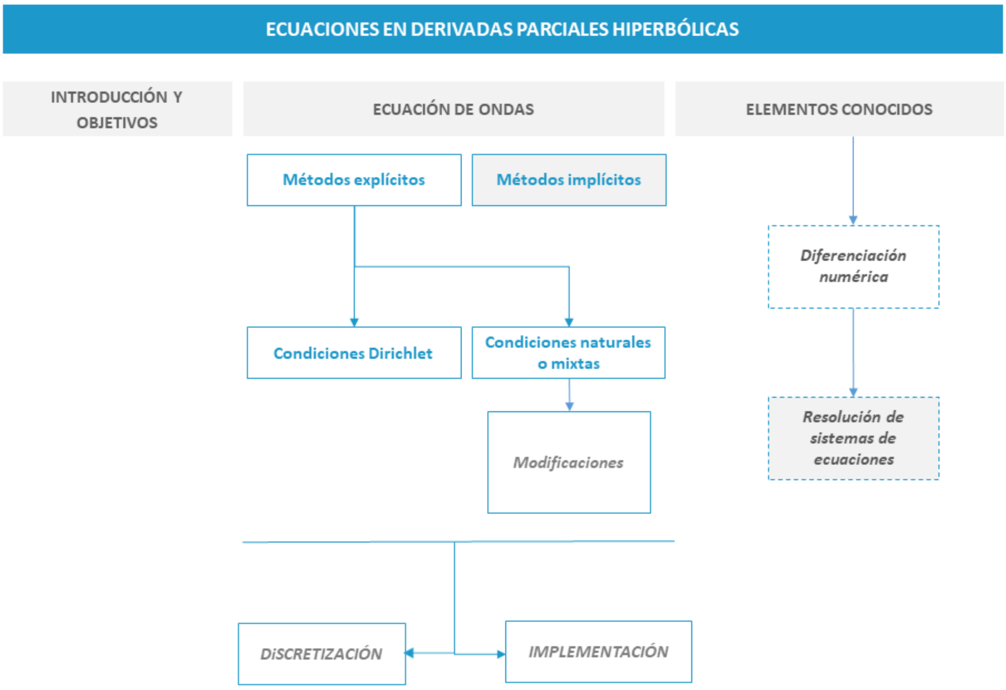
Tema 7

Métodos Numéricos II

Ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas

Índice

Esquema


ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES HIPERBÓLICAS
INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS
ECUACIÓN DE ONDAS
ELEMENTOS CONOCIDOS
Métodos explícitos
Métodos implícitos
Diferenciación numérica
Condiciones Dirichlet
Condiciones naturales o mixtas
Resolución de sistemas de ecuaciones
Modificaciones
DISCRETIZACIÓN
IMPLEMENTACIÓN

Ideas clave

7.1 Introducción y objetivos

En el Tema 4 se introdujeron las ecuaciones en derivadas parciales, junto con los diferentes tipos de aproximación de dichas derivadas mediante diferencias finitas. Esta técnica nos permitió, en los Temas 5 y 6, resolver de manera aproximada las ecuaciones en derivadas parciales parabólicas, con diferentes tipos de condiciones de contorno: de tipo Dirichlet, naturales o mixtas.

En este tema, vamos a aplicar de nuevo la técnica de diferencias finitas para aproximar la solución de ecuaciones hiperbólicas, siendo la ecuación de ondas la más conocida de este tipo de ecuaciones en derivadas parciales. Como ya vimos en los Temas 5 y 6, esta técnica nos permite transformar el problema en un esquema en diferencias, mediante la discretización de los dominios espacial y temporal, la aproximación de diferentes derivadas parciales y la evaluación de dicho esquema en los distintos pares ordenados de nodos. Este proceso puede dar lugar a dos tipos de esquemas en diferencias:

- Explícitos: el valor de la solución en cada par de nodos se aproxima mediante cálculos directos empleando la información conocida, como las propias condiciones de contorno e iniciales.
- Implícitos: en estos casos no es posible calcular directamente el valor de la función incógnita en los nodos a partir de los datos, por lo que se obtiene mediante la resolución de un sistema de ecuaciones. La técnica a utilizar dependerá de la estructura y tamaño de la matriz de coeficientes del mismo.

Los métodos explícitos son consistentes y sencillos, pero inestables. Como veremos, sólo bajo ciertas condiciones podremos asegurar su estabilidad y, por tanto, convergencia. En cambio, los métodos implícitos son más estables y no necesitan condiciones de convergencia.

Los objetivos que perseguimos en el presente tema son los siguientes:

- Introducción a las EDPs hiperbólicas
- Método explícito con condiciones de contorno Dirichlet
  - Transformación de la EDP en una ecuación en diferencias
  - Convergencia y estabilidad del método explícito
  - Implementación del método explícito en Matlab
- Método explícito con condiciones naturales y mixtas
- Método implícito con condiciones de contorno Dirichlet
  - Transformación de la EDP en una ecuación en diferencias
  - Convergencia y estabilidad del método implícito
  - Implementación del método implícito en Matlab
- Método implícito con condiciones naturales y mixtas

Como vimos en el Tema 4, dentro de las ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden,

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D8x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u+G(x,y)=0,$$

donde A, B, C, D, E, F y G son, en principio, funciones cualesquiera de dos variables; las ecuaciones hiperbólicas deben cumplir

$$\Delta = B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y) > 0, \ \ \forall x,y.$$

Vamos a iniciar nuestro estudio con el problema de ondas clásico, que, como sabemos, tiene numerosas aplicaciones en Física e Ingeniería. Una de las descripciones más simples de este problema viene dada por

$$u_{tt}(x,t) = \alpha^2 u_{xx}(x,t), \quad a \leq x \leq b, \;\; t \geq 0, \tag{1}$$

donde α es un número real en el que intervienen constantes físicas, con las condiciones de contorno

$$u(a,t) = h_1(t), \; u(b,t) = h_2(t), \; t > 0,$$

donde $h_1(t)$ y $h_2(t)$ son funciones del tiempo y las condiciones iniciales

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x), \;\; x \in [a,b],$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales dependientes del espacio.

Recordemos que, mientras las condiciones iniciales van a tener siempre este aspecto, las condiciones de contorno Dirichlet que aparecen en el problema, podrían ser condiciones de contorno naturales

$$\alpha_1 u(a,t) + \alpha_2 u_x(a,t) = \gamma, \; \beta_1 u(b,t) + \beta_2 u_x(b,t) = \delta, \; \alpha_2, \beta_2 \neq 0,$$

derivadas (o tipo Neumann),

$$u_x(a,t) = \gamma, \; u_x(b,t) = \delta,$$

o bien mixtas.

7.2 Ecuación de ondas clásica

Vamos a partir de un problema sencillo que modeliza el movimiento de una cuerda de longitud L, sujeta por los extremos, a la que se le aplican determinadas condiciones iniciales. En este caso, el problema hiperbólico se puede describir mediante la ecuación de ondas homogénea

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0, \quad x \in [0, L], t \geq 0, \tag{2}$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x),\ u_t(x, 0) = g(t), \quad x \in [0, L]$$

y a las condiciones de contorno,

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

Independientemente de cuáles sean las condiciones de contorno del problema, el proceso comienza con la discretización de los intervalos en los que están definidas las variables independientes x y t. Dividimos cada intervalo en nx y nt subintervalos, respectivamente, obteniendo los nodos espaciales $x_i = 0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, nx$ y temporales $t_j = 0 + jk$, $j = 0, 1, \ldots, nt$, mediante los pasos espacial y temporal $h = \dfrac{L}{nx}$ y $k = \dfrac{T}{nt}$, respectivamente. Estamos representando por T el valor del tiempo donde finaliza nuestro estudio

7.3 Método explícito con condiciones de contorno Dirichlet

Dadas las condiciones del problema (2), la distribución de nodos queda como se indica en la Figura 1. En este caso concreto, $a = 0$ y $b = L$.

