Prednášky z Matematiky (4) — Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2018/2019

6. prednáška

Korektnosť a úplnosť tablového kalkulu

25. marca 2019

Obsah 6. prednášky

Midterm, náhrada praktických cvičení

Midterm

utorok **2. apríla o 18:10 v A**

Mimoriadne konzultácie pred midtermom

utorok **1. apríla o 14:00—16:30 v I-9**

Náhrada praktických cvičení 27. marca, 1. a 8. mája

piatok **29. marca, 3. a 10. mája o 8:10 a o 9:50 v H6**

2.9

Tablový kalkul

Opakovanie

Označené formuly a ich sémantika

Definícia 2.77

Nech X je formula výrokovej logiky.
Postupnosti symbolov $\mathbf{T}\,X$ a $\mathbf{F}\,X$ nazývame ***označené formuly***.

Definícia 2.78

Nech v je ohodnotenie výrokových premenných a X je formula. Potom

- ***v spĺňa* T X** vtt v spĺňa X;
- ***v spĺňa* F X** vtt v nespĺňa X.

Dohoda

Pre označené formuly budeme používať veľké písmená zo začiatku a konca abecedy s horným indexom + a prípadne s dolnými indexmi, napr. A^+, X^+_7.
Pre množiny označených formúl budeme používať písmená S, T s horným indexom + a prípadne s dolnými indexmi, napr. S^+, T^+_3.

Jednotný zápis označených formúl typu α

Definícia 2.80 (Jednotný zápis označených formúl typu α)

Označená formula A^+ je ***typu α*** vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y.
Takéto formuly budeme označovať písmenom α;
α_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca,
α_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}\,\neg X$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,X$
$\mathbf{F}\,\neg X$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,X$

Pozorovanie 2.81 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných.
Potom v splňa α vtt v splňa α_1 a v splňa α_2.

Jednotný zápis označených formúl typu β

Definícia 2.82 (Jednotný zápis označených formúl typu β)

Označená formula B^+ je ***typu*** $\boldsymbol{\beta}$ vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y.
Takéto formuly budeme označovať písmenom β;
β_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca,
β_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$

Pozorovanie 2.83 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných.
Potom v spĺňa β vtt v spĺňa β_1 alebo v spĺňa β_2.

Tablo pre množinu označených formúl

Definícia 2.84

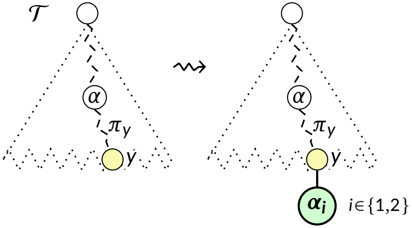
Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre S^+***) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných induktívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:
  - α Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.
  - β Ak sa na vetve π_y vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme *dva* nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.
  - S^+ Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Nič iné nie je tablom pre S^+.

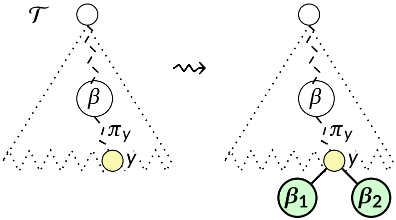
Tablá a tablové pravidlá

Pôvodné tablo **Možné priame rozšírenie** **Pravidlá a označené formuly v nich**



$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2}$$

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}\,\neg X$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,X$
$\mathbf{F}\,\neg X$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,X$



$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$

Legenda: y je list v table $\mathcal{T}$, π_y je cesta od koreňa k y

Uzavretosť a otvorenosť vetvy a tabla

Definícia 2.85

Vetvou tabla $\mathcal{T}$ je každá cesta od koreňa $\mathcal{T}$ k niektorému listu $\mathcal{T}$.

Označená formula X^+ sa ***vyskytuje na vetve*** π v $\mathcal{T}$ vtt sa nachádza v niektorom vrchole na π. Skrátene to budeme zapisovať $X^+ \in \text{formulas}(\pi)$.

Definícia 2.86

Vetva $\boldsymbol{\pi}$ tabla $\mathcal{T}$ ***je uzavretá*** vtt
na π sa súčasne vyskytujú označené formuly $\mathbf{F}\,X$ a $\mathbf{T}\,X$ pre nejakú formulu X.
Inak je π ***otvorená***.

Tablo $\mathcal{T}$ ***je uzavreté*** vtt *každá* jeho vetva je uzavretá.
Naopak, $\mathcal{T}$ je ***otvorené*** vtt *aspoň jedna* jeho vetva je otvorená.

