1. Rozwiązywanie algebraicznych równań nieliniowych.

Znalezienie rozwiązania algebraicznego równania nieliniowego (czyli takiego, którego rozwiązaniem jest liczba) to np. rozwiązanie równania Manninga, gdy dla danego przepływu Q szukane jest napełnienie h w przekroju poprzecznym koryta.

Zadanie: **rozwiązać równanie $\boldsymbol{f(x) = 0}$** metodami iteracyjnymi.

Można to zrobić przy założeniu, że:
funkcja $f(x)$ jest nieliniowa, ma jednokrotne (nie np. dwukrotne $(x-3)^2 = 0)$, rzeczywiste (nie zespolone) miejsce zerowe x^*.

Metody iteracyjne polegają na przyjęciu lub obliczeniu pierwszego przybliżenia rozwiązania x_1, a następnie obliczaniu kolejnych przybliżeń $x_2, x_3, \ldots$ tak długo, aż zostanie spełniony jeden z dwóch warunków: $|f(x_i)| < \varepsilon 1 \ lub \ |x_{i+1} - x_i| < \varepsilon 2$, gdzie $\varepsilon 1, \varepsilon 2$ są małymi dodatnimi liczbami np. 0.001. Dla ochrony przed zapętleniem, czyli nie kończącym się wykonywaniem obliczeń, co może być spowodowane popełnionym błędem, wprowadza się trzeci warunek: $i \leq imax$, gdzie i jest numerem iteracji, a $imax$ jest przyjętą, nieprzekraczalną liczbą iteracji. Przerwanie obliczeń spowodowane spełnieniem jednego z dwóch pierwszych warunków oznacza znalezienie przybliżonego rozwiązania równania x_i lub x_{i+1} natomiast spełnienie trzeciego warunku powinno spowodować wydrukowanie komunikatu, że być może został popełniony błąd w obliczeniach.

Na wykładzie przedstawiane są dwie metody: Newtona i połowicznego podziału (bisekcji).

<u>Metoda Newtona</u>

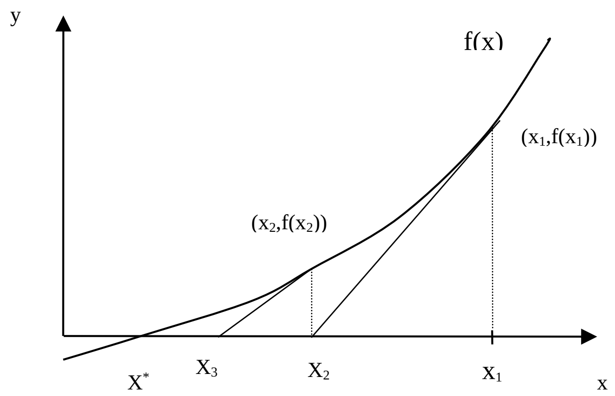
Użycie tej metody jest możliwe, gdy pochodna funkcji $f(x)$ jest różna od zera w otoczeniu jej miejsca zerowego, czyli $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in U(x^*)$.

wzór metody Newtona:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \ i = 1,2,3,\ldots$$

Jak wynika z powyższego wzoru w metodzie tej, startując od dowolnie przyjętego, pierwszego przybliżenia rozwiązania x_1, dla wyznaczenia kolejnego przybliżenia trzeba obliczyć wartość danej funkcji oraz jej pochodnej dla przybliżenia poprzedniego. Z reguły już trzecie lub czwarte przybliżenie rozwiązania równania spełnia warunki końca iteracji, a więc jest wystarczająco dokładne.

