

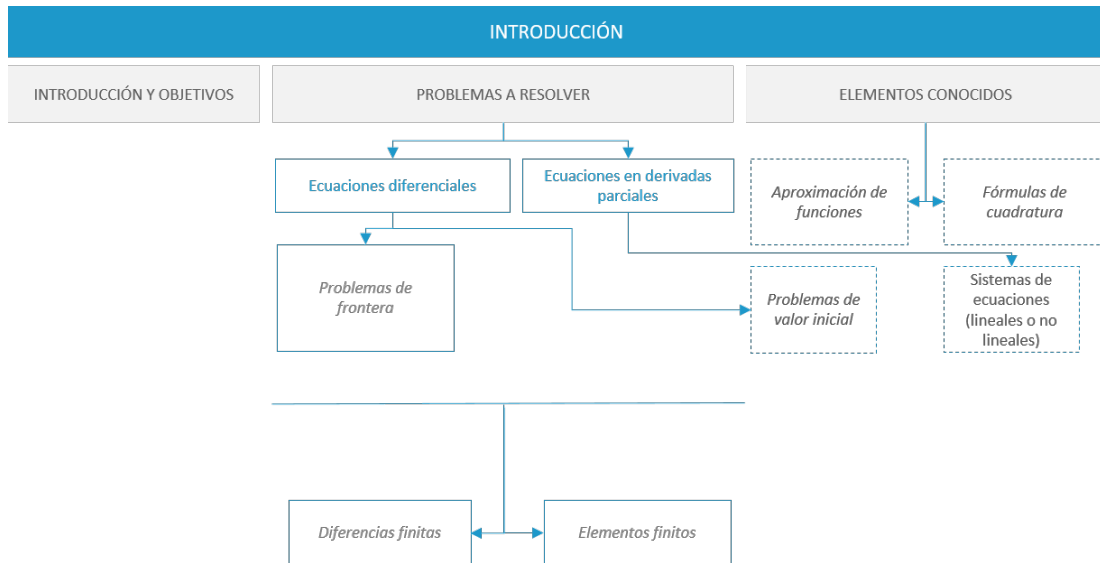
Métodos Numéricos II

Introducción

Índice

Esquema.	2
Ideas clave	3
1.1 Introducción y objetivos	3
1.2 ¿Qué problemas pretendemos resolver?.	4
1.3 Herramientas para abordar estos problemas	11
1.4 Tipos de errores	15
1.5 Aproximación de funciones	18
1.6 Fórmulas de cuadratura	21

Esquema



1.1 Introducción y objetivos

La asignatura Métodos Numéricos II profundiza en las técnicas de aproximación de soluciones para problemas muy presentes en distintos ámbitos de la Ciencia y la Ingeniería: numerosos problemas, con condiciones en la frontera y/o de valor inicial, son modelizados mediante ecuaciones diferenciales o ecuaciones en derivadas parciales. Para ello, nos apoyamos en las competencias adquiridas en la asignatura Métodos Numéricos I, tanto en el manejo de herramientas computacionales (fundamentalmente Matlab) como en las habilidades para plantear y resolver problemas de aproximación de funciones, fórmulas de cuadratura o técnicas de resolución de problemas de valor inicial.

Los objetivos que trataremos de alcanzar en este tema serán los siguientes:

- ▶ Plantear qué tipos de problemas pretendemos resolver en la asignatura
- ▶ Determinar que significa resolver numéricamente estos problemas
- ▶ Describir aquellas herramientas nuevas que nos permitirán definir las técnicas a utilizar para resolverlos
- ▶ Recordar algunos de los conceptos que nos permitirán, junto con los desarrollados en los temas sucesivos, resolver los problemas planteados
- ▶ Proporcionar los diferentes tipos de errores que van a aparecer a lo largo de la asignatura



