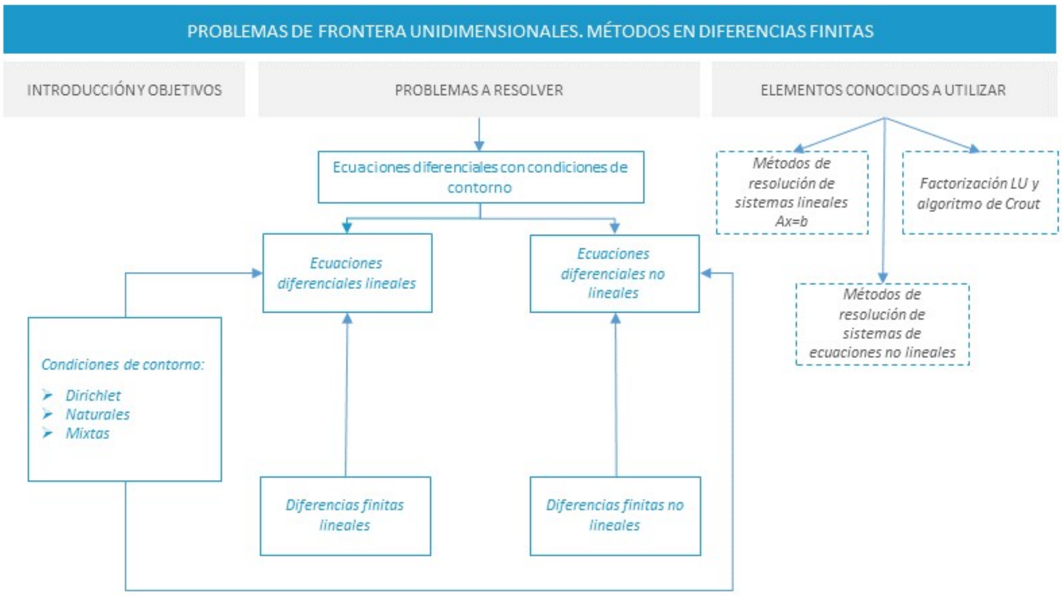
Métodos Numéricos II

Problemas de frontera unidimensionales. Métodos de diferencias finitas

Índice

Esquema


PROBLEMAS DE FRONTERA UNIDIMENSIONALES. MÉTODOS EN DIFERENCIAS FINITAS
INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS
PROBLEMAS A RESOLVER
ELEMENTOS CONOCIDOS A UTILIZAR
Ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno
Métodos de resolución de sistemas lineales Ax=b
Factorización LU y algoritmo de Crout
Ecuaciones diferenciales lineales
Ecuaciones diferenciales no lineales
Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales
Condiciones de contorno:
Dirichlet
Naturales
Mixtas
Diferencias finitas lineales
Diferencias finitas no lineales

Ideas clave

3.1 Introducción y objetivos

Continuando con la resolución numérica de problemas de contorno o de frontera unidimensional, una alternativa a los métodos de disparo, que desarrollamos en el tema anterior, es la **técnica de las diferencias finitas**. Este procedimiento se aplica sobre numerosos problemas, no necesariamente de contorno unidimensional, como veremos en los temas siguientes. Las diferencias finitas permiten reemplazar las derivadas de la ecuación diferencial por expresiones que obtendremos de la propia definición de derivada o del desarrollo de Taylor de una determinada función alrededor de un nodo concreto. Para ello, será necesario discretizar el problema y establecer las ecuaciones en torno a un nodo, a partir de la información de los nodos anteriores y posteriores. Este procedimiento transforma el problema de contono en un sistema de ecuaciones lineal o no lineal, dependiendo de la ecuación diferencial. Las incógnitas de estos sistemas son los valores aproximados del problema de frontera en los nodos elegidos.

Al igual que en el tema anterior, trabajaremos, en general, con x como variable independiente, que variará siempre en un intervalo y tendremos tantas condiciones de contorno como orden de la ecuación diferencial, siendo $y(x)$ la función incógnita que buscamos.

Cuando la ecuación diferencial que describe el problema es lineal, esta técnica transforma el problema de frontera en un sistema lineal, que resolveremos utilizando el **método de eliminación de Gauss** o procedimientos similares que reduzcan el coste computacional. Cuando la ecuación diferencial es no lineal, lo que resulta es un sistema de ecuaciones no lineales que resolveremos mediante el **método de Newton**.

3.2 Conceptos básicos

Como ya sabemos, todo problema de frontera unidimensional está modelizado por una ecuación diferencial de un determinado orden y condiciones repartidas entre los extremos del intervalo donde varía la variable independiente. El número de condiciones coincide con el orden de la ecuación diferencial. Por ello, el problema de contorno más sencillo con el que nos podemos encontrar es

$$y'' = f(x, y, y'), \;\; x \in [a, b], \;\; y(a) = \alpha, y(b) = \beta. \tag{1}$$

Distinguiremos si la función f es lineal o no lineal en las variables y e y' y analizaremos diferentes tipos de condiciones de contorno.

Tipos de condiciones de contorno

Las condiciones de contorno o de frontera se dividen en:

- Condiciones Dirichlet
  - Homogéneas: $y(a) = 0, \quad y(b) = 0$.
  - No homogéneas: $y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$, con α o β no nulos.
- Condiciones naturales

$$\begin{aligned} \alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) &= \gamma_a, \\ \alpha_b y'(b) + \beta_b y(b) &= \gamma_b, \end{aligned}$$

  con todos los parámetros reales y $\alpha_a, \; \alpha_b \neq 0$.
- Condiciones mixtas

$$\begin{aligned} \alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) &= \gamma_a, \\ y(b) &= \gamma_b, \end{aligned}$$

  con todos los parámetros reales y $\alpha_a \neq 0$.

Diferencias finitas

Las diferencias finitas son aproximaciones de la derivada de cualquier orden de una función en un punto. Sus expresiones se pueden deducir a partir de los desarrollos de Taylor o de la fórmula del polinomio de interpolación de Newton. Consideremos una función $y = f(x)$ y un punto x_0 del dominio de f. El desarrollo de Taylor de f alrededor de x_0 nos proporciona

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + \cdots \tag{2}$$

Si truncamos el desarrollo a partir del término de primer orden, obtenemos

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h, \quad \text{es decir,} \quad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

que resulta ser una aproximación de $f'(x_0)$ de primer orden, $O(h)$, que recibe el nombre de **diferencia finita progresiva**.

