

Pravidlá — „formy správnych úsudkov“, odvodzujú „nové pravdy“ zo základných, obsiahnutých v teórii, už odvodených

Napríklad jediné pravidlo hilbertovského kalkulu:

$$\text{(MP)} \quad \frac{A \quad (A \to B)}{B}$$

V.2 Korektnosť a úplnosť

Kalkul je najužitočnejší, keď je súčasne

korektný (angl. sound):
    dovoľuje odvodiť **iba** skutočne vyplývajúce formuly,

úplný (angl. complete):
    umožňuje odvodiť **všetky** vyplývajúce formuly.

V.3 Korektnosť a úplnosť hilbertovského kalkulu

Hilbertovský kalkul je korektný aj úplný

Veta 2.74. *Pre každú množinu formúl S a každú formulu X platí:*

(korektnosť) *ak je X dokázateľná z S ($S \vdash X$), tak X výrokovologicky vyplýva z S ($S \vDash X$);*

(úplnosť) *ak X výrokovologicky vyplýva z S ($S \vDash X$), tak X je dokázateľná z S ($S \vdash X$).*

- Jednoduchá definícia a dôkazy *jeho* vlastností
- Nie úplne jednoduché použitie

2.9. Tablový kalkul

V.4 Dôkaz vyplývania sporom v slovenčine

Príklad 2.75. Dokážme, že z $T'_{\text{party}} = \{ (kim \to (jim \land \neg sarah)), (eva \to kim) \}$ vyplýva $(sarah \to \neg eva)$.

Poďme na to sporom: Predpokladajme, že existuje také ohodnotenie v, že $v \models T'_{\text{party}}$, teda (1) $v \models (kim \to (jim \land \neg sarah))$ a (2) $v \models (eva \to kim)$, ale pritom (3) $v \not\models (sarah \to \neg eva)$.

Podľa definície splnenia implikácie z faktu (3) vyplýva, že (4) $v \models sarah$ a zároveň (5) $v \not\models \neg eva$. Z (5) dostávame, že (6) $v \models eva$.

Podľa (2) máme dve možnosti: (7) $v \not\models eva$ alebo (8) $v \models kim$. Možnosť (7) je v spore s (6).

Platí teda (8) a podľa (1) ďalej môžu nastať dva prípady: (9) $v \not\models kim$, ktorý je však v spore s (8), alebo (10) $v \models (jim \wedge \neg sarah)$. V tom prípade (11) $v \models jim$ a (12) $v \models \neg sarah$, čiže (13) $v \not\models sarah$, čo je zase v spore s (4).

Vo všetkých prípadoch sme prišli k sporu, predpoklad je teda neplatný a každé ohodnotenie, ktoré spĺňa T'_{party}, spĺňa aj $(sarah \rightarrow \neg eva)$. □

V.5 Tablová notácia pre dôkazy

Dôkaz stručne zapíšeme v tablovej (tabuľkovej) notácii:

- $\mathbf{T}\, X$ označuje v spĺňa X.
- $\mathbf{F}\, X$ označuje v nespĺňa X.
- Ak z niektorého predchádzajúceho faktu o formule X priamo *z def. spĺňania vyplýva* fakt (ne)splnenia niektorej *priamej podformuly* X,
  pridáme ho ako **ďalší riadok** tabla.
  Poznačíme si k nemu písmeno α a číslo zdrojového faktu.
- Ak z niektorého predch. faktu o formule X **vyplýva**
  o jej *priamych podformulách* fakt F_1 **alebo** fakt F_2,
  tablo **rozdelíme na dve vzájomne nezávislé vetvy** (stĺpce),
  pričom prvá začne faktom F_1 a druhá faktom F_2.
  K obom si poznačíme písmeno β a číslo zdrojového faktu.
- Ak nastane **spor** medzi splnením a nesplnením *tej istej* formuly, pridáme riadok so symbolom $*$
  a poznačíme si čísla faktov, ktoré sú v spore.

V.6 Dôkaz vyplývania sporom v tablovej notácii

Príklad 2.76.

<table>
<tr><td>1.</td><td colspan="7">$\mathbf{T}(kim \to (jim \wedge \neg sarah))$</td><td>z T'_{party} †</td></tr>
<tr><td>2.</td><td colspan="7">$\mathbf{T}(eva \to kim)$</td><td>z T'_{party} †</td></tr>
<tr><td>3.</td><td colspan="7">$\mathbf{F}(sarah \to \neg eva)$</td><td>dôkaz sporom†</td></tr>
<tr><td>4.</td><td colspan="7">$\mathbf{T}\, sarah$</td><td>$\alpha 3$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td colspan="7">$\mathbf{F}\, \neg eva$</td><td>$\alpha 3$</td></tr>
<tr><td>6.</td><td colspan="7">$\mathbf{T}\, eva$</td><td>$\alpha 5$</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>$\mathbf{F}\, eva$</td><td>$\beta 2$</td><td>8.</td><td colspan="4">$\mathbf{T}\, kim$</td><td>$\beta 2$</td></tr>
<tr><td></td><td>$*$</td><td>6 a 7</td><td>9.</td><td>$\mathbf{F}\, kim$</td><td>$\beta 1$</td><td>10.</td><td>$\mathbf{T}(jim \wedge \neg sarah)$</td><td>$\beta 1$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>$*$</td><td>8 a 9</td><td>11.</td><td>$\mathbf{T}\, jim$</td><td>$\alpha 10$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>12.</td><td>$\mathbf{T}\, \neg sarah$</td><td>$\alpha 10$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>13.</td><td>$\mathbf{F}\, sarah$</td><td>$\alpha 12$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>$*$</td><td>4 a 13</td></tr>
</table>

† Tento zápis nepoužívajte vo svojich riešeniach.

V.7 Definícia tablového kalkulu

Tablová *notácia*

- Dohoda o stručnom zápise podrobných úvah v dôkaze sporom
- Neformálna a nie veľmi presná

Tablový *kalkul* — presne matematicky zadefinovaný formálny systém
Zadefinujeme:

- Význam značiek **T** a **F**
- Axiómy a pravidlá kalkulu
- Tablo — formálny dôkaz v tablovom kalkule
- Podmienky úspešného ukončenia dôkazu

Definícia 2.77. Nech X je formula výrokovej logiky.
Postupnosti symbolov $\mathbf{T}X$ a $\mathbf{F}X$ nazývame *označené formuly*.

Definícia 2.78. Nech v je ohodnotenie výrokových premenných a X je formula. Potom

- *v spĺňa* $\mathbf{T}X$ vtt v spĺňa X;
- *v spĺňa* $\mathbf{F}X$ vtt v nespĺňa X.

Dohoda
Pre označené formuly budeme používať veľké písmená zo začiatku a konca abecedy s horným indexom + a prípadne s dolnými indexmi, napr. A^+, X_7^+.
Pre množiny označených formúl budeme používať písmená S, T s horným indexom + a prípadne s dolnými indexmi, napr. S^+, T_3^+.

V.9 Spĺňanie a priame podformuly

Nasledujúce fakty vyplývajú **priamo** z definície splnenia formuly ohodnotením:

Pozorovanie 2.79. *Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných. Nech X a Y sú ľubovoľné formuly.*

1. - *Ak v spĺňa $\neg X$, tak v nespĺňa X.*
   - *Ak v nespĺňa $\neg X$, tak v spĺňa X.*
2. - *Ak v spĺňa $(X \wedge Y)$, tak v spĺňa X a v spĺňa Y.*
   - *Ak v nespĺňa $(X \wedge Y)$, tak v nespĺňa X alebo v nespĺňa Y.*
3. - *Ak v spĺňa $(X \vee Y)$, tak v spĺňa X alebo v spĺňa Y.*
   - *Ak v nespĺňa $(X \vee Y)$, tak v nespĺňa X a v nespĺňa Y.*
4. - *Ak v spĺňa $(X \to Y)$, tak v nespĺňa X alebo v spĺňa Y.*
   - *Ak v nespĺňa $(X \to Y)$, tak v spĺňa X a v nespĺňa Y.*

V.10 Tablové pravidlá

Pozorovanie 2.79 — dobrý základ pre odvodzovacie pravidlá

- Základné, ľahko overiteľné fakty
- Závery sú jednoduchšie ako premisy

Splnenie/nesplnenie vyjadríme označenými formulami podľa def. 2.78

$$\frac{\mathbf{T}\,\neg X}{\mathbf{F}\,X} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \land Y)}{\mathbf{T}\,X} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \lor Y)}{\mathbf{T}\,X \mid \mathbf{T}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \to Y)}{\mathbf{F}\,X \mid \mathbf{T}\,Y}$$

$$\frac{\mathbf{T}(X \land Y)}{\mathbf{T}\,Y}$$

$$\frac{\mathbf{F}\,\neg X}{\mathbf{T}\,X} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \land Y)}{\mathbf{F}\,X \mid \mathbf{F}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \lor Y)}{\mathbf{F}\,X} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \to Y)}{\mathbf{T}\,X}$$

$$\frac{\mathbf{F}(X \lor Y)}{\mathbf{F}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \to Y)}{\mathbf{F}\,Y}$$

V.11 Tablové pravidlá — zjednotenie zápisu

- Nemáme žiadne axiómy
- Pravidiel je veľa
- Sú však zjavne dvoch druhov:
  - $\boldsymbol{\alpha}$: Pravidlá odvodzujúce jeden záver
  - $\boldsymbol{\beta}$: Pravidlá odvodzujúce dva závery, z ktorých platí aspoň jeden
- Zjednoťme zápis pravidiel rovnakého druhu

V.12 Jednotný zápis označených formúl typu α

Definícia 2.80 (Jednotný zápis označených formúl typu α). Označená formula A^+ je *typu α* vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y. Takéto formuly budeme označovať písmenom α; α_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca, α_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}\,\neg X$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,X$
$\mathbf{F}\,\neg X$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,X$

Pozorovanie 2.81 (Stručne vďaka jednotnému zápisu). *Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných.*
Potom v spĺňa α vtt v spĺňa α_1 a v spĺňa α_2.