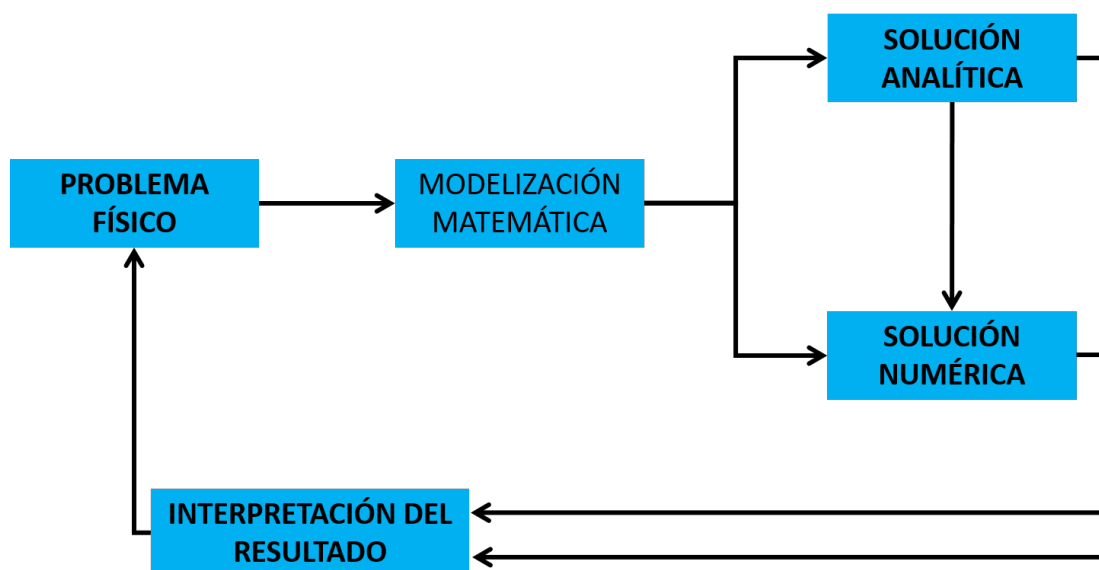
1.2 ¿Qué problemas pretendemos resolver?

En esta asignatura vamos a resolver problemas modelizados mediante ecuaciones diferenciales o ecuaciones en derivadas parciales con condiciones de contorno y/o condiciones iniciales.

Como sabemos, todo problema matemático admite sólo dos posibilidades:

- ▶ Tiene solución analítica, es decir, **solución exacta**,
- ▶ No tiene solución analítica, o no sabemos encontrarla, por lo que debemos recurrir a una solución numérica, es decir, **solución aproximada**.

El siguiente esquema muestra, de forma simplificada, el proceso que debemos seguir desde la modelización matemática de un problema físico hasta la interpretación de los resultados.



Los problemas que pretendemos resolver en esta asignatura no son ajenos a este planteamiento, a lo que debemos añadir que la mayoría de ellos no se pueden resolver de forma analítica y debemos recurrir a soluciones aproximadas.

A continuación vamos a describir algunos de los problemas que resolveremos numéricamente a lo largo de la asignatura.

Los problemas de contorno unidimensionales están modelizados mediante una ecuación diferencial, de cualquier orden con condiciones en los extremos del intervalo, donde varía la variable independiente.

Estos problemas permiten modelizar numerosos problemas físicos como la distribución de potencial eléctrico entre dos cuerpos, la deflexión de un sólido sobre el que actúan diferentes fuerzas, la distribución de calor en una barra metálica, etc. Solemos tener una función incógnita que depende de una variable independiente. La solución numérica de estos problemas nos da soluciones aproximadas en los puntos elegidos del intervalo de trabajo.

Ejemplo 1. Problema de frontera no lineal con condiciones Dirichlet

Consideremos el problema de frontera descrito por una ecuación diferencial no lineal de segundo orden con condiciones Dirichlet

$$y'' + xy y' - xy^2 = x \sin x, \quad x \in [-1, 1], \quad y(-1) = 0, y(1) = 2.$$

Ejemplo 2. Problema de frontera no lineal con condiciones naturales

Consideremos el problema de frontera descrito por una ecuación diferencial no lineal de segundo orden con condiciones naturales

$$2yy'' = y'^2 - 4y^2, \quad x \in [\pi/4, \pi/2], \quad y'(\pi/4) = 1, y'(\pi/2) = 0.$$

Ejemplo 3. Deflexión de un sólido rígido

La deformación de una viga, $w(x)$, de longitud L , que soporta una carga $p(x)$ y

que está apoyada en los extremos, viene descrita por la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x) - kw,$$

con las condiciones de contorno

$$w(0) = 0, \quad w''(0) = 0,$$

$$w(L) = 0, \quad w''(L) = 0,$$

donde E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de la sección transversal y k es la rigidez por unidad de longitud. Utilizando los siguientes datos: $L = 10m$, $E = 30 \times 10^6$, $k = 1000kg/m^2$, $I = 2$ y $p(x) = 100 \left(1 - \frac{x}{36}\right) kg/m^2$. Se pide:

- (a) Determina $w(x)$ en el centro de la viga.
- (b) Determina la deformación a medida que nos acercamos a los extremos de la viga.