Podemos obtener la misma expresión utilizando polinomios de interpolación de grado 1. Dados los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, el polinomio de interpolación de grado 1 que pasa por ellos es

$$p_1(t) = f(x_0) + f[x_0, x_0 + h](t - x_0),$$

donde $f[x_0, x_0 + h]$ es la diferencia dividida de primer orden, definida de la forma $f[x_0, x_0 + h] = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Si aproximamos

$$f'(x_0) \approx p_1'(x_0), \ \text{resulta} \ f'(x_0) \approx f[x_0, x_0 + h] = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Análogamente a (2), podemos escribir

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \cdots \tag{3}$$

y truncando a partir del término de primer orden, tenemos

$$f(x_0 - h) \approx f(x_0) - f'(x_0)h, \quad \text{es decir,} \quad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h},$$

que resulta ser una aproximación de $f'(x_0)$ de primer orden, $O(h)$, que recibe el nombre de **diferencia finita regresiva**.

Restando los desarrollos de Taylor (2) y (3) y truncando a partir del término de primer orden, resulta

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h},$$

que es una aproximación de $f'(x_0)$ de segundo orden, $O(h^2)$, que recibe el nombre de **diferencia finita central**.

De forma análoga se pueden obtener las diferencias finitas que aproximan a la derivada segunda en un punto, $f''(x_0)$. También es posible obtener las expresiones de estas diferencias finitas teniendo en cuenta que $f''(x_0) = (f')'(x_0)$. Así,

$$\begin{aligned} f''(x_0) &\approx \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} \\ &\approx \frac{(f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h))/h - (f(x_0 + h) - f(x_0))/h}{h} \\ &\approx \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2}, \end{aligned}$$

obtenemos la **diferencia finita progresiva** que aproxima a $f''(x_0)$ y que tiene orden 1, $O(h)$.

Análogamente,

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0) - 2f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{h^2},$$

que es la **diferencia finita regresiva** que aproxima a $f''(x_0)$ y que tiene orden 1, $O(h)$, y

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2},$$

que es la **diferencia finita central** que aproxima a $f''(x_0)$ y que tiene orden 2, $O(h^2)$.

Diferentes aproximaciones de distintos órdenes se pueden obtener, utilizando polinomios de interpolación o la técnica anterior, no sólo para $f'(x_0)$ o $f''(x_0)$, si no también para $f'''(x_0)$, $f^{(iv)}(x_0)$, etc.

Accede al vídeo: Diferencias finitas para derivadas de orden superior

Algoritmo de Crout

Es una variante del método de eliminación de Gauss, que permite resolver sistemas lineales $Ax = d$ donde A es una matriz tridiagonal de tamaño $n \times n$ y d un vector de $\mathbb{R}^n$, reduciendo considerablemente el número de operaciones. Consideremos la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

que queremos factorizar de la forma $A = LU$, donde

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn-1} & l_{nn} \end{pmatrix}, \ U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & u_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para determinar los elementos no conocidos de L y U igualamos las posiciones no nulas de A y de LU. De este forma, se obtiene

- $i = 1$ $\quad l_{11} = a_{11}, \quad u_{12} = a_{12}/l_{11},$

- Para $i = 2, 3, \ldots, n-1$ $\quad l_{ii-1} = a_{ii-1},$

  $l_{ii} = a_{ii} - l_{ii-1}u_{i-1i},$

  $u_{ii+1} = a_{ii+1}/l_{ii},$

- $i = n$ $\quad l_{nn-1} = a_{nn-1}, \quad l_{nn} = a_{nn} - l_{nn-1}u_{n-1n},$

Conocidas las matrices L y U, transformamos el sistema original en

$$Ax = d \Leftrightarrow LUx = d \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} Lz = d, \\ Ux = z. \end{array}\right\}$$

El sistema $Lz = d$ lo resolvemos mediante **sustitución directa** empezando por la primera ecuación hasta la última, mientras que el sistema $Ux = z$ se resuelve mediente **sustitución inversa** desde la última ecuación hasta la primera. En el siguiente archivo Crout.m hemos implementado el algoritmo de Crout.

Crout.m

```
function sol=Crout(a,b,c,d)
% a diagonal principal, b superdiagonal, c ...
   subdiagonal, d terminos independiante
n=length(a);
% Obtencion de las matrices L y U tales que A = LU
l(1)=a(1);
u(1)=b(1)/l(1);
for i=2:n-1
l(i)=a(i)-c(i-1)*u(i-1);
u(i)=b(i)/l(i);
end
l(n)=a(n)-c(n-1)*u(n-1);
```

```
% Solucion del sistema Lz = d
z(1)=d(1)/l(1);
for i=2:n
z(i)=(1/l(i))*(d(i)-c(i-1)*z(i-1));
end
% Solucion del sistema Ux = z
x(n)=z(n);
for i=n-1:-1:1
x(i)=z(i)-u(i)*x(i+1);
end
sol=x(:);
```

Si resolvemos el siguiente sistema utilizando el método de Gauss y el algoritmo de Crout

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{29} \\ x_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos la misma solución por ambos procedimientos, al menos en los 4 primeros decimales. Sin embargo, el algoritmo de Gauss requiere 9890 productos-cocientes mientras que el método de Crout sólo necesita 523 productos-cocientes. Teniendo en cuenta que la matriz de coeficientes de este ejemplo está mal condicionada, puede ser muy interesante esta reducción del coste computacional.

Recordemos que el número de productos-cocientes que requiere el método de eliminación de Gauss para resolver un sistema lineal de tamaño $n \times n$ es $\frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{1}{3}n$.

3.3 Diferencias finitas lineales

Vamos a aplicar la técnica de diferencias finitas a un problema de frontera de segundo orden, lineal con condiciones Dirichlet. Cuando las condiciones de contorno sean no Dirichlet tendremos que modificar tanto el desarrollo teórico como su implementación en Matlab para adaptarlo a las nuevas condiciones.

