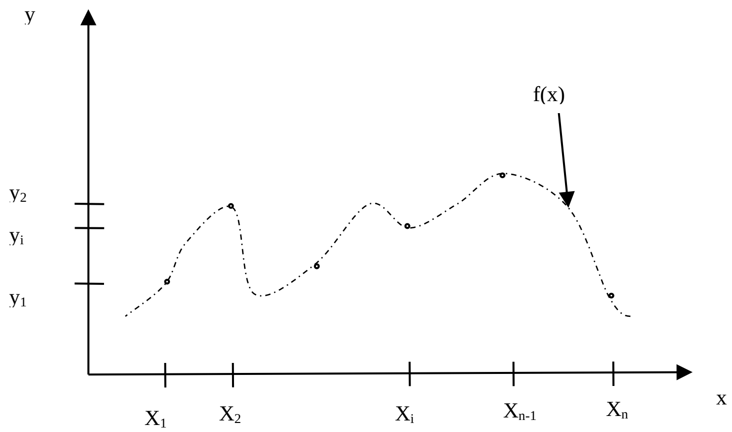
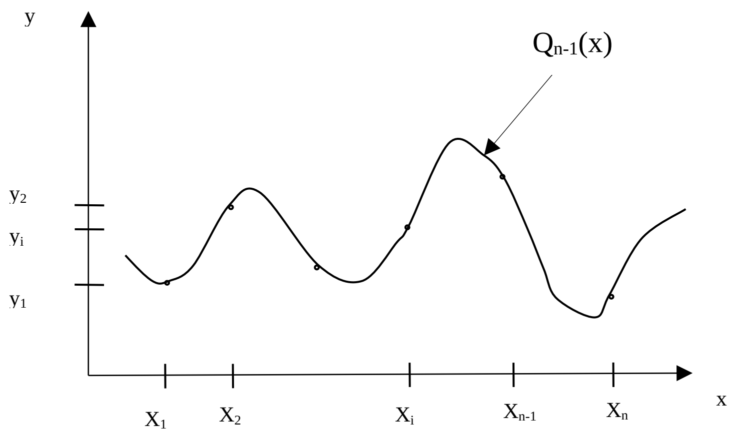
3. Interpolacja wielomianami polega, na znalezieniu dla funkcji w postaci dyskretnej czyli funkcji, której wykresem jest zbiór punktów o współrzędnych $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, takiej funkcji ciągłej $f(x)$ będącej wielomianem, której wykres przechodzić będzie przez te punkty, a więc spełniony będzie warunek interpolacji: $f(x_i) = y_i,\ i = 1, \dots, n$. Sztukowanie (uzupełnianie) funkcji dyskretnej funkcją ciągłą pozwala na wyznaczenie za pomocą funkcji $f(x)$ nie znanych wartości funkcji dyskretnej w punktach znajdujących się pomiędzy zadanymi punktami $x_1, \dots, x_n$. Punkty $x_1, \dots, x_n$ nazywane są węzłami interpolacyjnymi.



Interpolacji można użyć np. wtedy, gdy poszukuje się napełnienia koryta rzecznego pomiędzy przekrojami wodowskazowymi, w których napełnienie jest znane. Na wykładzie przedstawiona jest interpolacja funkcją ciągłą w postaci wielomianu Lagrange'a $Q_{n-1}(x)$ (stopień wielomianu Lagrange'a jest o 1 mniejszy od liczby punktów funkcji dyskretnej, a więc dla n punktów jest to wielomian stopnia $n-1$) oraz funkcją sklejaną $Skl(x)$ z wielomianów stopnia pierwszego.

<u>Wielomian Lagrange'a.</u>



Postać ogólna wzoru wielomianu Lagrange'a, jako wielomianu stopnia $n-1$ jest następująca:

$$Q_{n-1}(x) = a_1 + a_2x^1 + a_3x^2 \dots + a_nx^{n-1}$$

Niewiadome współczynniki $a_1, \dots, a_n$ tego wielomianu wyznacza się z układu równań:

$$Q_{n-1}(x_1) = a_1 + a_2x_1^1 + \dots + a_nx_1^{n-1} = y_1$$
$$Q_{n-1}(x_2) = a_1 + a_2x_2^1 + \dots + a_nx_2^{n-1} = y_2$$
$$\dots\dots$$
$$\dots\dots$$
$$Q_{n-1}(x_n) = a_1 + a_2x_n^1 + \dots + a_nx_n^{n-1} = y_n$$

którego postać wynika z konieczności spełnienia przez wielomian warunku interpolacji. Jest to układ n równań o n niewiadomych, o wyznaczniku różnym od zera. Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wykorzystując to rozwiązanie nie podaje się wzorów, za pomocą których można wyznaczyć współczynniki wielomianu, lecz podaje się ten wielomian w postaci umożliwiającej łatwe zaprogramowanie obliczenia wartości wielomianu Lagrange'a dla dowolnego punktu znajdującego się między punktami $x_1, \dots, x_n$.