Ejemplo 4. Potencial entre dos esferas concéntricas

Representamos por u el potencial electrostático entre dos esferas metálicas concéntricas de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$), tales que el potencial de la esfera interior se mantiene constante a V_1 voltios y el de la esfera exterior a 0 voltios. El potencial en la región entre las dos esferas está gobernado por la ecuación

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0, \quad r \in [R_1, R_2], \quad u(R_1) = V_1, u(R_2) = 0.$$

Supongamos que $R_1 = 2mm$, $R_2 = 4mm$ y $V_1 = 110$ voltios. Se pide:

- (a) Aproximar el valor del potencial en $r = 3$.
- (b) Aproximar el valor del potencial en 100 puntos intermedios entre las dos esferas.

(c) Comparar los resultados de (a) y (b) con la solución exacta del problema

$$u(r) = \frac{V_1 R_1}{r} \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}.$$

En el contexto de problemas de contorno multidimensionales, nos vamos a encontrar con problemas tan importantes como los de **convección-difusión**, problemas que modelizan diferentes tipos de **ondas**, acústicas, electromagnéticas, etc. y las ecuaciones de **Laplace** y de **Poisson**.

Estos problemas vienen descritos por una **ecuación en derivadas parciales** y condiciones de contorno e iniciales. Suele haber una función incógnita u que depende, como máximo de las tres variables espaciales x , y y z y de la variable temporal t . Algunos ejemplos significativos en este ámbito son:

Ejemplo 5. Problema parabólico

La distribución de temperatura en una varilla de longitud L , cuyos extremos están a 0 grados y en el instante inicial se le inyecta una fuente de calor representada por una función f , se modeliza mediante la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0, t > 0$, y la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, para cualquier valor de x en el intervalo $[0, L]$.

Queremos aproximar el valor de la temperatura en muchos puntos de esa varilla elegidos de una determinada manera.

Ejemplo 6. Problema parabólico bidimensional

Los problemas de difusión del calor en cuerpos planos rectangulares (dos dimensiones espaciales x e y), vienen descritos por una ecuación parabólica con condi-

ción inicial y condiciones de frontera

$$u_t(x, y, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, y, t) + \beta^2 u_{yy}(x, y, t), \quad (x, y) \in R = [a, b] \times [c, d], \quad t \geq 0$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y),$$

$$u(a, y, t) = h_1(y, t), \quad u(b, y, t) = h_2(y, t),$$

$$u(x, c, t) = h_3(x, t), \quad u(x, d, t) = h_4(x, t).$$

donde las dimensiones del cuerpo son $[a, b] \times [c, d]$.

Ejemplo 7. Ecuación de Burgers

Un ejemplo particularmente interesante de problema parabólico, por su aplicabilidad en numerosos problemas de Ciencias e Ingeniería, es la ecuación de Burgers, ecuación en derivadas parciales no lineal que modeliza problemas de dinámica de fluidos, dinámica de gases, problemas de transporte, etc.

■ Ecuación de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a < x < b, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad a < x < b,$$

$$u(a, t) = g_1(t), \quad u(b, t) = g_2(t), \quad t > 0$$



- Dinámica de fluidos
- Flujo de tráfico
- Dinámica de gases (turbulencias)

Necesitamos encontrar aproximaciones de la solución en puntos del intervalo $[a, b]$ y en el instante de tiempo que se desee.

Las ondas de un instrumento musical, las ondas sísmicas, las ondas que provoca una piedra en el agua, las ondas de la luz, las ondas de aparatos electrónicos y otros muchos ejemplos se pueden modelizar mediante los llamados problemas hiperbólicos,

en los que aparece una ecuación en derivadas parciales acompañada de condiciones de contorno y condiciones iniciales.

Ejemplo 8. Ecuación de ondas

Este podría ser uno de los problemas hiperbólicos más sencillos, en el que la ecuación involucrada es unidimensional (sólo aparece una variable espacial) y las condiciones de contorno son Dirichlet

$$u_{tt}(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0,$$

$$\text{condiciones de contorno } u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t > 0;$$

$$\text{condiciones iniciales } u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [a, b]$$

donde α es un número real en el que intervienen constantes físicas, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales.

¿Cómo podemos aproximar el valor de la función u en cualquier $x \in [a, b]$ y cualquier instante de tiempo?

Ejemplo 9. Ecuación del telégrafo

La siguiente ecuación en derivadas parciales que describe este problema se conoce como la ecuación del telégrafo. Se trata de un problema hiperbólico con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas y condiciones iniciales

$$u_{tt} + u_t + 2u = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

con las condiciones de contorno $u(0, t) = u(1, t) = 0$ y las condiciones iniciales $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ y $u_t(x, 0) = 0$.