Consideremos el problema

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a,b], \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta.$$

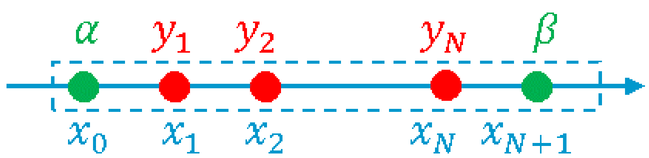
El método consiste en transformar nuestro problema en un sistema de ecuaciones lineales, cuyas incógnitas son los valores aproximados de $y(x)$ en los nodos elegidos del intervalo $[a,b]$. Remplazamos cada derivada de la ecuación diferencial por una diferencia central de orden 2

$$\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} = p(x)\frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + q(x)y(x) + r(x) + O(h^2).$$

Eliminamos el término del error, elegimos nodos equiespaciados en el intervalo $[a,b]$

$$h = \frac{b-a}{N+1}, \quad x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, \ldots, N+1,$$

$x_0 = a$ y $x_{N+1} = b$, únicos nodos donde la función es conocida.



Hemos denotado en verde los puntos donde la función es conocida y en rojo donde no lo es. La solución aproximada en esos puntos son las incógnitas del sistema. Discretizamos la ecuación anterior para cada x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, denotando por y_i el valor aproximado de la solución en el nodo x_i, $y(x_i)$,

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i + r(x_i), \;\; i = 1, 2, \ldots, N,$$

o, equivalentemente,

$$-\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right) y_{i-1} + (2 + h^2 q(x_i))y_i - \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right) y_{i+1} = -h^2 r(x_i), \; i = 1, 2, \ldots, N.$$

Este sistema se puede expresar en forma matricial como

$$Ay = d,$$

donde la matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix} 2 + h^2 q(x_1) & -1 + \frac{h}{2}p(x_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 - \frac{h}{2}p(x_2) & 2 + h^2 q(x_2) & -1 + \frac{h}{2}p(x_2) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \frac{h}{2}p(x_3) & 2 + h^2 q(x_3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 + h^2 q(x_{N-1}) & -1 + \frac{h}{2}p(x_{N-1}) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 - \frac{h}{2}p(x_N) & 2 + h^2 q(x_N) \end{pmatrix}$$

y los términos independientes y las incógnitas

$$d = \begin{pmatrix} -h^2 r(x_1) + (1 + \frac{h}{2}p(x_1))\alpha \\ -h^2 r(x_2) \\ \vdots \\ -h^2 r(x_{N-1}) \\ -h^2 r(x_N) + (1 - \frac{h}{2}p(x_N))\beta \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix}.$$

Observemos que la matriz de coeficientes es tridiagonal, por lo que vamos a resolver este sistema utilizando el algoritmo de Crout. Así, podemos estructurar el método de diferencias finitas lineales de la siguiente forma:

ALGORITMO

- ENTRADA funciones $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$; extremos a, b; condiciones contorno α, β; valor de N.

- SALIDA aproximaciones y_i de $y(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$.

- Paso 1 $h = \dfrac{b-a}{N+1}$; tomar $x = a + h$;
  $dp_1 = 2 + h^2 q(x)$, $ds_1 = -1 + \dfrac{h}{2}p(x)$, $d_1 = -h^2 r(x) + (1 + \dfrac{h}{2}p(x))\alpha$,

- Paso 2 Para $i = 2, 3, \ldots, N-1$, tomar $x = a + ih$;
  $dp_i = 2 + h^2 q(x)$, $ds_i = -1 + \dfrac{h}{2}p(x)$, $di_{i-1} = -1 - \dfrac{h}{2}p(x)$, $d_i = -h^2 r(x)$,

- Paso 3 Tomar $x = b - h$,
  $dp_N = 2 + h^2 q(x)$, $di_{N-1} = -1 - \dfrac{h}{2}p(x)$, $d_N = -h^2 r(x) + (1 - \dfrac{h}{2}p(x))\beta$,

- Paso 4 Llamada al algoritmo de Crout para resolver el sistema,
  $y = Crout(dp, ds, di, d)$.

En el siguiente fichero hemos implementado en Matlab este algoritmo.

DiFiLineal.m

```
function [ x,y ] = DiFiLineal(p,q,r,a,b,alfa,beta,N)
%  Diferencias finitas,
%  Problema lineal de segundo orden con ...
   condiciones Dirichlet
%  N es el numero de incognitas
h=(b-a)/(N+1);
x=a:h:b;
x=x(:);
X=x(2:end-1);
px=feval(p,X);
qx=feval(q,X);
rx=feval(r,X);

dp=2+h^2*qx;              %diagonal principal
```

```
ds=-1+h/2*px(1:end-1);    %diagonal superior
di=-1-h/2*px(2:end);      %diagonal inferior

d=-h^2*rx;                %terminos independientes
d(1)=d(1)+(1+h/2*px(1))*alfa;
d(end)=d(end)+(1-h/2*px(end))*beta;

y=Crout(dp,ds,di,d);
y=[alfa; y ;beta];
end

function y=p(x)
y=-2./x;
end
function y=q(x)
y=2./x.^2;
end
function y=r(x)
y=sin(log(x))./x.^2;
end
```

Ejemplo 1.

Consideremos el problema de contorno lineal, con condiciones Dirichlet

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad x \in [1,2], \quad y(1) = 1, y(2) = 2,$$

cuya solución exacta es

$$y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln x) - \frac{1}{10}\cos(\ln x),$$

siendo

$$c_1 = \frac{1}{70}\left(69 + 4\cos(\ln(2)) + 12\sin(\ln(2))\right),$$

$$c_2 = \frac{4}{35} - \frac{2}{35}\cos\left(\ln(2)\right) - \frac{6}{35}\sin\left(\ln(2)\right).$$

Vamos a aplicar el método de diferencias finitas lineales tomando 10 subintervalos en $[1,2]$. Determinamos la solución aproximada y el error exacto cometido. En este caso, los parámetros de entrada del fichero DiferFinitasLineal.m son:

- Funciones: $p(x) = \frac{-2}{x}$, $q(x) = \frac{2}{x^2}$, $r(x) = \frac{sin(log(x))}{x^2}$,
- Extremos del intervalo: $a = 1$, $b = 2$,
- Condiciones Dirichlet: $\alpha = 1$, $\beta = 2$,
- Valor de N: $N = 9$.