V.13 Jednotný zápis označených formúl typu β

Definícia 2.82 (Jednotný zápis označených formúl typu β). Označená formula B^+ je *typu β* vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y. Takéto formuly budeme označovať písmenom β; β_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca, β_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$

Pozorovanie 2.83 (Stručne vďaka jednotnému zápisu). *Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných.*
Potom v spĺňa β vtt v spĺňa β_1 alebo v spĺňa β_2.

V.14 Tablo — dôkaz v tablovom kalkule

Akú štruktúru má dôkaz zapísaný v tablovej notácii?

- $\mathbf{T}(kim \to (jim \land \neg sarah))$
- $\mathbf{T}(eva \to kim)$
- $\mathbf{F}(sarah \to \neg eva)$
- $\mathbf{T}\, sarah$
- $\mathbf{F}\, \neg eva$
- $\mathbf{T}\, eva$
  - $\mathbf{F}\, eva$ $*$
  - $\mathbf{T}\, kim$
    - $\mathbf{F}\, kim$ $*$
    - $\mathbf{T}(jim \land \neg sarah)$
      - $\mathbf{T}\, jim$
      - $\mathbf{T}\, \neg sarah$
      - $\mathbf{F}\, sarah$ $*$

Ako opíšeme vznik tabla?

V.15 Tablo pre množinu označených formúl

Definícia 2.84. *Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+* (skrátene *tablo pre S^+*) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly
a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:

  $\boldsymbol{\alpha}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.

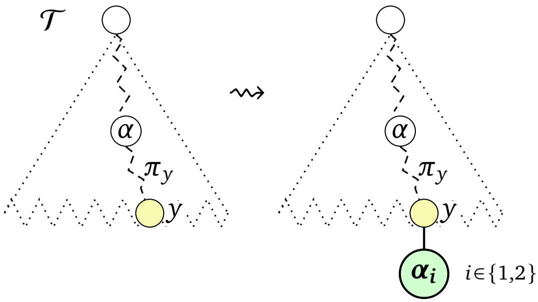
  $\boldsymbol{\beta}$: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.

S^+: Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Nič iné nie je tablom pre S^+.

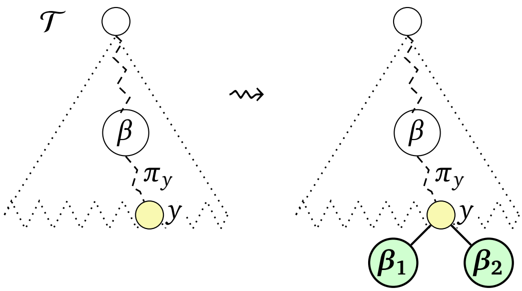
V.16 Tablá a tablové pravidlá

Pôvodné tablo **Možné priame rozšírenie** **Pravidlá a označené formuly v nich**



$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2}$$

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{F}(X \rightarrow Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}\,\neg X$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,X$
$\mathbf{F}\,\neg X$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,X$



$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{T}(X \rightarrow Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$

Legenda: y je list v table $\mathcal{T}$, π_y je cesta od koreňa k y

V.17 Uzavretosť a otvorenosť vetvy a tabla

Definícia 2.85. *Vetvou* tabla $\mathcal{T}$ je každá cesta od koreňa $\mathcal{T}$ k niektorému listu $\mathcal{T}$.

Označená formula X^+ sa *vyskytuje na vetve* π v $\mathcal{T}$ vtt sa nachádza v niektorom vrchole na π. Skrátene to budeme zapisovať $X^+ \in \text{formulas}(\pi)$.

Tablo ~ dôkaz sporom. Vetvenie ~ rozbor možných prípadov. $\implies$ Spor musí nastať vo všetkých vetvách.

Definícia 2.86. *Vetva* π tabla $\mathcal{T}$ *je uzavretá* vtt
na π sa súčasne vyskytujú označené formuly $\mathbf{F}\,X$ a $\mathbf{T}\,X$ pre nejakú formulu X.
Inak je π *otvorená*.

Tablo $\mathcal{T}$ *je uzavreté* vtt *každá* jeho vetva je uzavretá.
Naopak, $\mathcal{T}$ je *otvorené* vtt *aspoň jedna* jeho vetva je otvorená.

V.18

Spomeňte si V.1

1. Má každé tablo *aspoň* jedno priame rozšírenie?

2. Má každé tablo *najviac* jedno priame rozšírenie?

2.9.1. Korektnosť

V.19 **Korektnosť tablového kalkulu**

Veta 2.87 (Korektnosť tablového kalkulu)**.** *Nech* S^+ *je množina označených formúl a* $\mathcal{T}$ *je uzavreté tablo pre* S^+*.*
Potom je množina S^+ *nesplniteľná.*

Dôsledok 2.88. *Nech* S *je množina formúl a* X *je formula.*
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{T}\,A \mid A \in S\} \cup \{\mathbf{F}\,X\}$ *(skrátene* $S \vdash X$*),*
tak z S *vyplýva* X *(*$S \models X$*).*

Dôsledok 2.89. *Nech* X *je formula.*
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$ *(skrátene* $\vdash X$*), tak* X *je tautológia (*$\models X$*).*

VI. prednáška
Korektnosť a úplnosť tablového kalkulu

25. marca 2019

VI.1 Korektnosť — idea dôkazu

Aby sme dokázali korektnosť tabiel, dokážeme postupne dve lemy:

(K1) Ak máme tablo pre splniteľnú množinu S^+ s aspoň jednou splniteľnou vetvou, tak každé jeho priame rozšírenie má tiež splniteľnú vetvu.

(K2) Každé tablo pre splniteľnú množinu S^+ má aspoň jednu splniteľnú vetvu.

Z toho ľahko sporom dokážeme, že množina, pre ktorú sme našli uzavreté tablo je nesplniteľná.

VI.2 Korektnosť — splnenie priameho rozšírenia tabla

Hodí sa nám pomocná definícia:

Definícia 2.90. Nech S^+ je množina označených formúl, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a nech v je ohodnotenie množiny výrokových premenných. Potom:

- *v spĺňa vetvu π* v table $\mathcal{T}$ vtt
  v spĺňa *všetky* označené formuly vyskytujúce sa na na vetve π.
- *v spĺňa tablo $\mathcal{T}$* vtt v spĺňa *niektorú* vetvu v table $\mathcal{T}$.

Lema 2.91 (K1)**.** *Nech S^+ je množina označených formúl, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+*
a nech v je ohodnotenie množiny výrokových premenných.
Ak v spĺňa S^+ a v spĺňa $\mathcal{T}$, tak v spĺňa aj každé priame rozšírenie $\mathcal{T}$.

Dôkaz lemy K1. Nech S^+ je množina označených formúl, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a v je ohodnotenie množiny výrokových premenných. Nech $v \models S^+$. Nech v spĺňa $\mathcal{T}$ a v ňom vetvu π. Nech $\mathcal{T}_1$ je priame rozšírenie $\mathcal{T}$. Nastáva jeden z prípadov:

- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom α, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z obsahuje α_1 alebo α_2 pre nejakú formulu α na vetve π_y. Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π a teda je splnené.
  Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa aj α, pretože spĺňa π. Potom v musí spĺňať aj α_1 a α_2. Spĺňa teda vetvu π_z v table $\mathcal{T}_1$, ktorá rozširuje splnenú vetvu π o vrchol z obsahujúci splnenú ozn. formulu α_1 alebo α_2. Preto v spĺňa tablo $\mathcal{T}_1$.

- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom β, pridaním detí z_1 a z_2 nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z_1 obsahuje β_1 a z_2 obsahuje β_2 pre nejakú formulu β na vetve π_y. Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π a teda je splnené.
  Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa aj β, pretože spĺňa π. Potom ale v musí spĺňať aj β_1 alebo β_2. Ak v spĺňa β_1, tak spĺňa aj vetvu π_{z_1} v table $\mathcal{T}_1$, a preto v spĺňa tablo $\mathcal{T}_1$. Ak v spĺňa β_2, spĺňa aj π_{z_2}, a teda aj $\mathcal{T}_1$.

- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom S^+, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z obsahuje formulu $X^+ \in S^+$. Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π a teda je splnené.
  Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa vetvu π_z v table $\mathcal{T}_1$, pretože je rozšírením splnenej vetvy π o vrchol z obsahujúci splnenú formulu X (pretože $v \models S^+$). Preto v spĺňa tablo $\mathcal{T}_1$. □

VI.4 Korektnosť — splnenie množiny a tabla pre ňu

Lema 2.92 (K2)**.** *Nech S^+ je množina označených formúl, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+*
a nech v je ohodnotenie.
Ak v spĺňa S^+, tak v spĺňa $\mathcal{T}$.

Dôkaz lemy K2. Nech S^+ je množina označených formúl, nech v je ohodnotenie a nech $v \models S^+$. Úplnou indukciou na počet vrcholov tabla $\mathcal{T}$ dokážeme, že v spĺňa každé tablo $\mathcal{T}$ pre S^+.

Ak má $\mathcal{T}$ jediný vrchol, tento vrchol obsahuje formulu $X^+ \in S^+$, ktorá je splnená pri v. Preto je splnená jediná vetva v $\mathcal{T}$, teda aj $\mathcal{T}$.

