Métodos Numéricos II

Problemas de frontera unidimensionales. Métodos de disparo

Índice

Esquema 2

Ideas clave 3

2.1 Introducción y objetivos 3

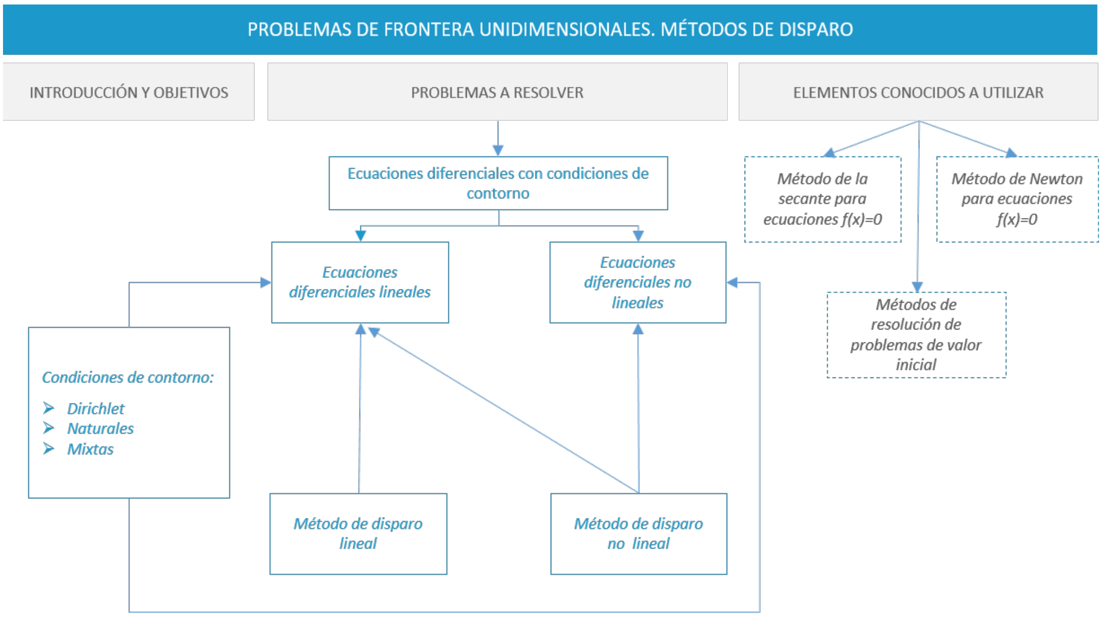
2.2 Conceptos básicos. 6

2.3 Método de disparo lineal 8

2.4 Método de disparo no lineal. 16

2.5 Ejercicios propuestos 36

Esquema



PROBLEMAS DE FRONTERA UNIDIMENSIONALES. MÉTODOS DE DISPARO
INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS
PROBLEMAS A RESOLVER
ELEMENTOS CONOCIDOS A UTILIZAR
Ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno
Método de la secante para ecuaciones f(x)=0
Método de Newton para ecuaciones f(x)=0
Ecuaciones diferenciales lineales
Ecuaciones diferenciales no lineales
Métodos de resolución de problemas de valor inicial
Condiciones de contorno:
Dirichlet
Naturales
Mixtas
Método de disparo lineal
Método de disparo no lineal

Ideas clave

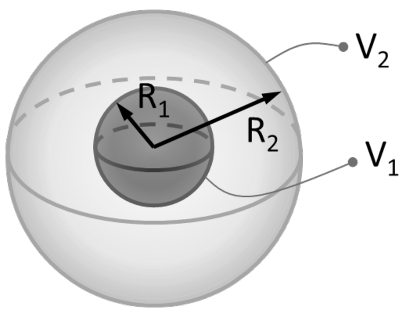
2.1 Introducción y objetivos

Numerosos problemas de Ciencias e Ingeniería se modelizan mediante ecuaciones diferenciales o sistemas de ecuaciones diferenciales con condiciones que, en lugar de estar en el punto inicial como en los problemas de valor inicial, están en los puntos extremos del intervalo, por lo que reciben el nombre de **Problemas de Contorno** o **Problemas de Frontera**.

Trabajaremos, en general, con x como variable independiente, que variará siempre en un intervalo y tendremos tantas condiciones de contorno como orden de la ecuación diferencial. Veamos algunos de los problemas que pretendemos resolver en este tema.

Ejemplo 1. Potencial eléctrico entre dos esferas

Consideremos dos esferas concéntricas de radios R_1 y R_2, $R_1 < R_2$, tal como se observa en la figura.



El potencial eléctrico $V(r)$ entre las dos esferas conductoras concéntricas viene modelizado por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0,\ r \in [R_1, R_2].$$

Conocemos que la esfera interior está cargada a una tensión constante de V_1 Voltios, mientras que la esfera exterior está conectada a otra tensión constante de V_2 Voltios. De este modo, las condiciones de contorno se definen como

$$V(R_1) = V_1,\ \ V(R_2) = V_2.$$

De este modo, tenemos un problema de contorno ya que las condiciones que acompañan a la ecuación diferencial que modeliza el problema están dadas en la frontera del intervalo.

Si la ecuación diferencial se puede resolver, encontramos la solución exacta $V(r)$ que nos proporciona el valor del potencial en cualquier punto $r \in [R_1, R_2]$ entre las dos esferas. Si por el contrario, no podemos encontrar la solución exacta debemos recurrir a técnicas numéricas que nos aproximan la solución en una cantidad finita de puntos del intervalo $[R_1, R_2]$.

Ejemplo 2. Deformación de una viga

La deformación de una viga, $w(x)$, de longitud L, que soporta una carga $p(x)$ y que está apoyada en los extremos, viene descrita por la ecuación

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = p(x) - kw,\ x \in [0, L],$$

con las condiciones que se deducen de estar apoyada en los extremos

$$\begin{aligned} w(0) &= 0, \quad w''(0) = 0, \\ w(L) &= 0, \quad w''(L) = 0, \end{aligned}$$

donde E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de la sección transversal y k es la rigidez por unidad de longitud.

Volvemos a tener un problema de contorno de orden 4, con 4 condiciones repartidas entre los puntos frontera del intervalo.

Estos ejemplos presentan dos características que no siempre vamos a encontrar: la linealidad de la ecuación diferencial y unos condiciones particularmente sencillas. Veamos algunos ejemplos sin estas características

Ejemplo 3. Problema de contorno no lineal

Consideremos el siguiente problema de frontera, descrito por la ecuación diferencial no lineal, de segundo orden,

$$y'' - xyy' + x\cos(x)y + \sin x = 0, \;\; x \in [0, \pi],$$

y las condiciones de contorno

$$y(0) + y'(0) = 1, \;\; y(\pi) - 2y'(\pi) = 2.$$

Ejemplo 4. Problema de contorno no lineal

Consideremos el siguiente problema de frontera, descrito por la ecuación diferencial no lineal, de tercer orden,

$$y''' = -6y'^2 - y'' + 2y^3, \;\; x \in [-1, 0],$$

y las condiciones de contorno

$$y''(-1) = 1/4, \; y(-1) + 2y'(-1) = 0, \; y(0) + 3y'(0) = 0.$$

Ejemplo 5.