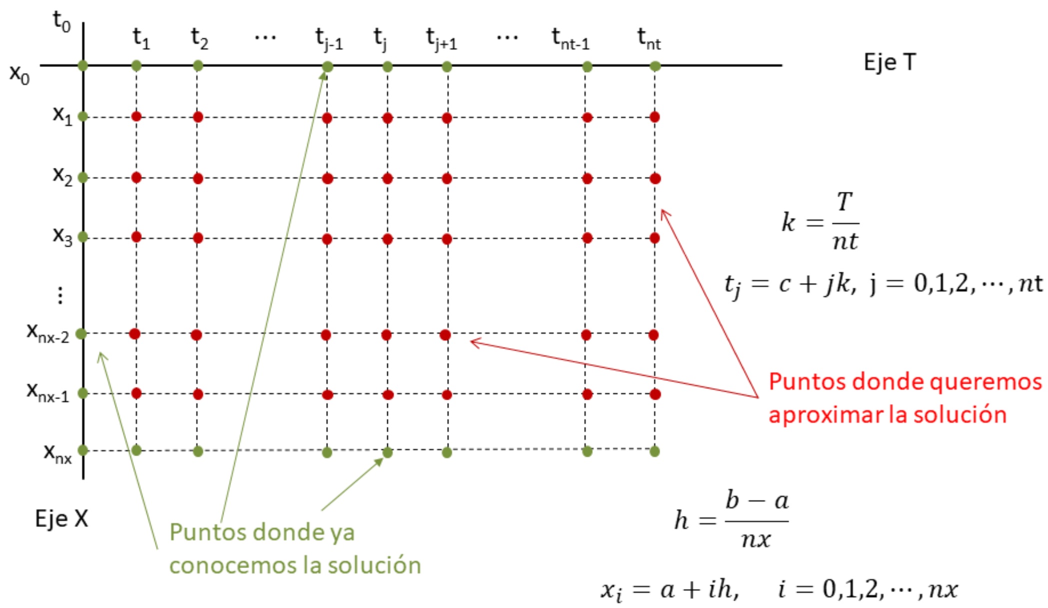


Figura 1: Distribución de nodos para las EDPs hiperbólicas

Lo que aparece en la Figura 1 se puede interpretar como una matriz, de tamaño $(nx+1) \times (nt+1)$, que contiene las soluciones aproximadas del problema en cada punto (x_i, t_j) que se encuentra en la posición (i, j) de la matriz. Hemos marcado en verde las posiciones correspondientes a la primera y última fila, cuyos datos ya son conocidos a partir de las condiciones de contorno, y a la primera columna, cuyos datos son conocidos a partir de la primera condición inicial. El resto de entradas de la matriz están en rojo ya que, de momento, no son conocidas.

Para obtener los valores de estos puntos mediante un método explícito, aplicamos sobre la EDP (2), diferencias centrales en u_{tt} y centrales en u_{xx},

$$\frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + (x,t-k)}{k^2} = \alpha^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2},$$

con lo que sabemos que estamos cometiendo un error de orden $O(k^2 + h^2)$.

Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, t_j), $i = 1, 2, \ldots, nx-1$, $j = 1, 2, \ldots, nt-1$, y denotando $u(x_i, t_j) = u_{i,j}$, llegamos a la expresión en diferencias

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad i = 1, \ldots, nx-1, j = 1, \ldots, nt-1.$$

Llamando $\lambda = \dfrac{k\alpha}{h}$ y llevando a la izquierda las incógnitas del instante mayor, resulta

$$u_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}, \quad i = 1, \ldots, nx-1, j = 1, \ldots, nt-1.$$

Aunque no es necesario para implementar el método, vamos a obtener una expresión matricial del mismo. Fijando el índice j y variando el índice i, $i = 1, \ldots, nx-1$, obtenemos la expresión

$$u^{(j+1)} = Au^{(j)} - u^{(j-1)}, \quad j = 1, \ldots, nt-1,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda^2) & \lambda^2 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & 2(1-\lambda^2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2(1-\lambda^2) \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix},$$

y

$$u^{(0)} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{pmatrix}, \; u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{pmatrix}.$$

Esto nos está indicando que la solución en el instante t_{j+1}, $u^{(j+1)}$, se obtiene a partir de las soluciones en el instante t_j, $u^{(j)}$ y en el t_{j-1}, $u^{(j-1)}$. Este proceso se inicia en $j = 1$ por lo que deberíamos conocer $u^{(0)}$ y $u^{(1)}$ para poder arrancar esta recurrencia. Sin embargo, mientras $u^{(0)}$ nos lo proporciona la primera condición inicial, $u^{(1)}$ no es conocido. Vamos a utilizar la segunda condición inicial para aproximar $u^{(1)}$, que es la segunda columna de nuestra matriz.

¿Cómo calculamos $u^{(1)}$, es decir, $u_{i,1}$, $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$?

Vamos a dar dos respuestas a esta pregunta, con diferentes órdenes de convergencia.

(a) Utilizando la diferencia progresiva en la condición inicial $u_t(x, 0) = g(x)$, resulta

$$u_t(x_i, t_0) \approx \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{k} = g(x_i) \quad \Rightarrow \quad u_{i,1} = f(x_i) + kg(x_i), i = 1, 2, \ldots, nx - 1$$

aproximación de orden 1, $O(k)$.

(b) Utilizando el desarrollo de Taylor hasta orden 2, alrededor de un punto arbitrario $(x, 0)$,

$$\begin{aligned} u(x, 0 + k) &\approx u(x, 0) + u_t(x, 0)k + u_{tt}(x, 0)\frac{k^2}{2} \\ &= f(x) + kg(x) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 u_{xx}(x, 0) \\ &= f(x) + kg(x) + \frac{k^2}{2}\alpha^2 f''(x), \end{aligned}$$

o bien, si $f''(x) \approx \dfrac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}$, evaluando en x_i, resulta

$$u_{i,1} = (1 - \lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}\left(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})\right) + kg(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, nx - 1,$$

aproximación de orden 2, $O(k^2 + h^2)$.

Convergencia y estabilidad

En el Tema 4 definimos los conceptos de consistencia, convergencia y estabilidad, así como su relación con el error de truncamiento y la capacidad del esquema de mantener bajo control el error de redondeo acumulado. Vamos a utilizar la teoría de estabilidad de Von Neumann.

Dada la expresión en diferencias

$$u_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{i,j}+\lambda^2(u_{i+1,j}+u_{i-1,j})-u_{i,j-1}, \quad i = 1,\ldots,nx-1, j = 1,\ldots,nt-1,$$

reemplazamos $u_{i,j}$ por $e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^j$,

$$e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^{j+1} \;=\; 2(1-\lambda^2)e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^j + \lambda^2\left(e^{\sqrt{-1}\beta(i+1)h} + e^{\sqrt{-1}\beta(i-1)h}\right)\xi^j - e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^{j-1}.$$

Dividiendo por $e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^j$,

$$\begin{aligned}\xi &= 2(1-\lambda^2) + \lambda^2\left(e^{\sqrt{-1}\beta h} + e^{-\sqrt{-1}\beta h}\right) - \xi^{-1}\\ &= 2(1-\lambda^2) + 2\lambda^2\cos(\beta h) - \xi^{-1},\end{aligned}$$

luego

$$\xi + \frac{1}{\xi} = 2 + 2\lambda^2(\cos(\beta h) - 1)$$

y, si denotamos por

$$p = 2 + 2\lambda^2(\cos(\beta h) - 1),$$

entonces $p \leq 2$, ya que $\cos(\beta h) - 1 \leq 0$.

Por tanto,

$$\xi + \frac{1}{\xi} = p \Leftrightarrow \xi^2 - p\xi + 1 = 0 \Leftrightarrow \xi_\pm = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}.$$

- $p^2 - 4 > 0$ y como $p \leq 2$, entonces $p < -2$. La ecuación cuadrática tiene dos raíces reales. Una de ellas es

$$\xi_- = \frac{p - \sqrt{p^2-4}}{2} < \frac{p}{2} < \frac{-2}{2} = -1$$

  y el método será inestable.

- $p^2 - 4 \leq 0$, luego $-2 \leq p \leq 2$ y

$$\xi_\pm = \frac{p}{2} \pm \sqrt{-1}\frac{\sqrt{4-p^2}}{2} \Rightarrow |\xi_\pm| = 1.$$

Luego la condición de estabilidad es

$$-2 \leq 2 + 2\lambda^2 \left(\cos(\beta h) - 1\right) \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 2 - 4\lambda^2 \Leftrightarrow \boxed{\lambda^2 \leq 1},$$

es decir,

$$\boxed{\text{Condición de estabilidad:} \quad \lambda \leq 1.}$$

Así pues, las características principales del método explícito para los problemas hiperbólicos son:

- El proceso es convergente si $\lambda \leq 1$,
- El orden de convergencia es $O(k + h^2)$ ó $O(k^2 + h^2)$, dependiendo de cómo calculemos la solución en el intante t_1, $u^{(1)}$.