Ak $\mathcal{T}$ má viac ako jeden vrchol, je priamym rozšírením nejakého tabla $\mathcal{T}_0$, ktoré má o 1 alebo o 2 vrcholy menej ako $\mathcal{T}$. Podľa indukčného predpokladu teda v spĺňa $\mathcal{T}_0$. Podľa predchádzajúcej lemy potom v spĺňa aj $\mathcal{T}$. □

VI.5 Korektnosť — dôkaz

Dôkaz vety o korektnosti. Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+.
Sporom: Predpokladajme, že existuje ohodnotenie, ktoré spĺňa S^+. Označme ho v.
Potom podľa lemy K2 v spĺňa tablo $\mathcal{T}$, teda v spĺňa niektorú vetvu π v $\mathcal{T}$.
Pretože $\mathcal{T}$ je uzavreté, aj vetva π je uzavretá,
teda π obsahuje označené formuly $\mathbf{T}X$ a $\mathbf{F}X$ pre nejakú formulu X.
Ale $v \models \mathbf{T}X$ vtt $v \models X$ a $v \models \mathbf{F}X$ vtt $v \not\models X$, čo je spor. □

2.9.2. Tablový dôkaz splniteľnosti

VI.6 Úplná vetva a tablo

Čo ak nevieme nájsť uzavreté tablo pre nejakú množinu ozn. formúl?

Definícia 2.93 (Úplná vetva a úplné tablo)**.** Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+.

Vetva π v table $\mathcal{T}$ *je úplná* vtt má všetky nasledujúce vlastnosti:

- pre každú označenú formulu α, ktorá sa vyskytuje na π, sa *obidve* označené formuly α_1 a α_2 vyskytujú na π;
- pre každú označenú formulu β, ktorá sa vyskytuje na π, sa *aspoň jedna* z označených formúl β_1, β_2 vyskytuje na π;

- *každá* $X^+ \in S^+$ sa vyskytuje na π.

Tablo $\mathcal{T}$ *je úplné* vtt *každá* jeho vetva je buď *úplná alebo uzavretá*.

Príklad 2.94. Vybudujme úplné tablo pre $\mathbf{F}\, X$, kde $X = (((p \vee r) \wedge (s \vee p)) \to (p \wedge (r \vee s)))$.

VI.7 Otvorené tablo a splniteľnosť

Nech tablové pravidlá v príklade použijeme v akomkoľvek,

- *nenájdeme uzavreté* tablo, ale
- *vyrobíme úplné* otvorené tablo.

Z úplného otvoreného tabla pre S^+ vieme vytvoriť ohodnotenie v:

1. nájdeme otvorenú vetvu π,
2. pre každú výrokovú premennú p
   - ak sa v π nachádza $\mathbf{T}\, p$, definujeme $v(p) = t$;
   - ak sa v π nachádza $\mathbf{F}\, p$, definujeme $v(p) = f$;
   - inak definujeme $v(p)$ ľubovoľne.

Toto v spĺňa π, a preto v *spĺňa* S^+ (všetky formuly z S^+ sa vyskytujú na π).

Otázka.

- Dá sa vždy nájsť úplné tablo?
- Naozaj sa z úplného otvoreného tabla dá vytvoriť spĺňajúce ohodnotenie?

VI.8 Existencia úplného tabla

Lema 2.95 (o existencii úplného tabla)**.** *Nech* S^+ *je konečná množina označených formúl.*
Potom existuje úplné tablo pre S^+.

Dôkaz. Vybudujme tablo $\mathcal{T}_0$ pre S^+ tak, že do koreňa vložíme niektorú formulu z S^+ a opakovaním spravidla S^+ postupne doplníme ostatné.
Potom tablo postupne rozširujeme tak, že vyberieme ľubovoľný list y tabla $\mathcal{T}_i$, ktorého vetva π_y je otvorená a nie je úplná. Potom nastane aspoň jedna z možností:

- Na π_y sa nachádza nejaká formula α, ale nenachádza sa niektorá z formúl α_1 a α_2.
- Na π_y sa nachádza nejaká formula β, ale nenachádza sa ani jedna z formúl β_1 a β_2.

Ak platí prvá alebo obe možnosti, aplikujeme pravidlo α. Ak platí druhá možnosť, aplikujeme pravidlo β. Získame tablo $\mathcal{T}_{i+1}$, s ktorým proces opakujeme.

Tento proces po konečnom počte krokov (prečo?) vytvorí nejaké tablo $\mathcal{T}_n$, v ktorom už neexistuje vetva, ktorá by bola otvorená a nebola úplná. Teda každá vetva v $\mathcal{T}_n$ je buď uzavretá alebo úplná, čiže $\mathcal{T}_n$ je úplné. $\square$

VII. prednáška
Úplnosť tabiel
Korektné pravidlá
Výroková rezolvencia

1. apríla 2019

2.9.3. Hintikkova lema

VII.1 Nadol nasýtené množiny a Hintikkova lemma

Definícia 2.96. Množina označených formúl S^+ sa nazýva *nadol nasýtená* vtt platí:

H_0 v S^+ sa nevyskytujú naraz $\mathbf{T}\,p$ a $\mathbf{F}\,p$ pre žiadnu výrokovú premennú p;

H_1 ak $\alpha \in S^+$, tak $\alpha_1 \in S^+$ a $\alpha_2 \in S^+$;

H_2 ak $\beta \in S^+$, tak $\beta_1 \in S^+$ alebo $\beta_2 \in S^+$.

Pozorovanie 2.97. *Nech π je úplná otvorená vetva nejakého tabla $\mathcal{T}$. Potom množina všetkých formúl na π je nadol nasýtená.*

Lema 2.98 (Hintikkova)**.** *Každá nadol nasýtená množina S^+ je splniteľná.*

Dôkaz Hintikkovej lemy. Chceme vytvoriť ohodnotenie v, ktoré splní všetky formuly z S^+. Definujme v pre každú výrokovú premennú p takto:

- ak $\mathbf{T}\,p \in S^+$: $v(p) = t$,
- ak $\mathbf{F}\,p \in S^+$: $v(p) = f$,
- ak ani $\mathbf{T}\,p$ ani $\mathbf{F}\,p$ nie sú v S^+, tak $v(p) = t$.

v je korektne definované vďaka H_0.

Indukciou na stupeň formuly dokážeme, že v spĺňa všetky formuly z S^+:

- v očividne spĺňa všetky označené výrokové premenné z S^+.
- $X^+ \in S^+$ je buď α alebo β:
  - Ak X^+ je α, potom obidve $\alpha_1, \alpha_2 \in S^+$ (H_1), sú nižšieho stupňa X^+, a teda podľa indukčného predpokladu sú splnené pri v, preto v spĺňa aj α (podľa pozorovania 2.81).
  - Ak X^+ je β, potom aspoň jedna z β_1, β_2 je v S^+ (H_2). Nech je to ktorákoľvek, je nižšieho stupňa ako X^+, teda podľa IP ju v spĺňa, a preto v spĺňa β (podľa pozorovania 2.83). □

2.9.4. Úplnosť

VII.3 Úplnosť

Úplnosť kalkulu neformálne:
Ak je nejaké tvrdenie pravdivé, tak existuje jeho dôkaz v kalkule.

Veta 2.99 (o úplnosti). *Nech S^+ je konečná nesplniteľná množina označených formúl.*
Potom existuje uzavreté tablo pre S^+.

Dôsledok 2.100. *Nech S je konečná teória a X je formula.*
Ak $S \models X$, tak $S \vdash X$.

Dôsledok 2.101. *Nech X je formula. Ak $\models X$, tak $\vdash X$.*

Úplnosť platí aj pre nekonečné množiny, ale dôkaz je ťažší.

VII.4 Úplnosť — dôkaz

Dôkaz vety o úplnosti. Zoberme ľubovoľnú konečnú nesplniteľnú množinu označených formúl S^+.

Podľa lemy o existencii úplného tabla vieme pre S^+ nájsť úplné tablo $\mathcal{T}$, teda také, že každá vetva je buď uzavretá alebo úplná.

Ak by niektorá vetva bola otvorená, potom musí byť úplná, a teda nadol uzavretá. Podľa Hintikkovej lemy by bola splniteľná. Pretože obsahuje všetky formuly z S^+, bola by aj S^+splniteľná, čo je spor s nesplniteľnosťou S^+.

Preto musia byť všetky vetvy tabla $\mathcal{T}$ uzavreté. □

2.9.5. Nové korektné pravidlá

VII.5 Ingrediencie korektnosti a úplnosti tabiel

Všimnite si:

- Na dokázanie *korektnosti* tablového kalkulu stačilo, aby mali pravidlá vlastnosť:

  Nech v je ohodnotenie. Ak v spĺňa premisu (a množinu S^+), tak spĺňa oba (α) závery/aspoň jeden (β) záver.

  - Vďaka tejto vlastnosti zo splniteľnej množiny S^+ skonštruujeme iba splniteľné tablá.
  - Netreba opačnú implikáciu (ak v spĺňa oba/jeden záver, tak spĺňa premisu).

- Na dôkaz *úplnosti* stačili pravidlá (S^+), α, β, pretože stačia na vybudovanie úplného tabla.

VII.6 Nové pravidlo

Čo sa stane, ak pridáme nové pravidlo, napríklad modus ponens:

$$\frac{\mathbf{T}(A \to B) \quad \mathbf{T}\,A}{\mathbf{T}\,B} \quad ? \tag{MP}$$

Upravíme definíciu priameho rozšírenia:

Úprava definície 2.84
(...) Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:

$\boldsymbol{\alpha}$: $\cdots$

$\vdots$

MP: Ak sa na vetve π_y nachádzajú *obe* formuly $\mathbf{T}(A \to B)$ a $\mathbf{T}\,A$, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci $\mathbf{T}\,B$.