Consideremos el siguiente problema de frontera no lineal de segundo orden

$$y'' = -(x+1)y' + 2y + (1 - x^2)e^{-x}, \;\; x \in [0, 1],$$

con las condiciones de contorno

$$2y(0) + y'(0) + y(1) + y'(1) = 1/e, \;\; y(0) + y'(0) = 1.$$

En éstos y otros ejemplos, podemos encontrarnos dificultades para obtener la solución exacta, por lo que debemos recurrir a técnicas numéricas para aproximar la solución en los puntos del intervalo $[a, b]$ que queramos.

En este tema vamos a desarrollar una de las técnicas numéricas para aproximar la solución de un problema de frontera, en una serie de puntos del intervalo de trabajo, denominada **Método de Disparo**. Este método, en términos generales, consiste en transformar el problema de frontera en varios problemas de valor inicial cuya solución será la solución de nuestro problema de contorno. Por ello, en estos algoritmos de disparo van a jugar un papel importante los métodos ya conocidos para aproximar la solución de un problema de valor inicial: método de Runge-Kutta, método de Adams-Bashfort, etc.

2.2 Conceptos básicos

Todo problema de frontera unidimensional está modelizado por una ecuación diferencial de un determinado orden y condiciones repartidas entre los extremos del intervalo donde varía la variable independiente. El número de condiciones coincide con el orden de la ecuación diferencial. Por ello, el problema de contorno más sencillo con el que nos podemos encontrar es

$$y'' = f(x, y, y'), \;\; x \in [a, b], \;\; y(a) = \alpha, y(b) = \beta. \tag{1}$$

Distinguiremos si la función f es lineal o no lineal en las variables y e y' y analizaremos diferentes tipos de condiciones de contorno.

Tipos de condiciones de contorno

Las condiciones de contorno o de frontera se dividen en:

- Condiciones Dirichlet
  - Homogéneas: $y(a) = 0, \quad y(b) = 0$.
  - No homogéneas: $y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$, con α o β no nulos.
- Condiciones naturales

$$\begin{aligned} \alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) &= \gamma_a, \\ \alpha_b y'(b) + \beta_b y(b) &= \gamma_b, \end{aligned}$$

  con todos los parámetros reales y $\alpha_a, \ \alpha_b \neq 0$.
- Condiciones mixtas

$$\begin{aligned} \alpha_a y'(a) + \beta_a y(a) &= \gamma_a, \\ y(b) &= \gamma_b, \end{aligned}$$

  con todos los parámetros reales y $\alpha_a \neq 0$.

Si la función f es lineal en las variables y e y', el problema (1) se escribe de la forma

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \;\; x \in [a,b], \;\; y(a) = \alpha, y(b) = \beta, \qquad (2)$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones cualesquiera de la variable x.

Desde un punto de vista teórico, asociados al problema (2) existen numerosos resultados de existencia y unicidad de soluciones. A modo de ejemplo citamos el siguiente:

Teorema 1

Consideremos el problema de contorno $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$, $x \in [a,b]$, $y(a) = \alpha$, $y(b) = \beta$. Si se cumplen las condiciones:

(i) $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ continuas en $[a,b]$,

(ii) $q(x) > 0, \forall x \in [a,b]$,

entonces el problema tiene solución única.

Nos vamos a centrar en la obtención de aproximaciones de la solución de nuestro problema en una serie de puntos del intervalo $[a, b]$. Fijado un entero positivo n, definimos el **paso** como $h = \dfrac{b-a}{n}$, lo que proporciona $n+1$ puntos equiespaciados del intervalo $[a, b]$,

$$x_i = a + ih, \;\; i = 0, 1, \ldots, n-1, n,$$

a los que llamamos **nodos**. Observar que $x_0 = a$ y $x_n = b$.

A continuación, vamos a describir el método de disparo distinguiendo los casos de f lineal o no lineal en las variables y e y', así como el tipo de condiciones de contorno.

2.3 Método de disparo lineal

Consideremos el problema de frontera descrito anteriormente

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \;\; x \in [a, b], \;\; y(a) = \alpha, y(b) = \beta,$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones cualesquiera de x.

El método de disparo aplicado a este problema, nos permite encontrar la solución aproximada en los nodos elegidos, mediante la solución aproximada de dos problemas de valor inicial.

Problema 1

$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = 0,$ Solución: $y_1(x)$

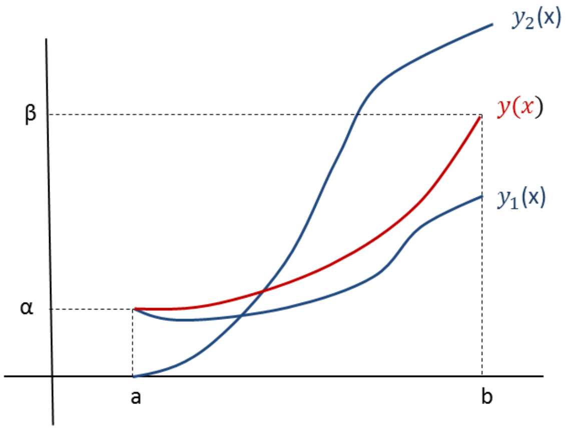
Problema 2

$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad x \in [a, b], \quad y(a) = 0, y'(a) = 1,$ Solución: $y_2(x)$

Entonces, la solución de nuestro problema de contorno es

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x),$$

donde $y_2(b) \neq 0$.



La demostración de esta afirmación es sencilla y se propone como ejercicio. Así pues, encontradas las soluciones aproximadas de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ en los nodos x_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, las soluciones aproximadas de nuestro problema de frontera en dichos nodos serán:

$$y(x_k) = y_1(x_k) + \frac{\beta - y_1(x_n)}{y_2(x_n)} y_2(x_k),\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Por tanto, el primer paso de este algoritmo es determinar la solución $y_1(x)$ en los nodos elegidos. Para ello transformamos el Problema 1 en un problema de valor inicial de primer orden, introduciendo las variables auxiliares $u_1 = y$ y $u_2 = y'$, lo que nos permitirá aplicar los métodos numéricos de resolución de problemas de valor inicial.

El Problema 1 resulta

$$u_1 = y, \; u_2 = y' \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rl} u_1' = & u_2 \\ u_2' = & p(x)u_2 + q(x)u_1 + r(x) \end{array}\right\}, \quad \begin{pmatrix} u_1(a) \\ u_2(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si decidimos resolverlo utilizando el método de Runge-Kutta, escribiremos

```
>> [u1,u2] = Runge-Kutta('funcion1',a:h:b,[alpha,0]'),
```

siendo $funcion1$ el nombre del archivo .m donde se construye la función que describe el sistema anterior.

Por su parte, para el Problema 2 introducimos las variables $v_1 = y$ y $v_2 = y'$, transformándolo en el problema equivalente de valor inicial

$$v_1 = y, \;\; v_2 = y' \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rl} v_1' = & v_2 \\ v_2' = & p(x)v_2 + q(x)v_1 \end{array}\right\}, \quad \begin{pmatrix} v_1(a) \\ v_2(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y llamando de nuevo al método de Runge-Kutta

```
>> [v1,v2] = Runge-Kutta('funcion2',a:h:b,[0,1]'),
```

obtenemos la solución del Problema 2.

El siguiente algoritmo muestra una posible implementación del método de disparo para problemas de frontera de segundo orden lineales con condiciones Dirichlet.

ALGORITMO

- ENTRADA funciones $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$; extremos a, b; condiciones contorno α, β; número de puntos N.
- SALIDA aproximaciones y_i de $y(x_i)$; z_i de $y'(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.

