Przyprawa musi płynąć

AiSD2, laboratoria 10.

26.04.2018

Treść zadania.

Część 1. Na Diunie (Arrakis) znajdują się punkty wydobywania przyprawy i punkty odbioru przyprawy. Pomiędzy punktami kursują pojazdy dostawcze. Połączenia mogą być jedno- lub dwukierunkowe, mają też określoną przepustowość, mierzoną ilością przyprawy w jednostce czasu. Każdy punkt wydobycia ma określoną efektywność, mierzoną ilością przyprawy, którą może wysłać do sieci w jednostce czasu. Analogicznie, punkty odbioru mogą przyjąć określoną ilość przyprawy w jednostce czasu. W sieci mogą też wystąpić punkty przeładunkowe, w których ilość przyprawy wpływającej równa się ilości przyprawy wypływającej.

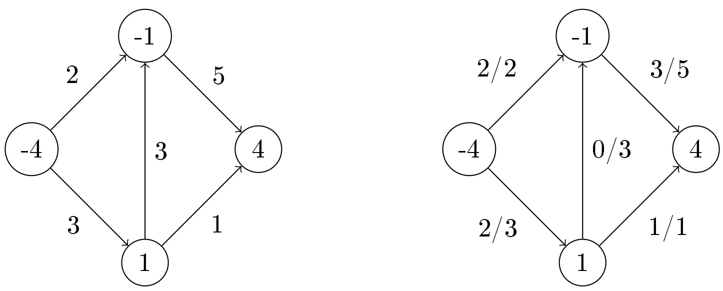
Czy da się zaplanować stabilny obieg przyprawy na całej planecie?

Formalnie mówiąc, dla danego grafu skierowanego $G = (V, E)$, funkcji przepustowości $c\colon E \to (0, \infty)$ i funkcji żądań $d\colon V \to \mathbb{R}$, *cyrkulacją* nazywamy funkcję $f\colon E \to \mathbb{R}$, która spełnia warunki:

- dla każdej krawędzi e zachodzi $0 \le f(e) \le c(e)$,
- dla każdego wierzchołka v zachodzi:

$$\sum_{\langle u,v\rangle \in E} f(\langle u, v\rangle) - \sum_{\langle v,u\rangle \in E} f(\langle v, u\rangle) = d(v).$$

Wierzchołki z ujemnymi żądaniami to punty wydobycia, z dodatnimi żądaniami to punkty obdbioru, a zerowe żądania oznaczają punkty przeładunkowe. Rysunek poniżej pokazuje graf skierowany z żądaniami i przepustowościami krawędzi (z lewej) i cyrkulację realizującą te żądania (z prawej).

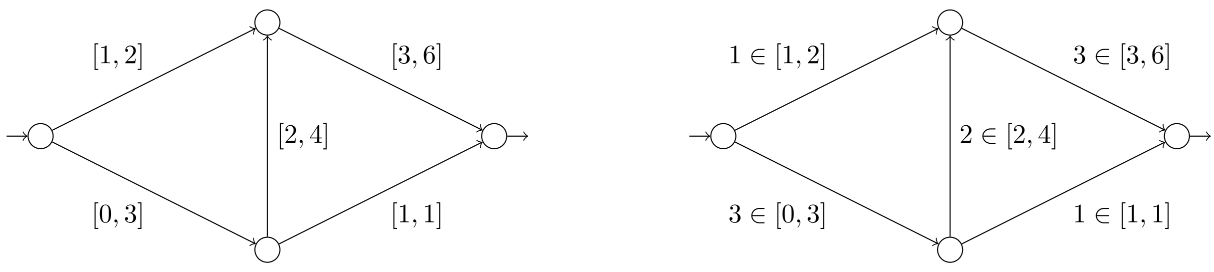


Część 2. Przyprawa jest eksportowana z Diuny do Pałacu Imperatora. Służy do tego zwykła sieć transportowa. W celu utrzymania rentowności transportów każde połączenie, poza górnym ograniczeniem wynikającym z przepustowości, ma też określone dolne ograniczenie na przepływ.

Czy możliwe jest zaplanowanie transportów, przestrzegające tych ograniczeń?