Al igual que en el resto de problemas, queremos encontrar valores aproximados de la solución para $x \in [0, 1]$ y cualquier instante de tiempo.

A diferencia de los dos ejemplos anteriores, en el siguiente se plantea un problema

hiperbólico bidimensional (dos variables espaciales) con sus correspondientes condiciones iniciales y de contorno

Ejemplo 10. Ecuación de ondas bidimensional

La ecuación en derivadas parciales que describe el problema es

$$u_{tt}(x, y, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, y, t) + \beta^2 u_{yy}(x, y, t), \quad (x, y) \in R = [a, b] \times [c, d], \quad t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno

$$u(a, y, t) = h_1(y, t), \quad t \geq 0,$$

$$u(b, y, t) = h_2(y, t), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, c, t) = h_3(x, t), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, d, t) = h_4(x, t), \quad t \geq 0,$$

con $h_i, i = 1, 2, 3, 4$, funciones conocidas de las variables correspondientes y las condiciones iniciales

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y) \in R = [a, b] \times [c, d],$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y), \quad (x, y) \in R = [a, b] \times [c, d].$$

Otro grupo dentro de este tipo de problemas son los descritos por ecuaciones elípticas. Estas ecuaciones surgen de manera natural en el estudio de problemas físicos independientes del tiempo, como la distribución de calor en una región plana, la energía potencial de un punto en el plano bajo la acción de fuerzas gravitacionales y problemas estacionarios acerca de fluidos incompresibles.

Ejemplo 11. Problema elíptico.

Este ejemplo describe un problema elíptico de Poisson, en un dominio rectangular $[a, b] \times [c, d]$, y con condiciones de contorno en toda la frontera de dicho dominio. Se pretende aproximar el valor de la función solución $u(x, y)$ en cual-

quier punto interior del dominio.

$$\nabla^2 u(x, y) \equiv u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in R,$$

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ para } (x, y) \in S$$

donde $R = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ y S es la frontera de R .

Ejemplo 12. Ecuación de Helmholtz

Problema elíptico en un dominio rectangular con numerosas aplicaciones en electromagnetismo, termodinámica, etc.

$$u_{xx} + u_{yy} = -4u, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1,$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \cos(2x), & u(x, 1) &= \cos(2x) + \sin(2), & x &\in [0, 1], \\ u(0, y) &= \sin(2y) + 1, & u(1, y) &= \sin(2y) + \cos(2), & y &\in [0, 1]. \end{aligned}$$

1.3 Herramientas para abordar estos problemas

Las técnicas que vamos a utilizar para resolver los problemas de contorno unidimensionales van a ser los métodos de disparo y los métodos en diferencias finitas. En el primer caso, el problema de frontera se transforma en uno o varios problemas de valor inicial, problemas que se resuelven mediante los algoritmos diseñados en la asignatura de Métodos Numéricos I: método de Euler, método de Runge-Kutta, métodos de Adams-Moulton, etc.

Mediante la técnica de diferencias finitas, el problema de contorno se transforma en un sistema lineal o no lineal que resolveremos con los procedimientos desarrollados en la asignatura ya mencionada: Método de Gauss, algoritmo de Crout, método de Newton, etc.

Problemas de valor inicial

Para poder aplicar las técnicas numéricas estudiadas, estos problemas deben venir modelizados por una ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha,$$

donde y es la función incógnita que depende de la variable independiente x ; o un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de tamaño $n \times n$,

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{cases} \quad \bar{y}'(x) = F(x, \bar{y}), \quad x \in [a, b],$$

con la condición inicial $\bar{y}(a) = (y_1(a), y_2(a), \dots, y_n(a))^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T = \bar{\alpha}$, donde y_1, y_2, \dots, y_n son las funciones incógnitas que dependen de la variable independiente x . Además, $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ y F es una función real $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, cuyas funciones coordenadas son f_1, f_2, \dots, f_n .

Todos los métodos numéricos conocidos para resolver estos problemas, proporcionan soluciones aproximadas de y o \bar{y} en puntos elegidos del intervalo $[a, b]$. Estos puntos pueden ser elegidos equiespaciados o no equiespaciados. En el primer caso,

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_{N-1} = a + (N-1)h, x_N = b,$$

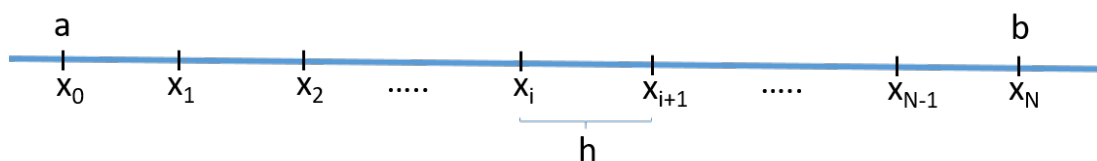


Figura 1: Nodos equiespaciados, de paso h , elegidos en el intervalo $[a, b]$

con lo que el **método de Euler**, de orden 1, lo podemos expresar de la forma

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

donde y_i denota la solución aproximada de y en x_i , siendo $y_0 = \alpha$. O bien, para el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + F(x_i, \bar{y}_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

donde \bar{y}_i denota la solución aproximada de \bar{y} en x_i , siendo $\bar{y}_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$.