Implementación en Matlab

Una vez desarrollado el método explícito para EDPs hiperbólicas, es el momento de implementarlo en Matlab. Vamos a trabajar con la ecuación (2) bajo las condiciones iniciales (CI) y las condiciones de contorno (CC) de tipo Dirichlet no homogéneas, es decir,

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0, \quad x \in [0, L], t \geq 0,$$
$$\text{CI: } u(x, 0) = f(x),\ u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, L],$$
$$\text{CC: } u(0, t) = h_1(t),\ u(L, t) = h_2(t), \quad t > 0.$$

Generaremos una función que tenga como parámetros de entrada los valores de L, T (tiempo final de nuestro estudio) y α. Asimismo, necesitaremos conocer también el número de nodos espaciales y temporales, de modo que será necesario introducir como parámetros de entrada nx y nt, respectivamente. Además, tenemos que proporcionar las funciones $f(x)$ y $g(x)$ de las condiciones iniciales y las funciones $h_1(t)$ y $h_2(t)$, correspondientes a las condiciones de contorno.

Como parámetros de salida aportaremos las variables discretizadas x_i y t_j, y la solución aproximada del problema en cada nodo del mallado (x_i, t_j), $u_{i,j}$, es decir, la matriz U completamente rellenada. Los pasos del algoritmo a implementar son:

- Inicializar las variables:
  - Establecemos los pasos espacial h y temporal k, a partir de los cuales definimos los nodos x_i y t_j.
  - Definimos el parámetro $\lambda = \frac{k\alpha}{h}$.
  - La matriz U de tamaño $(nx + 1) \times (nt + 1)$, solución aproximada u en cada punto del mallado, se define inicialmente con ceros.
- Almacenamos en la primera columna de u los datos proporcionados por la condición inicial $f(x)$ y en la primera y última filas, los correspondientes a las condiciones de contorno $h_1(t)$ y $h_2(t)$.
- Definimos un bucle que recorre el índice i, para $j = 2$, de manera que obtenemos la solución aproximada en el segundo instante (columna 2 de la matriz U).
- Definimos un blucle que recorra el índice j, de modo que obtengamos la solución aproximada $u_{i,j+1}$ en función de los valores de $u_{i,j}$, para los valores centrales del índice espacial i.

Debemos tener en cuenta que, mientras en nuestra notación teórica los índices comienzan en cero, la primera componente de un vector en Matlab es la componente uno. Por tanto, habrá siempre un desfase de una unidad entre los índices teóricos e implementados. A continuación, mostramos una posible implementación y un ejemplo resuelto.

explicitoOndas.m

```
function [U,x,t] = ...
   explicitoOndas(CC1,CC2,CI1,CI2,a,b,nx,nt,Tmax,alfa)
% CC1 funcion de t que describe la condicion de ...
```

```
   contorno en a,
% CC2 funcion de t que describe la condicion de ...
   contorno en b,
% CI1 funcion de x que describe la condicion ...
   inicial en u(x,0),
% CI2 funcion de x que describe la condicion ...
   inicial en u_t(x,0),

h=(b-a)/nx;  x=a:h:b;  x=x(:);
k=Tmax/nt;   t=0:k:Tmax;
U=zeros(nx+1,nt+1);
fx=feval(CI1,x);
gx=feval(CI2,x);
U(:,1)=fx;
U(1,:)=feval(CC1,t);
U(nx+1,:)=feval(CC2,t);
lambda=(k*alfa/h);     lambda2=lambda^2;

if lambda<=1
    disp('se cumple la condicion de convergencia')
else
    disp('no se cumple la condicion de convergencia')
end

for i=2:nx
   U(i,2) = (1-lambda2)*fx(i) ...
      +lambda2/2*(fx(i+1)+fx(i-1))+k*gx(i);
end

for j=2:nt
    for i=2:nx
```

```
        U(i,j+1)=2*(1-lambda2)*U(i,j)+...
        lambda2*(U(i+1,j)+U(i-1,j))-U(i,j-1);
    end
end
end
```

Ejemplo 1. Ecuación de ondas, utilizando el método explícito.

Consideremos el problema hiperbólico

$$u_{tt}(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,\ t \geq 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = \sin \pi x, u_t(x,0) = 0\ x \in [0,1],$$

del que sabemos que la solución exacta es $u(x,t) = \sin(\pi x)\cos(2\pi t)$.

Vamos a determinar la solución aproximada en $T_{max} = 1$ mediante el método explícito con los valores de los pasos espacial y temporal:

(a) $h = 0.1$, $k = 0.05$,

(b) $h = 0.1$, $k = 0.1$.

En este caso, las funciones que definen las condiciones iniciales y de contorno son:

```
function y=CC1(t)
y=0*t;
end
function y=CC2(t)
y=0*t;
end
function y=CI1(x)
y=sin(pi*x);
end
```

```
function y=CI2(x)
y=0*x;
end
```

En la segunda y tercera columna de la Tabla 1 aparece la solución aproximada y el error exacto cometido en cada uno de los nodos espaciales en el instante $t = 1$, utilizando los pasos $h = 0.1$ y $k = 0.05$. De la misma manera, en las columnas cuarta y quinta de la Tabla 1, se muestran los valores encontrados con $h = 0.1$ y $k = 0.1$. Observemos la importante diferencia que hay entre los errores de las columnas 3 y 5. La razón está en el hecho de que los pasos $h = 0.1$ y $k = 0.1$ no cumplen la condición de convergencia, cosa que sí ocurre con $h = 0.1$ y $k = 0.05$.

x_i	$u_{i,21}$	$\lvert u(x_i,1) - u_{i,21}\rvert$	$u_{i,11}$	$\lvert u(x_i,1) - u_{i,11}\rvert$
0.0	0	0	0	0
0.1	3.0902e-01	5.5511e-17	3.0800e-01	1.0140e-03
0.2	5.8779e-01	0	5.8585e-01	1.9308e-03
0.3	8.0902e-01	0	8.0636e-01	2.6555e-03
0.4	9.5106e-01	1.1102e-16	9.4793e-01	3.1226e-03
0.5	1.0000e+00	0	9.9672e-01	3.2845e-03
0.6	9.5106e-01	3.3307e-16	9.4794e-01	3.1204e-03
0.7	8.0902e-01	0	8.0636e-01	2.6590e-03
0.8	5.8779e-01	2.2204e-16	5.8586e-01	1.9274e-03
0.9	3.0902e-01	5.5511e-17	3.0800e-01	1.0161e-03
1.0	0	1.2246e-16	0	1.2246e-16

Tabla 1: Resultados numéricos del Ejemplo 1

Ejemplo 2.

Una cuerda vibrante que se desplaza en un medio elástico satisface la ecuación:

$$u_{xx} - u = u_{tt}, \qquad x \in [0,1], \quad t > 0. \tag{3}$$

Supongamos que la cuerda está fija en los extremos y que se suelta sin velocidad inicial a partir de la posición inicial $u(x,0) = \sin(\pi x)$.

a) Describe la transformación del problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k^2 + h^2)$.

b) Aplica este esquema para determinar la solución en el instante $t = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$. Representa la solución en los instantes $t = 0.25$, $t = 0.5$ y $t = 0.75$.

Solución:

a) Consideramos los nodos $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, nx$ y $t_j = jk$, $j = 0, 1, \ldots, nt$, con $h = 1/nx$ y $k = 1/nt$, siendo nx y nt el número de subintervalos en cada variable. Aplicando diferencias simétricas en u_{xx} y u_{tt}, obtenemos:

$$u_{i,j+1} = (2-2\lambda^2-k^2)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}, \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, nx-1, \\ j = 0, \ldots, nt-1, \end{array}$$

donde $\lambda = k/h$. Dado que los extremos de la cuerda son fijos, sabemos que $u(0,t) = u(1,t) = 0$. Asimismo, la posición inicial de la cuerda, es $u_{i,0} = \sin(\pi x_i)$, para $i = 0, 1, \ldots, nx$.