Con la llamada

```
>> [x,y]=DiFiLineal(@(x) -2./x, @(x) 2./x.^2, @(x) ...
   sin(log(x))./x.^2,1,2,1,2,9),
```

obtenemos las columnas 1 y 2 de la Tabla 1

Nodos x_i	S. aprox. y_i	S. exacta $y(x_i)$	Error $\lvert y_i - y(x_i)\rvert$
1.0	1.0000	1.0000	0.0000
1.1	1.0926	1.0926	2.88e-5
1.2	1.1870	1.1870	4.17e-5
1.3	1.2833	1.2833	4.55e-5
1.4	1.3814	1.3814	4.39e-5
1.5	1.4811	1.4811	3.92e-5
1.6	1.5823	1.5823	3.26e-5
1.7	1.5850	1.5850	2.49e-5
1.8	1.7888	1.7888	1.68e-5
1.9	1.8939	1.8939	8.41e-6
2.0	2.0000	2.0000	0.0000

Tabla 1: Resultados numéricos del Ejemplo 1

La columna 3 se obtiene a partir de la solución exacta, mientras que la columna 4 es la diferencia entre la solución exacta y la aproximada obtenida por diferencias finitas. Observemos que el error máximo está alrededor de 10^{-5}.

En el siguiente ejemplo, vemos un problema de frontera modelizado por una ecuación diferencial lineal de segundo orden, con condiciones no Dirichlet.

Ejemplo 2.

La temperatura $u(r)$ en un anillo circular de radio interior 1 y radio exterior 3 viene descrita por el problema de frontera

$$\begin{aligned} &ru'' + u' = 0 && r \in [1,3] \\ &u(1) + u'(1) = 1 - \frac{1}{2\ln 3}, && u(3) + u'(3) = 0.5 - \frac{1}{6\ln 3} \end{aligned} \tag{4}$$

Vamos a plantear el sistema lineal, de tamaño 11×11, que resulta al aplicar diferencias finitas de orden 2 a este problema. Aplicando diferencias finitas centrales a $u'(r)$ y a $u''(r)$ obtenemos tras agrupar términos

$$\left(r - \frac{h}{2}\right) u(r-h) - 2ru(r) + \left(r + \frac{h}{2}\right) u(r+h) = 0.$$

Tomamos los nodos $r_i = 1 + ih$, con $h = 2/10$ e $i = 0, 1, 2, \ldots, 10$ y reemplazamos en la ecuación anterior r por cada r_i. Si utilizamos la notación $u_i = u(r_i)$, resulta

$$\left(r_i - \frac{h}{2}\right) u_{i-1} - 2r_i u_i + \left(r_i + \frac{h}{2}\right) u_{i+1} = 0,\ i = 0, 1, \ldots, 10 \qquad (5)$$

La expresión anterior describe un sistema lineal de tamaño 11×11, con incógnitas $u_0, u_1, \ldots, u_{10}$. La solución de este sistema nos proporciona valores aproximados de la solución $u(r)$ en los puntos r_i, $i = 0, 1, \ldots, 10$.

Para determinar la expresión matricial del sistema, vamos a analizar con cuidado las ecuaciones primera y última, correspondientes a $i = 0$ e $i = 10$ respectivamente, ya que en ellas intervienen las condiciones de contorno. La primera ecuación resulta,

$$\left(r_0 - \frac{h}{2}\right) u_{-1} - 2r_0 u_0 + \left(r_0 + \frac{h}{2}\right) u_1 = 0,$$

por lo que debemos aproximar u_{-1} a partir de la primera condición de contorno $u(1) + u'(1) = \alpha$. Aplicando diferencias finitas de orden 2 resulta

$$u_0 + \frac{u_1 - u_{-1}}{2h} = \alpha$$

y de aquí, $u_{-1} = 2hu_0 + u_1 - 2h\alpha$. Llevando esta expresión a la primera ecuación del sistema, tenemos

$$(2hr_0 - h^2 - 2r_0)u_0 + 2r_0u_1 = 2h\alpha\left(r_0 - \frac{h}{2}\right).$$

En cuanto a la última ecuación,

$$\left(r_{10} - \frac{h}{2}\right)u_9 - 2r_{10}u_{10} + \left(r_{10} + \frac{h}{2}\right)u_{11} = 0.$$

Para deshacernos de u_{11} utilizamos la segunda condición de contorno $u(3) + u'(3) = \beta$. Aplicando diferencias de orden 2, esta condición se convierte en

$$u_{10} + \frac{u_{11} - u_9}{2h} = \beta,$$

es decir, $u_{11} = u_9 - 2hu_{10} + 2h\beta$, por lo que la última ecuación del sistema tendrá la expresión

$$2r_{10}u_9 - (2r_{10} + 2hr_{10} + h^2)u_{10} = -2h\beta\left(r_{10} + \frac{h}{2}\right).$$

Con todo ello, el sistema resultante se puede expresar en forma matricial $Au = d$, donde la matriz de coeficientes es

$$\begin{pmatrix}
2hr_0 - h^2 - 2r_0 & 2r_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
r_1 - \frac{h}{2} & -2r_1 & r_1 + \frac{h}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & r_2 - \frac{h}{2} & -2r_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & r_3 - \frac{h}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & r_9 - \frac{h}{2} & -2r_9 & r_9 + \frac{h}{2} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2r_{10} & -h^2 - 2hr_{10} - 2r_{10}
\end{pmatrix}$$

y las incógnitas y términos independientes

$$u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_9 \\ u_{10} \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 2h\alpha\left(r_0 - \frac{h}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -2h\beta\left(r_{10} + \frac{h}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Debemos adaptar el fichero DiFiLineal.m a las características de este problema, en concreto la primera y última fila, tanto de la matriz A como del vector d:

```
alfa = 1-1/(2*log(3));
beta = 0.5-1/(6*log(3));
h = 2/10;
r = 1:h:3;
b = r(1:10)+h/2; b(1) = 2*r(1);  % superdiagonal ...
   de A,
c = r(2:11)-h/2; c(10) = 2*r(11);% subdiagonal de A
a = -2*r(1:11);  % diagonal principal de A
a(1) = 2*h*r(1)-h^2-2*r(1);
a(11) = -h^2-2*h*r(11)-2*r(11);
d = zeros(11,1); % terminos independientes
d(1) = 2*h*alfa*(r(1)-h/2);
d(11) = -2*h*beta*(r(11)+h/2);
```