Formalnie, dana jest sieć z jednym źródłem i ujściem, gdzie dodatkowo dla każdej krawędzi, poza przepustowością c, jest też określone dolne ograniczenie przepływu ℓ. Zadanie polega na znalezieniu przepływu f, który dla każdej krawędzi spełnia $\ell(e) \le f(e) \le c(e)$. Każdy wierzchołek poza źródłem i ujściem ma spełniać prawo Kirchhoffa (czyli suma przepływów na krawędziach wchodzących do wierzchołka jest równa sumie przepływów na krawędziach wychodzących). Interesuje nas dowolny przepływ, spełniający te wymagania (niekoniecznie największy).

Rysunek poniżej pokazuje sieć z przepustowościami i ograniczeniami dolnymi na krawędziach. Źródło i ujście oznaczone są strzałkami.



Punktacja

2 pkt algorytm znajdujący cyrkulację w grafie, jeśli taka istnieje,
2 pkt algorytm znajdujący przepływ uwzględniający dolne ograniczenia

Aspekty techniczne

W obu częściach zadania należy zwrócić graf reprezentujący rozwiązanie. Graf ten ma być kopią grafu wejściowego, w której wagi krawędzi odpowiadają wartościom znalezionej funkcji. W szczególności jeśli na jakiejś krawędzi grafu wejściowego nie ma przepływu, to w grafie reprezentującym rozwiazanie powinna znaleźć się odpowiednia krawędź o wadze 0 (całkowity brak takiej krawędzi jest błędem). Jeśli nie ma rozwiązania, należy zwrócić *null*.

W obu przypadkach oczekiwana złożoność rozwiązania jest asymptotycznie równa złożoności funkcji (z biblioteki) do znajdowania maksymalnego przepływu.

W pliku `ConstrainedFlow.cs` zdefiniowane są statyczne tablice `circulationToDisplay` oraz `constrainedFlowToDisplay`. Umieść w nich numery testów, dla których chcesz wygenerować rysunek zwróconego rozwiązania. Ostatni test w obu grupach jest duży i nie ma sensu go rysować.

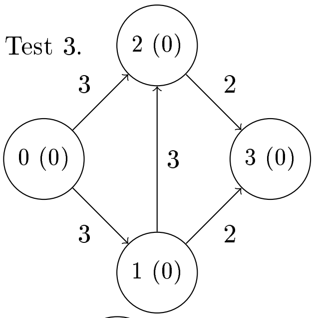
Wskazówki

(część 1) dodaj do sieci nowe źródło i ujście. W jaki sposób zasymulować „znikanie” lub „pojawianie” się przepływu w wierzchołkach?
(część 2) wykorzystaj rozwiązania części 1. i zapisz dolne ograniczenia przepływu za pomocą żądań na wierzchołkach
(część 2) jeśli wiemy, że co najmniej x jednostek przepływu płynie przez krawędź $\langle u, v\rangle$, to można wyobrazić sobie, że x jednostek jest pochłanianych w wierzchołku u, a następnie produkowanych w wierzchołku v, a w sieci płynie jedynie nadwyżka ponad te x jednostek.

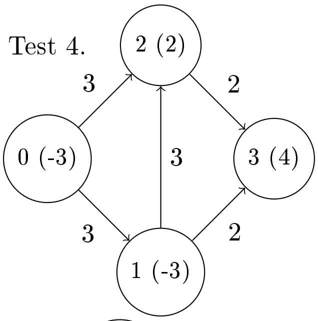
Dodatek: testy z zajęć (część 1)

W testach 1. i 2. graf składa się z jednego wierzchołka o żądaniu 0 (test 1) lub 1 (test 2). Liczby w nawiasach to oznaczają żądania poszczególnych wierzchołków.

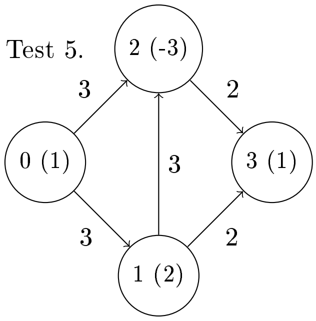
Test 3.



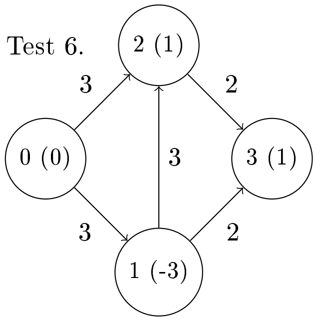
Test 4.



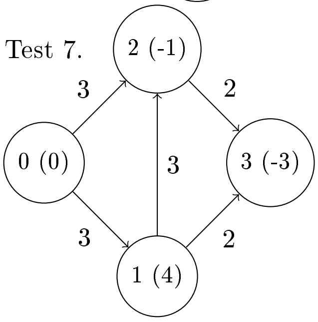
Test 5.



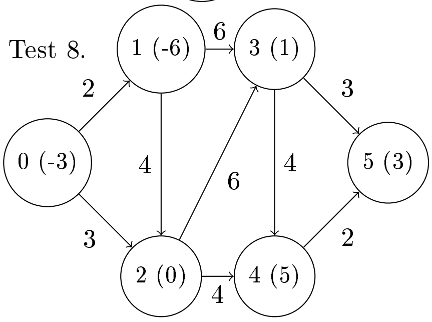
Test 6.



Test 7.



Test 8.

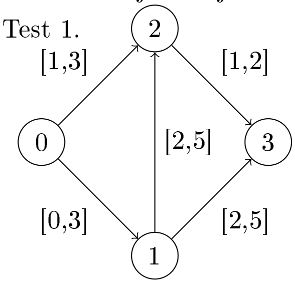


Test 9. to cykl skierowany o 300 wierzchołkach, wszystkie przepustowości wynoszą 10, parzyste wierzchołki mają żądania -1, a nieparzyste 1.

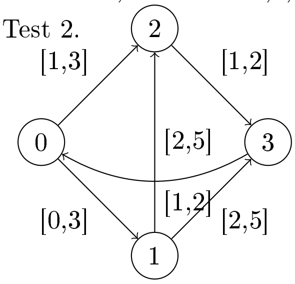
Dodatek: testy z zajęć (część 2)

Wierzchołek 0 jest zawsze źródłem (co oczywiście nie znaczy, że tak samo będzie w testach domowych). W pierwszych trzech testach ujściem jest wierzchołek 3, w testach 4,5,6 ujściem jest wierzchołek 5.

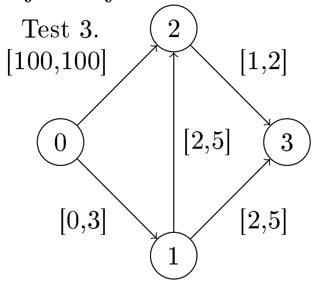
Test 1.



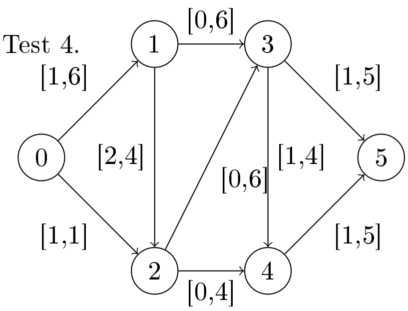
Test 2.



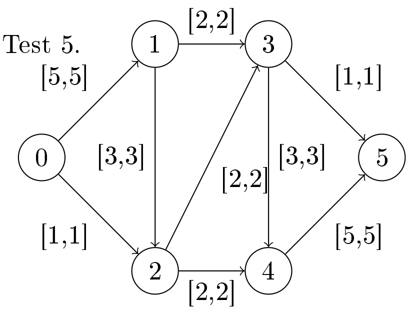
Test 3.



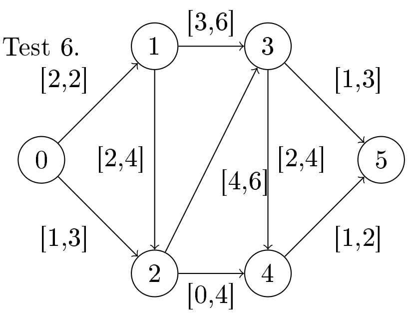
Test 4.



Test 5.



Test 6.



Test 7. to cykl skierowany o 500 wierzchołkach, wszystkie przepustowości są równe 10, a ograniczenia dolne są równe $i\%10$, gdzie i to numer wierzchołka. Źródło to wierzchołek 0, a ujście to wierzchołek 250.