Por su parte, el **método de Runge-Kutta**, de orden 4, tiene para el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales la expresión

$$\bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

donde

$$\begin{aligned} K_1 &= F(x_i, \bar{y}_i), \\ K_2 &= F(x_i + h/2, \bar{y}_i + (h/2)K_1), \\ K_3 &= F(x_i + h/2, \bar{y}_i + (h/2)K_2), \\ K_4 &= F(x_{i+1}, \bar{y}_i + hK_3). \end{aligned}$$

Otros métodos para resolver problemas de valor inicial de primer orden se pueden encontrar en los contenidos de la asignatura de Métodos Numéricos I.

Técnica de diferencias finitas

Las diferencias finitas, que serán descritas en el tema correspondiente, son aproximaciones de las derivadas de la función $y(x)$, de cualquier orden, $y^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, \dots$. Su expresión no es más que combinaciones lineales de la función $y(x)$ evaluada en

distintos puntos. Concretamente,

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}, \quad \text{Diferencia progresiva,}$$

aproximación en la que se comete un error de orden $O(h)$.

$$y'(x) \approx \frac{y(x) - y(x-h)}{h}, \quad \text{Diferencia regresiva,}$$

aproximación en la que se comete un error de orden $O(h)$.

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{h}, \quad \text{Diferencia central o simétrica,}$$

aproximación en la que se comete un error de orden $O(h^2)$.

A partir de estas aproximaciones es posible diseñar diferencias progresivas, regresivas y centrales para derivadas de cualquier orden, cometiendo errores de orden $O(h)$ o $O(h^2)$ al igual que en las derivadas primeras. Así,

$$y''(x) \approx \frac{y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x)}{h^2}, \quad \text{Diferencia progresiva,}$$

$$y''(x) \approx \frac{y(x) - 2y(x-h) + y(x-2h)}{h^2}, \quad \text{Diferencia regresiva,}$$

$$y''(x) \approx \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}, \quad \text{Diferencia central o simétrica.}$$

La aplicación de estas aproximaciones al problema de frontera lo transforman en un sistema lineal o no lineal, dependiendo de que la ecuación diferencial sea lineal o no lineal.

Sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones lineales tienen la expresión $Ax = b$, donde A es una matriz de tamaño $n \times n$ y b es un vector de \mathbb{R}^n . Dado que, en general trabajaremos con

sistemas de gran tamaño, debemos evitar siempre utilizar, para resolver el sistema, el método de la inversa o el método de Cramer. Aunque el algoritmo recomendado es el método de eliminación de Gauss, utilizaremos siempre que sea posible algunas de sus variantes, con menor coste computacional, como el **algoritmo de Crout**, que es el método más eficiente para resolver un sistema lineal cuando la matriz de coeficientes es tridiagonal.

Las sistemas no lineales los expresamos de la forma $F(x) = 0$, donde F es una función vectorial de varias variables, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Para estos sistemas, en general, no existen métodos de resolución y tenemos que recurrir a métodos iterativos que nos proporcionan valores aproximados de la solución. Uno de los métodos mas conocidos es el **método de Newton**, cuya expresión iterativa es

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

donde $F'(x^{(k)})$ es la matriz Jacobiana evaluada en el iterado $x^{(k)}$ y $x^{(0)}$ es la aproximación inicial.

1.4 Tipos de errores

Existen diferentes tipos de errores que, de alguna manera debemos controlar, para que las aproximaciones obtenidas con los métodos numéricos tengan validez.

- **Error de redondeo.** Se origina por no disponer de ordenadores con precisión infinita para la representación de magnitudes. Este error se incrementa con el número de operaciones, haciendo en ocasiones poco útil el resultado obtenido. Es importante siempre utilizar algoritmos optimizados en cuanto al número de operaciones y en consecuencia al coste computacional. Matlab trabaja, por defecto, con 32 dígitos de precisión en **doble precisión**. Podemos aumentar dicha precisión utilizando los comandos **digits** y **vpa**.