- Paso 1. Elegir los nodos x_i, $h = \dfrac{b-a}{N}$; $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.
- Paso 2. Aplicar Runge-Kutta para resolver Problema 1. Obtención de valores aproximados u_{1i} y u_{2i} para $y_1(x_i)$ e $y_1'(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.
- Paso 3. Aplicar Runge-Kutta para resolver Problema 2. Obtención de valores aproximados v_{1i} y v_{2i} para $y_2(x_i)$ e $y_2'(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.
- Paso 4. Tomar $y_0 = \alpha$ y $C = \dfrac{\beta - u_{1n}}{v_{1n}}$.
- Paso 5. Desde $i = 1$ hasta n tomar

  $y_i = u_{1i} + Cv_{1i}$,

  $z_i = u_{2i} + Cv_{2i}$.

El método de Runge-Kutta puede substituirse por cualquier método de resolución numérica de problemas de valor inicial. Conviene resolver, tanto el Problema 1 como el Problema 2, con el mismo método ya que de esa forma sabremos el orden de convergencia de este método de disparo, tal como aparece enunciado en el siguiente resultado.

Teorema 2: Convergencia Método de Disparo

En general, si u_{1i} y v_{1i} son aproximaciones de orden p, $O(h^p)$, para $y_1(x_i)$ e $y_2(x_i)$, respectivamente, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, entonces se puede demostrar que y_i es una aproximación de orden $O(h^p)$ para $y(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, solución del problema de contorno.

En particular,

$$|y_i - y(x_i)| \leq Kh^p \left|1 + \frac{v_{1i}}{v_{1n}}\right|,$$

para una constante $K > 0$.

A continuación mostramos el codigo del archivo .m que implementa el disparo lineal con condiciones Dirichlet. Hemos utilizado el comando ODE45 de Matlab para resolver los problemas de valor inicial.

DisparoLineal.m

```
function [x,y] = ...
   DisparoLineal(PVI1,PVI2,a,b,n,alfa,beta)

%  PVI1 y PVI2 son archivos .m donde definimos las ...
   funciones que describen
%  los dos problemas de valor inicial
%  Sintaxis: [x,y] = ...
   DisparoLinea('PVI1','PVI2',a,b,n,alfa,beta)

h=(b-a)/n; %n subintervalos en [a,b]
x=a:h:b;   % n+1 nodos
x=x(:);

[x,Y1]=ode45(PVI1,x,[alfa, 0]');
[x,Y2]=ode45(PVI2,x,[0,1]');
y=Y1(:,1)+ ((beta-Y1(end,1))/Y2(end,1))* Y2(:,1);
end
```

En el siguiente ejemplo utilizamos este algoritmo y calculamos el error exacto a partir de la solución exacta.

Ejemplo 6.

Consideremos el problema de frontera

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \quad x \in [1,2], \quad y(1) = 1, y(2) = 2,$$

cuya solución exacta es

$$y(x) = c_1 x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln x) - \frac{1}{10}\cos(\ln x),$$

siendo

$$c_1 = \frac{1}{70}\left(69 + 4\,\text{cos}\,(\text{ln}(2)) + 12\,\text{sin}\,(\text{ln}(2))\right),$$

$$c_2 = \frac{4}{35} - \frac{2}{35}\,\text{cos}\,(\text{ln}(2)) - \frac{6}{35}\,\text{sin}\,(\text{ln}(2)).$$

Planteamos los problemas de valor inicial que debemos resolver

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\text{sin}\,(\text{ln}\,x)}{x^2}, \quad x \in [1,2], \quad y(1) = 1, y'(1) = 0,$$

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y_2, \quad x \in [1,2], \quad y(1) = 0, y'(1) = 1.$$

En el primero introducimos las variables auxiliares $u_1 = y$, $u_2 = y'$, y en el segundo $v_1 = y$, $v_2 = y'$, convirtiendo los problemas anteriores en

$$\left.\begin{array}{rl} u_1' = & u_2 \\ u_2' = & -\frac{2}{x}u_2 + \frac{2}{x^2}u_1 + \frac{\text{sin}\,(\text{ln}\,x)}{x^2} \end{array}\right\}, \quad \begin{pmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\left.\begin{array}{rl} v_1' = & v_2 \\ v_2' = & -\frac{2}{x}v_2 + \frac{2}{x^2}v_1 \end{array}\right\}, \quad \begin{pmatrix} v_1(1) \\ v_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Construimos los ficheros .m con las funciones que definen cada sistema de ecuaciones diferenciales

pvi1.m

```
function [du]=pvi1(x,u)
% Funcion que describe el primer PVI
du=[u(2);
    -(2./x)*u(1)+(2./x.^2)*u(1)+sin(log(x))./x.^2];
end
```

pvi2.m

```
function [dv]=pvi2(x,v)
% Funcion que describe el segundo PVI
dv=[v(2);
    -(2./x)*v(1)+(2./x.^2)*v(1)];
end
```

Al llamar al fichero

```
>> [x,y] = DisparoLineal('pvi1','pvi2',1,2,10,1,2),
```

el ordenador nos devuelve los nodos seleccionados x_i, $i = 0, 1, \ldots, 10$ y la solución aproximada del problema de frontera en dichos nodos y_i, $i = 0, 1, \ldots, 10$.

Nodos x_i	S. aprox. y_i	S. exacta $y(x_i)$	Error $\|y_i - y(x_i)\|$
1.0	1.0000	1.0000	0.0000
1.1	1.0926	1.0926	1.43e-7
1.2	1.1870	1.1870	1.34e-7
1.3	1.2833	1.2833	9.78e-8
1.4	1.3814	1.3814	6.02e-8
1.5	1.4811	1.4811	3.06e-8
1.6	1.5823	1.5823	1.08e-8
1.7	1.5850	1.5850	5.43e-10
1.8	1.7888	1.7888	5.05e-9
1.9	1.8939	1.8939	4.41e-9
2.0	2.0000	2.0000	0.0000

Tabla 1: Resultados numéricos del Ejemplo 6

A partir de la última columna de la Tabla 1, podemos deducir que el error máximo está alrededor de 10^{-7}, lo que nos permite afirmar que los resultados obtenidos son una buena aproximación.

Podemos definir las funciones pvi1 y pvi2 dentro del propio fichero DisparoLineal.m, en lugar de hacerlo como ficheros externos y parámetros de entrada. La forma es

```
pvi1  =  @(x,u)[u(2); ...
   -2./x*u(2)+2./x.^2*u(1)+sin(log(x))./x.^2];
pvi2  =  @(r,x)[x(2);-2./r*x(2)];
```

Si tenemos un problema de frontera lineal con condiciones no Dirichlet, por ejemplo

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad x \in [a,b], \quad y(a) - y'(a) = \alpha,\ y(b) + y'(b) = \beta,$$

no podemos aplicar el algoritmo anterior, pero podemos diseñar uno nuevo de la siguiente forma:
Planteamos los mismos PVIs anteriores, Problema 1 y Problema 2, con soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$, respectivamente.