El hecho de soltar la cuerda sin velocidad inicial nos permite afirmar que

$$u_t(x_i, 0) = 0, \;\; i = 0, 1, \ldots, nx.$$

Si aproximamos esta derivada respecto a la variable temporal por diferencias simétricas, se deduce que $u_{i,-1} = u_{i,1}$. Empleando esta aproximación en el esquema en diferencias anterior para $j = 0$,

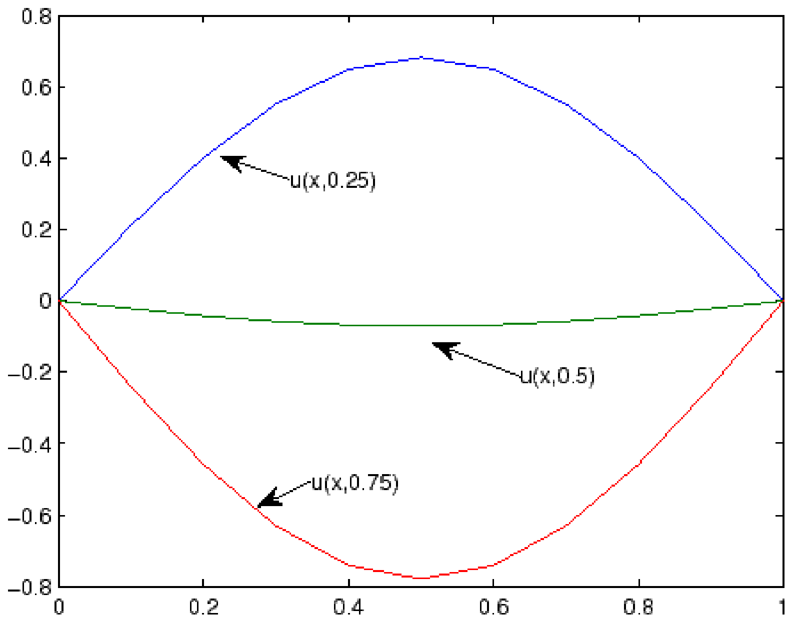
$$u_{i,1} = (1-\lambda^2-\frac{k^2}{2})\sin(\pi x_i) + \frac{\lambda}{2}(\sin(\pi x_{i+1}) + \sin(\pi x_{i-1}), \quad i = 0, 1, \ldots, nx.$$

b) Modificando en el programa estándar el cálculo de $u_{i,1}$ y $u_{i,j+1}$ según se ha descrito, obtenemos para $t = 1$,

x_i	$u_{i,2001}$
0	0
0.1	-0.305862
0.2	-0.581784
0.3	-0.800757
0.4	-0.941346
0.5	-0.989790
0.6	-0.941346
0.7	-0.800757
0.8	-0.581784
0.9	-0.305862
1	0

Tabla 2: Resultados numéricos del Ejemplo 2

En la gráfica podemos ver las distintas curvas que aproximan la posición de la cuerda en los instantes $t = 0.25$, $t = 0.5$ y $t = 0.75$.



7.4 Método implícito con condiciones de contorno Dirichlet

Recordemos el problema hiperbólico que en la sección anterior hemos resuelto mediante un método explícito

$$u_{tt} - \alpha^2 u_{xx} = 0, \quad x \in [0, L], t \geq 0, \tag{4}$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = f(x), \; u_t(x, 0) = g(t), \quad x \in [0, L]$$

y a las condiciones de contorno,

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0.$$

La distribución de nodos espaciales y temporales es la misma que indicamos en la Figura 1. Aproximamos u_{tt} mediante una diferencia central y la evaluamos en cada punto (x_i, t_j) utilizando la notación anterior

$$u_{tt}(x_i, t_j) \; \approx \; \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}.$$

Aproximamos la parcial segunda con respecto al espacio, u_{xx} mediante la media entre la diferencia central en t_{j+1}

$$\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}$$

y la diferencia central en t_{j-1}

$$\frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2}.$$

De esta manera, el esquema en diferencias que se obtiene es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = & \frac{\lambda^2}{2}\left[(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1})\right. \\
& \left. +(u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})\right],
\end{aligned}
$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$, $j = 1, 2, \ldots, nt - 1$, o bien, llamando $\lambda = \dfrac{\alpha k}{h}$ y llevando a la izquierda las variables correspondientes al instante más alto

$$
\begin{aligned}
(1+\lambda^2)u_{i,j+1} - & \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = \\
& = 2u_{i,j} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - (1+\lambda^2)u_{i,j-1},
\end{aligned}
$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$, $j = 1, 2, \ldots, nt - 1$.

Fijando j y escribiendo todas las ecuaciones para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$, obtenemos la expresión matricial del método

$$
Au^{(j+1)} = 2u^{(j)} + Bu^{(j-1)}, \;\; j = 1, 2, \ldots, nt - 1,
$$

donde

$$
A = \begin{pmatrix}
1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2
\end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix},
$$

$$
u^{(0)} = \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{nx-1,0} \end{pmatrix}, \; u^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} \end{pmatrix},
$$

$$B = \begin{pmatrix} -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) \end{pmatrix}.$$

Por tanto, para encontrar la solución en el instante t_{j+1} debemos resolver un sistema lineal tridiagonal, donde A es la matriz de coeficientes y donde en los términos independientes interviene la solución en dos instantes anteriores t_j y t_{j-1}.

Convergencia, estabilidad e implementación

Para analizar la estabilidad del esquema en diferencias

$$\begin{aligned}(1+\lambda^2)u_{i,j+1} - &\frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j+1}) = \\ &= 2u_{i,j} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1}) - (1+\lambda^2)u_{i,j-1},\end{aligned}$$

utilizamos la teoría de Von Neumann, reemplazando $u_{i,j}$ por $e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^j$, obteniendo

$$\begin{aligned}(1+\lambda^2)e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^{j+1} - \frac{\lambda^2}{2}&(e^{\sqrt{-1}\beta(i+1)h}+e^{\sqrt{-1}\beta(i-1)h})\xi^{j+1} \\ &= 2e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^j + \frac{\lambda^2}{2}\left(e^{\sqrt{-1}\beta(i+1)h}+e^{\sqrt{-1}\beta(i-1)h}\right)\xi^{j-1} \\ &- (1+\lambda^2)e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^{j-1}.\end{aligned}$$

Dividiendo de nuevo por $e^{\sqrt{-1}\beta ih}\xi^j$, resulta

$$(1+\lambda^2)\xi - \frac{\lambda^2}{2}(e^{\sqrt{-1}\beta h}+e^{-\sqrt{-1}\beta h})\xi = 2 + \frac{\lambda^2}{2}\left(e^{\sqrt{-1}\beta h}+e^{-\sqrt{-1}\beta h}\right)\xi^{-1} - (1+\lambda^2)\xi^{-1},$$

es decir,

$$\left[1+\lambda^2(1-\cos(\beta h))\right]\xi = 2 - \left[1+\lambda^2(1-\cos(\beta h))\right]\xi^{-1},$$

$$\left[1+2\lambda^2 \text{sin}^2\frac{\beta h}{2}\right]\xi = 2 - \left[1+2\lambda^2 \text{sin}^2\frac{\beta h}{2}\right]\xi^{-1},$$

luego

$$q\xi^2 - 2\xi + q = 0, \quad q = 1 + 2\lambda^2\,\text{sin}^2\frac{\beta h}{2}, \quad q > 1$$

y, por tanto,

$$\xi_\pm = \frac{1\pm\sqrt{1-q^2}}{q} = \frac{1}{q} \pm \sqrt{-1}\frac{\sqrt{q^2-1}}{q} \;\Leftrightarrow\; \boxed{|\xi| = 1}$$

Por tanto, concluimos que el método implícito es incondicionalmente estable. Respecto a la convergencia, teniendo en cuenta como hemos reemplazado las derivadas parciales, podemos afirmar que se trata de un método de orden $O(k+h^2)$ o $O(k^2+h^2)$ dependiendo de cómo hayamos calculado la aproximación en el instante t_1, $u^{(1)}$.

En cuanto a la implementación, la diferencia respecto al método explícito radica en el bucle principal. En éste, para cada $j = 1, 2, \ldots, nt$, debemos resolver el sistema tridiagonal $Au^{(j+1)} = 2u^{(j)} + Bu^{(j-1)}$, de manera que para cada $i = 1, 2, \ldots, nx-1$, asignaremos $U_{i,j+1} = z_i$, siendo z_i la solución del sistema lineal. Este sistema tridiagonal lo resolveremos mediante el algoritmo de Crout, que ya utilizamos en los problemas parabólicos. Además, la matriz de coeficientes A y la matriz B son independientementes del instante t_j en que nos encontremos, por lo que pueden definirse fuera del blucle. Así, dentro del mismo definiremos el vector de términos independientes y llamaremos al algoritmo de Crout. Podemos ver el código a continuación.

implicitoOndas.m

```
function ...
   [U,x,t]=implicitoOndas(CC1,CC2,CI1,CI2,a,b,...
    nx,nt,Tmax,alfa)
% CC1 funcion de t que describe la condicion de ...
   contorno en a,
% CC2 funcion de t que describe la condicion de ...
   contorno en b,
```

```
% CI1 funcion de x que describe la condicion ...
   inicial en u(x,0),
% CI2 funcion de x que describe la condicion ...
   inicial en u_t(x,0),
h=(b-a)/nx; k=Tmax/nt;
x=a:h:b; x=x(:);
t=0:k:Tmax;
U=zeros(nx+1,nt+1);

fx=feval(CI1,x);
gx=feval(CI2,x);
U(:,1)=fx;
U(1,:)=feval(CC1,t);
U(nx+1,:)=feval(CC2,t);

lambda=k*alfa/h;
lambda2=lambda^2;

for i=2:nx
   U(i,2) = (1-lambda2)*fx(i) ...
      +lambda2/2*(fx(i+1)+fx(i-1))+k*gx(i);
end

dpa=(1+lambda2)*ones(nx-1,1);
dsa=-lambda2/2*ones(nx-2,1);
dia=dsa;

dpb=-dpa;
dsb=-dsa;
dib=dsb;
B=diag(dpb)+diag(dsb,1)+diag(dib,-1);
```

```
for j=2:nt
     d=2*U(2:nx,j)+B*U(2:nx,j-1);
     z=Crout(dpa,dsa,dia,d);
     U(2:nx,j+1)=z;
end
end
```

Ejemplo 3.