Korektnosť tabiel s (MP)

- Pri dôkaze lemy K1 (2.91)

  Nech S^+ je množina označených formúl, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a v je ohodnotenie množiny výrokových premenných.
  Ak v spĺňa S^+ a v spĺňa $\mathcal{T}$, tak v spĺňa aj každé priame rozšírenie $\mathcal{T}$.

  využijeme

  Tvrdenie 2.102 (Korektnosť pravidla (MP))**.** *Nech v je ľubovoľné ohodnotenie. Ak v spĺňa* $\mathbf{T}(A \to B)$ *a* $\mathbf{T}\,A$*, tak v spĺňa* $\mathbf{T}\,B$*.*

  Dôkaz. Keďže $v \models \mathbf{T}(A \to B)$, tak $v \models (A \to B)$, teda $v \not\models A$ alebo $v \models B$.
  Pretože ale $v \models \mathbf{T}\,A$, tak $v \models A$. Takže $v \models B$. □

- Dôkaz lemy K2 (2.92) a samotnej vety o korektnosti (2.87) — bez zmeny

Úplnosť — bez zmeny, úplné tablo vybudujú základné pravidlá

Definícia 2.103 (Tablové pravidlo a jeho korektnosť)**.** Nech n a k sú prirodzené čísla, $n \geq 0$, $k > 0$, nech $P_1^+, \dots, P_n^+, C_1^+, \dots, C_k^+$ sú označené formuly nad výrokovými premennými $\{q_1, \dots, q_m\}$.

Tablové pravidlo R je množina dvojíc n-tíc a k-tic označených formúl

$$R = \left\{ \frac{P_1^+[q_1|X_1,\dots,q_m|X_m] \quad \cdots \quad P_n^+[q_1|X_1,\dots,q_m|X_m]}{C_1^+[q_1|X_1,\dots,q_m|X_m] \;\Big|\; \dots \;\Big|\; C_k^+[q_1|X_1,\dots,q_m|X_m]} \;\middle|\; X_1,\dots,X_m \in \mathcal{E} \right\},$$

ktoré vzniknú súčasnou substitúciou formúl $X_1, \dots, X_m$
za premenné $q_1, \dots, q_m$ v označených formulách $P_1^+, \dots, P_n^+, C_1^+, \dots, C_k^+$.

Prvky hornej n-tice nazývame *premisy*, prvky dolnej k-tice nazývame *závery*.

Každý prvok R nazývame *inštancia* pravidla R.

Tablové pravidlo R je *korektné* (tiež *zdravé* z angl. *sound*) vtt
pre každé ohodnotenie výrokových premenných v platí, že
ak v spĺňa *všetky* premisy $P_1^+, \dots, P_n^+$, tak v spĺňa *niektorý* záver $C_1^+, \dots, C_k^+$.

VII.9 Nové pravidlá vo všeobecnosti

Úprava definície 2.84

(...)

- ...
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:

  $\vdots$

  R: Ak sa pre nejakú inštanciu pravidla R
  na vetve π_y nachádzajú *všetky* premisy $P_1^+, \dots, P_n^+$,
  tak k uzlu y pripojíme k nových vrcholov
  obsahujúcich postupne závery $C_1^+, \dots, C_k^+$.

2.10. Rezolvencia vo výrokovej logike

VII.10 Tranzitivita implikácie

Vráťme sa k neoznačeným formulám.

Je nasledujúce pravidlo korektné?

$$\frac{(A \to B) \qquad (B \to C)}{(A \to C)}$$

Nahraďme implikácie disjunkciami:

$$\frac{(\neg A \lor B) \qquad (\neg B \lor C)}{(\neg A \lor C)}$$

VII.11 Rezolvencia

Predchádzajúce pravidlo sa dá zovšeobecniť na ľubovoľné dvojice klauzúl:

Definícia 2.104. *Rezolvenčný princíp* (*rezolvencia*, angl. *resolution principle*) je pravidlo

$$\frac{(k_1 \vee \cdots \vee p \vee \cdots \vee k_m) \qquad (\ell_1 \vee \cdots \vee \neg p \vee \cdots \vee \ell_n)}{(k_1 \vee \cdots \vee k_m \vee \ell_1 \vee \cdots \vee \ell_n)}$$

pre ľubovoľnú výrokovú premennú p
a ľubovoľné literály $k_1, \ldots, k_m, \ell_1, \ldots, \ell_n$.

Klauzulu $(k_1 \vee \cdots \vee k_m \vee \ell_1 \vee \cdots \vee \ell_n)$ nazývame *rezolventou* klauzúl $(k_1 \vee \cdots \vee p \vee \cdots \vee k_m)$ a $(\ell_1 \vee \cdots \vee \neg p \vee \cdots \vee \ell_n)$.

Tvrdenie 2.105. *Rezolvencia je korektné pravidlo, teda rezolventa je logickým dôsledkom množiny obsahujúcej obe premisy.*

VII.12 Špeciálne prípady rezolvencie

Viacero pravidiel sa dá chápať ako špeciálne prípady rezolvencie:

$$\frac{(\neg p \vee q) \quad (\neg q \vee r)}{(\neg p \vee r)} \qquad \frac{(p \to q) \quad (q \to r)}{(p \to r)} \qquad \text{(tranzitivita } \to\text{)}$$

$$\frac{(\neg p \vee \ell) \quad p}{\ell} \qquad \frac{(p \to \ell) \quad p}{\ell} \qquad \text{(modus ponens)}$$

$$\frac{(\neg p \vee q) \quad \neg q}{\neg p} \qquad \frac{(p \to q) \quad \neg q}{\neg p} \qquad \text{(modus tolens)}$$

VII.13 Pozorovania o rezolvencii

- Rezolvencia s jednotkovou klauzulou skráti druhú klauzulu:

$$\frac{\neg q \quad (p \vee q \vee \neg r)}{(p \vee \neg r)}$$

- Nie každý logický dôsledok sa dá odvodiť rezolvenciou: $\{p, q\} \models (p \vee q)$

VII.14 Pozorovania o rezolvencii

- Ak rezolvencia odvodí **prázdnu klauzulu**

$$\frac{\neg p \quad p}{\square},$$

  premisy **nie sú súčasne splniteľné**

- Niektoré dvojice klauzúl možno rezolvovať na viacerých literáloch, ale je **nekorektné urobiť to naraz**:

$$\frac{(\neg p \lor q) \quad (p \lor \neg q)}{(q \lor \neg q)} \qquad \frac{(\neg p \lor q) \quad (p \lor \neg q)}{(\neg p \lor p)} \qquad \xcancel{\frac{(\neg p \lor q) \quad (p \lor \neg q)}{\square}}$$

  Prečo?

  Lebo $\{(\neg p \lor q), (p \lor \neg q)\}$ je splniteľná
  $(v_1 = \{p \mapsto t, q \mapsto t\}, v_2 = \{p \mapsto f, q \mapsto f\})$,
  ale $\square$ je nesplniteľná

VII.15 Problematické prípady

- Opakovaným aplikovaním rezolvencie môžeme odvodzovať ďalšie dôsledky

  Príklad 2.106. Z množiny $S = \{(\neg p \lor r), (\neg q \lor r), (p \lor q)\}$ odvodíme $(r \lor r)$:

  (1) $(\neg p \lor r)$ predpoklad z S

  (2) $(\neg q \lor r)$ predpoklad z S

  (3) $(p \lor q)$ predpoklad z S

  (4) $(r \lor q)$ rezolventa (1) a (3)

  (5) $(r \lor r)$ rezolventa (2) a (4)

- Klauzula $(r \lor r)$ je evidentne ekvivalentná s r;
  r sa ale z množiny S iba rezolvenciou odvodiť nedá

- Preto potrebujeme ešte *pravidlo idempotencie*:

$$\frac{(k_1 \vee \cdots \vee \ell \vee \cdots \vee \ell \vee \cdots \vee k_n)}{(k_1 \vee \ell \vee \cdots \vee k_n)}$$

VII.16 Rezolvenčné odvodenie a zamietnutie

Definícia 2.107. *Rezolvenčné odvodenie* z množiny klauzúl S je každá (aj nekonečná) postupnosť klauzúl $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$, ktorej každý člen C_i je:

- prvkom S alebo
- rezolventou dvoch predchádzajúcich klauzúl C_j a C_k pre $j < i$ a $k < i$, alebo
- záverom pravidla idempotencie pre nejakú predchádzajúcu klauzulu C_j, $j < i$.

Zamietnutím (angl. *refutation*) množiny klauzúl S je konečné rezolvenčné odvodenie, ktorého posledným prvkom je prázdna klauzula $\square$.

Definícia 2.108. Množinu klauzúl budeme nazývať aj *klauzálna teória*.