Determinamos λ_1 y λ_2 de manera que

$$y(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x),$$

sea la solución del problema de contorno. Los valores de los parámetros λ_1 y λ_2 se consiguen forzando a que la función $y(x)$ satisfaga las condiciones de contorno. En este caso, obtenemos

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\beta - (y_1(b) + y_1'(b))}{y_1(b) + y_1'(b) + \alpha(y_2(b) + y_2'(b))}$$

y

$$\lambda_2 = \alpha \frac{\beta - (y_1(b) + y_1'(b))}{y_1(b) + y_1'(b) + \alpha(y_2(b) + y_2'(b))},$$

que vuelve a ser una combinación lineal de las soluciones de los PVIs pero con coeficientes distintos a los obtenidos con condiciones Dirichlet.

La otra alternativa para abordar un problema lineal con condiciones no Dirichlet es aplicar el algoritmo no lineal que vamos a ver a continuación.

2.4 Método de disparo no lineal

Consideremos el problema de frontera descrito

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y(b) = \beta,$$

donde f es, en principio, una función arbitraria en las variables x, y e y'.

En el método de disparo para problemas lineales, la solución final era una combinación lineal de dos problemas de valor inicial. En el caso del disparo no lineal, vamos a obtener la solución del problema de frontera tras resolver unos cuantos problemas de valor inicial, de forma que en cada uno de ellos nos vayamos aproximando a la solución del problema. Planteamos el PVI

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = t,$$

que involucra un parámetro t, que debemos ir cambiando hasta conseguir la solución de nuestro problema de contorno. Observemos que la única condición que no estamos garantizando del problema de frontera es $y(b) = \beta$. Al darle un valor a t, la solución del PVI la expresaremos como $y(t, x)$.

Elegimos valores del parámetro $t = t_k$, tal que

$$\lim_{k \to +\infty} y(t_k, b) = y(b) = \beta,$$

donde $y(t_k, x)$ es la solución del PVI con $t = t_k$ e $y(x)$ es la solución del problema de contorno. Es decir, estamos buscando una solución aproximada de la ecuación

$$F(t) := y(t, b) - \beta = 0.$$

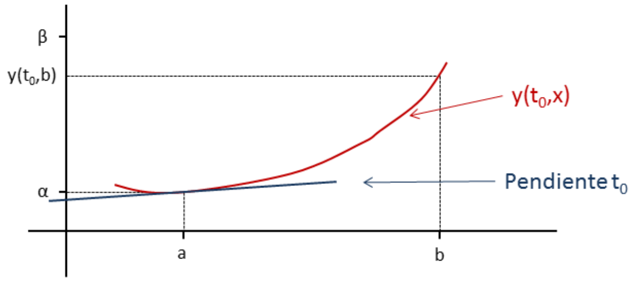
- Tomamos $t = t_0$ y resolvemos el problema de valor inicial

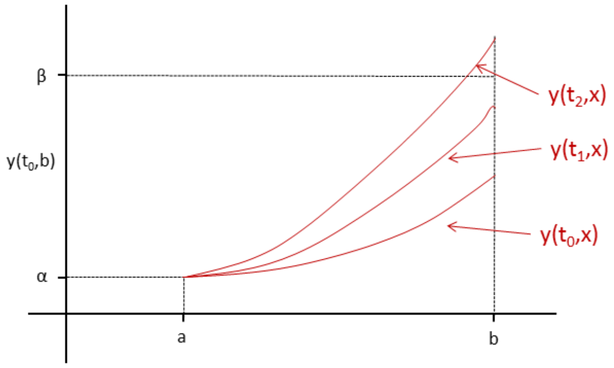
$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = t_0 \quad \rightarrow \quad \text{Solución } \ y(t_0, x)$$

- Si $|y(t_0, b) - \beta| > tol$, tomamos $t = t_1$ y resolvemos el PVI

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, y'(a) = t_1 \quad \rightarrow \quad \text{Solución } \ y(t_1, x)$$

- Si $|y(t_1, b) - \beta| > tol$, tomamos $t = t_2$ y ...
- No podemos estar eligiendo de manera arbitraria los valores del parámetro, debemos tener algún criterio para dicha elección. Como buscamos una cero de la función $F(t) = y(t, b) - \beta$, podemos aplicar cualquier método iterativo de resolución de ecuaciones no lineales.
- Nos vamos a centrar en el **Método de la secante** y en el **Método de Newton**.





Disparo no lineal aplicando secante

Recordemos que el método de la secante permite, a partir de dos aproximaciones iniciales t_0 y t_1, aproximarnos a la solución de la ecuación $F(t) = 0$ mediante la expresión iterativa

$$t_{k+1} = t_k - \frac{F(t_k)(t_k - t_{k-1})}{F(t_k) - F(t_{k-1})} = t_k - \frac{(y(t_k, b) - \beta)(t_k - t_{k-1})}{y(t_k, b) - y(t_{k-1}, b)}, \;\; k = 1, 2, \ldots$$

Tomando la solución en $x = b$ de los PVIs para $t = t_0$ y $t = t_1$, podemos obtener el tercer valor de t a partir de la expresión anterior. Establecemos un proceso iterativo que se detendrá cuando se alcance un número máximo de iteraciones o cuando obtengamos un valor del parámetro $t = t_k$ para el cual $|y(t_k, b) - \beta| < tol$. Con estas ideas podemos establecer el siguiente algoritmo:

ALGORITMO

- ENTRADA función f; extremos a, b; condiciones contorno α, β; número de incógnitas N; tolerancia tol; número máximo de iteraciones $maxiter$.
- SALIDA aproximaciones y_i de $y(x_i)$ e yp_i de $y'(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, N + 1$; o mensaje de fracaso.
- Paso 1. Elegir los nodos x_i, $h = \dfrac{b-a}{N+1}$; tomar $x = a : h : b$;
- Paso 2. Inicializar contador e incremento, $iter = 1$, $incre = tol + 1$;
  Primeros valores del parámetro t, $t_0 = \beta$, $t_1 = (\beta - \alpha)/(b - a)$;
- Paso 3. Resolver mediante un método numérico el PVI con $t = t_0$. Obtener los valores aproximados $y_i(t_0)$ e $yp_i(t_0)$ para $y(t_0, x_i)$ e $y'(t_0, x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$
- Paso 4. Resolver mediante un método numérico el PVI con $t = t_1$. Obtener los valores aproximados $y_i(t1)$ e $yp_i(t_1)$ para $y(t_1, x_i)$ e $y'(t_1, x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$
- Paso 5. Mientras $iter < maxiter$ y $incre > tol$, hacer los pasos 4 a 8
  - Paso 6. Elegir el nuevo t
  $$t = t_1 - \frac{(y_{N+1}(t_1) - \beta)(t_1 - t_0)}{y_{N+1}(t_1) - y_{N+1}(t_0)};$$
  - Paso 7. Tomar $t_0 = t_1$ y $t_1 = t$.
  - Paso 8. Resolver mediante un método numérico el PVI con $t = t_1$. Obtener los valores aproximados $y_i(t_1)$ e $yp_i(t_1)$ para $y(t_1, x_i)$ e $y'(t_1, x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$
  - Paso 9. Actualizar: $iter = iter + 1$; $incre = abs(y_{N+1}(t_1) - \beta)$; $y_{N+1}(t_0) = y_{N+1}(t_1)$.
- Paso 10. Analizar por qué nos hemos salido del bucle.

Al igual que en el caso lineal, el orden de convergencia de este algoritmo viene marcado por el orden de convergencia del método que se usa para resolver cada problema de valor inicial. Conviene resolver todos los PVIs que se requieran con el mismo método, lo que nos permitirá saber el orden de convergencia y el error esperado.