- `pi32=vpa(pi);`
- `digits(50);`
- `pi50=vpa(pi);`
- `dpi=abs(pi50-pi32);`
- `vpa(dpi,4)=3.21e-40;`

► **Error de truncamiento.** El desarrollo de Taylor de una función $f \in \mathcal{C}^n[a, b]$, alrededor de un punto $x_0 \in [a, b]$, permite aproximar la función por un polinomio de grado n , $P_n(x)$, de forma que

$$f(x) = P_n(x) + Error_n(x),$$

donde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

y

$$Error_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \text{ entre } x \text{ y } x_0.$$

El error de truncamiento habitualmente se genera al utilizar sumas finitas para aproximar expresiones que están definidas mediante sumas infinitas, es decir, mediante una serie.

Utilizando el desarrollo de Taylor de la función $f(x)$ en el punto x_0 con un polinomio de grado 1, $P_1(x)$, resulta

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

y tomando $x = x_1$ obtenemos

$$f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

de donde

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Estamos generando un error de truncamiento de orden 1, por lo que decimos que **la aproximación de la derivada es de orden 1**.

La función exponencial, $f(x) = e^x$, está definida en cualquier $x \in \mathbb{R}$, mediante

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Cualquier software que tenga implementada esta función, al pedirle por ejemplo e^3 nos dará el valor obtenido con un número finito de sumandos, truncando la serie. Por ejemplo, si decimos que

$$e^3 = \sum_{k=0}^{30} \frac{1}{k!} 3^k,$$

estamos cometiendo un error de truncamiento que coincide con la suma de los infinitos términos que hemos eliminado.

- **Error exacto.** Cuando se dispone de la solución exacta y y la solución aproximada \tilde{y} de un determinado problema, podemos calcular lo que se llama error exacto, como

$$ee = |y - \tilde{y}|.$$

Cuando se implementa un algoritmo, es interesante testearlo sobre problemas de los que se conoce la solución exacta para que, utilizando el error exacto, podamos determinar la validez del citado algoritmo.

- **Error porcentual.** Conocido el error exacto, podemos determinar el error porcentual mediante

$$ep(\%) = 100 \left| \frac{ee}{y} \right| = 100 \left| \frac{y - \tilde{y}}{y} \right|.$$

- **Error relativo.** A partir del error real, podemos definir el error relativo como

$$er = \left| \frac{ee}{y} \right| = \left| \frac{y - \tilde{y}}{y} \right|.$$

Decimos que \tilde{y} aproxima a y con t **dígitos significativos** si t es el número natural más grande tal que

$$er = \left| \frac{y - \tilde{y}}{y} \right| < 5 \cdot 10^{-t}.$$

En general, el error exacto no es conocido ya que la solución exacta no se conoce, es por lo que se quiere aproximar. En esos casos, se establecen estimaciones del error exacto utilizando magnitudes conocidas que van a depender del problema que se pretende resolver.

1.5 Aproximación de funciones

Existen diferentes técnicas que nos permiten aproximar cualquier función, siendo los polinomios las funciones más utilizadas para esta aproximación. Entre estas técnicas cabe mencionar la aproximación por mínimos cuadrados, la aproximación por polinomios trigonométricos, los polinomios de interpolación, los polinomios de Taylor, etc.

Vamos a recordar los polinomios de interpolación y los polinomios de Taylor que son las únicas técnicas de aproximación que vamos a necesitar en el desarrollo de esta asignatura.

Polinomios de Taylor

Se trata de un polinomio $p(x)$ que está cerca de una función dado f alrededor de un punto x_0 . El polinomio $p(x)$ coincidirá con la función f en x_0 , es decir, $f(x_0) = p(x_0)$. Tendrá también la misma pendiente que f en $(x_0, f(x_0))$, es decir, $f'(x_0) = p'(x_0)$. En general, la derivada de orden k , $k = 1, 2, \dots, n$, de $p(x)$ coincidirá con la correspondiente de f en x_0 , dando lugar al polinomio de Taylor de grado n , cuya expresión es

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Podemos decir que $p_n(x) \approx f(x)$, siendo una buena aproximación siempre que estemos cerca del punto x_0 . El error que cometemos en esa aproximación en un punto

cualquiera x es

$$Error_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

donde $c(x)$ es un punto que se encuentra entre x y x_0 .

Como los polinomios de Taylor tienen la propiedad de que toda la información usada en la aproximación está centrada en x_0 , fuera de un entorno de ese punto la aproximación puede ser muy mala, es decir, con errores de gran magnitud. Para evitar este problema, debemos recurrir a técnicas de aproximación que incluyan información en más puntos. Esto se obtiene con los polinomios de interpolación.