Wyprowadzenie wzoru metody:



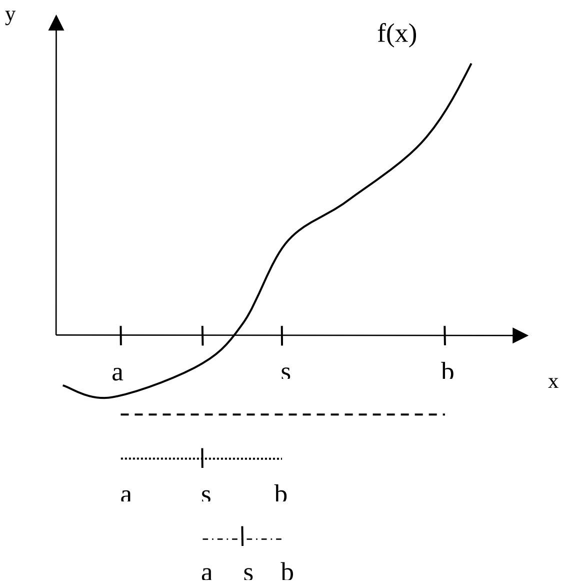
Drugie przybliżenie rozwiązania jest punktem przecięcia stycznej do wykresu funkcji f(x) poprowadzonej w punkcie o współrzędnych (x_1, f(x_1)). Równanie tej stycznej ma postać $y = f'(x_1)x + b$, gdzie b wyznacza się z warunku, że punkt (x_1, f(x_1)) należy do tej prostej, a więc $f(x_1) = f'(x_1)x_1 + b$, stąd $b = f(x_1) - f'(x_1)x_1$. Po wstawieniu wzoru na b do równania prostej stycznej otrzymujemy jej następującą postać: $y = f'(x_1)x + f(x_1) - f'(x_1)x_1$. Punkt przecięcia stycznej z osią x oblicza się wstawiając do równania stycznej współrzędne punktu (x_2,0) należącego do tej stycznej, a więc $0 = f'(x_1)x_2 + f(x_1) - f'(x_1)x_1$, skąd $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. Trzecie i kolejne przybliżenia rozwiązania oblicza się analogicznie.

<u>Metoda bisekcji</u>

Metoda ta może być użyta, jeśli funkcja f(x) jest ciągła na pewnym przedziale [a, b] zawartym w jej dziedzinie i wartości funkcji na brzegach przedziału spełniają warunek $f(a) * f(b) < 0$. Ze spełnienia tego warunku i ciągłości funkcji f(x) wynika, że w przedziale [a, b] znajduje się jej miejsce zerowe.

$$\textit{wzór metody bisekcji}:$$
$$s = \frac{a + b}{2}$$

Wyprowadzenie wzoru metody i opis toku postępowania przy wyznaczaniu kolejnych przybliżeń rozwiązania:



Przyjęty przedział [a, b], spełniający warunek użycia metody, dzieli się na połowę, po czym wyznacza się współrzędną jego środka $s = \frac{a+b}{2}$, a następnie oblicza się wartości funkcji w punkcie a i w punkcie s. Nowym przedziałem [a, b] jest ta połowa poprzedniego przedziału, w której znajduje się pierwiastek równania. O istnieniu pierwiastka w połowie [a, s] decyduje spełnienie warunku: $f(a) * f(s) < 0$, zaś w połowie [s, b] spełnienie warunku $f(a) * f(s) > 0$. Ten tok postępowania powtarza się dla nowego przedziału [a, b] o długości mniejszej o połowę tak długo, aż zostanie spełniony jeden z warunków końca iteracji.

Uwaga!

Przy pisaniu skryptów wykorzystujących obie powyższe metody do rozwiązania równania nieliniowego najlepiej użyć instrukcję „while", której warunkiem jest iloczyn logiczny trzech warunków przeciwnych do warunków kończących proces iteracyjny (jest to warunek kontynuacji procesu iteracji). Warunek $|x_{i+1} - x_i| > \varepsilon 2$ jest niewygodny, gdyż na początku w obu metodach znamy tylko jedno, początkowe przybliżenie rozwiązania. Warunek ten w przypadku metody Newtona można zastąpić warunkiem $\left|\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right| > \varepsilon 2$, co wynika bezpośrednio z wzoru metody, a w metodzie bisekcji warunek zastępuje się długością aktualnego przedziału [a, b], a więc $b - a > \varepsilon 2$.