2.9.1 Korektnosť

Korektnosť tablového kalkulu

Korektnosť (angl. *soundness*) kalkulu neformálne:
Ak v kalkule dokážeme nejaké tvrdenie, tak to tvrdenie je naozaj pravdivé.

Veta 2.87 (Korektnosť tablového kalkulu)

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+.
Potom je množina S^+ nesplniteľná.

Dôsledok 2.88

Nech S je množina formúl a X je formula.
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{T}\,A \mid A \in S\} \cup \{\mathbf{F}\,X\}$ (skrátene $S \vdash X$),
tak z S vyplýva X ($S \vDash X$).

Dôsledok 2.89

Nech X je formula.
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$ (skrátene $\vdash X$), tak X je tautológia ($\vDash X$).

Korektnosť — idea dôkazu

Aby sme dokázali korektnosť tabiel, dokážeme postupne dve lemy:

K1 Ak máme tablo pre splniteľnú množinu S^+
s aspoň jednou splniteľnou vetvou,
tak každé jeho priame rozšírenie má tiež splniteľnú vetvu.

K2 Každé tablo pre splniteľnú množinu S^+
má aspoň jednu splniteľnú vetvu.

Z toho ľahko sporom dokážeme, že množina, pre ktorú sme našli uzavreté tablo je nesplniteľná.

Korektnosť — splnenie priameho rozšírenia tabla

Hodí sa nám pomocná definícia:

Definícia 2.90

Nech S^+ je množina označených formúl, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a nech v je ohodnotenie množiny výrokových premenných. Potom:

- ***v* *spĺňa vetvu* $\boldsymbol{\pi}$** v table $\mathcal{T}$ vtt
  v spĺňa *všetky* označené formuly vyskytujúce sa na na vetve π.
- ***v* *spĺňa tablo* $\boldsymbol{\mathcal{T}}$** vtt v spĺňa *niektorú* vetvu v table $\mathcal{T}$.

Lema 2.91 (K1)

Nech S^+ je množina označených formúl, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a nech v je ohodnotenie množiny výrokových premenných. Ak v spĺňa S^+ a v spĺňa $\mathcal{T}$, tak v spĺňa aj každé priame rozšírenie $\mathcal{T}$.

Korektnosť — splnenie priameho rozšírenia tabla

Dôkaz lemy K1.

Nech $v \models S^+$. Nech v spĺňa $\mathcal{T}$ a v ňom vetvu π. Nech $\mathcal{T}_1$ je priame rozšírenie $\mathcal{T}$. Nastáva jeden z prípadov:

- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom α, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z obsahuje α_1 alebo α_2 pre nejakú formulu α na vetve π_y. Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π a teda je splnené.
  Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa aj α, pretože spĺňa π. Potom v musí spĺňať aj α_1 a α_2. Spĺňa teda vetvu π_z v table $\mathcal{T}_1$, ktorá rozširuje splnenú vetvu π o vrchol z obsahujúci splnenú ozn. formulu α_1 alebo α_2. Preto v spĺňa tablo $\mathcal{T}_1$.
- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom β, pridaním detí z_1 a z_2 nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z_1 obsahuje β_1 a z_2 obsahuje β_2 pre nejakú formulu β na vetve π_y. Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π a teda je splnené.
  Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa aj β, pretože spĺňa π. Potom ale v musí spĺňať aj β_1 alebo β_2. Ak v spĺňa β_1, tak spĺňa aj vetvu π_{z_1} v table $\mathcal{T}_1$, a preto v spĺňa tablo $\mathcal{T}_1$. Ak v spĺňa β_2, spĺňa aj π_{z_2}, a teda aj $\mathcal{T}_1$.
- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom S^+, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z obsahuje formulu $X^+ \in S^+$. Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π a teda je splnené.
  Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa vetvu π_z v table $\mathcal{T}_1$, pretože je rozšírením splnenej vetvy π o vrchol z obsahujúci splnenú formulu X (pretože $v \models S^+$). Preto v spĺňa tablo $\mathcal{T}_1$. □

Korektnosť — splnenie množiny a tabla pre ňu

Lema 2.92 (K2)

Nech S^+ je množina označených formúl, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a nech v je ohodnotenie.
Ak v spĺňa S^+, tak v spĺňa $\mathcal{T}$.

Dôkaz lemy K2.