A continuación mostramos el archivo .m en el que se implementa el método de disparo no lineal con condiciones Dirichlet, aplicando el método de la secante.

DisparoSecante.m

```
function [nodos,solaprox,t,iter] = ...
   DisparoSecante(funcion,a,b,alfa,beta,n,tol,maxiter)
%
h=(b-a)/(n+1); x=a:h:b; x=x(:); %el vector x tiene ...
   n+2 componentes
t0=0;
[x,Y]=ode45(funcion,x,[alfa, t0]');
yb0=Y(end,1);
t1=(beta-alfa)/(b-a);
[x,Y]=ode45(funcion,x,[alfa,t1]');
yb1=Y(end,1);
iter=1;
incre=tol+1;
while incre>tol && iter<maxiter
 t=t1-(t1-t0)*(yb1-beta)/(yb1-yb0);    ...
    %t=t1-(t1-t0)*F(t1)/(F(t1)-F(t0))
 [x,Y]=ode45(funcion,x,[alfa,t]');
 incre=abs(Y(end,1)-beta);
 iter=iter+1;
 t0=t1; yb0=yb1;
 t1=t;  yb1=Y(end,1);
end
if incre<=tol
    nodos=x;
    solaprox=Y;
else
    disp('se necesitan mas iteraciones')
```

```
end
end

function dy=ej1(x,y)
dy=[y(2);(1/8)*(32+2*x.^3-y(1).*y(2))];
end
```

En este fichero, la elección que se ha hecho de t_0 y t_1 es totalmente arbitraria. Si el proceso no es convergente deberíamos cambiar estos valores. Como se puede observar, hemos definido la función que describe el sistema a continuación del método de disparo. Eso no funciona cuando resolvemos los PVIs con ODE45 o con cualquier programa interno de Matlab. En estos casos, el fichero .m que describe la función debe ser externo.

Ejemplo 7.

Consideremos el problema de frontera

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad x \in [1, 3], \quad y(1) = 17, y(3) = \frac{43}{3},$$

cuya solución exacta es $y(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$. Calculemos la solución aproximada del mismo utilizando el método de disparo con secante, el paso $h = 0.1$ y una tolerancia de $tol = 1e - 5$. Determinemos el error exacto cometido en cada nodo seleccionado.

Planteamos el siguiente problema de valor inicial, utilizando un parámetro t

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad x \in [1, 3], \quad y(1) = 17, y'(1) = t,$$

que transformamos en uno de primer orden introduciendo las variables auxiliares $y_1 = y$ e $y_2 = y'$, obteniendo

$$\left.\begin{array}{rl} y_1' = & y_2, \\ y_2' = & \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - y_1 y_2), \end{array}\right\}, \quad y_1(1) = 17,\ y_2(1) = t.$$

Construimos el fichero .m en el que definimos la función que describe el sistema

ejemplo1.m

```
function dy=ejemplo1(x,y)
%dy=[y(2);(1/8)*(32+2*x.^3-y(1).*y(2))];
dy=[y(2); -1./x*y(2)-4];
end
```

y llamando

```
>> [nodos,solaprox,t,iter] = ...
   DisparoSecante('ejemplo1',1,3,17,43/3,19,1e-5,50),
```

el ordenador nos devuelve los 21 nodos seleccionados x_i, $i = 0, 1, \ldots, 20$ y la solución aproximada del problema de frontera en dichos nodos y_i, $i = 0, 1, \ldots, 20$, tras 6 iteraciones y con el último valor del parámetro $t_6 = -13.9998$. En la siguiente tabla mostramos algunos de estos valores, junto con los valores exactos y el error exacto cometido.

Nodos x_i	S. aprox. y_i	S. exacta $y(x_i)$	Error $\lvert y_i - y(x_i)\rvert$
1.0	17.0000	17.0000	0.0000
1.2	14.7733	14.7733	2.4e-5
1.4	13.3886	13.3886	3.0e-5
1.6	12.5600	12.5600	3.5e-5
1.8	12.1289	12.1289	3.0e-5
2.0	12.0000	12.0000	2.2e-5
2.2	12.1127	12.1127	1.6e-5
2.4	12.4267	12.4267	1.0e-5
2.6	12.9139	12.9139	0.6e-5
2.8	13.5543	13.5543	0.2e-5
3.0	14.3333	14.3333	0.0000

Tabla 2: Resultados numéricos del Ejemplo 7

Ejemplo 8.

Consideremos el siguiente problema de frontera

$$\begin{aligned} &ru'' + u' = -4r, && r \in [1,3] \\ &u(1) = \ln(1/3) - 1, && u(3) - u'(3) = 0.5(\ln 3 - 7). \end{aligned}$$

Vamos a aproximar la solución del problema mediante el método de disparo con secante, tomando 10 subintervalos y una tolerancia de 10^{-7}. Teniendo en cuenta que la solución exacta es $u(r) = \ln\frac{r}{3} + \frac{1}{2}\ln r - r^2$, vamos a determinar el error cometido en cada uno de los nodos elegidos.

Aunque la ecuación diferencial es lineal, como una de las condiciones de contorno es mixta, vamos a utilizar el algorithmo de disparo con secante para encontrar la solución aproximada del problema.

Planteamos el problema de valor inicial

$$u'' = -\frac{1}{r}u' - 4, \qquad r \in [1,3],\ u(1) = \ln(1/3) - 1,\ u'(1) = t,$$

donde el parámetro t va variando hasta conseguir un valor tal que la solución del PVI, para ese valor de t, $u(r,t)$, satisfaga

$$|u(3,t) - u'(3,t) - 0.5(\ln 3 - 7)| \leq 10^{-7}.$$

Transformamos el PVI en uno de primer orden, equivalente, introduciendo las variables auxiliares $u_1 = u$, $u_2 = u'$ y obteniendo

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -\frac{1}{r}u_2 - 4 \end{aligned}\right\}, \qquad \begin{aligned} u_1(1) &= \ln(1/3) - 1 \\ u_2(1) &= t. \end{aligned}$$

Para elegir los distintos valores del parámetro t, hasta alcanzar el valor deseado, vamos a utilizar el método de la secante. En este caso, la ecuación que debe verificar el parámetro t es $u(3,t) - u'(3,t) - 0.5(\ln 3 - 7) = 0$. Por tanto, la fórmula iterativa del método de la secante será

$$t_{k+1} = t_k - \frac{(t_k - t_{k-1})(u(3,t_k) - u'(3,t_k) - 0.5(\ln 3 - 7))}{u(3,t_k) - u'(3,t_k) - u(3,t_{k-1}) + u'(3,t_{k-1})}, \quad k = 1,2,\ldots$$

a partir de dos aproximaciones iniciales t_0 y t_1. Hemos modificado algunas lineas del fichero DisparoSecante.m para adaptarlo a este problema, obteniendo