VII.17 Korektnosť a úplnosť rezolvencie

Veta 2.109 (Korektnosť rezolvencie)**.** *Nech S je množina klauzúl. Ak existuje zamietnutie S, tak S je nesplniteľná.*

Veta 2.110 (Úplnosť rezolvencie)**.** *Nech S je množina klauzúl. Ak S je nesplniteľná, tak existuje zamietnutie S.*

VIII. prednáška
SAT solver a algoritmus DPLL
Syntax relačnej logiky prvého rádu

8. apríla 2019

2.11. Problém výrokovologickej splniteľnosti (SAT)

VIII.1 Problém SAT

Definícia 2.111 (Problém SAT)**.** *Problémom výrokovologickej splniteľnosti* (*SAT*) je problém určenia toho, či je daná množina výrokových formúl splniteľná

- Zvyčajne sa redukuje na problém splniteľnosti *klauzálnej* teórie (teda formuly v CNF)
- *SAT solver* je program, ktorý rieši problém SAT

Príklad 2.112. Je množina klauzúl S splniteľná?

$$S = \{(a \vee b), (a \vee \neg b), (\neg a \vee b), (\neg a \vee \neg b \vee \neg c), (\neg a \vee c)\}$$

VIII.2 Tabuľková metóda

Tabuľková metóda:

- Skúma *všetky* ohodnotenia výrokových premenných
- Trvá $\mathrm{O}(s2^N)$ krokov,
  - N je počet premenných a s je súčet veľkostí klauzúl
  - 2^N ohodnotení, pre každé treba zistiť, či sú všetky klauzuly splnené
- Zaberá priestor $\mathrm{O}(k2^N)$

  - k je počet klauzúl
  - Pamätáme si (píšeme na papier) celú tabuľku

- Tabuľka slúži *aj* ako dôkaz prípadnej **ne**splniteľnosti

2.11.1. Naivný backtracking

VIII.3 Naivný backtracking v Pythone

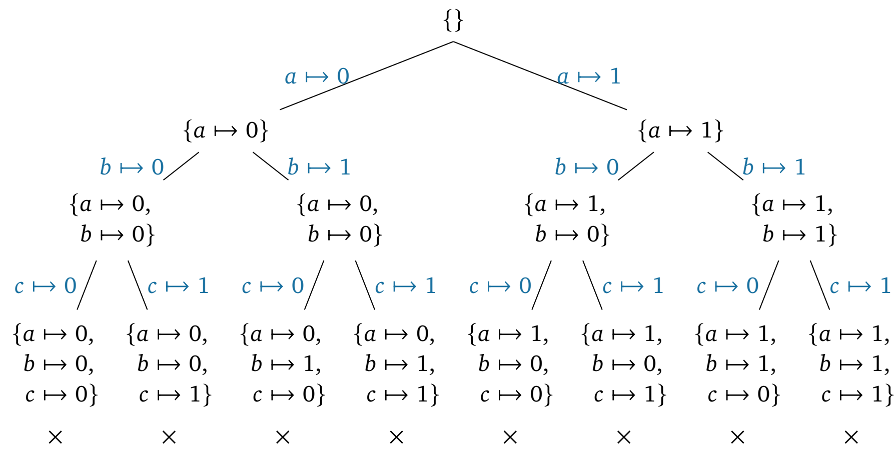
```
#!/usr/bin/env python3
class Sat(object):
    def __init__(self, n, clauses):
        self.n, self.clauses, self.solution = n, clauses, None
    def checkClause(self, e, c):
        return any( ( e[abs(lit)] if lit > 0 else not e[abs(lit)] )
                      for lit in c )
    def check(self, e):
        return all( self.checkClause(e, cl) for cl in self.clauses )
    def solve(self, i, e):
        if i >= self.n:
            if self.check(e):
                self.solution = e
                return True
            return False
        for v in [True, False]:
            e[i] = v
            if self.solve(i+1, e):
                return True
        return False
Sat(20, [[]]).solve(0, {})
```

Čas: $O(s2^N)$, priestor: $O(s+N)$;
N — počet premenných,
s — súčet veľkostí klauzúl

VIII.4 Strom prehľadávania ohodnotení

$S = \{(a \lor b), (a \lor \neg b), (\neg a \lor b), (\neg a \lor \neg b \lor \neg c), (\neg a \lor c)\}$

$\times$ znamená $v \not\models S$ $f := 0, t := 1$



VIII.5 Naivné C++

```
#include <iostream>
int N = 10; bool e[50];
bool check() {
        return false; // kontrola splnenia všetkých klauzúl
}
bool solve1(int i) {
        if (i >= N) {
                if (check())
                        return true;
                return false;
        }
        e[i] = false;
        if (solve1(i+1)) return true;
        e[i] = true;
        return solve1(i+1);
}
int main(int argc, char *argv[]) {
        N=atoi(argv[1]);
        std::cout << "N=" << N << std::endl;
        solve1(0);
        return 0;
}
```

VIII.6 Trochu lepšie C++

```
#include <iostream>
int N = 10;
bool check2(unsigned long long e) {
        return false; // kontrola splnenia všetkých klauzúl
}
bool solve2() {
        unsigned long long e, m =  1ULL << N;
        for (e=0; e < m ; ++e) {
                if (check2(e))
                        return true;
        }
        return false;
}
int main(int argc, char *argv[]) {
        N=atoi(argv[1]);
        std::cout << "N=" << N << std::endl;
        solve2();
        return 0;
}
```

VIII.7 Čas

Čas prehľadávania stromu ohodnotení v závislosti od počtu literálov

Riešenie	10	20	30	35
python	0m0.028s	0m0.877s	14m49.221s	> 7h
cpp1	0m0.001s	0m0.012s	0m11.085s	5m07.995s
cpp2	0m0.001s	0m0.008s	0m03.441s	1m50.086s

2.11.2. Optimalizácia backtrackingu

VIII.8 Priebežné vyhodnocovanie klauzúl

Strom ohodnotení:

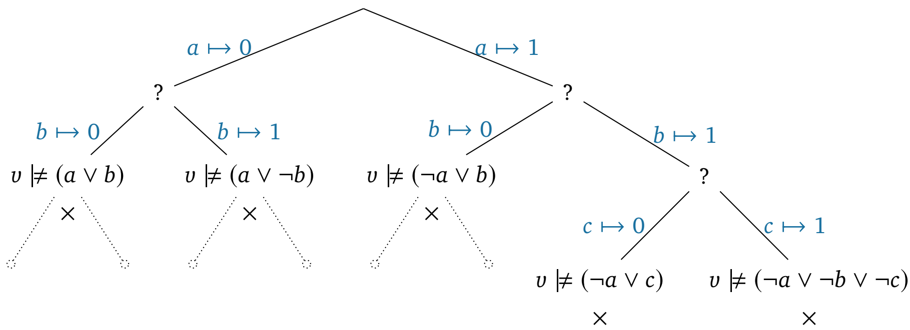
- List — ohodnotenie všetkých premenných
- Každý uzol — *čiastočné ohodnotenie*

- Ohodnotenie v uzle je *rozšírením* ohodnotenia v rodičovi
- Niektoré klauzuly sa dajú vyhodnotiť aj v čiastočnom ohodnotení
  - V čiastočnom ohodnotení $v = \{a \mapsto 0, b \mapsto 1\}$ sa dá určiť splnenie $(a \lor b)$, $(a \lor \neg b)$, $(\neg a \lor b)$ z našej S
- Ak nájdeme nesplnenú, môžeme hneď „backtracknúť" — zastaviť prehľadávanie vetvy a vrátiť sa o úroveň vyššie

VIII.9 Prehľadávanie s priebežným vyhodnocovaním

$S = \{(a \lor b), (a \lor \neg b), (\neg a \lor b), (\neg a \lor \neg b \lor \neg c), (\neg a \lor c)\}$

$\times$ znamená $v \not\models S$? znamená zatiaľ žiadna nesplnená klauzula



VIII.10 Zjednodušenie množiny klauzúl podľa literálu

Nech v je čiastočné ohodnotenie, v ktorom $v(a) = 1$.

Každé rozšírenie v' ohodnotenia v:

- Splní klauzuly obsahujúce literál a
  - $\{a \mapsto 1, \ldots\} \models (a \lor b)$
  - $\{a \mapsto 1, \ldots\} \models (a \lor \neg b)$
- Splní klauzulu $(\ell_1 \lor \cdots \lor \neg a \lor \cdots \lor \ell_n)$ obsahujúcu $\neg a$ *vtt* splní *zjednodušenú* klauzulu $(\ell_1 \lor \cdots \lor \cdots \lor \ell_n)$

- $\{a \mapsto 1, \ldots\} \models (\neg a \lor \neg b \lor \neg c)$ vtt $\{a \mapsto 1, \ldots\} \models (\neg b \lor \neg c)$
- Mimochodom, $(\neg b \lor \neg c)$ je rezolventa a a $(\neg a \lor \neg b \lor \neg c)$

Takže:

- Klauzuly s a môžeme *vynechať*
- Klauzuly s $\neg a$ môžeme *zjednodušiť*

VIII.11 Zjednodušenie množiny klauzúl podľa literálu

Množinu klauzúl

$$S = \{ (a \lor b), (a \lor \neg b), (\neg a \lor b), (\neg a \lor \neg b \lor \neg c), (\neg a \lor c) \}$$

teda môžeme *zjednodušiť podľa* a na

$$S|_a = \{ b, (\neg b \lor \neg c), c \}.$$

Analogicky môžeme S zjednodušiť podľa $\neg a$ na

$$S|_{\neg a} = \{ b, \neg b \}.$$

VIII.12 Zjednodušenie množiny klauzúl podľa literálu

Definícia 2.113. Nech p je výroková premenná.
Komplementom literálu p je $\neg p$. *Komplementom literálu* $\neg p$ je p.
Komplement literálu ℓ označujeme $\bar{\ell}$.