Los resultados obtenidos aparecen en la primera y segunda columna de la Tabla 2

Nodos r_i	S. aprox. u_i	S. exacta $u(r_i)$	Error $\|u_i - u(r_i)\|$
1.0	1.016835	1.000000	0.016835
1.2	0.931883	0.917022	0.014861
1.4	0.860001	0.846865	0.013140
1.6	0.797703	0.786092	0.011611
1.8	0.742734	0.732487	0.010247
2.0	0.693551	0.684535	0.009016
2.2	0.649053	0.641158	0.007895
2.4	0.608424	0.601557	0.006867
2.6	0.571045	0.565128	0.005917
2.8	0.536435	0.531400	0.005035
3.0	0.504212	0.500000	0.004212

Tabla 2: Resultados numéricos del Ejemplo 2

Teniendo en cuenta que la solución exacta del problema es

$$u(r) = \frac{1}{\ln(1/3)}(\ln(r/3) - 0.5 \ln r),$$

podemos determinar el valor exacto en los nodos utilizados y el error exacto en dichos nodos. Ambos aparecen en las columnas 3 y 4 de la Tabla 2, respectivamente.

En la Figura 1 representamos la solución exacta y la aproximada obtenida por diferencias finitas. Si hubiésemos utilizado el método de disparo que se estudió en el Tema 2, la aproximación habría sido mucho mas precisa.

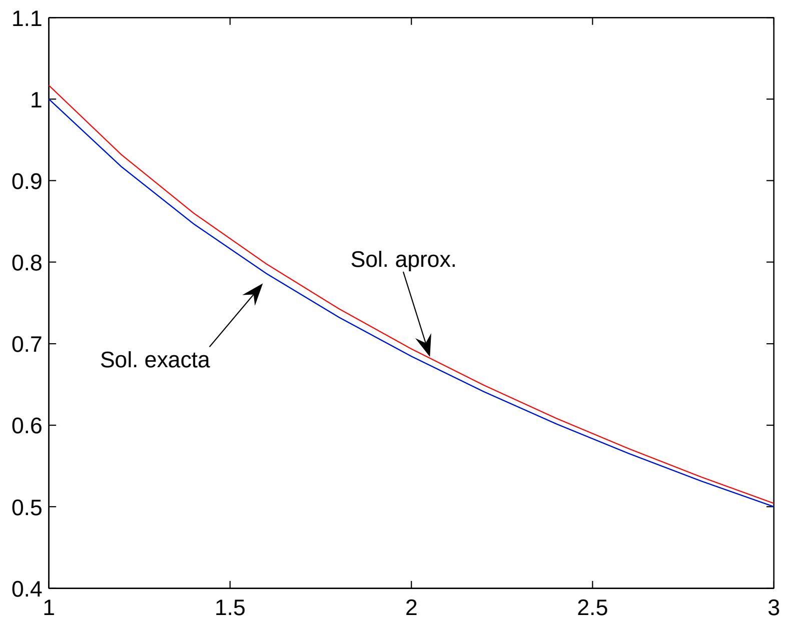


Figura 1: Solución exacta y aproximada

Accede al vídeo: Diferencias finitas lineales con condiciones no Dirichlet

3.4 Diferencias finitas no lineales

En esta sección, vamos a aplicar diferencias finitas para transformar el problema de contorno

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \; y(a) = \alpha, y(b) = \beta,$$

donde f es una función no lineal en y ó y', en un sistema de ecuaciones no lineales que resolveremos con el **método de Newton**.

Aplicando diferencias finitas centrales, transformamos el problema en

$$\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} = f\left(x, y(x), \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}\right) + O(h^2).$$

Utilizamos los nodos

$$h = \frac{b-a}{N+1}, \qquad x_i = a + ih,\ i = 0, 1, 2, \ldots, N, N+1,$$

y la notación del caso lineal

$$y_i \approx y(x_i),\ i = 0, 1, 2, \ldots, N, N+1,\ \text{ siendo } y_0 = \alpha, \quad y_{N+1} = \beta.$$

Al discretizar, obtenemos el sistema no lineal de N ecuaciones con N incógnitas y_1, y_2, ..., y_N

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

que podemos expresar de la forma

$$\left.\begin{aligned} 2y_1 - y_2 + h^2 f(x_1, y_1, (y_2 - \alpha)/2h) - \alpha = 0 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2 f(x_2, y_2, (y_3 - y_1)/2h) = 0 \\ \vdots \\ -y_{N-2} + 2y_{N-1} - y_N + h^2 f(x_{N-1}, y_{N-1}, (y_N - y_{N-2})/2h) = 0 \\ -y_{N-1} + 2y_N + h^2 f(x_N, y_N, (\beta - y_{N-1})/2h) - \beta = 0 \end{aligned}\right\}.$$

¿Cómo se resuelve un sistema no lineal?

Esta pregunta se respondió en la asignatura de Métodos Numéricos I. Vamos a recordar uno de los métodos que se describió en dicha asignatura. Un sistema no lineal de n ecuaciones con n incógnitas se describe de forma general como

$$\left.\begin{aligned} f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \\ f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \end{aligned}\right\}$$

donde $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ son las funciones que describen cada ecuación del sistema. Si definimos la función vectorial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, que tiene a las f_i como sus funciones coordenadas, es decir,

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = (f_1(y_1, y_2, \dots, y_n), f_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \dots, f_n(y_1, y_2, \dots, y_n)),$$

el sistema no lineal se expresa de la forma $F(y) = 0$. Los métodos iterativos son los que nos van a proporcionar soluciones aproximadas de este tipo de sistema. Uno de los más conocidos es el **método de Newton**. Este método parte de una aproximación inicial $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ y genera una sucesión de vectores a partir de su expresión iterativa

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - [F'(y^{(k)})]^{-1} F(y^{(k)}), \;\; k = 0, 1, \dots,$$

donde $F'(y^{(k)})$ es la matriz Jacobiana asociada a F, evaluada en el iterado $y^{(k)}$. Para evitar el cálculo de la matriz inversa, operación inestable y computacionalmente costosa, resolvemos el sistema lineal $F'(y^{(k)})z = F(y^{(k)})$ y su solución nos sirve para calcular la iteración $k+1$: $y^{(k+1)} = y^{(k)} - z$.