Nech S^+ je množina označených formúl, nech v je ohodnotenie a nech $v \models S^+$.
Úplnou indukciou na počet vrcholov tabla $\mathcal{T}$ dokážeme, že v spĺňa každé tablo $\mathcal{T}$ pre S^+.
Ak má $\mathcal{T}$ jediný vrchol, tento vrchol obsahuje formulu $X^+ \in S^+$, ktorá je splnená pri v. Preto je splnená jediná vetva v $\mathcal{T}$, teda aj $\mathcal{T}$.
Ak $\mathcal{T}$ má viac ako jeden vrchol, je priamym rozšírením nejakého tabla $\mathcal{T}_0$, ktoré má o 1 alebo o 2 vrcholy menej ako $\mathcal{T}$. Podľa indukčného predpokladu teda v spĺňa $\mathcal{T}_0$.
Podľa predchádzajúcej lemy potom v spĺňa aj $\mathcal{T}$. □

Korektnosť — dôkaz

Dôkaz vety o korektnosti.

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+.
Sporom: Predpokladajme, že existuje ohodnotenie, ktoré spĺňa S^+.
Označme ho v.
Potom podľa lemy K2 v spĺňa tablo $\mathcal{T}$, teda v spĺňa niektorú vetvu π v $\mathcal{T}$.
Pretože $\mathcal{T}$ je uzavreté, aj vetva π je uzavretá,
teda π obsahuje označené formuly $\mathbf{T}\,X$ a $\mathbf{F}\,X$ pre nejakú formulu X.
Ale $v \models \mathbf{T}\,X$ vtt $v \models X$ a $v \models \mathbf{F}\,X$ vtt $v \not\models X$, čo je spor. $\square$

2.9.2

Tablový dôkaz splniteľnosti

Úplná vetva a tablo

Čo ak nevieme nájsť uzavreté tablo pre nejakú množinu ozn. formúl?

Definícia 2.93 (Úplná vetva a úplné tablo)

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+.
Vetva π v table $\mathcal{T}$ ***je úplná*** vtt má všetky nasledujúce vlastnosti:

- pre každú označenú formulu α, ktorá sa vyskytuje na π, sa *obidve* označené formuly α_1 a α_2 vyskytujú na π;
- pre každú označenú formulu β, ktorá sa vyskytuje na π, sa *aspoň jedna* z označených formúl β_1, β_2 vyskytuje na π;
- *každá* $X^+ \in S^+$ sa vyskytuje na π.

Tablo $\mathcal{T}$ je úplné vtt *každá* jeho vetva je buď *úplná alebo uzavretá*.

Príklad 2.94

Vybudujme úplné tablo pre $\mathbf{F}\, X$, kde $X = (((p \lor r) \land (s \lor p)) \to (p \land (r \lor s)))$.

Otvorené tablo a splniteľnosť

Nech tablové pravidlá v príklade použijeme v akomkoľvek,

- **nenájdeme uzavreté** tablo, ale
- **vyrobíme úplné** otvorené tablo.

Z úplného otvoreného tabla pre S^+ vieme vytvoriť ohodnotenie v:

1. nájdeme otvorenú vetvu π,
2. pre každú výrokovú premennú p
   - ak sa v π nachádza $\mathbf{T}\, p$, definujeme $v(p) = t$;
   - ak sa v π nachádza $\mathbf{F}\, p$, definujeme $v(p) = f$;
   - inak definujeme $v(p)$ ľubovoľne.

Toto v spĺňa π, a preto **v spĺňa S^+** (všetky formuly z S^+ sa vyskytujú na π).

Otázka

- Dá sa vždy nájsť úplné tablo?
- Naozaj sa z úplného otvoreného tabla dá vytvoriť spĺňajúce ohodnotenie?

Existencia úplného tabla

Lema 2.95 (o existencii úplného tabla)

Nech S^+ je konečná množina označených formúl.
Potom existuje úplné tablo pre S^+.

Dôkaz.

Vybudujme tablo $\mathcal{T}_0$ pre S^+ tak, že do koreňa vložíme niektorú formulu z S^+ a opakovaním spravidla S^+ postupne doplníme ostatné.
Potom tablo postupne rozširujeme tak, že vyberieme ľubovoľný list y tabla $\mathcal{T}_i$, ktorého vetva π_y je otvorená a nie je úplná. Potom nastane aspoň jedna z možností:

- Na π_y sa nachádza nejaká formula α, ale nenachádza sa niektorá z formúl α_1 a α_2.
- Na π_y sa nachádza nejaká formula β, ale nenachádza sa ani jedna z formúl β_1 a β_2.