Postać wzoru wielomianu Lagrange'a stosowana w obliczeniach:

$$Q_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} y_i$$

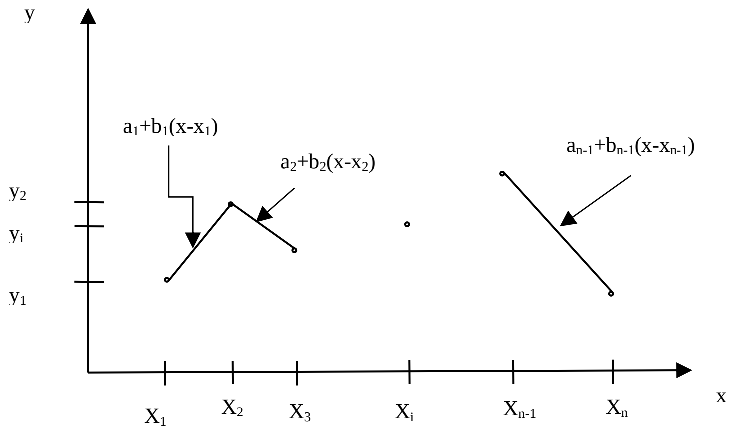
Warunek $j \neq i$ przy obliczaniu iloczynu wynika z konieczności uniknięcia zera w mianowniku ułamka.

Dla lepszego zrozumienia powyższego wzoru można zapisać go (składniki dla $i = 1$, 2, …,i, …,n) bez użycia symbolu wielokrotnego dodawania i mnożenia:

$$\begin{aligned} Q_{n-1}(x) = {} & \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} \cdots \frac{(x-x_n)}{(x_1-x_n)} y_1 + \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} \frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)} \cdots \frac{(x-x_n)}{(x_2-x_n)} y_2 + \cdots \\ & + \frac{(x-x_1)}{(x_i-x_1)} \cdots \frac{(x-x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})} \frac{(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1})} \cdots \frac{(x-x_n)}{(x_i-x_n)} y_i + \cdots \\ & + \frac{(x-x_1)}{(x_n-x_1)} \cdots \frac{(x-x_{n-1})}{(x_n-x_{n-1})} y_n \end{aligned}$$

Z powyższego wzoru łatwo obliczyć, że $Q(x_1) = y_1, \dots, Q(x_n) = y_n$, a więc wielomian Lagrange'a spełnia warunek interpolacji w każdym węźle interpolacyjnym.

<u>Funkcja sklejana z wielomianów stopnia pierwszego.</u>



Wzór funkcji sklejanej z wielomianów pierwszego stopnia:

$$skl(x) = \begin{cases} a_1 + b_1(x - x_1), & x \in [x_1, x_2] \\ a_2 + b_2(x - x_2), & x \in [x_2, x_3] \\ \dots & \\ a_{n-1} + b_{n-1}(x - x_{n-1}), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

gdzie:

$$a_i = y_i, \qquad b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \qquad i = 1, \dots, n-1$$

Każda z funkcji występujących we wzorze funkcji sklejanej jest funkcją liniową, ale zapisaną w sposób nietypowy, w celu umożliwienia łatwego wyznaczenia jej współczynników (bez konieczności rozwiązania układu równań liniowych), co jest pokazane poniżej.

Wyprowadzenie wzoru na współczynniki a_1 i b_1:

Do prostej o równaniu $y = a_1 + b_1(x - x_1)$ należą punkty o współrzędnych (x_1, y_1), (x_2, y_2). Po wstawieniu współrzędnych pierwszego punktu do równania prostej otrzymuje się wzór $a_1 = y_1$, a po wstawieniu współrzędnej drugiego punktu powstaje równanie:

$$y_2 = a_1 + b_1(x_2 - x_1)$$

skąd po przekształceniu i wykorzystaniu wzoru na a_1 otrzymuje się wzór na $b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.