Bajo ciertas condiciones sobre la función F, el método de Newton converge cuadráticamente. Como en todo método iterativo, debemos disponer de un criterio de parada

$$\|y^{(k+1)} - y^{(k)}\| < tol \quad \text{o bien} \quad \|y^{(k+1)} - y^{(k)}\| + \|F(y^{(k+1)})\| < tol$$

y de un número máximo de iteraciones.

Para aplicar este método a nuestro sistema, calculamos la matriz Jacobiana $F'(y)$ haciendo uso reiterado de la regla de la cadena

$$\begin{pmatrix} 2 + h^2 f_y(x_1, y_1, \frac{y_2-\alpha}{2h}) & -1 + \frac{h}{2} f_{y'}(x_1, y_1, \frac{y_2-\alpha}{2h}) & \cdots & 0 \\ -1 - \frac{h}{2} f_{y'}(x_2, y_2, \frac{y_3-y_1}{2h}) & 2 + h^2 f_y(x_2, y_2, \frac{y_3-y_1}{2h}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 + \frac{h}{2} f_{y'}(x_{N-1}, y_{N-1}, \frac{y_N-y_{N-2}}{2h}) \\ 0 & 0 & \cdots & 2 + h^2 f_y(x_N, y_N, \frac{\beta-y_{N-1}}{2h}) \end{pmatrix}$$

y para cada iteración resolvemos el sistema lineal

$$F'(y^{(k)})z = -\begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 + h^2 f(x_1, y_1, (y_2-\alpha)/2h) - \alpha \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 + h^2 f(x_2, y_2, (y_3 - y_1)/2h) \\ \vdots \\ -y_{N-2} + 2y_{N-1} - y_N + h^2 f(x_{N-1}, y_{N-1}, (y_N - y_{N-2})/2h) \\ -y_{N-1} + 2y_N + h^2 f(x_N, y_N, (\beta - y_{N-1})/2h) - \beta \end{pmatrix}$$

Observamos que la matriz de coeficientes de los sistemas lineales que hay que resolver es tridiagonal por lo que utilizaremos el algoritmo de Crout para obtener la solución. Con todo lo que hemos comentado, el algoritmo que describe la técnica de diferencias finitas para problemas no lineales resulta:

ALGORITMO

- ENTRADA funciones f, f_y, $f_{y'}$; extremos a, b; condiciones de contorno α, β; valor de N; tolerancia tol; número máximo de iteraciones $maxiter$.
- SALIDA aproximaciones y_i de $y(x_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, N$; o mensaje de fracaso.
- Paso 1 Aproximación inicial, $h = \dfrac{b-a}{N+1}$; $y_i = \alpha + i\frac{\beta-\alpha}{b-a}h$, $i = 1, 2, \ldots, N$
- Paso 2 Inicializar contador e incremento, $iter = 1$, $incre = tol + 1$;
- Paso 3 Mientras $iter < maxiter$ y $incre > tol$, hacer los pasos siguientes:
  - Paso 4 Tomar $x_1 = a + h$; $z_1 = (y_2 - \alpha)/2h$;
    $a_1 = 2 + h^2 f_y(x_1, y_1, z_1)$;
    $b_1 = -1 + (h/2) f_{y'}(x_1, y_1, z_1)$; $d_1 = -(2y_1 - y_2 + h^2 f(x_1, y_1, z_1) - \alpha)$;
  - Paso 5 Para $i = 2, 3, \ldots, N-1$, tomar $x_i = a + ih$, $z_i = (y_{i+1} - y_{i-1})/2h$.
    $a_i = 2 + h^2 f_y(x_i, y_i, z_i)$; $b_i = -1 + (h/2) f_{y'}(x_i, y_i, z_i)$;
    $c_i = -1 - (h/2) f_{y'}(x_i, y_i, z_i)$; $d_i = -(2y_i - y_{i+1} - y_{i-1} + h^2 f(x_i, y_i, z_i))$;
  - Paso 6 Tomar $x_N = b - h$; $z_N = (\beta - y_{N-1})/2h$;
    $a_N = 2 + h^2 f_y(x_N, y_N, z_N)$;

$c_N = -1 - (h/2) f_{y'}(x_N, y_N, z_N);$

$d_N = -(2y_N - y_{N-1} + h^2 f(x_N, y_N, z_N) - \beta);$

- Paso 7 $z = Crout(a, b, c, d);$
- Paso 8 $y = y + z;$
- Paso 9 $incre = \|z\|; iter = iter + 1;$

► Paso 10 Analizar por qué el programa se ha salido del bucle.

La implementación de este algoritmo en Matlab ha dado lugar al fichero Difnolin.m cuyo código podemos ver a continuación

Difnolin.m

```
function [X,Y,iter,incr]=Difnolin(f,fy,fz,a,b, ...
   alfa, beta,N,maxiter,tol)
%   f = f(x,y,z) es la ecuacion diferencial
%   fy = fy(x,y,z) es la parcial de f respecto a y
%   fz = fz(x,y,z) es la parcial de f respecto a ...
   y'= z

%   Ejemplo: para resolver el problema de contorno
%                 y" = (32 + 2x^3 -yy')/8 ...
                     1<=x<=3
%                 y(1)=17,    y(3)=43/3
%   difnolin('(32 + 2*x.^3 - y.*z)/8', '(-1)*z/8', ...
   '(-1)*y/8', 1,3,17,43/3,20,20,1e-8)

h=(b-a)/(N+1);  k=(beta-alfa)/(N+1);
X=a:h:b;     Y=alfa:k:beta;
x=X(2:N+1);    y=Y(2:N+1);

incr=tol+1;         % Inicializar parametros
```

```
iter=0;

while incr>tol && iter<maxiter
    z=(Y(3:N+2)-Y(1:N))/(2*h);  %Estimacion de la
    %derivada por diferencias centrales          ...

    fe=feval(f,x,y,z);
    fye=feval(fy,x,y,z);
    fze=feval(fz,x,y,z);

    dp=2+h^2*fye;
    ds=-1+h/2*fze(1:end-1);
    di=-1-h/2*fze(2:end);
    d=diff(Y,2)-h^2*fe;

    v=Crout(dp,ds,di,d);
    y=y+v';
    Y=[alfa y beta];
    incr=max(abs(v));
    iter=iter+1;
end
X=X(:);
Y=Y(:);
end
```

Ejemplo 3.