Definícia 2.114. Nech ℓ je literál a S je množina klauzúl. Potom definujeme

$$S|_\ell = \{ (\ell_1 \lor \cdots \lor \cdots \lor \ell_n) \mid (\ell_1 \lor \cdots \lor \bar{\ell} \lor \cdots \lor \ell_n) \in S \} \cup \{ C \mid C \in S, \text{ v } C \text{ sa nevyskytuje } \ell \text{ ani } \bar{\ell} \}.$$

Tvrdenie 2.115. *Nech ℓ je literál a S je množina klauzúl.
Potom množiny $S \cup \{\ell\}$ a $S|_\ell$ sú ekvisplniteľné.*

VIII.13 Propagácia jednotkových klauzúl

Zjednodušenie množiny klauzúl $\rightsquigarrow$ ľahšie hľadanie spĺňajúcich ohodnotení:
Nech $T = \{(a \lor \neg b), (a \lor b \lor c)\}$, začnime zjednodušením podľa $\neg a$:

- $T' := T|_{\neg a} = \{\neg b, (b \lor c)\}$

- $\neg b$ — *jednotková klauzula* (*unit clause* alebo iba *unit*)
- T' spĺňajú *iba* ohodnotenia v, kde $v(b) = 0$
- Takže T' zjednodušíme podľa $\neg b$

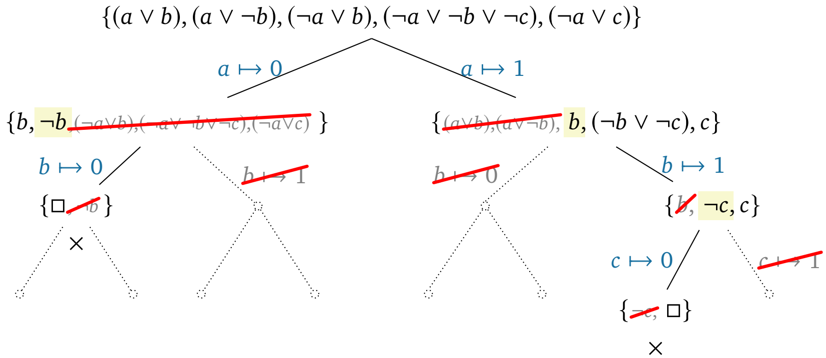
• $T'' := T'|_{\neg b} = \{c\}$

- T'' spĺňajú iba ohodnotenia v, kde $v(c) = 1$
- Takže T'' zjednodušíme podľa c

• $T''' := T''|_c = \{\}$
prázdna, triviálne splniteľná, podľa tvrdenia 2.115 je splniteľná aj T

Propagácia jednotkových klauzúl (*unit propagation*) je proces opakovaného rozširovania ohodnotení podľa jednotkových klauzúl a zjednodušovania

VIII.14 Prehľadávanie so zjednodušovaním klauzúla unit propagation



VIII.15 Eliminácia nezmiešaných literálov

Všimnime si literál u v množine klauzúl:

$$T = \{(\neg a \lor \neg b \lor c), (\neg a \lor u), (\neg b \lor u), a, b, \neg c\}$$

Literál u je *nezmiešaný* (angl. *pure*) v T:
u sa vyskytuje v T, ale jeho komplement $\neg u$ sa tam nevyskytuje
Nech

$$T' := T|_u = \{(\neg a \lor \neg b \lor c), a, b, \neg c\}$$

- Ak nájdeme ohodnotenie $v \models T'$,
  tak $v_0 := v(u \mapsto 0)$ aj $v_1 := v(u \mapsto 1)$ sú modelmi T'
  a v_1 je navyše modelom T, teda T je splniteľná

- Ak je T' nesplniteľná,
  tak je nesplniteľná každá jej nadmnožina, teda aj T

Z hľadiska splniteľnosti sú klauzuly obsahujúce u nepodstatné.
Stačí uvažovať $T|_u$.

VIII.16 Eliminácia nezmiešaných literálov

Definícia 2.116. Nech ℓ je literál a S je množina klauzúl.
Literál ℓ je *nezmiešaný* (*pure*) v S vtt ℓ sa vyskytuje v niektorej klauzule z S, ale jeho komplement $\bar{\ell}$ sa nevyskytuje v žiadnej klauzule z S.

Tvrdenie 2.117. *Nech ℓ je literál a S je množina klauzúl.
Ak ℓ je nezmiešaný v S, tak S je splniteľná vtt $S|_\ell$ je splniteľná.*

2.11.3. DPLL

Algoritmus 2.118 (Davis and Putnam [1960], Davis et al. [1962]).

function DPLL(Φ, e)
    if Φ obsahuje prázdnu klauzulu **then**
        return False
    end if
    if e ohodnocuje všetky premenné **then**
        return True
    end if
    while existuje jednotková (unit) klauzula ℓ vo Φ **do**
        $\Phi, e \leftarrow$ UNIT-PROPAGATE(ℓ, Φ, e)
    end while
    while existuje nezmiešaný (pure) literál ℓ vo Φ **do**
        $\Phi, e \leftarrow$ PURE-LITERAL-ASSIGN(ℓ, Φ, e)
    end while

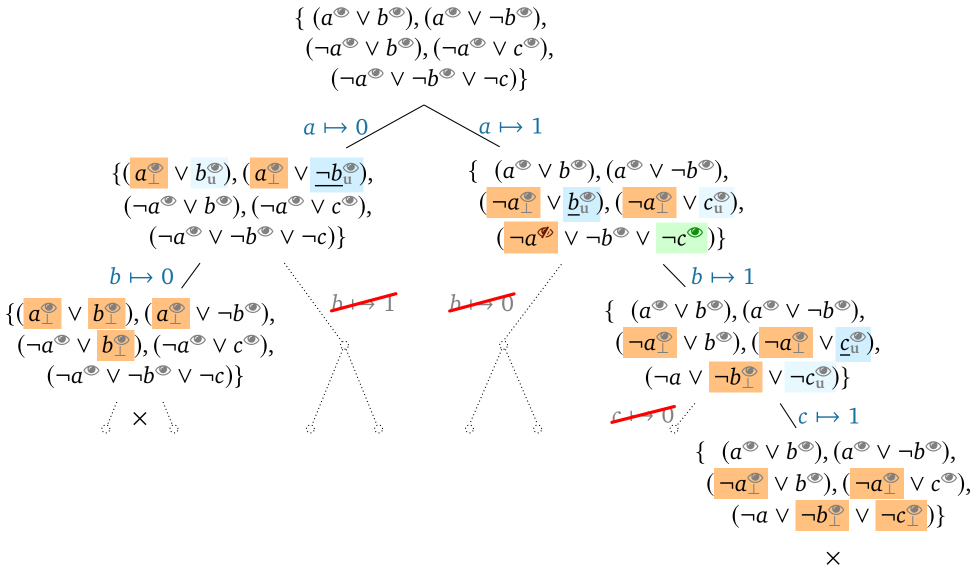
```
    x ← CHOOSE-BRANCH-LITERAL(Φ, e)
    return DPLL(Φ|x, e(x ↦ T)) or DPLL(Φ|¬x, e(x ↦ F))
end function
```

VIII.18 Technika sledovaných literálov (watched literals)

Aby sme nemuseli zjednodušovať množinu klauzúl:

- Pre každú klauzulu máme 2 *sledované literály*.
- Sledovaný literál vždy musí byť *nenastavený* alebo *true*.
- Ak nejaký literál nastavíme na *true*: nič nemusíme robiť.
- Ak nejaký literál nastavíme na *false*: musíme nájsť iný.
  Ak iný nie je, práve sme vyrobili jednotkovú klauzulu (všetky literály okrem toho druhého sledovaného sú *false*).
- Ak backtrackujeme: nič nemusíme robiť (možno sa niektoré sledované literály stali *nenastavenými*).

VIII.19 Prehľadávanie s unit propagation a sledovaním



3. Logika prvého rádu

3.1. Syntax relačnej logiky prvého rádu

VIII.20 Štruktúra jednoduchých viet

- Výroková logika *veľmi* zjednodušuje prirodzený jazyk:
  - skúma iba štruktúru tvrdení tvorenú spojkami,
  - atomické výroky *nemajú štruktúru*
- Niekedy to neprekáža — konštatovanie globálneho stavu:
  - Prší.
  - Cesta je mokrá.
  - Je pondelok.

VIII.21 O čom hovoria atomické výroky?

- Atomické výroky často hovoria o *vlastnostiach objektov*
  - Jerry je myš domová.
  - Hlohovský je minister.
  - Logika je ľahká.

  alebo *vzťahoch* objektov
  - Dorothy je staršia ako George.
  - Komorník je bohatší ako grófka Agáta.
  - Hlohovský prijal úplatok 250 tisíc eur od Veseliča v roku 2013.
- Výroková logika vynucuje *samostatné výrokové premenné* pre rôzne *kombinácie* objektov, vlastností a vzťahov — neintuitívne, nepraktické
- Existujú ale iné logiky ako výroková
- *Logika prvého rádu* rozoznáva štruktúru atomických výrokov

VIII.22 Štruktúra jednoduchých viet

- Jednoduché vety v prirodzených jazykoch sa delia na
  podmetovú a *prísudkovú* časť
  Hlohovský prijal úplatok 250 tisíc eur od Veseliča v roku 2013
  Prísudková časť sa ďalej delí na:

prísudok	*predmet*	*predmet*	*prísl. urč. času*
prijal	úplatok 250 tisíc eur	od Veseliča	v roku 2013

- Logika prvého rádu nerozoberá štruktúru atomických výrokov až tak podrobne

VIII.23 Predikátové symboly a ich argumenty

- *Atomické formuly* (jednoduché výroky) *v logike prvého rádu*:
  $\mathit{predikátový\_symbol}(\mathit{argument}_1, \mathit{argument}_2, \ldots, \mathit{argument}_n)$

  Predikátový symbol ∼ prísudok (alebo celá prísudková časť):
  (je) $\texttt{minister}$, (je) $\texttt{starší}$ (ako), $\texttt{prijal}$, <, ...

  Jeho *argumenty* ∼ podmet, predmet, ...
  Úloha je daná *pozíciou* (ako v prog. jazykoch).

- Predikátový symbol má jednoznačne určenú *aritu* — očakávaný počet argumentov

- *Vždy* musí mať práve toľko argumentov, aká je jeho arita

Dohoda 3.1. Aritu budeme niekedy písať ako horný index symbolu ($\texttt{minister}^1$, $\texttt{starší}^2$, $\texttt{prijal}^4$, $<^2$).