DisparoSecanteP1.m

```
function [r,U,t,iter,incr] = ...
   DisparoSecanteP1(f,a,b,alfa,beta,n,maxiter,tol)
h = (b-a)/n;
r=a:h:b; r=r(:);
t0 = 1;
[r,U] = ode45(f,r,[alfa,t0]');
ub0 = U(n+1,1);
upb0 = U(n+1,2);
t1 = 2;
[r,U] = ode45(f,r,[alfa,t1]');
ub1 = U(n+1,1);
upb1 = U(n+1,2);
incr = abs(ub1-upb1-beta);
iter = 0;

while  incr > tol && iter < maxiter
   t=t1-((t1-t0)*(ub1-upb1-beta))./(ub1-upb1-ub0+upb0);
   [r,U] = ode45(f,r,[alfa,t]');
   t0 = t1; t1 = t;
   ub0 = ub1; upb0 = upb1;
   ub1 = U(n+1,1); upb1 = U(n+1,2);
   incr = abs(ub1-upb1-beta);
   iter = iter+1;
end
if   incr > tol
disp('Se necesitan mas iteraciones');
end
```

fichero al que llamamos para obtener la solución aproximada

```
>> [r,U,t,iter,incr]=DisparoSecanteP1('F1',1,3, ...
   log(1/3)-1,0.5*(log(3)-7),20,100,1e-7),
```

donde F1 es el nombre del archivo .m donde se define la función que describe el sistema y n es 20 ya que nos piden 10 subintervalos. Observad que en el programa hemos escrito $t0 = 1$ y $t1 = 2$ en lugar de los valores que habíamos puesto en el otro fichero de DisparoSecante. Después de 2 iteraciones, con el último valor de t, $t = -0.5$, y un valor para ese t de $|u(3,t) - u'(3,t) - 0.5(\ln 3 - 7)| = 6.17e-15$, obtenemos los valores que aparecen en la tabla:

Nodos r_i	S. aprox. u_i	S. exacta $u(r_i)$	Error $\|u_i - u(r_i)\|$
1.0	-2.098612	-2.098612	0.0000
1.2	-2.265130	-2.265130	0.46e-7
1.4	-2.553904	-2.553904	0.66e-7
1.6	-2.953607	-2.953607	1.55e-7
1.8	-3.456932	-3.456932	2.91e-7
2.0	-4.058892	-4.058891	4.82e-7
2.2	-4.755926	-4.755926	2.48e-7
2.4	-5.545409	-5.545409	1.83e-7
2.6	-6.425345	-6.425345	1.21e-7
2.8	-7.394183	-7.394183	1.63e-7
3.0	-8.450694	-8.450694	1.44e-7

Tabla 3: Resultados numéricos del Ejemplo 8

Accede al vídeo: Disparo con secante para una ecuación diferencial de tercer orden

Disparo no lineal aplicando el método de Newton

Recordemos que el método de Newton permite, a partir de una aproximación inicial t_0, aproximarnos a la solución de la ecuación $F(t) = 0$ mediante la expresión iterativa

$$t_{k+1} = t_k - \frac{F(t_k)}{F'(t_k)} = t_k - \frac{y(t_k, b) - \beta}{\dfrac{d}{dt} y(t_k, b)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

No tenemos una expresión explícita de la función $y(t, b)$, con lo que no será sencillo calcular el denominador anterior. Escribimos el problema de valor inicial que queremos resolver, constatando que la solución depende de t y de x,

$$y''(t, x) = f(x, y(t, x), y'(t, x)), \quad x \in [a, b], \quad y(t, a) = \alpha, y'(t, a) = t. \tag{3}$$

Si derivamos el problema respecto de t y llamamos $z(t, x) = \frac{\partial y}{\partial t}(t, x)$, resulta que para encontrar z debemos resolver otro problema de valor inicial

$$z'' = f_y(x, y, y')z + f_{y'}(x, y, y')z', \quad x \in [a, b], \quad z(a) = 0, z'(a) = 1. \tag{4}$$

Con la solución del problema (3) obtenemos el numerador de la expresión de Newton y con la solución del problema (4) el denominador. Podemos agrupar los dos problemas y obtener un único PVI de primer orden. Con las variables auxiliares

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = z, \quad y_4 = z',$$

transformamos los dos PVIs en el sistema de primer orden

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & f(x, y_1, y_2) \\ y_3' & = & y_4 \\ y_4' & = & f_{y_1} y_3 + f_{y_2} y_4 \end{array}\right\}, \qquad \begin{array}{c} y_1(a) = \alpha \\ y_2(a) = t \\ y_3(a) = 0 \\ y_4(a) = 1. \end{array}$$

Al resolver este problema, el ordenador nos proporciona 4 columnas, una para cada función incógnita y_1, y_2, y_3 e y_4. La información que necesitamos para el numerador del método de Newton está en la última posición de la primera columna y para el denominador en la última posición de la tercera columna. La función que describe este sistema y que tendremos que definir en un archivo.m, tiene la forma

```
function F=funcion(x,y)
F=zeros(4,1);
F(1)=y(2);
F(2)=f(x,y(1),y(2));
F(3)=y(4);
F(4)=fy1*y(3)+fy2*y(4);
end
```

El algoritmo de este método lo podremos expresar en los siguientes términos:

ALGORITMO

- ENTRADA función F; extremos a, b; condiciones contorno α, β; número de incógnitas N; tolerancia tol; número máximo de iteraciones $maxiter$.
- SALIDA aproximaciones y_i de $y(x_i)$ e yp_i de $y'(x_i)$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$; o mensaje de fracaso.
- Paso 1 Elegir los nodos x_i, $h = \dfrac{b-a}{N+1}$; tomar $x = a : h : b$;
- Paso 2 Inicializar contador e incremento, $iter = 1$, $incre = tol + 1$;
  Primer valor del parámetro t, $t_0 = (\beta - \alpha)/(b - a)$;
- Paso 3 Mientras $iter < maxiter$ y $incre > tol$, hacer los pasos siguientes:
  - Paso 4 Resolver mediante un método numérico el PVI con $t = t_0$. Obtener los valores aproximados $y_i(t_0)$, para $y(t_0, x_i)$, y $z_i(t_0)$, para $z(t_0, x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.
  - Paso 5 $yb = y_{N+1}(t_0)$, $zb = z_{N+1}(t_0)$.
  - Paso 6 Actualizar $iter$ e $incre$: $iter = iter + 1$; $incre = abs(yb - \beta)$;

- Paso 7 Elegir el nuevo t

$$t = t_0 - \frac{yb - \beta}{zb};$$

- Paso 8 Tomar $t_0 = t$.

▶ Paso 9 Analizar por qué el programa se ha salido del bucle.

A continuación mostramos el archivo .m en el que se implementa el método de disparo no lineal con condiciones Dirichlet, aplicando el método de Newton.

DisparoNewton.m

```
function [nodos,solaprox,t,iter] = ...
   DisparoNewton(funcion,a,b,alfa,beta,n,tol,maxiter)
%
h=(b-a)/(n+1); x=a:h:b; % x tiene n+2 componentes
t0=0;
[x,Y]=ode45(funcion,x,[alfa,t0,0,1]');
yb1=Y(end,1); zb1=Y(end,3);
iter=1; incre=tol+1;
while incre>tol && iter<maxiter
 t=t0-(yb1-beta)/(zb1);     %Metodo de Newton
 [x,Y]=ode45(funcion,x,[alfa,t,0,1]');
 incre=abs(Y(end,1)-beta);
 iter=iter+1;
 t0=t;  yb1=Y(end,1);     zb1=Y(end,3);
end
if incre<=tol
    nodos=x;      solaprox=Y;
else
    disp('se necesitan mas iteraciones')
```

```
end
end
```

La elección de t_0 vuelve a ser arbitraria. Hemos utilizado ODE45 para resolver cada uno de los problemas de valor inicial.

Ejemplo 9.

Consideremos el problema de frontera

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad x \in [1, 3], \quad y(1) = 17, y(3) = \frac{43}{3},$$

cuya solución exacta es $y(x) = x^2 + \frac{16}{x}$. Calculemos la solución aproximada del mismo utilizando el método de disparo con Newton, el paso $h = 0.1$ y una tolerancia de $tol = 1e - 5$. Determinemos el error exacto cometido en cada nodo seleccionado. Como ya hicimos para el caso de la secante, planteamos el siguiente problema de valor inicial, utilizando un parámetro t

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \quad x \in [1, 3], \quad y(1) = 17, y'(1) = t.$$

Construimos el PVI con la variable z

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y} z + \frac{\partial f}{\partial y'} z' = -\frac{1}{8}(yz' + y'z), \quad x \in [1, 3], \quad z(1) = 0, z'(1) = 1.$$

Introduciendo las variables auxiliares $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = z$ e $y_4 = z'$, obtenemos

$$\left.\begin{array}{rl} y_1' = & y_2, \\ y_2' = & \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - y_1 y_2), \\ y_3' = & y_4, \\ y_4' = & -\frac{1}{8}(y_1 y_4 + y_2 y_3) \end{array}\right\}, \quad y_1(1) = 17,\ y_2(1) = t,\ y_3(1) = 0,\ y_4(1) = 1.$$

Construimos el fichero .m en el que definimos la función que describe el sistema

ejemplo2.m

```
function dy=ejemplo2(x,y)
dy(1)=y(2);
dy(2)=(1/8)*(32+2*x.^3-y(1).*y(2));
dy(3)=y(4);
dy(4)=(-1/8)*y(2)*y(3)-(1/8)*y(1)*y(4);
dy=dy(:);
end
```

y llamando

```
>> [nodos,solaprox,t,iter] = ...
   DisparoNewton('ejemplo2',1,3,17,43/3,19,1e-5,50),
```

el ordenador nos devuelve los 21 nodos seleccionados x_i, $i = 0, 1, \ldots, 20$ y la solución aproximada del problema de frontera en dichos nodos y_i, $i = 0, 1, \ldots, 20$, tras 4 iteraciones y con el último valor del parámetro $t_4 = -14.000203$. En la siguiente tabla mostramos algunos de estos valores, junto con los valores exactos y el error exacto cometido.

Nodos x_i	S. aprox. y_i	S. exacta $y(x_i)$	Error $\lvert y_i - y(x_i)\rvert$
1.0	17.000000	17.000000	0.0000
1.2	14.773389	14.773333	1.44e-5
1.4	13.388629	13.388671	2.50e-5
1.6	12.560028	12.560000	2.83e-5
1.8	12.128913	12.128988	2.37e-5
2.0	12.000018	12.000000	1.78e-5
2.2	12.112739	12.112727	1.25e-5
2.4	12.426675	12.426766	0.81e-5
2.6	12.913847	12.913946	0.46e-5
2.8	13.554282	13.554386	0.19e-5
3.0	14.333333	14.333333	2.40e-10

Tabla 4: Resultados numéricos del Ejemplo 9

Ejemplo 10.

La temperatura $u(r)$ en un anillo circular de radio interior 1 y radio exterior 3 viene descrita por el problema de frontera

$$\begin{aligned} &ru'' + u' = 0, && r \in [1,3], \\ &u(1) + u'(1) = 1 - \frac{1}{2\ln 3}, && u(3) + u'(3) = 0.5 - \frac{1}{6\ln 3}. \end{aligned} \tag{5}$$

Por comodidad, llamamos $\alpha = 1 - \frac{1}{2\ln 3}$ y $\beta = 0.5 - \frac{1}{6\ln 3}$.

Vamos a aproxima la solución del problema utilizando el método de disparo con Newton, tomando 10 subintervalos y una tolerancia de 10^{-7}. Los diferentes problemas de valor inicial que debemos resolver para ir acercándonos a la solución del problema de frontera son

$$u'' = -\frac{1}{r}u', \qquad r \in [1,3],\ u(1) = t,\ u'(1) = \alpha - t, \tag{6}$$

donde el parámetro t va variando hasta conseguir un valor tal que la solución del problema (6), para ese valor de t, $u(r,t)$, satisfaga

$$|u(3,t)+u'(3,t)-\beta| \leq 10^{-7}.$$

Transformamos el problema (6) en un problema de valor inicial de primer orden, equivalente, mediante el cambio de variable $u_1 = u$, $u_2 = u'$.

$$\left.\begin{array}{l} u_1' = u_2 \\ u_2' = -\frac{1}{r}u_2 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} u_1(1) = t, \\ u_2(1) = \alpha - t. \end{array} \tag{7}$$

Para elegir los distintos valores del parámetro t, hasta alcanzar el valor deseado, vamos a utilizar el método de Newton. En este caso, la ecuación que debe verificar el parámetro t es $F(t) = u(3,t) + u'(3,t) - \beta = 0$. Por tanto, la fórmula iterativa del método de Newton será

$$t_{k+1} = t_k - \frac{u(3,t_k) + u'(3,t_k) - \beta}{z(3,t_k) + z'(3,t_k)},$$

donde $z(r,t)$ es la solución del problema de valor inicial

$$z''(r,t) = -\frac{1}{r}z', \quad r \in [1,3],\ z(1,t) = 1,\ z'(1,t) = -1, \tag{8}$$

que transformamos en uno de primer orden mediante las variables auxiliares $u_3 = z$, $u_4 = z'$

$$\left.\begin{array}{l} u_3' = u_4 \\ u_4' = -\frac{1}{r}u_4 \end{array}\right\}, \qquad \begin{array}{l} u_3(1) = 1 \\ u_4(1) = -1. \end{array} \tag{9}$$

Como en cada iteración del método de disparo necesitamos resolver los problemas (7) y (9), vamos a unirlos en un único problema de valor inicial y definimos la función que describe este problema en un archivo .m

ejemplo3.m

```
function du=ejemplo3(r,u)
du = [ u(2); -1./r*u(2); u(4); -1./r*u(4)];
end
```

Vamos a modificar el archivo .m con el método de disparo con Newton, para adaptarlo al problema que nos ocupa.

DisparoNewton2.m

```
function [nodos,solaprox,t,iter] = ...
   DisparoNewton2(fun,a,b,alfa,beta,n,tol,maxiter)
%
h=(b-a)/(n+1); x=a:h:b; %el vector x tiene n+2 ...
   componentes
t0=(beta-alfa)/(b-a);
[x,Y]=ode45(fun,x,[t0,alfa-t0,1,-1]');
yb1=Y(end,1); yb2=Y(end,2); zb1=Y(end,3); ...
   zb2=Y(end,4);
iter=1;
incre=tol+1;
while incre>tol && iter<maxiter
 t=t0-(yb1+yb2-beta)/(zb1+zb2);    %Metodo de ...
    Newton
 [x,Y]=ode45(fun,x,[alfa,t,0,1]');
 incre=abs(Y(end,1)*Y(end,2)-beta);
 iter=iter+1;
 t0=t;  yb1=Y(end,1);yb2=Y(end,2); ...
    zb1=Y(end,3); zb2=Y(end,4);
end
if incre<=tol
    nodos=x;
    solaprox=Y;
else
    disp('se necesitan mas iteraciones')
end
end
```

Llamamos a la función DisparoNewton2 con los parámetros de entrada que proporciona el problema y obtenemos los valores que aparecen en la Tabla. Estos valores se han conseguido después de 2 iteraciones, para un valor final del parámetro $t = 1.0000001049206$ y un valor de la cota de error $incre = 2.141352 \times 10^{-8}$. El error exacto lo hemos obtenido al disponer de la solución exacta $u(r) = \dfrac{1}{\ln(1/3)}(\ln(r/3) - 0.5\ln r)$.

Nodos r_i	S. aprox. u_i	S. exacta $u(r_i)$	Error $\vert u_i - u(r_i)\vert$
1.0	1.000000	1.000000	0.55e-7
1.2	0.917022	0.917022	0,73e-7
1.4	0.846865	0.846865	0.42e-7
1.6	0.786092	0.786092	0.71e-7
1.8	0.732487	0.732487	0.66e-7
2.0	0.684535	0.684535	0.61e-7
2.2	0.641158	0.641158	0.56e-7
2.4	0.601557	0.601557	0.52e-7
2.6	0.565128	0.565128	0.48e-7
2.8	0.531400	0.531400	0.44e-7
3.0	0.500000	0.500000	0.40e-7

Tabla 5: Resultados numéricos del Ejemplo 9

Accede al vídeo: Método de disparo con Newton para condiciones no Dirichlet

2.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1. Aproxima por el método de disparo los siguientes problemas de frontera, utilizando en cada caso 20 subintervalos. Compara los resultados obtenidos con la solución exacta.

(a) $y'' = -y'^2 - y + \ln x$, $1 \leq x \leq 2$

$y(1) = 0$, $y(2) = \ln 2$

Solución exacta: $y(x) = \ln x$

(b) $y'' = y^3 - yy'$, $1 \leq x \leq 2$

$y(1) = 1/2$, $y(2) = 1/3$

Solución exacta: $y(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(c) $y'' = 2y^3 - 6y - 2x^3$, $1 \leq x \leq 2$

$y(1) = 2$, $y(2) = 5/2$

Solución exacta: $y(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Ejercicio 2. Consideremos el siguiente problema de frontera

$$\begin{aligned}
&y'' - xyy' + x\cos(x)y + \sin x = 0, \qquad x \in [0, \pi],\\
&y(0) + y'(0) = 1,\\
&y(\pi) - 2y'(\pi) = 2.
\end{aligned}$$

(a) Describe el método de disparo para este problema, utilizando el esquema de Newton para determinar los valores del parámetro t.

(b) Aproxima la solución del problema mediante el método anterior, tomando 10 subintervalos, una tolerancia de 10^{-8} y un valor inicial del parámetro $t = 0$. Indica el número de iteraciones y el último valor de t.

(c) Comprueba que la solución exacta del problema es $y(x) = \sin x$. Determina el error cometido en cada uno de los puntos del apartado anterior. Representa la solución exacta y la aproximada

Ejercicio 3. Consideremos el siguiente problema de frontera

$$\begin{aligned}
&y''' = f(x, y, y', y''), \qquad x \in [a, b],\\
&y(a) = \alpha,\ y'(a) - 2y''(a) = \beta,\\
&y'(b) - y''(b) = \gamma.
\end{aligned}$$

Describe, con todo detalle, el método de disparo para este problema, utilizando el método de la secante y el de Newton para determinar los diferentes valores del parámetro.

Ejercicio 4. Consideremos el siguiente problema de frontera

$$
\begin{aligned}
&y'' = -(x+1)y' + 2y + (1-x^2)e^{-x}, \qquad x \in [0,1],\\
&2y(0) + y'(0) + y(1) + y'(1) = 1/e,\\
&y(0) + y'(0) - y(1) = 1.
\end{aligned}
$$

Determina la solución aproximada del problema de frontera mediante el método de disparo. Utiliza 10 subintervalos, una tolerancia de 10^{-8} y el método de la secante para la obtención de los distintos valores del parámetro t.

Ejercicio 5. Consideremos el siguiente problema de frontera:

$$
\begin{aligned}
&y''' = -6y'^2 - y'' + 2y^3, \qquad\qquad x \in [-1,0],\\
&y(-1) = 1/2,\ y(0) = 1/3,\ y'(0) = -1/9.
\end{aligned}
$$

(a) Determina la solución aproximada del problema de frontera mediante el método de disparo. Utiliza 10 subintervalos, una tolerancia de 10^{-8} y el método de Newton para la obtención de los distintos valores del parámetro t.

(b) Mejora los resultados obtenidos en el apartado anterior empleando la técnica de extrapolación de Richardson, para $h = 0.1$, $h = 0.05$ y $h = 0.025$.

(c) Comprueba que $y(x) = \dfrac{1}{x+3}$ es la solución exacta del problema. Calcula el error cometido con las aproximaciones obtenidas en a) y b).

Ejercicio 6. La deformación de una viga, $w(x)$, de longitud L, que soporta una carga $p(x)$ y que está apoyada en los extremos, viene descrita por la ecuación

$$EI\frac{d^4w}{dx^4} = p(x) - kw,$$

con las condiciones

$$w(0) = 0, \quad w''(0) = 0,$$
$$w(L) = 0, \quad w''(L) = 0,$$

donde E es el módulo de Young, I es el momento de inercia de la sección transversal y k es la rigidez por unidad de longitud. Utilizando los siguientes datos: $L = 10m$, $E = 30 \times 10^6$, $k = 1000kg/m^2$, $I = 2$ y $p(x) = 100\left(1 - \frac{x}{36}\right) kg/m^2$, se pide:

Determina $w(x)$ en el centro de la viga, mediante el método de disparo con 40 subintervalos y una tolerancia de 10^{-8}.

Ejercicio 7. Consideremos el problema de contorno modelizado por la ecuación diferencial no lineal de tercer orden

$$\frac{1}{3+x}y''' + y'y + e^{-x}y'' = e^x + x + e^{2x}(x + x^2) + 2, \;\; x \in [0, 1],$$

con las condiciones de contorno

$$y(0) = 0, \;\; y'(0) + y''(0) = 3, \;\; y''(1) = 3e.$$

(a) Determina la solución aproximada del problema, mediante el método de disparo con Newton, en los puntos $x = 0.1, 0.2, \ldots, 1$ tomando 20 subintervalos.

(b) Teniendo en cuenta que la solución del problema es $y(x) = xe^x$, calcula el error máximo cometido en los puntos $x = 0.1, 0.2, \ldots, 1$, y representa la solución exacta junto con la aproximada.

Ejercicio 8. Consideremos el problema de contorno modelizado por la ecuación diferencial no lineal de tercer orden

$$y''' + \frac{1}{8}y'y + y'' = \frac{x^3}{4} + \frac{32}{x^3} + 6, \;\; x \in [1, 4],$$

con las condiciones de contorno

$$y(1) = 17, \;\; y'(1) + y'(4) = -6, \;\; y''(1) = 34.$$

(a) Determina la solución aproximada del problema, mediante el método de disparo con Newton, en los puntos $x = 0.5, 1, 1, 5, \ldots, 4$ tomando 60 subintervalos.

(b) Teniendo en cuenta que la solución del problema es $y(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$, calcula el error máximo cometido en los puntos $x = 0.5, 1, 1, 5, \ldots, 4$, y representa la solución exacta junto con la aproximada.