Consideremos el problema de contorno no lineal con condiciones Dirichlet

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad x \in [1,3], \quad y(1) = 17, y(3) = \frac{43}{3}.$$

Vamos a aplicar diferencias finitas no lineales, con $h = 0.1$, para encontrar la solución aproximada en todos los nodos seleccionados. Teniendo en cuenta que la solución exacta del problema es $y(x) = x^2 + \frac{16}{x}$, podemos calcular también el error exacto cometido en dichos nodos.

Definimos las tres funciones parámetros de entrada del fichero Difnolin.m:

```
function  t=f(x,y,z)
t=(1/8)*(32+2*x.^3-y.*z);
end
function  t=fy(x,y,z)
t=-(1/8)*z;
end
function  t=fz(x,y,z)
t=-(1/8)*y;
end
```

y llamando al fichero Difnolin.m

```
>> [X,Y,iter,incr]=Difnolin('f','fy','fz', 1,3,17, ...
   43/3,19, 50, 1e-5),
```

obtenemos la primera y segunda columna de la Tabla 3.

Nodos x_i	S. aprox. y_i	S. exacta $y(x_i)$	Error $\lvert y_i - y(x_i)\rvert$
1.0	17.000000	17.000000	-
1.1	15.754503	15.755455	9.52e-4
1.2	14.771740	14.773333	1.59e-3
1.3	13.995677	13.997692	2.02e-3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.9	12.028814	12.031053	2.24e-3
2.0	11.997915	12.000000	2.09e-3
2.1	12.027142	12.029048	1.91e-3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2.8	13.553885	13.554286	4.01e-4
2.9	13.927046	13.927241	1.95e-4
3.0	14.333333	14.333333	-

Tabla 3: Resultados numéricos del Ejemplo 3

Evaluando la solución exacta en el vector de nodos obtenemos la tercera columna de la tabla y, finalmente, restando las columnas segunda y tercera obtenemos el error exacto cometido en cada nodo que aparece en la columna 4 de la Tabla 3

Ejemplo 4.

Consideremos el problema de contorno no lineal

$$y''(x) = -\cos(\pi x)[(y'-1)^2 + \pi^2(y-x)^2], \quad x \in [0,1], \quad y(0) = 1, y(1) = 0.$$

Queremos obtener la solución aproximada del problema, por diferencias finitas, utilizando 11 nodos y el método de Newton con criterio de parada la distancia entre dos iterados consecutivos menor que 10^{-5}.

Con lo que nos pide el problema $N = 9$ y $h = \dfrac{1}{10}$. Las funciones que intervienen en el programa son:

```
f=@(x,y,z)  -cos(pi*x).*((z-1).^2+pi^2*(y-x).^2);
fy=@(x,y,z) -2*pi^2*cos(pi*x).*(y-x);
fz=@(x,y,z) -2*cos(pi*x).*(z-1);
```

Llamando al fichero Difnolin.m

```
>>[X,Y,iter,incr]=Difnolin(f,fy,fz, 0,1,1,0,9, 50, ...
   1e-5),
```

obtenemos la primera y segunda columna de la Tabla 4.

Nodos x_i	S. aprox. y_i	S. exacta $y(x_i)$	Error $\lvert y_i - y(x_i)\rvert$
0	1.0000	1.0000	-
0.1	1.0509	1.0511	0.0002
0.2	1.0082	1.0090	0.0008
0.3	0.8864	0.8878	0.0014
0.4	0.7079	0.7090	0.0011
0.5	0.5000	0.5000	0.0000
0.6	0.2921	0.2910	0.0011
0.7	0.1136	0.1122	0.0014
0.8	-0.0082	-0.0090	0.0008
0.9	-0.0509	-0.05111	0.0002
1.0	0.0000	0.0000	-

Tabla 4: Resultados numéricos del Ejemplo 4

Sabemos que la solución exacta es $y(x) = x + \cos(\pi x)$, por lo que será sencillo determinar su valor en cada uno de los nodos (columna 3 de la Tabla 4) y el error exacto cometido en cada uno de ellos (columna 4 de la Tabla 4).

En la Figura 2 podemos observar la relación entre la solución exacta y la aproximada en cada uno de los nodos.

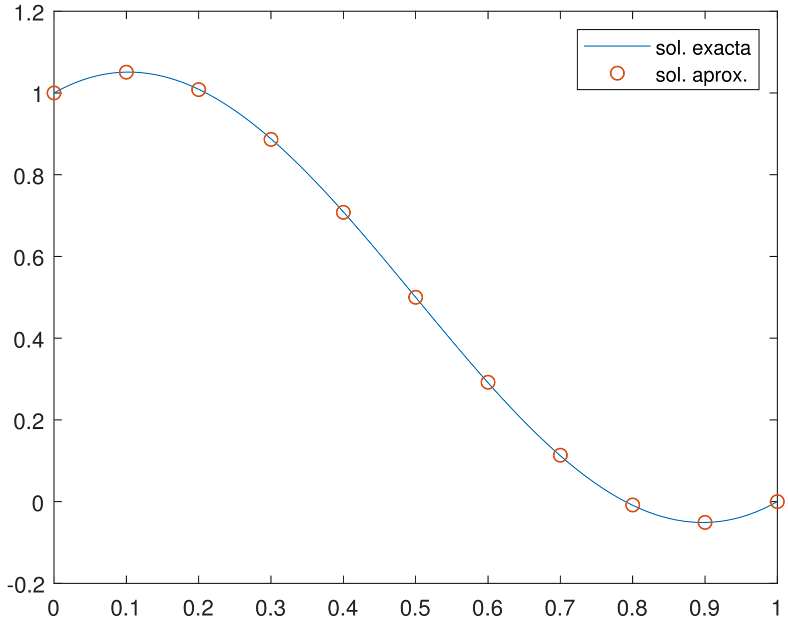


Figura 2: Solución exacta y aproximada

3.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1. Representamos por u el potencial electroestático entre dos esferas metálicas concéntricas de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$), tales que el potencial de la esfera interior se mantiene constante a V_1 voltios y el de la esfera exterior a 0 voltios. El potencial en la región entre las dos esferas está gobernado por la ecuación

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr} = 0, \quad r \in [R_1, R_2], \quad u(R_1) = V_1, u(R_2) = 0.$$

Supongamos que $R_1 = 2mm$, $R_2 = 4mm$ y $V_1 = 110$ voltios.