Consideremos el problema hiperbólico descrito de la forma

$$
\begin{aligned}
&u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 4,\ t \geq 0,\\
&u(0,t) = u(1,t) = 0, t > 0; \quad u(x,0) = 2 - |x-2|, u_t(x,0) = 0,\ x \in [0,4].
\end{aligned}
$$

Buscamos la solución aproximada en $T_{max} = 4$ mediante el método implícito con $h = 1$ y $k = 0.5$. Las funciones que describen las condiciones de contorno e iniciales se introducen como se muestra a continuación:

```
function y=CC1(t)
y=0*t;
end
function y=CC2(t)
y=0*t;
end
function y=CI(x)
y=2-abs(x-2);
end
function y=CI2(x)
y=0*x;
end
```

En la siguiente tabla podemos ver la solución aproximada en cada punto del mallado (x_i, t_j).

	$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$
t=0	0.0	1.0000	2.0000	1.0000	0.0
t=0.5	0.0	1.0000	1.7500	1.0000	0.0
t=1	0.0	0.9184	1.1837	0.9184	0.0
t=1.5	0.0	0.6926	0.4824	0.6926	0.0
t=2	0.0	0.2912	-0.1699	0.2912	0.0
t=2.5	0.0	-0.2449	-0.6647	-0.2449	0.0
t=3	0.0	-0.7996	-0.9953	-0.7996	0.0
t=3.5	0.0	-1.2231	-1.2214	-1.2231	0.0
t=4	0.0	-1.3966	-1.3981	-1.3966	0.0

Tabla 3: Resultados numéricos del Ejemplo 3

Ejemplo 4. Ecuación del telégrafo

Consideremos la siguiente ecuación en derivadas parciales, conocida como la ecuación del telégrafo

$$u_{tt} + u_t + 2u = u_{xx}, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$ y las condiciones iniciales $u(x,0) = \sin(\pi x)$ y $u_t(x,0) = 0$. Vamos a trabajar sobre los siguientes apartados:

a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k^2+h^2)$. Determina la solución en el instante $t = 0.5$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.005$. Representa la solución en los instantes $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

b) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k^2+h^2)$. Determina la solución en el instante $t = 0.5$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.005$. Compara los resultados obtenidos con los del apartado a).

Solución:

a) Tomamos $h = 1/nx$ y $k = 0.5/nt$, como pasos espacial y temporal respectivamente, con lo que los nodos de nuestro problema son $x_i = 0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, nx$, y $t_j = 0 + jk$, $j = 0, 1, \ldots, nt$. Utilizamos diferencias finitas centrales y la notación $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$. Así, obtenemos

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + 2u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2},$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$ y $j = 1, 2, \ldots, nt - 1$. Despejando la incógnita correspondiente al instante t_{j+1} resulta

$$\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k}\right) u_{i,j+1} = \left(\frac{2}{k^2} - 2 - \frac{2}{h^2}\right) u_{i,j} + \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2}\right) u_{i,j-1},$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$ y $j = 1, 2, \ldots, nt - 1$.

La primera columna de la matriz U corresponde a la solución en el instante $t = t_0$, lo que viene dado por la condición inicial

$$u_{i,0} = \sin(\pi x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, nx - 1.$$

A partir de las dos condiciones iniciales, aproximamos la solución en el instante t_1 (segunda columna de la matriz U)

$$\begin{aligned} u(x, 0 + k) &\approx u(x, 0) + u_t(x, 0)k + u_{tt}(x, 0)\frac{k^2}{2} \\ &= \sin(\pi x) + 0k + \frac{k^2}{2}(u_{xx}(x, 0) - u_t(x, 0) - 2u(x, 0)) \\ &= (1 - k^2)\sin(\pi x) + \frac{k^2}{2}u_{xx}(x, 0), \end{aligned}$$

y como

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, 0) &\approx \frac{u(x_{i+1}, 0) - 2u(x_i, 0) + u(x_{i-1}, 0)}{h^2} \\ &= \frac{\sin(\pi x_{i+1}) - 2\sin(\pi x_i) + \sin(\pi x_{i-1})}{h^2}, \end{aligned}$$

resulta

$$u_{i,1} = \left(1 - k^2 - \frac{k^2}{h^2}\right) \sin(\pi x_i) + \frac{k^2}{2h^2} \left(\sin(\pi x_{i+1}) + \sin(\pi x_{i-1})\right),$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$.

Para el resto de instantes temporales (columnas de la matriz U) procedemos de la forma

```
c1=(2*k^2/(h^2*(2+k)));
c2=(2*k^2/(2+k))*(2/k^2-2-2/h^2);
c3=(2*k^2/(2+k))*(1/(2*k)-1/k^2);

U(C,2)=(k^2/(2*h^2))*(fx(L)+fx(R))+(1-k^2-k^2/h^2)*fx(C);
U(C,j+1)=c1*(U(L,j)+U(R,j))+c2*U(C,j)+c3*U(C,j-1);
```

Observemos que se ha utilizado notación vectorial que simplifica la sintaxis del programa, evitando bucles for. El conjunto C representa los índices centrales $\{2, 3, \ldots, nx\}$, mientras que los conjuntos L y R representan los índices $\{1, 2, \ldots, nx\}$ y $\{2, 3 \ldots, nx + 1\}$, respectivamente.

En el siguiente fichero.m se puede encontrar la implementación del método explícito para la ecuación del telégrafo sin utilizar la notación anterior.

explicitoTelegrafo.m

```
function U = explicitoTelegrafo ...
   (CC1,CC2,CI1,a,b,Tmax, nx,nt)

k=Tmax/nt; h=(b-a)/nx;
x=a:h:b;
t=0:k:Tmax;
U=zeros(nx+1,nt+1);

U(1,:)=feval(CC1,t);
U(nx+1,:)=feval(CC2,t);
U(:,1)=feval(CI1,x);

for i=2:nx
    U(i,2)=(1-k^2-k^2/h^2)*U(i,1) ...
       +(k^2/(2*h^2))*(U(i+1,1) +U(i-1,1));
end

A=1/k^2+1/(2*k);
B=2/k^2-2-2/h^2;
C=1/h^2;
D=1/(2*k)-1/k^2;

for j=2:nt
    for i=2:nx
        U(i,j+1)=(B/A)*U(i,j) ...
           +(C/A)*(U(i+1,j)+U(i-1,j)) ...
           +(D/A)*U(i,j-1);
    end
end

end
```

La solución en los instantes $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ la encontramos en las columnas 21, 41, 61, 81 y 101, de la matriz U, respectivamente. Por ello, para representar la solución en esos instantes es suficiente hacer.

```
>> ...
   plot(x,U(:,21),x,U(:,41),x,U(:,61),x,U(:,81),x,U(:,101))
```

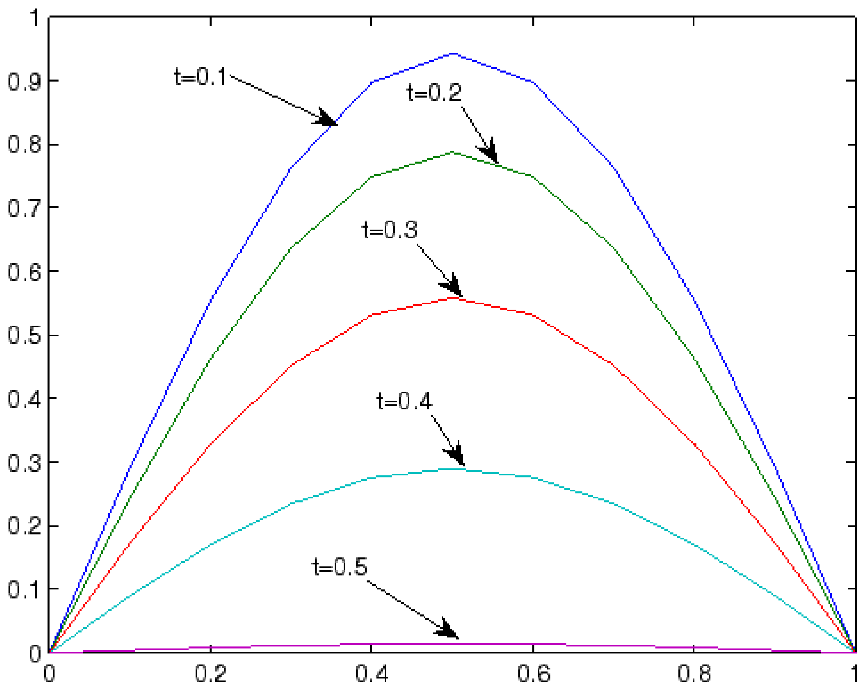


Figura 2: Solución aproximada por el método explícito

b) Para el método implícito utilizamos diferencias finitas centrales y aproximamos u_{xx} por la media entre la diferencia central en el instante t_{j+1} y en el instante t_{j-1},

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \right.$$
$$\left. + \frac{u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}}{h^2}\right] - 2u_{i,j},$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$, $j = 1, 2, \ldots, nt - 1$.