Polinomios de interpolación

Es conocido que dado $n + 1$ puntos con abscisas distintas

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n)),$$

existe un único polinomio de grado n que pasa por esos puntos, es decir, que coincide con f en esos puntos, al que se conoce con el nombre de **polinomio de interpolación**. Habitualmente, este polinomio se expresa en dos formas distintas: la forma de Lagrange y la forma de Newton. Nos vamos a centrar en esta última en cuya expresión aparecen las llamadas **diferencias divididas**.

La diferencia dividida cero de la función f , con respecto a x_i , que se denota por $f[x_i]$, no es más que el valor de f en ese punto

$$f[x_i] = f(x_i).$$

Las restantes diferencias divididas se definen de manera inductiva. La diferencia dividida de primer orden de f con respecto a x_i y x_{i+1} , se denota por $f[x_i, x_{i+1}]$ y está

definida como

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Cuando las diferencias divididas de orden $k - 1$ están definidas

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}] \quad \text{y} \quad f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}],$$

la diferencia dividida de orden k de f relativa a $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}$, viene dada por

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Con estas diferencias divididas, la expresión de Newton del polinomio de interpolación de grado n resulta

$$\begin{aligned} p_n(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ & + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}), \end{aligned}$$

o bien

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}).$$

Cuando utilizamos este polinomio para aproximar la función f , se comete un error que depende del punto x y cuya expresión es

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n+1} (x - x_k),$$

donde $c(x)$ es un punto que se encuentra entre x_0 y x_n .

1.6 Fórmulas de cuadratura

Las fórmulas de cuadratura, también llamadas fórmulas de integración numérica, son expresiones que nos permiten aproximar el número real

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

que no es más que el área descrita por la función f en el intervalo $[a, b]$. De manera general, cualquier fórmula de cuadratura es una combinación lineal de valores de la función integrando $f(x)$ evaluada en una serie de puntos del intervalo de integración $[a, b]$, llamados **nodos**, multiplicados por unos coeficientes llamados **pesos**. Los nodos y los pesos son distintos para cada fórmula de cuadratura. Estas fórmulas tienen interés cuando no conocemos una primitiva de la función f o cuando sólo se conoce información discreta del integrando, es decir, información de f en un conjunto finito de puntos del intervalo de integración.

Existen numerosos métodos de cuadratura, tanto para nodos equiespaciados, no equiespaciados o aleatorios. A continuación, vamos a recordar tres de esos métodos diseñados para nodos equiespaciados.

Método de los rectángulos

Proporciona una estimación de I , aproximando el área por rectángulos de igual base, por defecto o por exceso, ver Figura 2.