(a) Aproxima el valor $u(3)$ utilizando el algoritmo de disparo lineal con $N = 20$ y

$N = 40$.

(b) Transforma el problema de frontera en un sistema lineal de tamaño 9×9 y encuentra su solución.

(c) Compara los resultados de (a) y (b) con la solución exacta del problema

$$u(r) = \frac{V_1 R_1}{r} \frac{R_2 - r}{R_2 - R_1}.$$

Ejercicio 2. Aproxima por el método de diferencias finitas la solución de los siguientes problemas de frontera, utilizando en cada caso 20 subintervalos. Compara los resultados obtenidos con la solución exacta.

a) $y'' = -y'^2 - y + \ln x$, $1 \leq x \leq 2$,
   $y(1) = 0$, $y(2) = \ln 2$.
   Solución exacta: $y(x) = \ln x$.

b) $y'' = y^3 - yy'$, $1 \leq x \leq 2$,
   $y(1) = 1/2$, $y(2) = 1/3$.
   Solución exacta: $y(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

c) $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3$, $1 \leq x \leq 2$,
   $y(1) = 2$, $y(2) = 5/2$.
   Solución exacta: $y(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Ejercicio 3. Consideremos el siguiente problema de frontera

$$\begin{aligned}
&y'' - xyy' + x\cos(x)y + \sin x = 0, \qquad x \in [0, \pi], \\
&y(0) + y'(0) = 1, \\
&y(\pi) - 2y'(\pi) = 2.
\end{aligned}$$

(a) Plantea el sistema no lineal que resulta al discretizar el problema anterior mediante diferencias finitas de segundo orden con 9 subintervalos. valor inicial del parámetro $t = 0$. Indica el número de iteraciones y el último valor de t.

(b) Comprueba que la solución exacta del problema es $y(x) = \sin x$.

(c) Determina el error cometido en cada uno de los puntos del apartado (a). Representa la solución exacta y la aproximada.

Ejercicio 4. Consideremos el siguiente problema de frontera

$$\begin{aligned} & y''' = f(x, y, y', y''), && x \in [a, b], \\ & y(a) = \alpha, \; y'(a) - 2y''(a) = \beta, \\ & y'(b) - y''(b) = \gamma. \end{aligned}$$

Describe, con todo detalle, el método de diferencias finitas de segundo orden este problema.

Ejercicio 5. Consideremos el siguiente problema de frontera:

$$\begin{aligned} & y''' = -6y'^2 - y'' + 2y^3, && x \in [-1, 0], \\ & y(-1) = 1/2, \; y(0) = 1/3, \; y'(0) = -1/9. \end{aligned}$$

(a) Determina la solución aproximada del problema de frontera mediante diferencias finitas de segundo orden, utilizando 10 subintervalos.

(b) Comprueba que $y(x) = \dfrac{1}{x+3}$ es la solución exacta del problema. Calcula el error cometido en los nodos utilizados en (a). Representa la solución exacta y la aproximada.

Ejercicio 6. La deformación de una viga, $w(x)$, de longitud L, que soporta una carga $p(x)$ y que está apoyada en los extremos, viene descrita por la ecuación

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = p(x) - kw,$$

con las condiciones

$$\begin{aligned} w(0) = 0, &\quad w''(0) = 0, \\ w(L) = 0, &\quad w''(L) = 0, \end{aligned}$$

donde E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de la sección transversal y k es la rigidez por unidad de longitud. Utilizando los siguientes datos: $L = 10m$, $E = 30 \times 10^6$, $k = 1000kg/m^2$, $I = 2$ y $p(x) = 100\left(1 - \frac{x}{36}\right) kg/m^2$, se pide:

Determina $w(x)$ en el centro de la viga, mediante el método de diferencias finitas de segundo orden con 40 subintervalos.

Ejercicio 7. Consideremos el problema de contorno modelizado por la ecuación diferencial no lineal de tercer orden

$$\frac{1}{3+x}y''' + y'y + e^{-x}y'' = e^x + x + e^{2x}(x + x^2) + 2, \quad x \in [0, 1],$$

con las condiciones de contorno

$$y(0) = 0, \quad y'(0) + y''(0) = 3, \quad y''(1) = 3e.$$

(a) Determina la solución aproximada del problema, mediante el método de diferencias finitas de segundo orden, en los puntos $x = 0.1, 0.2, \ldots, 1$ tomando 20 subintervalos.

(b) Teniendo en cuenta que la solución del problema es $y(x) = xe^x$, calcula el error máximo cometido en los puntos $x = 0.1, 0.2, \ldots, 1$, y representa la solución exacta junto con la aproximada.

Ejercicio 8. Consideremos el problema de contorno modelizado por la ecuación diferencial no lineal de tercer orden

$$y''' + \frac{1}{8}y'y + y'' = \frac{x^3}{4} + \frac{32}{x^3} + 6, \quad x \in [1, 4],$$

con las condiciones de contorno

$$y(1) = 17, \quad y'(1) + y'(4) = -6, \quad y''(1) = 34.$$

(a) Determina la solución aproximada del problema, mediante el método de diferencias finitas de segundo orden, en los puntos $x = 0.5, 1, 1, 5, \ldots, 4$ tomando 60 subintervalos.

(b) Teniendo en cuenta que la solución del problema es $y(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$, calcula el error máximo cometido en los puntos $x = 0.5, 1, 1, 5, \ldots, 4$, y representa la solución exacta junto con la aproximada.