Agrupando los términos en el paso $j + 1$ a un lado y todos los demás al otro, resulta

$$\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2}\right) u_{i,j+1} - \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) =$$
$$= \left(\frac{2}{k^2} - 2\right) u_{i,j} + \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2}\right) u_{i,j-1} + \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1})$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$ y $j = 1, 2, \ldots, nt - 1$.

La segunda columna de la matriz U, es decir, $u_{i,1}$, $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$, se calcula de la misma forma que en el método explícito.

Fijando j y escribiendo todas las ecuaciones para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1$, obtenemos la expresión matricial del método

$$Au^{(j+1)} = (2/k^2 - 2)u^{(j)} + Bu^{(j-1)}, \;\; j = 1, 2, \ldots, nt - 1,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{2h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2h^2} & \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{2h^2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2h^2} & \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{2h^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2h^2} & \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{h^2} \end{pmatrix},$$

$$u^{(0)} = \begin{pmatrix} \sin(\pi x_1) \\ \sin(\pi x_2) \\ \vdots \\ \sin(\pi x_{nx-1}) \end{pmatrix}, \; u^{(1)} = \begin{pmatrix} \left(1 + k^2 - \frac{k^2}{h^2}\right) \sin(\pi x_1) + \frac{k^2}{2h^2}(\sin(\pi x_2) + \sin(\pi x_0)) \\ \left(1 + k^2 - \frac{k^2}{h^2}\right) \sin(\pi x_2) + \frac{k^2}{2h^2}(\sin(\pi x_3) + \sin(\pi x_1)) \\ \vdots \\ \left(1 + k^2 - \frac{k^2}{h^2}\right) \sin(\pi x_{nx-1}) + \frac{k^2}{2h^2}(\sin(\pi x_{nx}) + \sin(\pi x_{nx-2})) \end{pmatrix},$$

y

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2} & \frac{1}{2h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2h^2} & \frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2} & \frac{1}{2h^2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2h^2} & \frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2} & \frac{1}{2h^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2h^2} & \frac{1}{2k} - \frac{1}{k^2} - \frac{1}{h^2} \end{pmatrix}.$$

En la siguiente tabla mostramos los resultados obtenidos mediante los métodos explícito e implícito, en el instante máximo $t = 0.5$ y con los pasos espacial y temporal propuestos en el enunciado.

x_i	Método explícito	Método implícito
0	0	0
0.1	0.004493	0.004515
0.2	0.008545	0.008588
0.3	0.011762	0.011820
0.4	0.013827	0.013896
0.5	0.014538	0.014611
0.6	0.013827	0.013896
0.7	0.011762	0.011820
0.8	0.008545	0.008588
0.9	0.004493	0.004515
1.0	0	0

Tabla 4: Solución por los métodos explícito e implícito

El valor máximo de la diferencia, en valor absoluto, de ambos vectores es $m = 7.2668 \times 10^{-5}$.

Accede al vídeo: Método explícito con condiciones no Dirichlet

Es importante saber adaptar los diferentes programas que hemos visto para problemas hiperbólicos con condiciones dirichlet a problemas en los que las condiciones de contorno son naturales o mixtas. Veamos a continuación un ejemplo.

Ejemplo 5. Condiciones de contorno no Dirichlet

Consideremos la ecuación en derivadas parciales hiperbólica

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + e^{-t}, \quad x \in [0,\pi],\ t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = e^{-t}, u_x(\pi,t) = -3\cos(t), \forall t$ y la condición inicial

$$u(x,0) = 3\,\text{sin}\,(x) + 1, u_t(x,0) = -1,\ x \in [0,1].$$

Vamos a trabajar sobre los siguientes puntos:

a) Describe el método explícito de orden $O(k^2 + h^2)$, utilizando nx subintervalos en $[0, \pi]$ y nt subintervalos en $[0, T]$, donde T denota el instante máximo.

b) A partir del esquema anterior, determina la solución aproximada del problema en $T = 1.5$, tomando 10 subintervalos en el eje espacial y 100 en el temporal. Representa la solución en todos los instantes de tiempo.

c) Repite los dos pasos anteriores utilizando un método implícito de orden $O(k^2 + h^2)$ y los mismos subintervalos espaciales y temporales. Compara los resultados obtenidos.

Solución:

a) Consideremos los pasos espacial y temporal $h = \pi/nx$ y $k = Tmax/nt$, lo que nos proporciona los puntos

$$x_i = 0 + ih,\ i = 0, 1, 2, \ldots, nx - 1, nx,\ \ t_j = 0 + jk,\ j = 0, 1, \ldots, nt - 1, nt.$$

Esto nos proporciona el mallado de puntos que podemos ver en la gráfica, así como la matriz U, de tamaño $(nx + 1) \times (nt + 1)$ cuyas entradas queremos calcular.

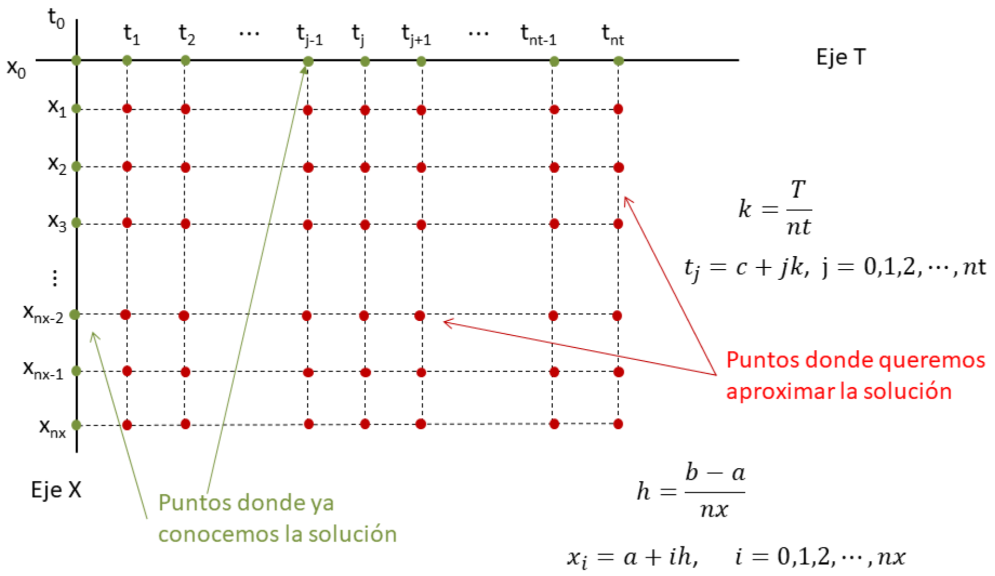


Figura 3: Distribución de nodos para el Ejemplo 5

Observemos que la última fila de nuestra matriz ya no es conocida, ya que la segunda condición de contorno no es Dirichlet.