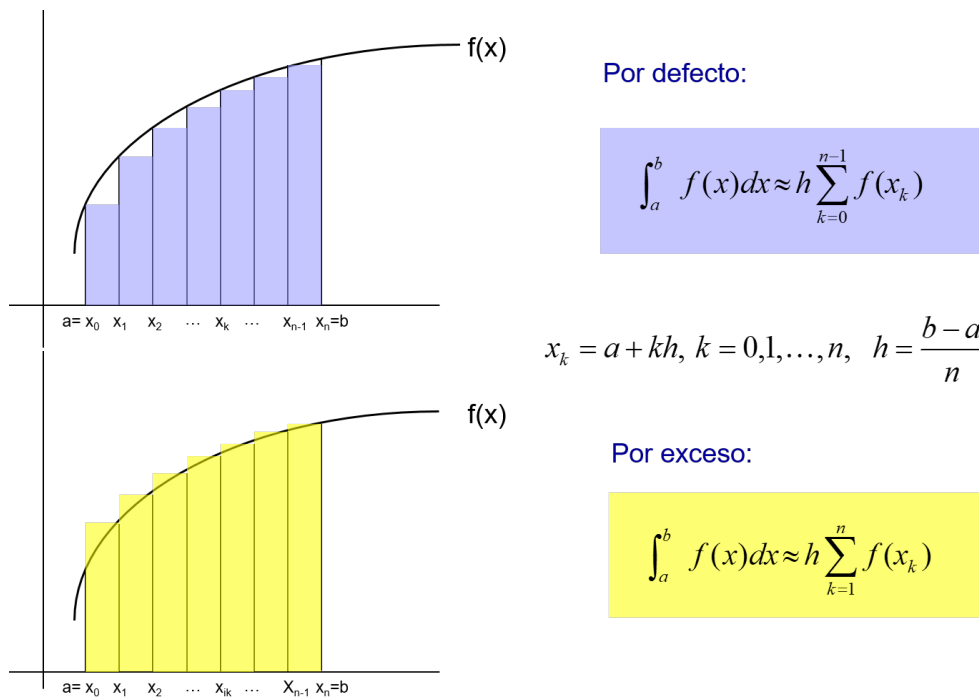


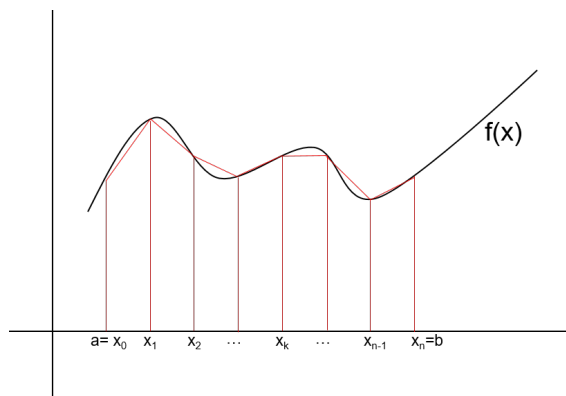
Figura 2: Aproximación de la integral por el método de rectángulos

Método de trapecios

La expresión de este método para aproximar I se obtiene reemplazando los rectángulos del método anterior por trapecios cuya área es conocida, ver Figura 3. Observemos que la expresión del error

$$E_T(h) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c), \quad c \in [a, b],$$

depende de un punto c que no sabemos determinar, por lo que sólo podremos acotar dicho error. parece razonable pensar que cuando más grande es el número de nodos elegidos menor será el error. Pero, por otra parte, pensemos que cuanto mayor es n más evaluaciones funcionales debemos hacer para calcular la aproximación y, en consecuencia, mayor error de redondeo estamos provocando.



$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Fórmula explícita

$$T_n = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

Error

$$E_T(h) = I - T_n = -\frac{h^2}{12} (b-a) f''(c) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c), \quad c \in [a, b]$$

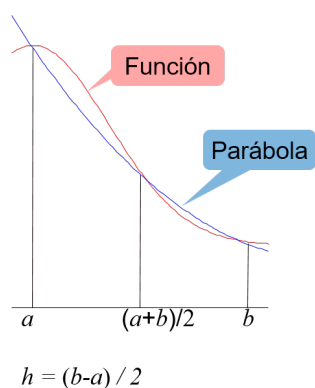
Figura 3: Aproximación de la integral por el método de trapecios

Método de Simpson

La expresión de este método se obtiene al aproximar el integrando por parábolas. El caso más sencillo sería con una parábola, para lo que necesitamos tres puntos a , $\frac{a+b}{2}$ y b . Calculamos la única parábola $p_2(x)$ que pasa por esos tres puntos, sustituimos el integrando por $p_2(x)$ e integrando obtenemos una fórmula de cuadratura. Observe-mos que hemos necesitado una cantidad par de subintervalos a diferencia de lo que ocurría en los esquemas anteriores (ver Figura 4).

El proceso se puede repetir troceando el intervalo $[a, b]$ en $2m$ subintervalos y, cada dos subintervalos, aproximar el integrando por una parábola.

Simpson simple, 2 subintervalos



Simpson compuesta, n (par) subintervalos

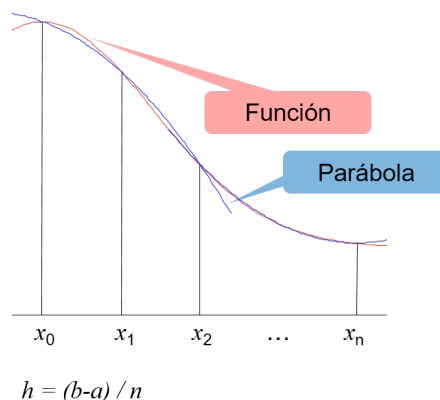


Figura 4: Aproximación de la integral por el método de Simpson

□ Simpson simple, 2 subintervalos

$$S = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

■ Simpson compuesto, $n = 2m$ subintervalos

$$S_n = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

$$S_n = \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=1}^m f(x_{2k-1}) + f(x_{2m}) \right]$$

Error

$$E_s(h) = -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{(iv)}(c) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(iv)}(c), \quad c \in [a, b]$$

Figura 5: Aproximación de la integral por el método de Simpson

Observemos que la expresión del error

$$E_T(h) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(iv)}(c), \quad c \in [a, b],$$

vuelve a depender de un punto c que no se sabe cómo calcular.



Accede al vídeo: Presentación de las actividades
