
Matematika 4 — Logika pre informatikov

Teoretická úloha 8

Riešenie hodnotenej časti tejto úlohy **odovzdajte** najneskôr v pondelok **29. apríla 2019 o 11:30** na prednáške.

Odovzdané riešenia musia byť **čitateľné** a mať primerane **malý** rozsah. Ohodnotené riešenia poskytneme k nahliadnutiu, ale **nevrátime** vám ich, uchovajte si kópiu. Na riešenia všetkých úloh sa vzťahujú všeobecné **pravidlá** zverejnené na adrese https://dai.fmph.uniba.sk/w/Course:Mathematics_4/sk#pravidla-uloh.

Čísla úloh v zátvorkách odkazujú do zbierky, v ktorej nájdete ďalšie úlohy na precvičovanie a vzorové riešenia: <https://github.com/FMFI-UK-1-AIN-412/lpi/blob/master/teoreticke/zbierka.pdf>.


Pri riešení niektorých úloh vám môže pomôcť prieskumník štruktúr (<https://fmfi-uk-1-ain-412.github.io/structure-explorer/>).

Cvičenie 8.1. Zahrajte si „formalizačný telefón“: Posúvajte si lístky s tvrdeniami v slovenčine alebo formulami a poradovými číslami. Ak dostanete lístok s tvrdením v slovenčine, na nový lístok ho sformalizujte. Ak dostanete lístok s formulou, zapíšte ju na nový lístok čo najprirodzenejšou slovenčinou. Na nový lístok napíšte nasledujúce poradové číslo a posuňte ho kolegyni/-ovi o 2 miesta ďalej. Pôvodný lístok uschovajte.

Keď hra obehne celé kolo, porovnajte pôvodnú a konečnú verziu tvrdenia či formuly. Všetky lístky odovzdajte vyučujúcemu.

Cvičenie 8.2. (3.3.2) Dokážte, že nasledujúce formuly *nie sú* ani platné ani nesplniteľné:

- a) $(\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x)))$,
- b) $(\forall x \exists y(R(x, y) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow Q(x)))$,
- c) $(\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow \exists x \forall y R(x, y))$.

 Všímajte si rozdiely vo význame ľavých a pravých strán implikácií. Tieto formuly zachytávajú časté chyby pri formalizácii.

Cvičenie 8.3. (3.1.2, 3.2.1) Uvažujme doménu rodinných vzťahov, ktorú opisujeme jazykom \mathcal{L} relačnej logiky prvého rádu, ktorý obsahuje predikáty ako žena¹, muž¹, rodič², súrodenec², kde žena(x) znamená, že x je žena, muž(x) znamená, že x je muž, rodič(x, y) znamená, že x je (vlastným) rodičom y , súrodenec(x, y) znamená, že x je (pokrvným) súrodencom y , manželia(x, y) znamená, že x a y sú manželmi.


V prvorádovej logike napíšte definície nasledovných odvodených pojmov/predikátov (tak, ako ich poznáte z prirodzeného jazyka), ktorými rozšírime jazyk \mathcal{L} :

(D_1) prastarý_rodič²

(D_3) macocha²

(D_2) sesternica²

(D_4) jedináčik¹

 Sesternica nie je sestra.

Cvičenie 8.4. (3.3.1) Zostrojte štruktúru $\mathcal{M} = (M, i)$ pre jazyk z predchádzajúcej úlohy ďalej rozšírený o symboly konštánt Andrea, Cyril, Boris, Diana tak, aby \mathcal{M} splnila všetky definície predikátov z úlohy 8.3 a súčasne nasledujúce formuly v každom ohodnotení:

(A_1) $(\text{rodič}(\text{Andrea}, \text{Cyril}) \wedge \exists x \text{rodič}(\text{Andrea}, x) \wedge \text{rodič}(\text{Boris}, \text{Diana})),$

(A_2) $\exists x \exists y \exists z (\text{rodič}(x, \text{Andrea}) \wedge \text{rodič}(x, \text{Boris}) \wedge \text{žena}(x) \wedge$
 $\text{rodič}(y, \text{Andrea}) \wedge \text{rodič}(z, \text{Andrea}))$

(A_3) $\forall x \neg \text{rodič}(x, x) \wedge \forall x \forall y (\text{rodič}(x, y) \rightarrow \neg \text{rodič}(x, y)),$

(A_4) $\forall x ((\text{žena}(x) \vee \text{muž}(x)) \wedge \neg (\text{žena}(x) \wedge \text{muž}(x))),$

(A_5) $\forall x \forall y (\text{rodič}(x, y) \rightarrow \exists z (\text{rodič}(x, z) \wedge (\text{muž}(y) \leftrightarrow \neg \text{muž}(z))))$


(A_6) $\forall p \forall q \forall r \forall x ((\text{rodič}(p, x) \wedge \text{rodič}(r, x) \wedge (\text{žena}(p) \leftrightarrow \text{žena}(r))) \rightarrow p \doteq r),$

(A_7) $\forall x \forall y (\text{súrodenec}(x, y) \leftrightarrow (\neg x \doteq y \wedge \exists z (\text{rodič}(z, x) \wedge \text{rodič}(z, y))));$

(B_1) $\exists x \exists y \text{prastarý_rodič}(x, y),$

(B_2) $\exists x (\text{jedináčik}(x) \wedge \forall y (\text{rodič}(x, y) \rightarrow \text{jedináčik}(y))),$

(B_3) $\exists x \exists y (\text{macocha}(x, y) \wedge \exists z \text{rodič}(x, z)).$

 Všímajte si, ktoré formuly skutočne vynúti pridať nové objekty do domény a ktoré splníte aj pomocou existujúcich objektov.

Nezabudnite, že na splnenie definície nejakého predikátu musíte zabezpečiť, že všetky objekty (n -tice), ktoré patria do jeho interpretácie, majú požadované vlastnosti, a zároveň všetky objekty (n -tice), ktoré majú požadované vlastnosti, patria do jeho interpretácie.

Hodnotená časť

Úloha 8.1. (3.1.9) Zostrojte vytvárajúci strom pre formulu (A_8) z úlohy 8.3 nižšie.

Úloha 8.2. (3.2.2) Uvažujme relačný prvorádový jazyk \mathcal{L} pre doménu vysokoškolského štúdia, kde $C_{\mathcal{L}} = \{\text{Evka, Ferko, LPI, DDB, A, Fx}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\text{A-čkar}^1, \text{aktívny}^1, \text{bakalárska-práca}^1, \text{dievča}^1, \text{diplomová-práca}^1, \text{dizertačná-práca}^1, \text{doktorand}^1, \text{predmet}^1, \text{PhD-program}^1, \text{profesor}^1, \text{študent}^1, \text{štud-program}^1, \text{učiteľ}^1, \text{záverečná-práca}^1, \text{absolvuje}^2, \text{autor}^2, \text{školiteľ}^2, \text{študuje}^2, \text{učí}^2, \text{zapísaný}^2, \text{hodnotený}^3\}$.

Sformalizujte nasledujúce definície pojmov v jazyku \mathcal{L} :

- (D_1) Učiteľ sa definuje ako ten, kto učí nejaký predmet.
- (D_2) Každý, kto je študuje nejaký PhD program, je doktorandom a nikto iný doktorandom nie je.
- (D_3) Študent absolvuje predmet práve vtedy, keď je z neho hodnotený známku inou ako Fx.
- (D_4) A-čkar je práve taký študent, ktorý absolvoval aspoň jeden predmet a má známku A z každého predmetu, z ktorého je hodnotený.

Úloha 8.3. (3.3.3) Zostrojte štruktúru \mathcal{M} pre jazyk \mathcal{L} z úlohy 8.2 tak, aby pri každom ohodnotení splnila vaše definície z úlohy 8.2 a súčasne nasledujúce formuly:

- $(A_1) \quad \forall x(\text{študent}(x) \rightarrow \exists y(\text{štud-program}(y) \wedge \text{študuje}(x, y)))$
- $(A_2) \quad \forall x(\text{učiteľ}(x) \wedge \text{profesor}(x) \rightarrow \exists y(\text{študent}(y) \wedge \text{školiteľ}(x, y)))$
- $(A_3) \quad (\text{študent}(\text{Evka}) \wedge \text{študent}(\text{Feko}) \wedge \text{dievča}(\text{Evka}))$
- $(A_4) \quad (\text{predmet}(\text{LPI}) \wedge \text{predmet}(\text{DDB}) \wedge \neg \text{LPI} \doteq \text{DDB})$
- $(A_5) \quad (\text{zapísaný}(\text{Evka}, \text{DDB}) \wedge \text{zapísaný}(\text{Feko}, \text{LPI}))$
- $(A_6) \quad \exists x(\text{zapísaný}(\text{Feko}, x) \wedge \neg x \doteq \text{LPI}) \wedge \exists x(\text{zapísaný}(x, \text{LPI}) \wedge \neg x \doteq \text{Feko})$
- $(A_7) \quad \exists x(\text{školiteľ}(x, \text{Evka}) \wedge \neg \text{profesor}(x) \wedge \text{učiteľ}(x))$
- $(A_8) \quad \forall x \left(\left(\text{predmet}(x) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. \begin{aligned} &\exists y(\text{študent}(y) \wedge \text{zapísaný}(y, x) \wedge \\ &(\exists z(\text{študent}(z) \wedge \neg y \doteq z \wedge \text{zapísaný}(z, x)) \vee \text{dievča}(y))) \end{aligned} \right) \right. \\ \left. \rightarrow \text{aktívny}(x) \right)$
- $(A_9) \quad \forall x(\text{študent}(x) \rightarrow (\exists y \text{školiteľ}(y, x) \rightarrow \\ \exists z(\text{záverečná-práca}(z) \wedge \text{autor}(x, z))))$
- $(A_{10}) \quad \forall x(\text{záverečná-práca}(x) \rightarrow \\ (\text{bakalárska-práca}(x) \vee \text{diplomová-práca}(x) \vee \text{dizertačná-práca}(x)))$
- $(A_{11}) \quad (\exists x \text{A-čkar}(x) \wedge \exists x \neg \text{A-čkar}(x))$