Utilizamos diferencias finitas centrales para ambas derivadas parciales:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} = \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + e^{-t_j},$$

con $i = 1, \ldots, nx-1, nx$; $j = 1, \ldots, nt-1$. Llamando $\lambda = \dfrac{k\alpha}{h}$ y llevando a la izquierda las incógnitas del instante mayor, resulta

$$u_{i,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{i,j} + \lambda^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} + k^2 e^{-t_j},$$

con $i = 1, \ldots, nx-1, nx$; $j = 1, \ldots, nt-1$. El índice i debe llegar hasta nx ya que en este problema la solución en el último punto del intervalo espacial no es conocida. Pero, al hacer $i = nx$ aparece en la última ecuación $u_{nx+1,j}$ que no es una incógnita de nuestro problema. Debemos modificar la expresión para $i = nx$

$$u_{nx,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{nx,j} + \lambda^2(u_{nx+1,j} + u_{nx-1,j}) - u_{nx,j-1} + k^2 e^{-t_j},$$

con la segunda condición inicial

$$u_x(\pi, t_j) = u_{nx,j} \approx \frac{u_{nx+1,j} - u_{nx-1,j}}{2h} = -3\cos t_j,$$

de donde

$$u_{nx+1,j} = u_{nx-1,j} - 6h\cos t_j.$$

Por tanto, la última ecuación resulta

$$u_{nx,j+1} = 2(1-\lambda^2)u_{nx,j} + 2\lambda^2 u_{nx-1,j} - u_{nx,j-1} - 6h\lambda^2\cos t_j + k^2 e^{-t_j}.$$

Como en cualquier problema hiperbólico, debemos completar la solución en el instante t_1 (segunda columna de la matriz U)

$$\begin{aligned} u_{i,1} &= (1-\lambda^2)f(x_i) + \frac{\lambda^2}{2}(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})) + kg(x_i) + \frac{k^2}{2}e^{-t_0} \\ &= (1-\lambda^2)u_{i,0} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) + kg(x_i) + \frac{k^2}{2}e^{-t_0}. \end{aligned}$$

Al igual que en el resto de columnas, debemos evitar la incógnita $u_{nx+1,0}$. Para $i = nx$, $u_{nx+1,0} = u_{nx-1,0} - 6h\cos t_0$ y a partir de aquí:

$$u_{nx,1} = (1-\lambda^2)u_{nx,0} + \lambda^2 u_{nx-1,0} - \frac{\lambda^2}{2}6h\cos t_0 + kg(x_{nx}) + \frac{k^2}{2}e^{-t_0}.$$

Estas expresiones deben utilizarse para modificar el archivo explicitoOndas.m y adaptarlo a este problema. En el siguiente código se puede ver esa adaptación.

expOndasEjemplo5.m

```
function [U,x,t] = ...
   expOndasEjemplo5(CC1,CI1,CI2,a,b,nx,nt,Tmax,alfa)
h=(b-a)/nx;  x=a:h:b;  x=x(:);
k=Tmax/nt;   t=0:k:Tmax;
U=zeros(nx+1,nt+1);
fx=feval(CI1,x);    gx=feval(CI2,x);
U(:,1)=fx;          U(1,:)=feval(CC1,t);
lambda=(k*alfa/h);  lambda2=lambda^2;
if lambda<=1
    disp('se cumple la cond. conv.')
else
    disp('no se cumple')
end
for i=2:nx
   U(i,2) = (1-lambda2)*fx(i) ...
      +lambda2/2*(fx(i+1)+fx(i-1))...
       +k*gx(i)+(k^2/2)*exp(-t(1));
   U(nx+1,2)=(1-lambda2)*fx(nx+1)+ ...
      lambda2*fx(nx)- lambda2/2*6*h*cos(t(1))...
       +k*gx(nx+1)+(k^2/2)*exp(-t(1));
end
for j=2:nt
    for i=2:nx
        U(i,j+1)=2*(1-lambda2)*U(i,j)+...
        lambda2*(U(i+1,j)+U(i-1,j))-U(i,j-1)+ ...
           k^2*exp(-t(j));
        U(nx+1,j+1)=2*(1-lambda2)*U(nx+1,j) + ...
           2*lambda2*U(nx,j) - U(nx+1,j-1)...
        -6*h*lambda2*cos(t(j))+k^2*exp(-t(j));
    end
end
end
```

Las funciones que intervienen en este ejemplo son:

```
% Funciones que intervienen en el problema
function y=CC1(t)
y=exp(-t);
end
function y=CI1(x)
y=3*sin(x)+1;
end
function y=CI2(x)
y=-1*ones(length(x),1);
end
```

b) Llamando al fichero expOndasEjemplo5.m con los parámetros de entrada del enunciado

```
>> [U,x,t] = ...
   expOndasEjemplo5('CC1','CI1','CI2',0,pi,10,100,1.5,1)
```

obtenemos como valores aproximados de la solución en el instante $t = 1.5$ los que aparecen en la Tabla 5.

x_i	$u_{i,101}$
0.0000	0.2231
0.3142	0.2944
0.6283	0.3587
0.9425	0.4097
1.2566	0.4422
1.5708	0.4519
1.8850	0.4341
2.1991	0.3861
2.5133	0.3206
2.8274	0.2557
3.1416	0.1827

Tabla 5: Resultados numéricos del Ejemplo 5

En la siguiente figura, mostramos la solución en los 101 instantes de tiempo.

```
>> plot(U)
```

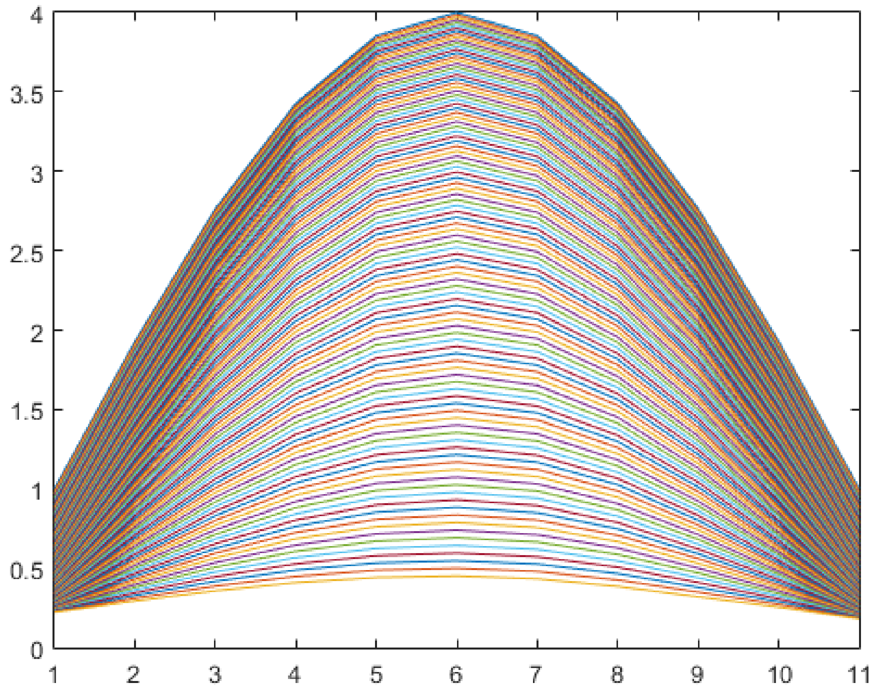


Figura 4: Soluciones en los diferentes instantes de tiempo por el método explícito

c) Aplicando las diferencias finitas adecuadas para el método implícito, resulta

$$
\begin{aligned}
u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = & \frac{\lambda^2}{2} [(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) \\
& + (u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})] + k^2 e^{-t_j},
\end{aligned}
$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1, nx$, $j = 1, 2, \ldots, nt - 1$. Llevando las incógnitas con instante temporal más alto $j + 1$ a la izquierda y el resto a la derecha, obtenemos

$$
\begin{aligned}
& (1 + \lambda^2) u_{i,j+1} - \frac{\lambda^2}{2} (u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = \\
& \qquad = 2u_{i,j} + \frac{\lambda^2}{2} (u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - (1 + \lambda^2) u_{i,j-1} + k^2 e^{-t_j},
\end{aligned}
$$

para $i = 1, 2, \ldots, nx - 1, nx$, $j = 1, 2, \ldots, nt - 1$.

Al igual que en el caso explícito, vamos a encontrar problemas en la última ecuación, $i = nx$,

$$(1+\lambda^2)u_{nx,j+1} - \frac{\lambda^2}{2}(u_{nx+1,j+1} + u_{nx-1,j+1}) =$$
$$= 2u_{nx,j} + \frac{\lambda^2}{2}(u_{nx+1,j-1} + u_{nx-1,j-1}) - (1+\lambda^2)u_{nx,j-1} + k^2 e^{-t_j},$$

y nos deshacemos de esas incógnitas fuera de rango con la segunda condición de contorno:

$$u_{nx+1,j+1} = u_{nx-1,j+1} - 6h \cos t_{j+1} \quad \text{y} \quad u_{nx+1,j-1} = u_{nx-1,j-1} - 6h \cos t_{j-1}.$$

Por tanto, la última ecuación resulta:

$$(1+\lambda^2)u_{nx,j+1} - \lambda^2 u_{nx-1,j+1} =$$
$$= 2u_{nx,j} + \lambda^2 u_{nx-1,j-1} - (1+\lambda^2)u_{nx,j-1} - 3h\lambda^2(\cos t_{j+1} + \cos t_{j-1}) + k^2 e^{-t_j}.$$

Matricialmente, el esquema en diferencias queda de la forma:

$$Au^{(j+1)} = 2u^{(j)} + Bu^{(j-1)} + b_j + c_j,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2/2 & 1+\lambda^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda^2 & -\lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda^2 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ u_{3,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \\ u_{nx,j} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2/2 & -(1+\lambda^2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(1+\lambda^2) & \lambda^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^2 & -(1+\lambda^2) \end{pmatrix},$$

$$b_j = ke^{-t_j}[1, 1, 1, \dots, 1, 1]^T,$$

$$c_j = \left[\frac{\lambda^2}{2}(e^{-t_{j+1}} + e^{-t_{j-1}}), 0, 0, \dots, 0, -3h\lambda^2(\cos t_{j+1} + \cos t_{j-1})\right]^T.$$

Tras modificar el archivo .m en el que implementamos el método implícito para ecuaciones hiperbólicas, para adaptarlo a este problema, observamos que los resultados numéricos obtenidos coinciden con los del método explícito mostrados en la Tabla 5.

Accede al vídeo: Método explícito para una ecuación hiperbólica con condiciones no Dirichlet

7.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1. Una cuerda vibrante que se desplaza en un medio elástico satisface la ecuación

$$\mu^2 u_{xx} - \mu^2 u = u_{tt}, \ \ x \in [0, 1], \ t > 0,$$

donde $\mu^2 = 1$ es proporcional al coeficiente de elasticidad del medio. Supongamos que la cuerda está fija en los extremos y que se suelta sin velocidad inicial a partir de la posición inicial $u(x, 0) = \sin(\pi x)$.

a) Describe la transformación del problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k^2 + h^2)$.

b) Aplica el esquema anterior para determinar la solución en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$. Representa la solución en los instantes $t = 0.25$, $t = 0.5$ y $t = 0.75$ en una única gráfica.

c) Describe la transformación del problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k^2 + h^2)$.

d) Aplica el esquema de c) para determinar la solución en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$. Compara los resultados obtenidos con los del apartado b).

Ejercicio 2. Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad x \in [0,\pi],\ t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ \ \forall t,$$

$$u(x,0) = 3\sin x,\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ x \in [0,\pi].$$

El instante máximo que nos interesa es $T = 2$. Se pide:

a) Comprueba analíticamente que $u(x,t) = 3\cos(t)\sin(x)$ es solución exacta del problema.

b) Aproxima, mediante el método explícito, la solución del problema en el instante T, tomando $h = \pi/10$ y $k = 2/5$. Determina el error exacto y representa dicho error.

c) Aproxima, mediante el método implícito, la solución del problema en el instante T, tomando $h = \pi/10$ y $k = 2/5$. Determina el error exacto y representa dicho error.

Ejercicio 3. Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) + xu_t(x,t) = 0, \quad x \in [0,1],\ t \geq 0,$$

con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas y condiciones iniciales $u(x,0) = \sin(\pi x)$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in [0,1]$.

a) Describe el método explícito de orden $O(k^2+h^2)$, utilizando nx subintervalos en $[0,1]$ y nt subintervalos en $[0,T]$, donde T denota el instante máximo.

b) A partir del esquema anterior, determina la solución aproximada del problema en $T=1.5$, tomando 10 subintervalos en el eje espacial y 1000 en el temporal.

c) Repite los dos pasos anteriores utilizando un método implícito de orden $O(k^2+h^2)$ y los mismos subintervalos espaciales y temporales. Compara los resultados obtenidos.

Ejercicio 4. Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - tu_t(x,t) - u(x,t) = 0, \quad x \in [0,1],\ t \geq 0,$$

con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas y condiciones iniciales $u(x,0) = \sin(\pi x)$, $u_t(x,0) = 0$, $x \in [0,1]$.

a) Describe el método explícito de orden $O(k^2+h^2)$, utilizando nx subintervalos en $[0,1]$ y nt subintervalos en $[0,T]$, donde T denota el instante máximo.

b) A partir del esquema anterior, determina la solución aproximada del problema en $T=1.5$, tomando 10 subintervalos en el eje espacial y 1000 en el temporal.

c) Repite los dos pasos anteriores utilizando un método implícito de orden $O(k^2+h^2)$ y los mismos subintervalos espaciales y temporales. Compara los resultados obtenidos.

Ejercicio 5. Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{xx}(x,t) + 2u_x - 3u_{tt}(x,t) = \cos \pi x, \quad x \in [0,1],\ t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = 0, u(1,t) = 2t, \forall t$ y las condiciones iniciales

$$u(x,0) = \sin(x), u_t(x,0) = x - 2x^2,\ x \in [0,1].$$

Se pide:

a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k^2 + h^2)$. Describe la expresión matricial del mismo.

b) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k^2 + h^2)$. Describe la expresión matricial de dicho esquema.

c) Aplica el esquema del apartado anterior para determinar la solución aproximada en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.005$.

d) Representa la solución en los instantes $t = 0.25$, $t = 0.5$, $t = 0.75$ y $t = 1$.

Ejercicio 6. Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_{xx}(x,t) - xu(x,t) - u_{tt}(x,t) = 2t, \quad x \in [0,1],\ t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = 0, u(1,t) = t^2, \forall t$ y las condiciones iniciales

$$u(x,0) = \cos(x), u_t(x,0) = x^2 - 2x,\ x \in [0,1].$$

Se pide:

a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k^2 + h^2)$. Describe la expresión matricial del mismo.

b) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k^2 + h^2)$. Describe la expresión matricial de dicho esquema.

c) Aplica el esquema del apartado anterior para determinar la solución aproximada en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.005$.

d) Representa la solución en los instantes $t = 0.2$, $t = 0.4$, $t = 0.6$, $t = 0.8$ y $t = 1$.

Ejercicio 7. Dada la ecuación en derivadas parciales

$$u_{xx}(x,t) + u_x - u_{tt}(x,t) = 0, \quad x \in [0,1],\ t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno $u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = u(1,t), \forall t$ y las condiciones iniciales

$$u(x,0) = x(x-1), u_t(x,0) = 1,\ x \in [0,1].$$

Se pide:

(a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k^2+h^2)$. Describe la expresión matricial del mismo.

(b) Aplica el esquema del apartado anterior para determinar la solución aproximada en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.05$.

(c) Representa gráficamente la solución en los instantes $t = 0.25$, $t = 0.5$, $t = 0.75$ y $t = 1$.

Ejercicio 8. Consideremos la ecuación en derivadas parciales hiperbólica

$$u_{xx} = u_{tt} - \text{sin}\,(x),\ \ x \in [0,1],\ \ t > 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u(0,t) = u_x(1,t) = 0,\ \ t > 0,$$
$$u(x,0) = (x/2)(1-x),\ \ u_t(x,0) = 0,\ x \in [0,1].$$

(a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k^2+h^2)$.

(b) Aplicando el apartado (a) determina la solución en el instante $t = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.025$.

(c) Representa las soluciones en los instantes $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

Ejercicio 9. Una cuerda vibrante que se desplaza en un medio elástico satisface la ecuación

$$u_{xx} - u = (\pi^2+1)u_{tt},\ \ x \in [0,1],\ t > 0,$$

con las condiciones iniciales $u(x,0) = 0$ y $u_t(x,0) = \sin(\pi x)$ y las condiciones de contorno $u(0,t) + \pi u_x(0,t) = \pi^2 \sin(t)$ y $u(1,t) - \frac{1}{\pi}u_x(1,t) = \sin(t)$.

(a) Describe la transformación del problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k^2 + h^2)$.

(b) Aplica el esquema anterior para determinar la solución en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$. Representa la solución en los instantes $t = 0.25$, $t = 0.5$ y $t = 0.75$ en una única gráfica.

(c) Describe la transformación del problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k^2 + h^2)$.

Ejercicio 10. Consideremos la ecuación en derivadas parciales hiperbólica

$$u_{xx} = u + (\pi^2 + 1)u_{tt}, \;\; x \in [0,1], \; t > 0,$$

con las condiciones iniciales $u(x,0) = 0$ y $u_t(x,0) = \sin(\pi x)$ y las condiciones de contorno $-u(0,t) + \frac{1}{\pi}u_x(0,t) = \sin(t)$ y $-u(1,t) + u_x(1,t) = \pi^2 \sin(t)$.

(a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden $O(k^2 + h^2)$.

(b) Aplica el esquema anterior para aproximar la solución en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$. Representa la solución en los instantes $t = 0.25$, $t = 0.5$ y $t = 0.75$ en una única gráfica.

(c) Describe la transformación del problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k^2 + h^2)$.