Ak platí prvá alebo obe možnosti, aplikujeme pravidlo α. Ak platí druhá možnosť, aplikujeme pravidlo β. Získame tablo $\mathcal{T}_{i+1}$, s ktorým proces opakujeme.
Tento proces po konečnom počte krokov (prečo?) vytvorí nejaké tablo $\mathcal{T}_n$, v ktorom už neexistuje vetva, ktorá by bola otvorená a nebola úplná. Teda každá vetva v $\mathcal{T}_n$ je buď uzavretá alebo úplná, čiže $\mathcal{T}_n$ je úplné. $\square$

2.9.3

Hintikkova lema

Nadol nasýtené množiny a Hintikkova lemma

Definícia 2.96

Množina označených formúl S^+ sa nazýva ***nadol nasýtená*** vtt platí:

- **H0** v S^+ sa nevyskytujú naraz **T** p a **F** p pre žiadnu výrokovú premennú p;
- **H1** ak $\alpha \in S^+$, tak $\alpha_1 \in S^+$ a $\alpha_2 \in S^+$;
- **H2** ak $\beta \in S^+$, tak $\beta_1 \in S^+$ alebo $\beta_2 \in S^+$.

Pozorovanie 2.97

Nech π je úplná otvorená vetva nejakého tabla $\mathcal{T}$.
Potom množina všetkých formúl na π je nadol nasýtená.

Lema 2.98 (Hintikkova)

Každá nadol nasýtená množina S^+ je splniteľná.

Dôkaz Hintikkovej lemy.

Chceme vytvoriť ohodnotenie v, ktoré splní všetky formuly z S^+. Definujme v pre každú výrokovú premennú p takto:

- ak $\mathbf{T}\, p \in S^+$: $v(p) = t$,
- ak $\mathbf{F}\, p \in S^+$: $v(p) = f$,
- ak ani $\mathbf{T}\, p$ ani $\mathbf{F}\, p$ nie sú v S^+, tak $v(p) = t$.

v je korektne definované vďaka H_0.
Indukciou na stupeň formuly dokážeme, že v spĺňa všetky formuly z S^+:

- v očividne spĺňa všetky označené výrokové premenné z S^+.
- $X^+ \in S^+$ je buď α alebo β:
  - Ak X^+ je α, potom obidve $\alpha_1, \alpha_2 \in S^+$ (H_1), sú nižšieho stupňa X^+, a teda podľa indukčného predpokladu sú splnené pri v, preto v spĺňa aj α (podľa pozorovania 2.81).
  - Ak X^+ je β, potom aspoň jedna z β_1, β_2 je v S^+ (H_2). Nech je to ktorákoľvek, je nižšieho stupňa ako X^+, teda podľa IP ju v spĺňa, a preto v spĺňa β (podľa pozorovania 2.83). □

2.9.4

Úplnosť

Úplnosť

Úplnosť kalkulu neformálne:
Ak je nejaké tvrdenie pravdivé, tak existuje jeho dôkaz v kalkule.

Veta 2.99 (o úplnosti)

Nech S^+ je konečná nesplniteľná množina označených formúl. Potom existuje uzavreté tablo pre S^+.

Dôsledok 2.100

Nech S je konečná teória a X je formula. Ak $S \vDash X$, tak $S \vdash X$.

Dôsledok 2.101

Nech X je formula. Ak $\vDash X$, tak $\vdash X$.

Úplnosť platí aj pre nekonečné množiny, ale dôkaz je ťažší.

Úplnosť — dôkaz

Dôkaz vety o úplnosti.

Zoberme ľubovoľnú konečnú nesplniteľnú množinu označených formúl S^+. Podľa lemy o existencii úplného tabla vieme pre S^+ nájsť úplné tablo $\mathcal{T}$, teda také, že každá vetva je buď uzavretá alebo úplná.
Ak by niektorá vetva bola otvorená, potom musí byť úplná, a teda nadol uzavretá. Podľa Hintikkovej lemy by bola splniteľná. Pretože obsahuje všetky formuly z S^+, bola by aj S^+splniteľná, čo je spor s nesplniteľnosťou S^+.
Preto musia byť všetky vetvy tabla $\mathcal{T}$ uzavreté. $\square$

Literatúra

Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf.