

Métodos Numéricos II

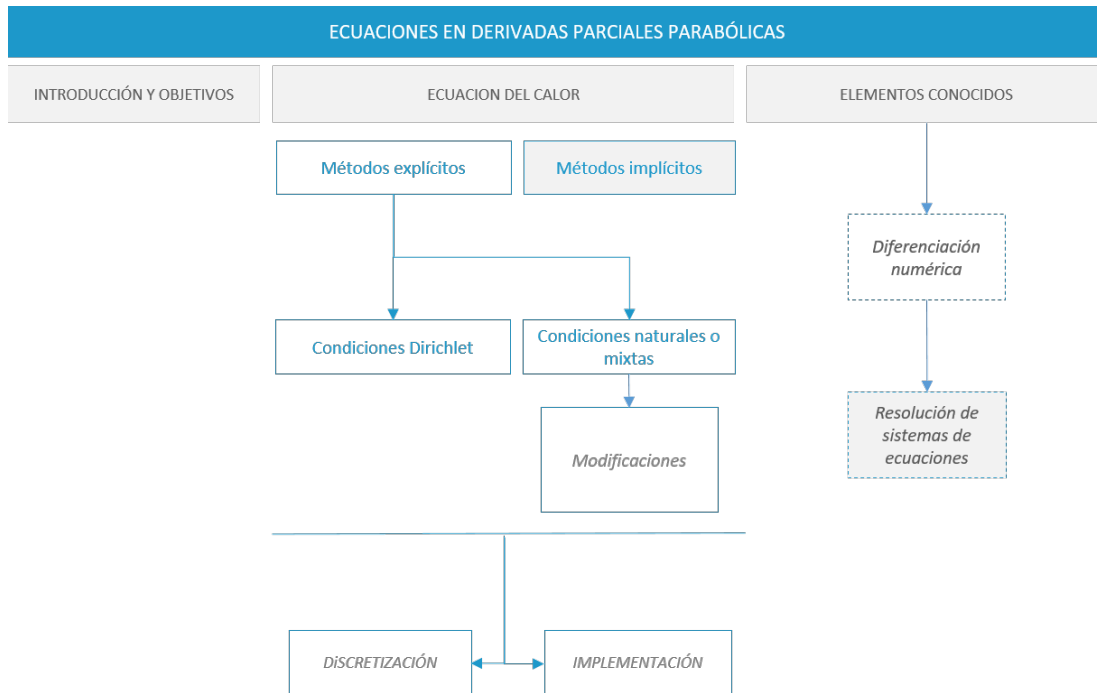
---

# Ecuaciones en derivadas parciales parabólicas (1)

# Índice

Esquema. . . . .	2
Ideas clave . . . . .	3
5.1 Introducción y objetivos . . . . .	3
5.2 Ecuación del calor clásica . . . . .	4
5.3 Método explícito con condiciones de contorno Dirichlet. . . . .	5
5.4 Método explícito con condiciones naturales o mixtas . . . . .	14
5.5 Ejercicios resueltos . . . . .	20
5.6 Ejercicios propuestos . . . . .	29

# Esquema



### 5.1 Introducción y objetivos

En el Tema 4 se han introducido las ecuaciones en derivadas parciales, junto con la aproximación de dichas derivadas por diferencias finitas. Esta técnica nos permitirá en este tema y los siguientes llevar a cabo la resolución (aproximada) de dichos problemas, sea cual sea su tipología (parabólica, hiperbólica o elíptica) y sean cuales sean las condiciones de contorno que lleve asociadas: de tipo Dirichlet, naturales o mixtas.

La técnica de diferencia finitas nos permite transformar el problema en un esquema en diferencias, mediante la discretización del dominio de la solución, la aproximación de sus derivadas y la evaluación de dicho esquema en los distintos pares ordenados de nodos. Este proceso puede dar lugar a dos tipos de esquemas en diferencias:

- ▶ Explícitos: el valor de la función en cada par de nodos se aproxima mediante cálculos directos empleando la información conocida, como las propias condiciones de contorno e iniciales.
- ▶ Implícitos: en estos casos no es posible calcular directamente el valor de la función incógnita en los nodos a partir de los datos, por lo que se obtiene mediante la resolución de un sistema de ecuaciones. La técnica a utilizar dependerá de la estructura y tamaño de la matriz de coeficientes del mismo.

Los métodos explícitos son consistentes y sencillos, pero inestables. Como veremos, sólo bajo ciertas condiciones podremos asegurar su estabilidad y, por tanto, convergencia. Estos serán el objetivo general del presente tema.

Los objetivos a alcanzar en este tema son:

- ▶ Introducción a las EDPs parabólicas
- ▶ Método explícito con condiciones de contorno Dirichlet
  - Transformación de la EDP en una ecuación en diferencias
  - Convergencia y estabilidad del método explícito
  - Implementación del método explícito en Matlab
- ▶ Método explícito con condiciones naturales y mixtas

El problema clásico en el que vamos a centrarnos, parte del estudio de la distribución de la temperatura en un cuerpo isotrópico, es decir, en el que la conductividad térmica en cada punto es independiente de la dirección del flujo de calor,  $u = u(x, y, t)$ . Este problema se modeliza mediante la ecuación parabólica

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial u}{\partial y} \right) = cg \frac{\partial u}{\partial t},$$

donde  $h$ ,  $g$  y  $c$  son funciones de  $x$  e  $y$ :  $h(x, y)$  denota la conductividad térmica de cada punto  $(x, y)$ ,  $g(x, y)$  es la densidad puntual del cuerpo en el que transmite el calor y  $c(x, y)$  es la función calor específico (dependiente del material).

Una ecuación parabólica con condiciones iniciales ( $t = 0$ ) y de contorno recibe el nombre de Problema Parabólico.

## 5.2 Ecuación del calor clásica

Trabajaremos con la distribución de temperatura en una varilla de longitud  $L$ , descrita mediante la ecuación del calor homogénea

$$u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0, \quad x \in [0, L], t \geq 0, \quad (1)$$

sujeta a la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L]$$

y a las condiciones de contorno, que pueden ser de tipo Dirichlet (homogéneas o no)

$$u(0, t) = h_1(t), \quad u(L, t) = h_2(t), \quad t > 0,$$

o condiciones de contorno naturales

$$\alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 u_x(0, t) = \gamma, \quad \beta_1 u(L, t) + \beta_2 u_x(L, t) = \delta, \quad \alpha_2, \beta_2 \neq 0,$$

derivadas (o tipo Neumann),

$$u_x(0, t) = \gamma, \quad u_x(L, t) = \delta,$$

o bien mixtas.

Independientemente de cuáles sean las condiciones de contorno del problema, el proceso comienza con la discretización de los intervalos en los que están definidas las variables independientes  $x$  y  $t$ . Dividimos cada intervalo en  $nx$  y  $nt$  subintervalos, respectivamente, obteniendo los nodos espaciales  $x_i = 0 + ih, i = 0, 1, \dots, nx$  y temporales  $t_j = 0 + jk, j = 0, 1, \dots, nt$ , mediante los pasos  $h = \frac{L}{nx}$  y  $k = \frac{T}{nt}$ .

## 5.3 Método explícito con condiciones de contorno Dirichlet

Dadas las condiciones iniciales de (1), la distribución de nodos queda como se indica en la Figura 1.

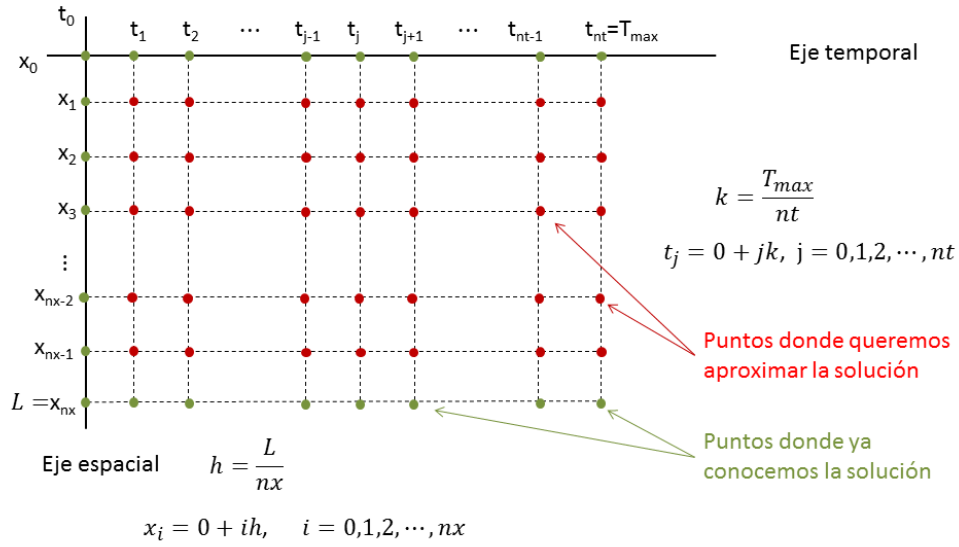


Figura 1: Distribución de nodos para las EDPs parabólicas

A partir de esta estructura de nodos, para la obtención de un método explícito, aplicamos sobre la EDP (1), diferencias progresivas en  $u_t$  y centrales en  $u_{xx}$ ,

$$\frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} = \alpha^2 \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2},$$

Evaluando la expresión anterior en los puntos  $(x_i, t_j)$ ,  $i = 1, 2, \dots, nx-1$ ,  $j = 0, 1, \dots, nt-1$ , y denotando  $u(x_i, t_j) = u_{i,j}$ , llegamos a la expresión en diferencias

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, nx-1, j = 0, 1, \dots, nt-1.$$

Llamando  $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2}$  y despejando las incógnitas del instante mayor

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad i = 1, 2, \dots, nx-1, j = 0, 1, \dots, nt-1.$$

Vemos que para obtener el elemento  $u_{i,j+1}$  necesitamos conocer únicamente los elementos correspondientes al instante anterior  $u_{i,j}$ ,  $u_{i+1,j}$  y  $u_{i-1,j}$ , por lo que estamos

ante un método explícito.

Con las condiciones de contorno de tipo Dirichlet conocemos la solución en los pares de nodos  $u_{0,j}$  y  $u_{nx,j}$ ,  $\forall j$ . Con la condición inicial conocemos la solución  $u_{i,0}$ ,  $\forall i$ . De modo que, en base a la información de la Figura 1, debemos obtener las soluciones  $u_{i,j+1}$  en la malla de valores  $i \in \{1, 2, \dots, nx - 1\}$ ,  $j \in \{0, 1, 2, \dots, nt - 1\}$ . La estrategia consiste en obtener una expresión fijando el valor de  $j$ .

► Para  $j = 0$ :

$$u_{i,1} = (1 - 2\lambda) u_{i,0} + \lambda (u_{i+1,0} + u_{i-1,0}).$$

Desarrollando para cada  $i$ :

$$\begin{cases} u_{1,1} = (1 - 2\lambda) u_{1,0} + \lambda (u_{2,0} + u_{0,0}) \\ u_{2,1} = (1 - 2\lambda) u_{2,0} + \lambda (u_{3,0} + u_{1,0}) \\ \vdots \\ u_{nx-1,1} = (1 - 2\lambda) u_{nx-1,0} + \lambda (u_{nx,0} + u_{nx-2,0}) \end{cases} \quad (2)$$

► Para  $j = 1$ :

$$\begin{cases} u_{1,2} = (1 - 2\lambda) u_{1,1} + \lambda (u_{2,1} + u_{0,1}) \\ u_{2,2} = (1 - 2\lambda) u_{2,1} + \lambda (u_{3,1} + u_{1,1}) \\ \vdots \\ u_{nx-1,2} = (1 - 2\lambda) u_{nx-1,1} + \lambda (u_{nx,1} + u_{nx-2,1}) \end{cases} \quad (3)$$

► Y así sucesivamente para todos los valores de  $j$  hasta  $nt - 1$ .

Es decir, para aproximar el valor de la función incógnita  $u$  en los nodos correspondientes a una columna temporal, utilizamos los valores ya conocidos de la columna anterior.



## Convergencia y estabilidad

En el Tema 4 definimos los conceptos de consistencia, convergencia y estabilidad, así como su relación con el error de truncamiento y la capacidad del esquema de mantener bajo control el error de redondeo acumulado.

Denotemos por  $U(x, t)$  a la solución exacta de la EDP y por  $u_{i,j}$  a la solución exacta de la ecuación en diferencias finitas  $F(u_{i,j}) = 0$ . Recordemos que, entonces, la diferencia

$$e_{i,j} = U_{i,j} - u_{i,j} = U(x_i, t_j) - u_{i,j},$$

recibe el nombre de error de truncamiento o de discretización. Recordemos que, debido a las aproximaciones de las derivadas parciales utilizadas, el orden de convergencia del método explícito es  $\mathcal{O}(k + h^2)$ .

Por otra parte, si en la expresión en diferencias del método explícito

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad i = 1, 2, \dots, nx-1, j = 0, 1, \dots, nt-1.$$

reemplazamos en cada punto del mallado

$$u_{i,j} = U_{i,j} - e_{i,j}, \quad u_{i,j+1} = U_{i,j+1} - e_{i,j+1}, \dots$$

obtenemos

$$\begin{aligned} e_{i,j+1} &= \lambda e_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)e_{i,j} + \lambda e_{i+1,j} \\ &\quad + U_{i,j+1} - U_{i,j} + \lambda(2U_{i,j} - U_{i-1,j} - U_{i+1,j}). \end{aligned} \quad (4)$$

Desarrollamos por Taylor cada uno de los términos  $U_{i,j}$  que aparecen en la expresión:

$$\begin{aligned} U_{i+1,j} &= U(x_i + h, t_j) = U_{i,j} + h(U_x)_{i,j} + \frac{h^2}{2}U_{xx}(x_i + \theta_1 h, t_j), \\ U_{i-1,j} &= U(x_i - h, t_j) = U_{i,j} - h(U_x)_{i,j} + \frac{h^2}{2}U_{xx}(x_i - \theta_2 h, t_j), \\ U_{i,j+1} &= U(x_i, t_j + k) = U_{i,j} + k(U_t)_{i,j} + \frac{k^2}{2}U_{tt}(x_i, t_j + \theta_3 k), \end{aligned}$$

donde  $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in ]0, 1[$ . Sustituyendo estos desarrollos en (4),

$$\begin{aligned} e_{i,j+1} = & \lambda e_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)e_{i,j} + \lambda e_{i+1,j} \\ & + k [U_t(x_i, t_j + \theta_3 k) - \alpha^2 U_{xx}(x_i + \theta_4 h, t_j)] , \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $\theta_4 \in ]0, 1[$ . Esta es la llamada ecuación en diferencias para  $e_{i,j}$ .

Sea  $E_j$  el valor máximo de  $|e_{i,j}|$  a lo largo del instante  $t_j$  y  $M$  el máximo módulo de la expresión  $U_t(x_i, t_j + \theta_3 k) - \alpha^2 U_{xx}(x_i + \theta_4 h, t_j)$ , para todo  $i$  y  $j$ . Cuando  $\lambda \leq \frac{1}{2}$ , todos los coeficientes de  $e_{i,j}$  en (5) son no negativos, por tanto

$$\begin{aligned} |e_{i,j+1}| & \leq \lambda |e_{i-1,j}| + (1 - 2\lambda)|e_{i,j}| + \lambda |e_{i+1,j}| + kM \\ & \leq \lambda E_i + (1 - 2\lambda)E_i + \lambda E_i + kM = E_i + kM. \end{aligned}$$

Como esto es cierto para un índice  $i$  arbitrario, también será cierto para  $\max_i |e_{i,j+1}|$ , luego

$$E_{j+1} \leq E_j + kM \leq (E_{j-1} + kM) + kM = E_{j-1} + 2kM,$$

de donde se sigue que

$$E_j \leq E_0 + jkM = t_j M, \quad \text{ya que } E_0 = 0.$$

Cuando  $h \rightarrow 0$ , entonces  $k = \frac{\lambda h^2}{\alpha^2} \rightarrow 0$ , y  $M$  tiende a  $(U_t - \alpha^2 U_{xx})_{i,j}$ . Como  $U$  es la solución de la EDP, entonces  $E_j$  tiende a cero. Además,

$$|U_{i,j} - u_{i,j}| \leq E_j,$$

lo que nos permite afirmar que  $u$  converge a  $U$  cuando  $h$  tiende a cero y  $t$  es un valor finito, siempre y cuando  $\lambda \leq 1/2$ .

Además de la consistencia del método, hemos deducido una condición suficiente para su estabilidad. Sin embargo, pueden probarse las siguientes afirmaciones:

- ▶ si  $\lambda \leq 1/2$ , el método es estable y por tanto convergente; los errores no crecen pero oscilan;
- ▶ si  $\lambda \leq 1/4$ , el método es estable y los errores no oscilan;
- ▶ si  $\lambda = 1/6$ , se minimizan los errores de truncamiento, pero el coste computacional es inasumible.

## Implementación en Matlab

Una vez desarrollado el método explícito para EDPs parabólicas, es el momento de implementarlo en Matlab. Vamos a trabajar con la ecuación (1) bajo la condición inicial (CI) y las condiciones de contorno (CC) de tipo Dirichlet no homogéneas, es decir,

$$u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0, \quad x \in [0, L], t \geq 0,$$

$$\text{CI: } u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L], \quad \text{CC: } u(0, t) = h_1(t), \quad u(L, t) = h_2(t), \quad t > 0.$$

Generaremos una función que tenga como parámetros de entrada los valores de  $L$ ,  $T$  y  $\alpha$ . Asimismo, necesitaremos conocer también el número de nodos espaciales y temporales, de modo que será necesario introducir como parámetros de entrada  $nx$  y  $nt$ , respectivamente. Además, es necesario que proporcionemos la función  $f(x)$  de la condición inicial y las funciones  $h_1(t)$  y  $h_2(t)$ , correspondientes a las condiciones de contorno.

Como parámetros de salida aportaremos las variables discretizadas  $x_i$  y  $t_j$ , y la solución aproximada del problema en cada nodo  $u_{i,j}$ . Los pasos del algoritmo a implementar son:

- ▶ Inicializar las variables:
  - Establecemos los pasos espacial  $h$  y temporal  $k$ , a partir de los cuales definimos los nodos  $x_i$  y  $t_j$ .

- Definimos el parámetro  $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2}$ .
  - La matriz de tamaño  $(nx + 1) \times (nt + 1)$ , solución aproximada  $u$ , se define inicialmente con ceros.
- Almacenamos en la primera columna de  $u$  los datos proporcionados por la condición inicial  $f(x)$  y en la primera y última filas, los correspondientes a las condiciones de contorno  $h_1(t)$  y  $h_2(t)$ .
- Definimos un bucle que recorra el índice  $j$ , de modo que obtengamos la solución aproximada  $u_{i,j+1}$  en función de los valores de  $u_{i,j}$ , para los valores centrales del índice espacial  $i$ .

Debemos tener en cuenta que, mientras en nuestra notación teórica los índices comienzan en cero, la primera componente de un vector en Matlab es la componente uno. Por tanto, habrá siempre un desfase de una unidad entre los índices teóricos e implementados. A continuación, mostramos una posible implementación y un ejemplo resuelto.



**CalorExpl.m**

```
function [u,x,t] = ...
    CalorExpl(alpha,ci,h1,h2,L,nx,Tmax,nt)
% Metodo explicito para la ecuacion del calor con ...
% condiciones Dirichlet
% Inicializacion
h=L/nx;      x=0:h:L;
k=Tmax/nt;   t=0:k:Tmax;
cix=feval(ci,x);
c1t=feval(h1,t);      c2t=feval(h2,t);
u=zeros(nx+1,nt+1);
u(1,:)=c1t; u(nx+1,:)=c2t;
u(:,1)=cix';
% Por si las condiciones iniciales y de contorno ...
```

```

    no son consistentes
u(1,1)=(c1t(1)+cix(1))/2;
u(end,1)=(c2t(1)+cix(end))/2;
% Condicion de estabilidad/convergencia
lambda=k*alpha^2/h^2;
if lambda>1/2
    disp('No se cumple el criterio de convergencia')
else
    disp('sin problema')
end
for j=1:nt
    for i=2:nx
        u(i,j+1)=(1-2*lambda)*u(i,j)+...
            lambda*(u(i+1,j)+u(i-1,j));
    end
end
end
end

```



Accede al vídeo: Implementación del algoritmo paso a paso

### Ejemplo 1. Ecuación del calor con $\alpha = 1$ y $L = 1$ , utilizando el método explícito.

Sea la EDP parabólica

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in [0, 1], t \geq 0,$$

sujeta a las condiciones

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1], \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

vamos a obtener la solución numérica con el método explícito. Seleccionaremos el valor de  $\lambda$  para el cual el método no solo sea estable sino que los errores no

oscilen; dado que  $\alpha = 1$  y  $\lambda = \frac{1}{4}$  es equivalente a  $4k \leq h^2$ , consideraremos  $h = 0.1$  y  $k = 0.1^2/4 = 0.0025$ . Obtendremos la solución en  $T = 0.03$ .

$x$	$u(x, 0.03)$
0	0
0.1	0.229541
0.2	0.436613
0.3	0.600947
0.4	0.706455
0.5	0.742811
0.6	0.706455
0.7	0.600947
0.8	0.436613
0.9	0.229541
1	0

Tabla 1: Resultados numéricos del Ejemplo 1

## Ejemplo 2.

Consideremos el problema parabólico

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = \sin \pi x, \quad x \in [0, 1],$$

cuya solución exacta es  $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$ . Buscamos la solución aproximada en  $T = 0.5$  mediante el método explícito utilizando los tamaños de paso

(a)  $h = 0.1, k = 0.0005$

(b)  $h = 0.1, k = 0.01$ .

Utilizando el código del método explícito, obtenemos las soluciones que se muestran en la Tabla 2. Basta calcular el valor de  $\lambda$  en cada caso para comprender por

qué encontramos convergencia a la solución solo en uno de los casos estudiados.

$x_i$	$u_{i,1000}$	$ u(x_i, 0.5) - u_{i,1000} $	$u_{i,50}$	$ u(x_i, 0.5) - u_{i,50} $
0.0	0	-	-	-
0.1	0.002287	6.41e-5	8.20e+7	8.20e+7
0.2	0.004349	1.22e-4	-1.56e+8	1.56e+8
0.3	0.005986	1.68e-4	2.14e+8	2.14e+8
0.4	0.007037	1.97e-4	-2.51e+8	2.51e+8
0.5	0.007399	2.08e-4	2.63e+8	2.63e+8
0.6	0.007037	1.97e-4	-2.49e+8	2.49e+8
0.7	0.005986	1.68e-4	2.11e+8	2.11e+8
0.8	0.004349	1.22e-4	-1.53e+8	1.53e+8
0.9	0.002287	6.51e-5	8.04e+7	8.04e+7
1.0	0	-	0	-

Tabla 2: Resultados numéricos de los casos (a) y (b) en el Ejemplo 2.

## 5.4 Método explícito con condiciones naturales o mixtas

El problema parabólico con condiciones de contorno no Dirichlet

$$\alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 u_x(0, t) = \gamma, \quad \beta_1 u(L, t) + \beta_2 u_x(L, t) = \delta, \quad \alpha_2, \beta_2 \neq 0,$$

se resuelve de forma muy similar al descrito en la sección previa. Se ha de tener en cuenta que el orden de las aproximaciones utilizadas ha de ser el mismo que el empleado en la EDP. Asimismo, el hecho de que las condiciones no sean de tipo Dirichlet implica un aumento en el número de incógnitas del problema, ya que en ese caso sólo se conoce el valor exacto de la solución en el instante inicial.

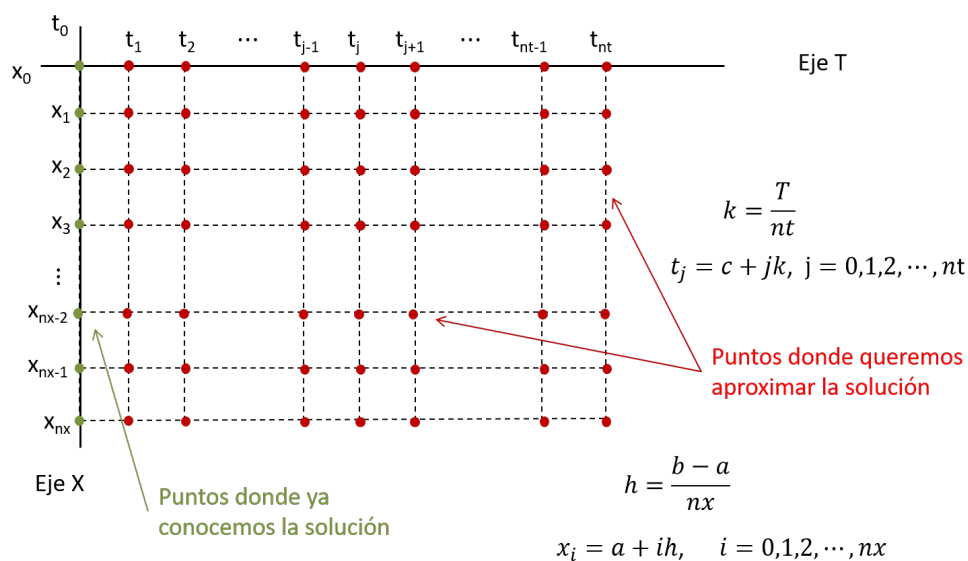


Figura 2: Distribución de nodos para las EDPs parabólicas con condiciones no Dirichlet

En la Figura 2, observamos como los nodos en los que se conoce la solución del problema (en color verde) se sitúan únicamente en la primera columna, manteniéndose en rojo el resto de nodos del mallado. Esto hace que el esquema en diferencias resultante de la discretización tenga mayor amplitud en los índices espaciales:

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad i = 0, 1, \dots, nx, j = 0, 1, \dots, nt - 1.$$

donde  $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2}$ . Por otra parte, las condiciones de contorno no afectan a la estabilidad del método, por lo que las condiciones bajo las cuales está asegurada la estabilidad del mismo se mantienen.

Dado un índice temporal  $j$  fijo y arbitrario, la primera ecuación del esquema en diferencias, que permite calcular el primer elemento de la columna  $j + 1$  es

$$u_{0,j+1} = (1 - 2\lambda)u_{0,j} + \lambda(u_{1,j} + u_{-1,j}).$$

Observemos que en esta expresión aparece  $u_{-1,j}$ , es decir, la función incógnita está evaluada en un punto  $u(-h, t_j)$  que, evidentemente, no pertenece a su dominio. Para evitar esta circunstancia, se utiliza la condición de contorno natural evaluada en el



instante  $t_j$ ,

$$\alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 u_x(0, t) = \gamma \forall t \Rightarrow \alpha_1 u_{0,j} + \alpha_2 u_x(0, t_j) = \gamma.$$

Utilizamos una aproximación central de la derivada parcial  $u_x(0, t_j)$ ,

$$u_x(0, t_j) \approx \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h},$$

que, reemplazada en la condición de contorno, nos permite despejar  $u_{-1,j}$ ,

$$\alpha_1 u_{0,j} + \alpha_2 \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h} = \gamma \Rightarrow u_{-1,j} = \frac{2h\alpha_1}{\alpha_2} u_{0,j} + u_{1,j} - \frac{2h\gamma}{\alpha_2}.$$

Regresando a la ecuación en la que calculamos  $u_{0,j+1}$ ,

$$\begin{aligned} u_{0,j+1} &= (1 - 2\lambda)u_{0,j} + \lambda u_{1,j} + \lambda \left( \frac{2h\alpha_1}{\alpha_2} u_{0,j} + u_{1,j} - \frac{2h\gamma}{\alpha_2} \right) \\ &= \left( 1 - 2\lambda + \lambda \frac{2h\alpha_1}{\alpha_2} \right) u_{0,j} + 2\lambda u_{1,j} - \frac{2h\gamma}{\alpha_2} \lambda, \end{aligned}$$

se obtiene una expresión que ya solo depende de valores conocidos. De forma análoga se gestiona la última ecuación en diferencias, correspondiente a  $x_{nx}$ , utilizando la segunda condición de contorno no Dirichlet, con aproximaciones de segundo orden.

### Ejemplo 3.

Consideremos la ecuación en derivadas parciales:

$$u_t = u_{xx} + e^{-t}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0,$$

con las condiciones:

$$u(x, 0) = 1 - x, \quad x \in [0, 1],$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u_x(1, t) + u(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

- a) Describe la transformación del problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden  $O(k + h^2)$ .

- b) Aplica este esquema para determinar la solución en el instante  $T = 1$ , tomando  $h = 0.1$  y  $k = 0.0005$ . Representa la solución.

**Solución:**

- a) Consideramos los nodos  $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, nx$  y  $t_j = jk, j = 0, 1, \dots, nt$ , con  $h = 1/nx$  y  $k = 1/nt$ , siendo  $nx$  y  $nt$  el número de subintervalos en cada variable.

Aplicando diferencias progresivas en  $u_t$  y simétricas en  $u_{xx}$ , obtenemos:

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + ke^{-t_j},$$

para  $i = 0, \dots, nx, j = 0, \dots, nt - 1$ , siendo  $\lambda = k/h^2$ . Sin embargo, para los valores de los índices  $i = 0$  y  $i = nx$  aparecen en esta expresión las incógnitas  $u_{-1,j}$  y  $u_{nx+1,j}$ , respectivamente, que no están definidas. Para evitarlo, discretizamos las condiciones de contorno derivadas mediante diferencias finitas de orden 2,

$$\begin{aligned} 0 &= u_x(0, t_j) \approx \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h}, \\ 0 &= u_x(1, t_j) + u(1, t_j) \approx \frac{u_{nx+1,j} - u_{nx-1,j}}{2h} + u_{nx,j}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que  $u_{-1,j} \approx u_{1,j}$  y  $u_{nx+1,j} \approx u_{nx-1,j} - 2hu_{nx,j}$ .

Sustituyendo estas aproximaciones obtenemos, para cada  $j$  fija y arbitraria en  $j = 0, \dots, nt - 1$ , el sistema:

$$\begin{aligned} u_{0,j+1} &= (1 - 2\lambda)u_{0,j} + 2\lambda u_{1,j} + ke^{-t_j}, \\ u_{i,j+1} &= (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + ke^{-t_j}, i = 1, \dots, nx - 1, \\ u_{nx,j+1} &= (1 - 2\lambda - 2\lambda h)u_{nx,j} + 2\lambda u_{nx-1,j} + ke^{-t_j}. \end{aligned}$$

```
function [u,x,t] = ...
    CalorExpIND(alpha,ci,L,nx,Tmax,nt)
% Metodo explicito para la ecuacion del calor ...
% con condiciones Dirichlet
% Inicializacion
h=L/nx;      x=0:h:L;
k=Tmax/nt;   t=0:k:Tmax;
cix=feval(ci,x);
u=zeros(nx+1,nt+1);
u(:,1)=cix';
% Condicion de estabilidad/convergencia
lambda=k*alpha^2/h^2;
if lambda>1/2
    disp('No se cumple el criterio de ...
        convergencia')
else
    disp('sin problema')
end
L = 1:nx-1; C = 2:nx; R = 3:nx+1;
for j=1:nt
    u(1,j+1) = 2*lambda*u(2,j) + ...
        (1-2*lambda)*u(1,j) + k*exp(-t(j));
    u(C,j+1) = lambda*(u(L,j) + u(R,j)) + ...
        (1-2*lambda)*u(C,j)+ k*exp(-t(j));
    u(nx+1,j+1) = 2*lambda*u(nx,j)+...
        (1-2*lambda*(1+h))*u(nx+1,j)+k*exp(-t(j));
end
end
```

Implementamos este método en un archivo .m adaptando el que se hizo para la ecuación del calor homogénea con condiciones Dirichlet. Tendremos que modificar la inicialización de la matriz  $u$  y el contenido del bucle, que debe incluir expresiones específicas para la primera y última fila de la matriz  $u$ .

En este caso, se han utilizado vectores de índices  $C$ ,  $L$  y  $R$  en lugar del bucle interior correspondiente al índice  $i$ . Además, el parámetro de convergencia es  $\lambda = \frac{\alpha^2 k}{h^2} = 0.05 \leq \frac{1}{2}$  por lo que podemos asegurar la convergencia del método. Además, teniendo en cuenta que el instante final es  $T = 1$ , el número de subintervalos en el eje temporal es  $nt = 2000$ . Con todos estos valores ejecutamos la función

```
>> [u,x,t] = CalorExplND(1,@(x) 1-x,1,10,1,2000)
```

En la Tabla 3 mostramos, tanto la solución aproximada en el instante máximo  $T = 1$  como la solución aproximada en instantes intermedios.

$x_i$	$u(x, 0.25)$	$u(x, 0.5)$	$u(x, 0.75)$	$u(x, 1)$
0	0.729305	0.768393	0.774869	0.750627
0.1	0.726125	0.765870	0.772289	0.748074
0.2	0.716686	0.758300	0.764545	0.740419
0.3	0.701281	0.745676	0.751637	0.727671
0.4	0.680352	0.727990	0.733559	0.709846
0.5	0.654434	0.705226	0.710308	0.686967
0.6	0.624081	0.677361	0.681881	0.659065
0.7	0.589789	0.644359	0.648275	0.626181
0.8	0.551922	0.606177	0.609495	0.588366
0.9	0.510655	0.562758	0.565551	0.545683
1	0.465934	0.514039	0.516462	0.498211

Tabla 3: Aproximaciones por el método explícito del Ejemplo 3



## 5.5 Ejercicios resueltos

### Ejercicio 1.

Encuentra una solución aproximada del problema parabólico descrito por

$$u_t - \frac{4}{\pi^2} u_{xx} = 0, \quad x \in [0, 4], t \geq 0,$$

sujeta a la condición inicial

$$u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \left(1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right), \quad x \in [0, 4],$$

y a las condiciones de contorno

$$u(0, t) = u(4, t) = 0, \quad t > 0,$$

utilizando el método explícito en  $T = \pi^2$  tomando  $h = 0.4$  y  $k = \frac{\pi^2}{50}$ . Obtén el error exacto absoluto en todos los nodos sabiendo que la solución analítica es

$$u(x, t) = e^{-t} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + e^{-t/4} \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

Indica en una tabla la solución numérica y el error absoluto en todos los nodos espaciales en el instante final.

*Solución.*

Este es un problema en el que podemos aplicar de forma directa el algoritmo implementado para condiciones de contorno de tipo Dirichlet. Así, basta con identificar el valor de las variables de entrada y ejecutar:  $\alpha = \frac{2}{\pi}$ ,  $h_1(t) = h_2(t) = 0$ ,  $L = 4$ ,  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \left(1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)$ ,  $nx = 10$   $T = \pi^2$  y  $nt = 50$ .

$x_i$	$u_{i,nt}$	$ u_{i,nt} - u(x_i, T) $
0.000000	0.000000	0.000000
0.400000	0.025151	0.001086
0.800000	0.047836	0.002061
1.200000	0.065831	0.002827
1.600000	0.077376	0.003309
2.000000	0.081342	0.003463
2.400000	0.077346	0.003278
2.800000	0.065784	0.002776
3.200000	0.047788	0.002010
3.600000	0.025121	0.001054
4.000000	0.000000	0.000000

Tabla 4: Aproximación y error exacto en el Ejercicio 1

## Ejercicio 2.

Obtén la solución numérica a la EDP

$$8\pi^2 u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in [0, 1], t \geq 0,$$

cumpliendo la condición inicial

$$u(x, 0) = \cos(2\pi x), \quad x \in [0, 1],$$

y las condiciones de contorno

$$u(0, t) = u(1, t) = e^{-t/2}, \quad t > 0,$$

mediante el método explícito en  $T = \frac{\pi^2}{4}$  tomando  $h = 0.1$  y  $k = \frac{\pi^2}{100}$ . Obtén el error absoluto en todos los nodos sabiendo que la solución analítica es

$$u(x, t) = e^{-t/2} \cos(2\pi x).$$

Indica en una tabla la solución numérica y el error absoluto en todos los nodos

espaciales.

*Solución.*

$x_i$	$u_{i,nt}$	$ u_{i,nt} - u(x_i, T) $
0.000000	0.291213	0.000000
0.100000	0.236084	0.000488
0.200000	0.089823	0.000167
0.300000	-0.091498	0.001509
0.400000	-0.238364	0.002768
0.500000	-0.294487	0.003274
0.600000	-0.238364	0.002768
0.700000	-0.091498	0.001509
0.800000	0.089823	0.000167
0.900000	0.236084	0.000488
1.000000	0.291213	0.000000

Tabla 5: Aproximación y error en el Ejercicio 2

**Ejercicio 3.** Obtén la solución aproximada de la EDP

$$u_t - 2u_{xx} - u_x^2 + u = 16t, \quad x \in [0, 1], t \geq 0,$$

bajo la condición inicial

$$u(x, 0) = x^2, \quad x \in [0, 1],$$

y las condiciones de contorno

$$u(0, t) = 4t, u(1, t) = 1 + 4t, \quad t > 0,$$

mediante el método explícito en  $T = 1$  tomando  $h = 0.2$  y  $k = 0.01$ . Obtén el error absoluto en todos los nodos sabiendo que la solución analítica es

$$u(x, t) = 4t + x^2.$$

Indica en una tabla la solución encontrada y el error absoluto en todos los nodos espaciales en el último instante  $T$ . Representa la solución aproximada.

*Solución.*

Consideramos los nodos espaciales  $x_i = 0 + ih, i = 0, 1, \dots, nx$  y temporales  $t_j = 0 + jk, j = 0, 1, \dots, nt$ , obtenidos con los pasos  $h = \frac{L}{nx}$  y  $k = \frac{T}{nt}$ . Como en el caso de la ecuación del calor clásica, aplicamos diferencias progresivas en  $u_t$  y centrales en las derivadas respecto a  $x$ ,  $u_x$  y  $u_{xx}$ . Evaluamos la expresión resultante en los pares de nodos  $(x_i, t_j), i = 1, 2, \dots, nx - 1, j = 0, 1, \dots, nt - 1$ ,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - 2\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})^2}{4h^2} + 4u_{i,j} = 16t_j,$$

para  $i = 1, 2, \dots, nx - 1, j = 0, 1, \dots, nt - 1$ . Denotamos  $\lambda = \frac{2k}{h^2}$ , agrupamos y despejamos el instante mayor

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\lambda - 4k)u_{i,j} + \frac{9}{8}\lambda u_{i+1,j} + \frac{7}{8}\lambda u_{i-1,j} + 16kt_j,$$

para  $i = 1, 2, \dots, nx - 1, j = 0, 1, \dots, nt - 1$ . Modificamos el núcleo del bucle principal en el programa básico,

```
for j=1:nt
    for i=2:nx
        u(i,j+1)=(1-2*lambda-4*k)*u(i,j)+...
            9/8*lambda*u(i+1,j)+7/8*lambda*u(i-1,j)...
            +16*k*t(j);
    end
end
```

y, al ejecutar el programa resultante, obtenemos los resultados de la Tabla 6. Notemos que se cumple la condición de convergencia, ya que  $\lambda = \frac{1}{2}$ .



$x_i$	$u_{i,nt}$	$ u_{i,nt} - u(x_i, T_{max}) $
0.000000	4.0000	0
0.200000	4.0845	0.0445
0.400000	4.2274	0.0674
0.600000	4.4258	0.0658
0.800000	4.6815	0.0415
1.000000	5.0000	0

Tabla 6: Aproximación y error en el Ejercicio 3

La gráfica de la solución aproximada puede verse en la Figura 3.

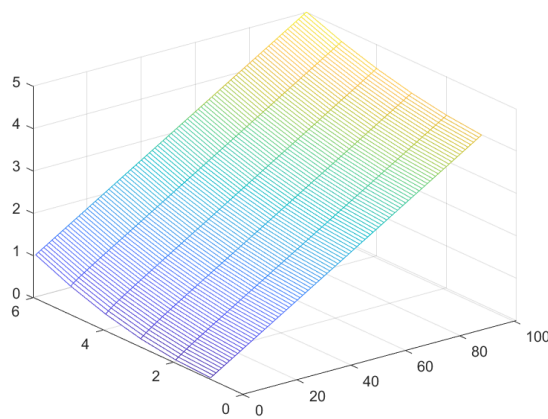


Figura 3: Solución aproximada del Ejercicio 3

**Ejercicio 4.** Obtén la solución numérica de la EDP

$$u_t - \frac{1}{8}u_{xx} = -\frac{1}{4} + 2\pi \cos(2\pi t), \quad x \in [0, 1], t \geq 0,$$

$$\text{CI: } u(x, 0) = x(x - 1), \quad x \in [0, 1],$$

$$\text{CC: } u(0, t) - u_x(0, t) = 1, \quad u(1, t) = \sin(2\pi t), \quad t > 0,$$

con el método explícito en  $T = 1$  tomando  $h = k = 0.1$ . Obtén el error absoluto en todos los nodos sabiendo que la solución analítica es

$$u(x, t) = x(x - 1) + \sin(2\pi t).$$

Indica en una tabla la solución numérica y el error absoluto en todos los nodos espaciales. Representa la solución aproximada.

*Solución.*

Sean  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, nx$  y  $t_j = jk$ ,  $j = 0, 1, \dots, nt$ , con  $h = 1/nx$  y  $k = 1/nt$ , siendo  $nx$  y  $nt$  el número de subintervalos en cada variable. De todos los pares de nodos, en aquellos  $(x_i, t_j)$  con  $i = 0, 1, \dots, nx - 1$  y  $j = 1, 2, \dots, nt$  no se conoce el valor de la función incógnita.

Aplicando diferencias progresivas en  $u_t$  y simétricas en  $u_{xx}$ , obtenemos

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \frac{k}{4} + 2k\pi \cos(2\pi t_j),$$

para  $i = 1, 2, \dots, nx - 1$ ,  $j = 0, 1, \dots, nt - 1$ , siendo  $\lambda = \frac{k}{8h^2}$ . En el caso particular  $i = 0$  aparece  $u_{-1,j}$ , que no está definida. Para eliminar este elemento, discretizamos la primera condición de contorno con aproximaciones de orden 2 en un instante  $t_j$ ,

$$u(0, t) - u_x(0, t) = 1 \Rightarrow u_{0,j} - \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h} = 1,$$

de donde deducimos  $u_{-1,j} \approx u_{1,j} - 2hu_{0,j} + 2h$ .

Reemplazando  $u_{-1,j}$  en la primera ecuación por su aproximación, obtenemos, para cada  $j$  fija y arbitraria en  $j = 0, \dots, nt - 1$ ,

$$\begin{aligned} u_{0,j+1} &= (1 - 2\lambda - 2h\lambda)u_{0,j} + 2\lambda u_{1,j} + 2h\lambda - \frac{k}{4} + 2k\pi \cos(2\pi t_j), \\ u_{i,j+1} &= (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \frac{k}{4} + 2k\pi \cos(2\pi t_j), \end{aligned}$$

para  $i = 1, 2, \dots, nx - 1$ . Modificando el fichero CalorExplND.m, generamos el siguiente código, que nos permitirá resolver el problema.



### Ejer0504.m

```
function [u,x,t] = ...
    Ejer0504(alpha,ci,h2,L,nx,Tmax,nt)
% Metodo explicito para la ecuacion del calor ...
% con condiciones Dirichlet
% Inicializacion
h=L/nx;      x=0:h:L;
k=Tmax/nt;   t=0:k:Tmax;
cix=feval(ci,x);      c2t=feval(h2,t);
u=zeros(nx+1,nt+1);
u(:,1)=cix';      u(nx+1,:)=c2t;
% Condicion de estabilidad/convergencia
lambda=k*alpha^2/h^2;
if lambda>1/2
    disp('No se cumple el criterio de ...
        convergencia')
else
    disp('sin problema')
end
L = 1:nx-1; C = 2:nx; R = 3:nx+1;
for j=1:nt
    u(1,j+1) = (1-2*lambda-2*h*lambda)*u(1,j)+...
        2*lambda*u(2,j)+2*h*lambda-...
        k/4+2*k*pi*cos(2*pi*t(j));
    u(C,j+1) = ...
        (1-2*lambda)*u(C,j)+lambda*(u(L,j)+u(R,j))-...
        k/4+2*k*pi*cos(2*pi*t(j));
end
end
```

En la Tabla 7 observamos que el método no ha logrado converger (notemos que en este caso no se cumple la condición de convergencia,  $\lambda = 1.25$ . Sin embargo, utilizando  $k = 0.01$ , los resultados son buenos, a juzgar por el error exacto cometido.

$x_i$	$u_{i,10}$	$ u_{i,10} - u(x_i, 1) $	$u_{i,100}$	$ u_{i,100} - u(x_i, 1) $
0.0	-1.5527e+3	1.5527e+3	0.0626	0.0626
0.1	1.3089e+3	1.3090e+3	-0.0444	0.0456
0.2	-0.9482e+3	0.9481e+3	-0.1430	0.0170
0.3	0.5744e+3	0.5746e+3	-0.2172	0.0072
0.4	-0.2767e+3	0.2764e+3	-0.2626	0.0226
0.5	0.0837e+3	0.0839e+3	-0.2801	0.0301
0.6	0.0170e+3	0.0173e+3	-0.2721	0.0321
0.7	-0.0592e+3	0.0590e+3	-0.2401	0.0301
0.8	0.0612e+3	0.0614e+3	-0.1844	0.0244
0.9	-0.0384e+3	0.0383e+3	-0.1042	0.0142
1.0	-0.0000e+3	0.0000e+3	-0.0000	0.0000

Tabla 7: Aproximaciones y errores en el Ejercicio 4

La gráfica de la solución aproximada utilizando 100 subintervalos temporales puede verse en la Figura 4.

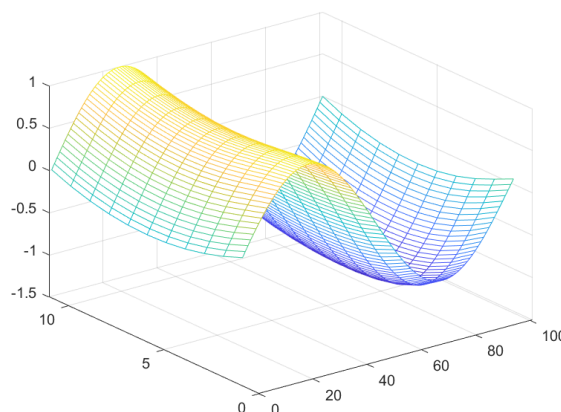


Figura 4: Solución aproximada del Ejercicio 4 con  $nt = 100$

**Ejercicio 5.** Consideremos la ecuación en derivadas parciales parabólica

$$u_t = u_{xx} + xu_x + u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 2t, & t > 0, \\ u(1, t) &= t^2/2, & t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin x + \cos x, & 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden  $O(k+h^2)$ . Aplica este esquema para determinar la solución en el instante  $t = 0.5$ , tomando  $h = 0.1$  y  $k = 0.0005$ .

*Solución.* En la partición de los intervalos, consideramos los nodos  $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, nx$  y  $t_j = jk, j = 0, 1, \dots, nt$ , con  $h = 1/nx$  y  $k = 1/nt$ , siendo  $nx$  y  $nt$  el número de subintervalos en cada variable.

Aproximando  $u_t$  por diferencias progresivas y tanto  $u_x$  como  $u_{xx}$  mediante diferencias centrales, obtenemos

$$u_{i,j+1} = \left( \frac{k}{h^2} + \frac{kx_i}{2h} \right) u_{i+1,j} + \left( \frac{-2k}{h^2} + k + 1 \right) u_{i,j} + \left( \frac{k}{h^2} - \frac{kx_i}{2h} \right) u_{i-1,j},$$

para  $i = 1, \dots, nx - 1$  y  $j = 0, \dots, nt - 1$ .

En la implementación del método nos basaremos en la función básica del método explícito. Basta con modificar la expresión en diferencias contenida en el bucle:

$$\begin{aligned} U(C, j+1) &= (k/h^2 + k*x(C)/(2*h)) * U(R, j) + \dots \\ &\quad (-2*k/h^2 + k + 1) * U(C, j) + \dots \\ &\quad (k/h^2 - k*x(C)/(2*h)) * U(L, j); \end{aligned}$$

Al ejecutar esta función con las condiciones inicial y de contorno del problema obtenemos la aproximación de la solución en  $t = 0.5$  que se muestra en la Tabla 8.

$x_i$	$u(x, 0.5)$
0	1.000000
0.1	0.864310
0.2	0.739442
0.3	0.625790
0.4	0.523405
0.5	0.432082
0.6	0.351443
0.7	0.280997
0.8	0.220184
0.9	0.168399
1	0.125000

Tabla 8: Aproximación

## 5.6 Ejercicios propuestos

**Ejercicio 6.** Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 2, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t, \quad u(x, 0) = \sin \pi x + x(1 - x), \quad x \in [0, 1].$$

Sabiendo que la solución exacta es

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + x(1 - x),$$

se pide aproximar, mediante el método explícito, la solución del problema en el instante  $T = 1$ , tomando (a)  $h = 0.1, k = 0.05$ ; (b)  $nx = 10, nt = 10000$ .

Determina el error exacto y representa dicho error.

**Ejercicio 7.** Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) - t^2 u(x, t) = x \cos xt, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u_x(0, t) = t, \quad u(1, t) = \sin t, \quad \forall t, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

- Describe el método explícito de orden  $O(k + h^2)$ , utilizando  $nx$  subintervalos en  $[0, 1]$  y  $nt$  subintervalos en  $[0, T]$ , siendo  $T$  el instante máximo en el que pretendemos aproximar la solución.
- A partir del esquema anterior, determina la solución aproximada del problema en el instante  $T = 1$ , tomando 10 subintervalos en el eje espacial y 100 en el eje temporal. Representa, para cada método, la solución en los instantes  $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ .
- Sabiendo que la solución exacta es  $u(x, t) = \sin xt$ , calcula el error máximo cometido en cada uno de los instantes anteriores.

**Ejercicio 8.** Demuestra que el cambio de variable  $v(x, t) = \ln(u(x, t))$  transforma el problema no lineal

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + v_x^2, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ v_x(0, t) &= 1, & v(1, t) &= 0, \quad t > 0, \\ v(x, 0) &= 0, & 0 < x < 1, \end{aligned}$$

en el problema lineal

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) &= u(0, t), & u(1, t) &= 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= 1, & 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Transforma el problema lineal en un esquema en diferencias explícito. Aplica dicho esquema para aproximar la solución en el instante  $t = 1.5$ , tomando  $h = 0.1$

y  $k = 0.001$ .

**Ejercicio 9.** Consideremos la ecuación en derivadas parciales parabólica

$$u_t = u_{xx} - u_x u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

con las condiciones

$$u(0, t) = 2t, \quad t > 0,$$

$$u(1, t) = t^2/2, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 < x < 1.$$

Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden  $O(k+h^2)$ . Aplica este esquema para determinar la solución en el instante  $t = 0.5$ , tomando  $h = 0.1$  y  $k = 0.0005$ .

**Ejercicio 10.** Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_t = u_{xx} + u_x^2, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

con las condición inicial  $u(x, 0) = x^2 \sin(\pi x)$ ,  $0 < x < 1$ , y las condiciones de contorno  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  para  $t > 0$ .

- Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden  $O(k+h^2)$ . Aplica este esquema para determinar la solución en el instante  $t = 2$ , tomando  $h = 0.1$  y  $k = 0.005$ .
- Utiliza el cambio de variable  $u = \ln v$  para transformar el problema anterior en un problema lineal.
- Utiliza el método explícito para aproximar la solución del problema lineal en  $t = 2$ , tomando  $h = 0.1$  y  $k = 0.05$ . Compara los resultados obtenidos con los del apartado a).