VIII.24 Význam predikátových symbolov

Unárny predikátový symbol (teda s aritou 1)
zvyčajne predstavuje *vlastnosť*

$\texttt{minister}^1(arg_1)$	arg_1 je minister
$\texttt{myš\_domová}^1(arg_1)$	arg_1 je myš domová
$\texttt{ľahká}^1(arg_1)$	arg_1 je ľahká

***Binárny*, *ternárny*, ...** predikátový symbol (s aritou 2, 3, ...) predstavuje *vzťah*

$\texttt{starší}^2(arg_1, arg_2)$	arg_1 je starší ako arg_2
$\texttt{medzi}^3(arg_1, arg_2, arg_3)$	arg_1 sa nachádza medzi arg_2 a arg_3
$\texttt{prijal}^4(arg_1, arg_2, arg_3, arg_4)$	arg_1 prijal arg_2 od arg_3 v čase arg_4

VIII.25 Výber predikátových symbolov

- Predikátový symbol predstavuje vlastnosť alebo vzťah, ktorého *pravdivosť* pre dané argumenty sa dá určiť *jednoznačne*
  - Napríklad pravdivosť vzťahu *byť vyšší ako* sa *dá* určiť jednoznačne.
  - Naopak pravdivosť vlastnosti *byť vysoký* sa *nedá* určiť jednoznačne.
    - Takýmito neostrými vlastnosťami sa zaoberajú *fuzzy* logiky.
- Často zanedbávame detaily — pomocné slovesá, predložky, skloňovanie, rod, ...: $\texttt{starší}^2(arg_1, arg_2)$ — arg_1 je starší/staršia/staršie ako arg_2

VIII.26 Konkrétne argumenty predikátov — konštanty

- V prirodzenom jazyku *vlastné mená* označujú konkrétne, známe objekty alebo ľudí.
- V logike prvého rádu konkrétne, pevne dané objekty alebo hodnoty označujeme *symbolmi konštánt*.
  - Dorothy, Hlohovský, Jerry, 0, 1, 2, ..., rok2013
- Môžu byť *argumentmi predikátových symbolov* v atomických formulách
  - minister(Hlohovský), starší(Dorothy, George), prijal(Hlohovský, úplatok250000€, Veselič, rok2013)

- Samé o sebe *nie sú formulami*, nemajú pravdivostnú hodnotu.
- Dva symboly konštánt môžu označovať ten istý objekt:
  - stvrty_prezident_SR a Andrej_Kiska
- *Rovnostné atómy* — špeciálny druh atomických formúl:
  - stvrty_prezident_SR ≐ Andrej_Kiska

VIII.27 Výrokové spojky a atomické formuly

- V logike prvého rádu môžeme atomické formuly *spájať výrokovými spojkami* rovnako ako vo výrokovej logike:
  - ((matka(Dorothy)∧syn(George)) → starší(Dorothy, George))
  - (zomrel(Stephen_Hawking) → ¬ najznámejší_žijúci_fyzik ≐ Stephen_Hawking)
  - (prijal(Hlohovský, úplatok250000€, Veselič, rok2013) → ¬dôveryhodný(Hlohovský))
- Máme ale aj zaujímavejšie možnosti. . .

VIII.28 Premenné a otvorené atomické formuly

- Atomické formuly nemusia vyjadrovať iba vlastnosti *konkrétnych* objektov označených konštantami
- Argumentami predikátových symbolov môžu byť aj *symboly indivíduových premenných* (skrátene *premenné*)

  Dohoda 3.2. Ako premenné budeme zvyčajne používať malé písmená z konca abecedy u, v, w, x, y, z s prípadnými dolnými indexmi.
- Zastupujú objekty zo sveta,
  o ktorých chceme vysloviť nejakú vlastnosť alebo vzťah,
  ale nemôžeme ich označiť konštantami

- Atomické formuly s premennými nazývame *otvorené*
  - $\mathtt{star\check{s}\acute{i}}(x, \mathrm{Dorothy})$, $\mathtt{minister}(z_5)$

  Nepredstavujú plnohodnotné výroky, ale *výrokové formy*
- Premenné a formuly s nimi
  nadobúdajú význam pomocou *kvantifikátorov*

VIII.29 Všeobecný kvantifikátor

- *Všeobecný kvantifikátor* $\forall$ predstavuje zámená
  „každý“, „všetci“, „pre všetky“, ...
- *Viaže* premennú, ktorá za ním nasleduje
- Vyjadruje, že vlastnosť,
  ktorú nasledujúca formula opisuje pre viazanú premennú,
  majú *všetky objekty*
  - $\forall x\ \mathtt{star\check{s}\acute{i}}(x, \mathrm{Dorothy})$ — každý je starší ako Dorothy
- Kvantifikovaná formula nemusí byť atomická:
  - $\forall x(\mathtt{star\check{s}\acute{i}}(x, \mathrm{Dorothy}) \lor \neg\mathtt{star\check{s}\acute{i}}(\mathrm{George}, x))$

VIII.30 Existenčný kvantifikátor

- *Existenčný kvantifikátor exists* predstavuje frázy
  „niekto“, „niečo“, „aspoň jedno“, „existuje/je ... také, že ... “, ...
- Vyjadruje, že vlastnosť,
  ktorú nasledujúca formula opisuje pre viazanú premennú,
  má *aspoň jeden objekt*
  - $\exists x\ \mathtt{star\check{s}\acute{i}}(x, \mathrm{George})$ — niekto je starší ako George
- Kvantifikovaná formula nemusí byť atomická:
  - $\exists x(\mathtt{star\check{s}\acute{i}}(x, \mathrm{George}) \land \mathtt{star\check{s}\acute{i}}(\mathrm{Virginia}, x))$

- Kvantifikovaná formula môže obsahovať ďalšie kvantifikátory:
  - $\exists x\, \forall y\ \texttt{starší}(x, \texttt{y})$
  - $\forall x\, \big(\exists y\, \exists u\, \exists z\, (\texttt{prijal}(x, u, \texttt{y}, \texttt{z}) \land \texttt{úplatok}(u)) \to \neg \texttt{dôveryhodný}(x)\big)$

VIII.31 Symboly jazyka relačnej logiky prvého rádu

Definícia 3.3. *Symbolmi jazyka $\mathcal{L}$ relačnej logiky prvého rádu* sú:

symboly (indivíduových) premenných z nejakej nekonečnej spočítateľnej množiny $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ (označujeme ich x, y, …);

mimologické symboly, ktorými sú

symboly konštánt z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ (označované a, b, …);

predikátové symboly z nejakej spočít. množiny $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ (ozn. P, R, …);

logické symboly, ktorými sú

logické spojky: unárna $\neg$, binárne $\land$, $\lor$, $\to$,

symbol rovnosti $\doteq$,

kvantifikátory: *existenčný* $\exists$ a *všeobecný* $\forall$;

pomocné symboly (,) a , (ľavá, pravá zátvorka a čiarka).

Množiny $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ sú vzájomne disjunktné.
Logické a pomocné symboly sa nevyskytujú v symboloch z $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.
Každému symbolu $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$ je priradená *arita* $\operatorname{ar}(P) \in \mathbb{N}^+$.

VIII.32 Symboly jazyka relačnej logiky prvého rádu

Poznámka 3.4. Symboly (konštánt, funkčné, predikátové) môžu byť nealfabetické (`1`, `<`, `+`), či tvorené viacerými znakmi (`Virginia`, `dcéra`).

Definícia 3.5 (Term)**.** Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu. Symboly premenných z $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ a konštánt z $\mathcal{C}_{\mathcal{L}}$ súhrnne nazývame *termy*.

Definícia 3.6 (Atomické formuly)**.** Nech $\mathcal{L}$ je jazyk relačnej logiky prvého rádu.

Rovnostný atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $t_1 \doteq t_2$,
: kde t_1 a t_2 sú termy.

Predikátový atóm jazyka $\mathcal{L}$ je každá postupnosť symbolov $P(t_1, \ldots, t_n)$, kde
: P je predikátový symbol s aritou n a $t_1, \ldots, t_n$ sú termy.

Atomickými formulami (skrátene *atómami*) jazyka $\mathcal{L}$
: súhrnne nazývame všetky rovnostné a predikátové atómy jazyka $\mathcal{L}$.

Množinu všetkých atómov jazyka $\mathcal{L}$ označujeme $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$.

Definícia 3.7. Množina $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ všetkých *formúl* jazyka relačnej logiky prvého rádu $\mathcal{L}$
je *najmenšia* množina postupností symbolov jazyka $\mathcal{L}$, pre ktorú platí:

- Všetky atomické formuly z $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}$ sú formulami z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (teda $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$).
- Ak A je formula z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj $\neg A$ je formula z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (*negácia* A).
- Ak A a B sú formuly z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$ sú formuly z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (*konjunkcia*, *disjunkcia*, *implikácia* A a B).
- Ak x je indivíduová premenná a A je formula z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, tak aj $\exists x\, A$ a $\forall x\, A$ sú formuly z $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (*existenčná* a *všeobecná kvantifikácia* formuly A vzhľadom na x).

Dohoda 3.8. Formuly označujeme písmenami A, B, C, … s prípadnými indexmi.
$(A \leftrightarrow B)$ je skratka postupnosti symbolov $((A \to B) \land (B \to A))$.

3.2. Formalizácia v logike prvého rádu

3.2.1. Jednoduchá formalizácia

VIII.35 Jednoduchá formalizácia

Príklad 3.9 (podľa Genesereth and Kao [2013]). Sformalizujme v jazyku logiky prvého rádu túto situáciu:

V byte bývajú 4 spolubývajúce: Aďa, Biba, Ciri a Dada.
Niektoré sa kamarátia a niektoré sa nemajú rady,
ale máme o tom iba tieto nepriame informácie:

1. Biba má rada Ciri alebo Dadu.
2. Aďa má rada všetkých, ktorých má rada Biba.
3. Ciri má rada každého, kto má rád ju.
4. Biba má rada niekoho, kto ju má rád.
5. Žiadna nemá rada seba samú.
6. Každá má rada niekoho.
7. Niekoho majú rady všetky.

VIII.36 Jednoduchá formalizácia

Riešenie. $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{x, y, z\}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{Aďa}, \mathrm{Biba}, \mathrm{Ciri}, \mathrm{Dada}\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{r}^2\}$
$\mathrm{r}(x, y)$ znamená „x má rada y“

1. $(\mathrm{r}(\mathrm{Biba}, \mathrm{Ciri}) \lor \mathrm{r}(\mathrm{Biba}, \mathrm{Dada}))$
2. $\forall x(\mathrm{r}(\mathrm{Biba}, x) \rightarrow \mathrm{r}(\mathrm{Aďa}, x))$
3. $\forall x(\mathrm{r}(x, \mathrm{Ciri}) \rightarrow \mathrm{r}(\mathrm{Ciri}, x))$
4. $\exists x(\mathrm{r}(x, \mathrm{Biba}) \land \mathrm{r}(\mathrm{Biba}, x))$
5. $\neg \exists x\, \mathrm{r}(x, x)$

6. $\forall x\, \exists y\, \mathtt{r}(x, y)$
7. $\exists x\, \forall y\, \mathtt{r}(y, x)$

3.2.2. Základné idiómy

VIII.37 Základné idiómy: Obmedzená kvantifikácia

Niektoré slovné obraty a ich prvorádové formalizácie sú veľmi bežné, ale pre začiatočníka nie úplne priamočiare:

Obmedzená kvantifikácia je všeobecné alebo existenčné tvrdenie, ktoré sa vzťahuje iba na objekty s nejakou vlastnosťou:

- „Každý, kto má vlastnosť P, má vlastnosť Q.“ / „Každý P je Q.“:
  - $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
- „Niekto, kto má vlastnosť P, má vlastnosť Q.“/ „Niektorý P je Q.“
  - $\exists x(P(x) \land Q(x))$

VIII.38 Základné idiómy: Neexistencia

Neexistencia je negované existenčné tvrdenie, v slovenčine sa často vyjadruje *dvojitým záporom* [negatívne zámeno (nikto/nič) a negatívne tvrdenie]:

Jednoduchá vlastnosť „Nikto nie je dokonalý“:

- S dôrazom na zámeno: $\neg\exists x\, \mathtt{dokonalý}(x)$
- S dôrazom na negatívne tvrdenie: $\forall x\, \neg\mathtt{dokonalý}(x)$

Viacero vlastností „Žiaden/nijaký vegán nie je obézny“:

- S dôrazom na zámeno:
  - $\neg\exists x\, (\mathtt{vegán}(x) \land \mathtt{obézny}(x))$
- S dôrazom na negatívne tvrdenie:
  - $\forall x\, \neg(\mathtt{vegán}(x) \land \mathtt{obézny}(x))$

- $\forall x\,(\neg\texttt{vegán}(x) \lor \neg\texttt{obézny}(x))$
- $\forall x\,(\texttt{vegán}(x) \to \neg\texttt{obézny}(x))$

VIII.39 Základné idiómy: Zamlčaná a zdanlivá existencia

Zamlčaná existencia

- každý vegán si kúpil tekvicu:
  - $\forall x(\texttt{vegán}(x) \to \exists y(\texttt{kúpil}(x, y) \land \texttt{tekvica}(y)))$
- žiadny vegán si nekúpil syr:
  - $\neg\exists x(\texttt{vegán}(x) \land \exists y(\texttt{kúpil}(x, y) \land \texttt{syr}(y))$
  - $\forall x(\texttt{vegán}(x) \to \neg\exists y(\texttt{kúpil}(x, y) \land \texttt{syr}(y))$
  - $\forall x(\texttt{vegán}(x) \to \forall y(\neg\texttt{kúpil}(x, y) \lor \neg\texttt{syr}(y))$
  - $\forall x(\texttt{vegán}(x) \to \forall y(\texttt{kúpil}(x, y) \to \neg\texttt{syr}(y))$

Existencia v antecedente s odkazom v konzekvente

- ak je *niekto* vegán, tak (*on*) nie je obézny:
  - „nie je obézny“ sa odvoláva na „niekto“
  - „niekto“ teraz nevyjadruje existenciu!
  - $\forall x(\texttt{vegán}(x) \to \neg\texttt{obézny}(x))$

3.2.3. Nutné a postačujúce podmienky

VIII.40 Nutné a postačujúce podmienky

- Často sa vyskytujú tvrdenia typu:
  1. Vegán je každý, kto si kúpil karfiol.
  2. Vegán je iba ten, kto si kúpil tekvicu.
- Hlavná veta („Vegán je . . . “) vyjadruje nejakú *vlastnosť*

- Vedľajšia veta („kto si ...“) vyjadruje *podmienku*, ktorá súvisí s touto vlastnosťou

- Aký je rozdiel medzi týmito podmienkami?

VIII.41 Postačujúca podmienka

Prvé tvrdenie „Vegán je každý, kto si kúpil karfiol.“

- Hovorí, že na to, aby niekto bol vegánom, *stačí*, aby platila podmienka, že si kúpil karfiol

- Kúpenie si karfiolu je teda *postačujúcou* podmienkou vegánstva

- Ekvivalentne:
  „Pre každého platí, že je vegán, ak si kúpil karfiol.“
  „Pre každého platí, že ak si kúpil karfiol, tak je vegán.“

- Formalizácia je teda $\forall x \big(\exists y(\texttt{kúpil}(x, y) \land \texttt{karfiol}(y)) \to \texttt{vegán}(x)\big)$

VIII.42 Nutná podmienka

Druhé tvrdenie „Vegán je *iba* ten, kto si kúpil tekvicu.“

- Hovorí, že na to, aby niekto bol vegánom, *nevyhnutne* preňho platí podmienka, že si kúpil tekvicu (keby si ju nekúpil, nebol by vegánom)

- Kúpenie si tekvice je teda *nutnou* podmienkou vegánstva

- Ekvivalentne:
  „Pre každého platí, že je vegán, *iba* ak si kúpil tekvicu.“
  „Pre každého platí, že ak si *ne*kúpil tekvicu, tak *nie* je vegán.“
  „Pre každého platí, že ak je vegán, tak si kúpil tekvicu.“

- Formalizácia je teda $\forall x \big(\texttt{vegán}(x) \to \exists y(\texttt{kúpil}(x, y) \land \texttt{tekvica}(y))\big)$

3.2.4. Idiómy s rovnosťou

VIII.43 Idiómy s rovnosťou: Enumerácia

Vymenovanie objektov s vlastnosťou

- V byte č. 14 bývajú Aďa, Biba, Ciri, Dada.
  - $\big(\texttt{býva\_v}(\texttt{Aďa}, \texttt{byt14}) \land \cdots \land \texttt{býva\_v}(\texttt{Dada}, \texttt{byt14})\big)$

  Ekvivalentne:
  Každá z Aďa, Biba, Ciri, Dada býva v byte č. 14.
  - $\forall x\big((x \doteq \texttt{Aďa} \lor \cdots \lor x \doteq \texttt{Dada}) \to \texttt{býva\_v}(x, \texttt{byt14})\big)$
- V byte č. 14 bývajú *iba* Aďa, Biba, Ciri, Dada.
  Každý, kto býva v byte č. 14, je jedna z Aďa, Biba, Ciri, Dada.
  - $\forall x\big(\texttt{býva\_v}(x, \texttt{byt14}) \to (x \doteq \texttt{Aďa} \lor \cdots \lor x \doteq \texttt{Dada})\big)$

VIII.44 Idiómy s rovnosťou: Obmedzenia počtu

Aspoň k:

- Jaro si kúpil aspoň dve tekvice.
- Existujú dve *navzájom rôzne* tekvice, ktoré si Jaro kúpil.
  - $\exists t_1 \exists t_2\big(\boldsymbol{\neg\, t_1 \doteq t_2} \land \texttt{tekvica}(t_1) \land \texttt{tekvica}(t_2) \land$
    $\texttt{kúpil}(\texttt{Jaro}, t_1) \land \texttt{kúpil}(\texttt{Jaro}, t_2)\big)$

Najviac jeden:

- Anka si kúpila najviac jednu tekvicu.
- Ekvivalentne: Anka si nekúpila aspoň dve tekvice.
  - $\boldsymbol{\neg}\exists t_1 \exists t_2\big(\neg\, t_1 \doteq t_2 \land \texttt{tekvica}(t_1) \land \texttt{tekvica}(t_2) \land$
    $\texttt{kúpil}(\texttt{Anka}, t_1) \land \texttt{kúpil}(\texttt{Anka}, t_2)\big)$
  - $\forall t_1 \forall t_2 \neg\big(\neg\, t_1 \doteq t_2 \land \texttt{tekvica}(t_1) \land \texttt{tekvica}(t_2) \land$
    $\texttt{kúpil}(\texttt{Anka}, t_1) \land \texttt{kúpil}(\texttt{Anka}, t_2)\big)$
  - $\forall t_1 \forall t_2\big(t_1 \doteq t_2 \lor \neg\texttt{tekvica}(t_1) \lor \neg\texttt{tekvica}(t_2) \lor$
    $\neg\texttt{kúpil}(\texttt{Anka}, t_1) \lor \neg\texttt{kúpil}(\texttt{Anka}, t_2)\big)$

– $\forall t_1\, \forall t_2 \big((\texttt{tekvica}(t_1) \land \texttt{tekvica}(t_2) \land$
$\texttt{kúpil}(\texttt{Anka}, t_1) \land \texttt{kúpil}(\texttt{Anka}, t_2)) \to t_1 \doteq t_2 \big)$

- Teda ekvivalentne: Všetky tekvice, ktoré si Anka kúpila, sú rovnaké.

Literatúra

Martin Davis and Hillary Putnam. A computing procedure for quantification theory. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 7:201–215, 1960.

Martin Davis, George Logemann, and Donald Loveland. A machine program for theorem-proving. *Communications of the ACM*, 5(7):394–397, 1962.

Michael Genesereth and Eric Kao. *Introduction to Logic*. Morgan & Claypool, 2013. ISBN 9781627052481.

Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf.