

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Ecuaciones diferenciales estocásticas	Apellidos: Avilés Cahill	27/02/2024
	Nombre: Adán	

Laboratorio: Resolución de una ecuación diferencial aleatoria utilizando el método de Montecarlo.

1. Introducción

El objetivo de esta actividad es resolver un problema de valores iniciales en *Mathematica* utilizando el método de Montecarlo.

1.1. Descripción:

Consideramos el siguiente PVIA logístico:

$$\begin{aligned} X'(t) &= X(t)(a - bX(t)), \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $X_0 \sim U([0, 1])$.

2. Actividades

En el ejercicio, hemos de aproximar la solución por un lado, y calcular la media y varianza por otro. Como a, b son valores totalmente aleatorios, se ha dividido el ejercicio en varios casos, y se resolverá para todos ellos. En primer lugar se mostrará el código genérico para la solución (falta el estilo del código pues \LaTeX no aparenta soportar código de *Mathematica*:

```
eqns = {x'[t] == x[t]*(a - b*x[t]), x[0] == x0};
vars = {x0};
dvars = {UniformDistribution[{0, 1}]};
pc = {a -> 10, b -> 20}
nIteraciones = 100;
```

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Ecuaciones diferenciales estocásticas	Apellidos: Avilés Cahill	27/02/2024
	Nombre: Adán	

```

muestras = Map[RandomVariate[ #, nIteraciones ] &, dvars] // Transpose
eq = eqns /. pc
sol = ParallelMap[DSolve[eq /. Thread[vars -> #], x[t], t] &,
muestras];
sol = Map[x[t] /. # &, sol // Flatten];

```

Como consideraciones decir:

- ▶ Se ha tomado 100 iteraciones porque con 1000 o más, dejaba de funcionar. Aparenta ser un problema de Citrix, no de Mathematica.
- ▶ Aunque tomemos $a = 10$, $b = 20$, irá variando en las secciones.
- ▶ Se ha obviado el código de generación de Media, Varianza y Plots pues es básicamente el que hemos dado en clase.
- ▶ Las muestras se han ejecutado una sola vez, para que lo único que varien sean los parámetros a y b .

2.1. Resolución para a y b no nulos.

2.1.1. Caso 1: $a > b > 0$

En primer lugar, estudiaremos el caso de que ambas sean positivas, y $a = 20 > b = 10$.

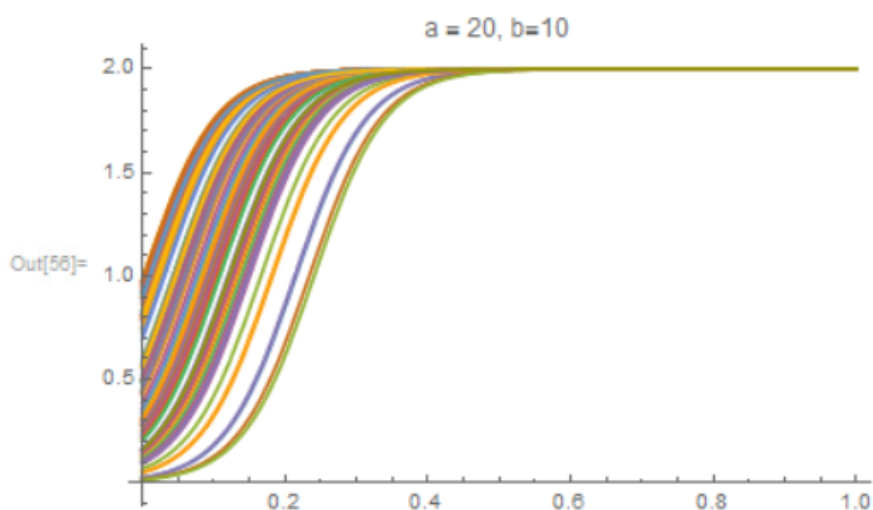


Figura 1: Solución para $a = 20$, $b = 10$

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Ecuaciones diferenciales estocásticas	Apellidos: Avilés Cahill	27/02/2024
	Nombre: Adán	

Podemos ver que la solución parece tender a 2. Veamos cómo se comportan la media y varianza.

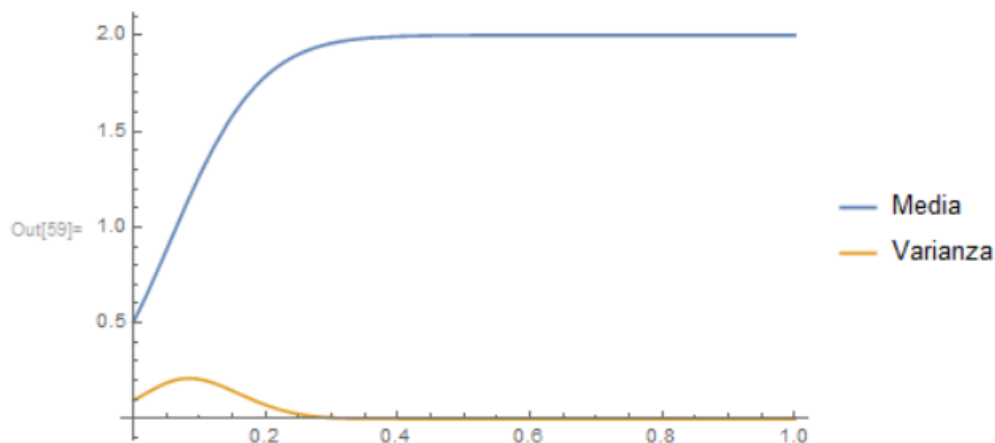


Figura 2: Media y varianza para $a = 20$, $b = 10$

Donde la varianza es prácticamente 0 y la media también tiende a 2.

2.1.2. Caso 2: $b > a > 0$

Seguidamente, estudiaremos el caso de que ambas sean positivas, y $b = 20 > a = 10$.

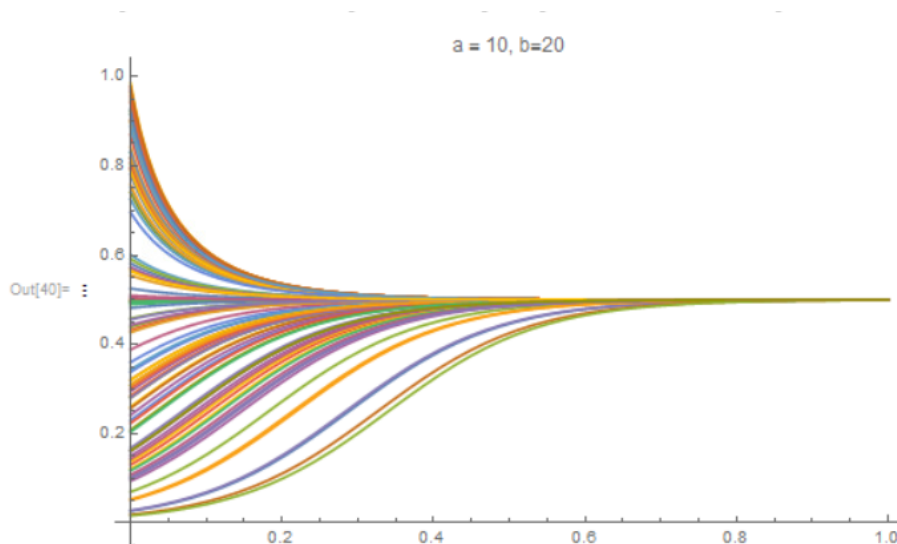


Figura 3: Solución para $b = 20$, $a = 10$

Aquí la solución parece tender a 0.

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Ecuaciones diferenciales estocásticas	Apellidos: Avilés Cahill	27/02/2024
	Nombre: Adán	

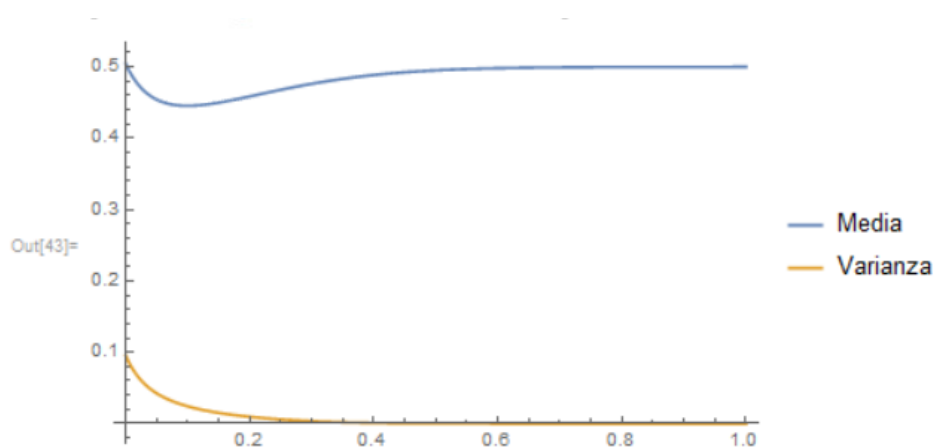


Figura 4: Media y varianza para $b = 20$, $a = 10$

Sin embargo, la media es muy cercana a 0,5 y la varianza también tiende a 0, como en el caso anterior.

A partir de ahora, pondremos en un solo plot las soluciones, la media y varianza, para luego hacer los comentarios pertinentes.

2.1.3. Caso 3: $b < a < 0$

Representamos la solución aproximada junto a la media y varianza:

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Ecuaciones diferenciales estocásticas	Apellidos: Avilés Cahill	27/02/2024
	Nombre: Adán	

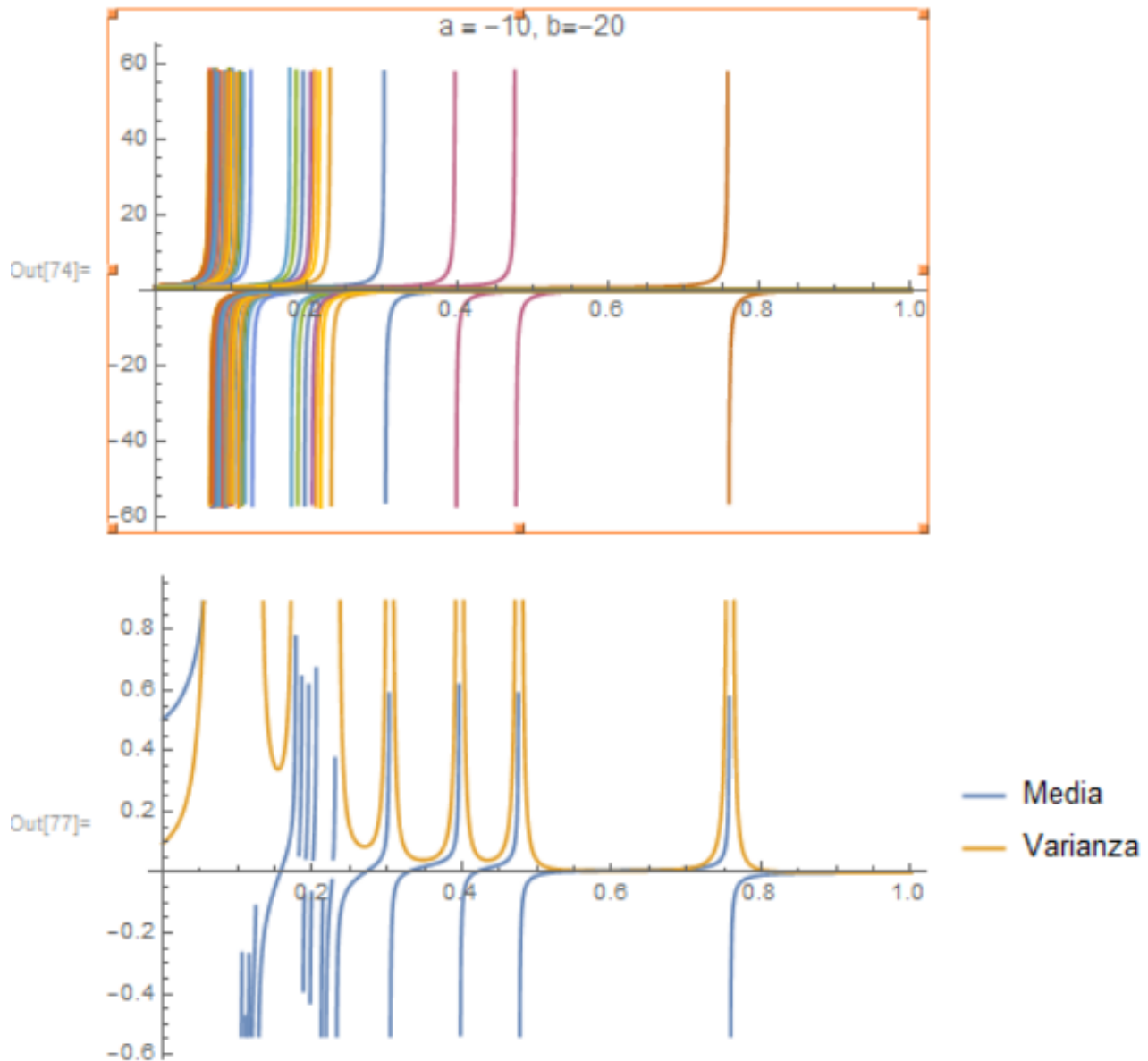


Figura 5: Solución, media y varianza para $a = -10$, $b = -20$

Podemos observar que en este caso, tanto las soluciones como la media y la varianza divergen.

2.1.4. Caso 4: $a < b < 0$

Representamos la solución aproximada junto a la media y varianza:

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Ecuaciones diferenciales estocásticas	Apellidos: Avilés Cahill	27/02/2024
	Nombre: Adán	

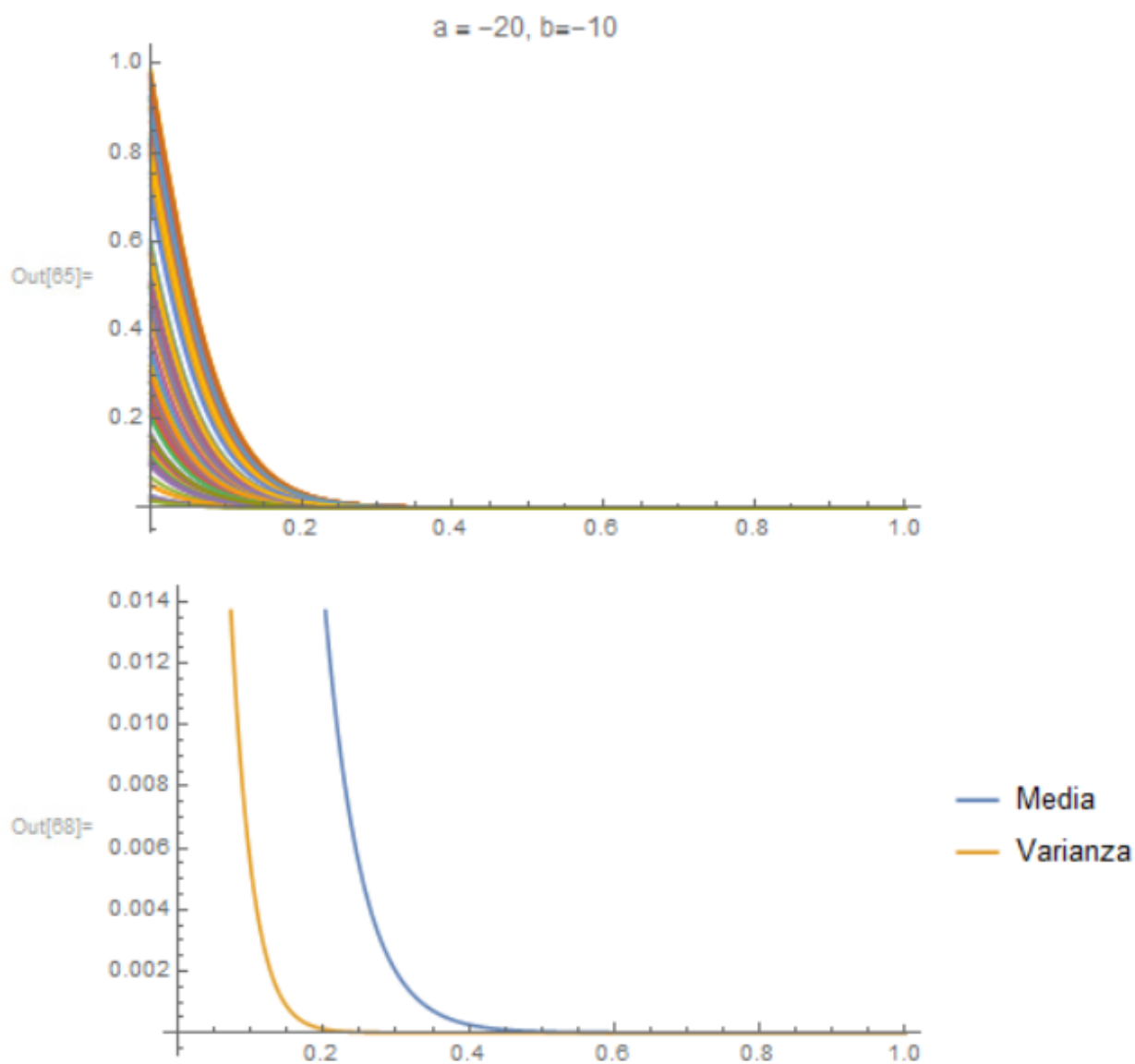


Figura 6: Solución, media y varianza para $a = -20$, $b = -10$

En este caso, todo aparenta tender a 0.

2.1.5. Caso 5: $a = b > 0$

Representamos la solución aproximada junto a la media y varianza:

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Ecuaciones diferenciales estocásticas	Apellidos: Avilés Cahill	27/02/2024
	Nombre: Adán	

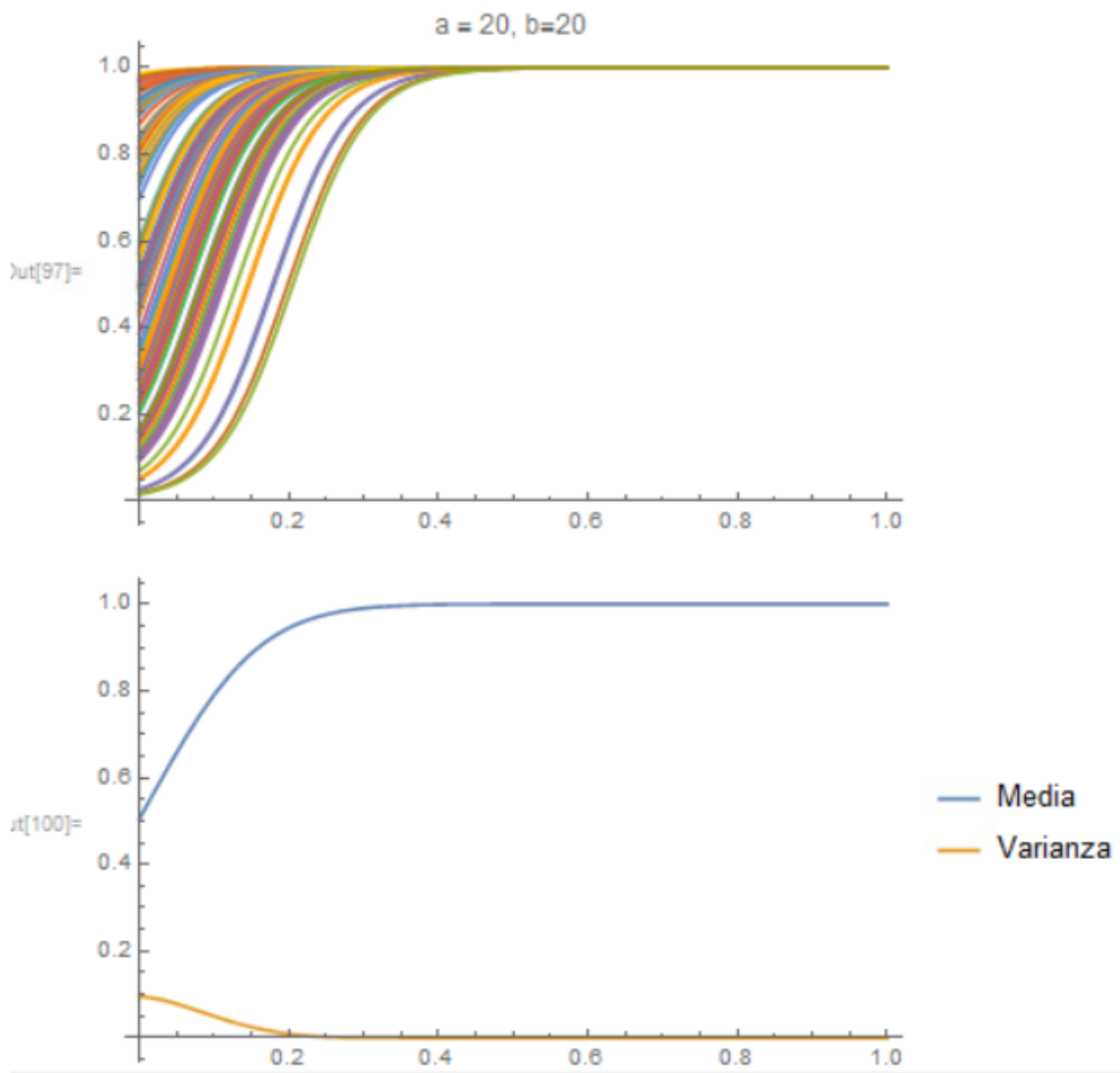


Figura 7: Solución, media y varianza para $a = 20$, $b = 20$

Tenemos algo muy parecido al caso de que $a > b > 0$. La solución y las medias convergen a 1, mientras que la varianza converge a 0.

2.1.6. Caso 6: $a = b < 0$

Representamos la solución aproximada junto a la media y varianza:

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Ecuaciones diferenciales estocásticas	Apellidos: Avilés Cahill	27/02/2024
	Nombre: Adán	

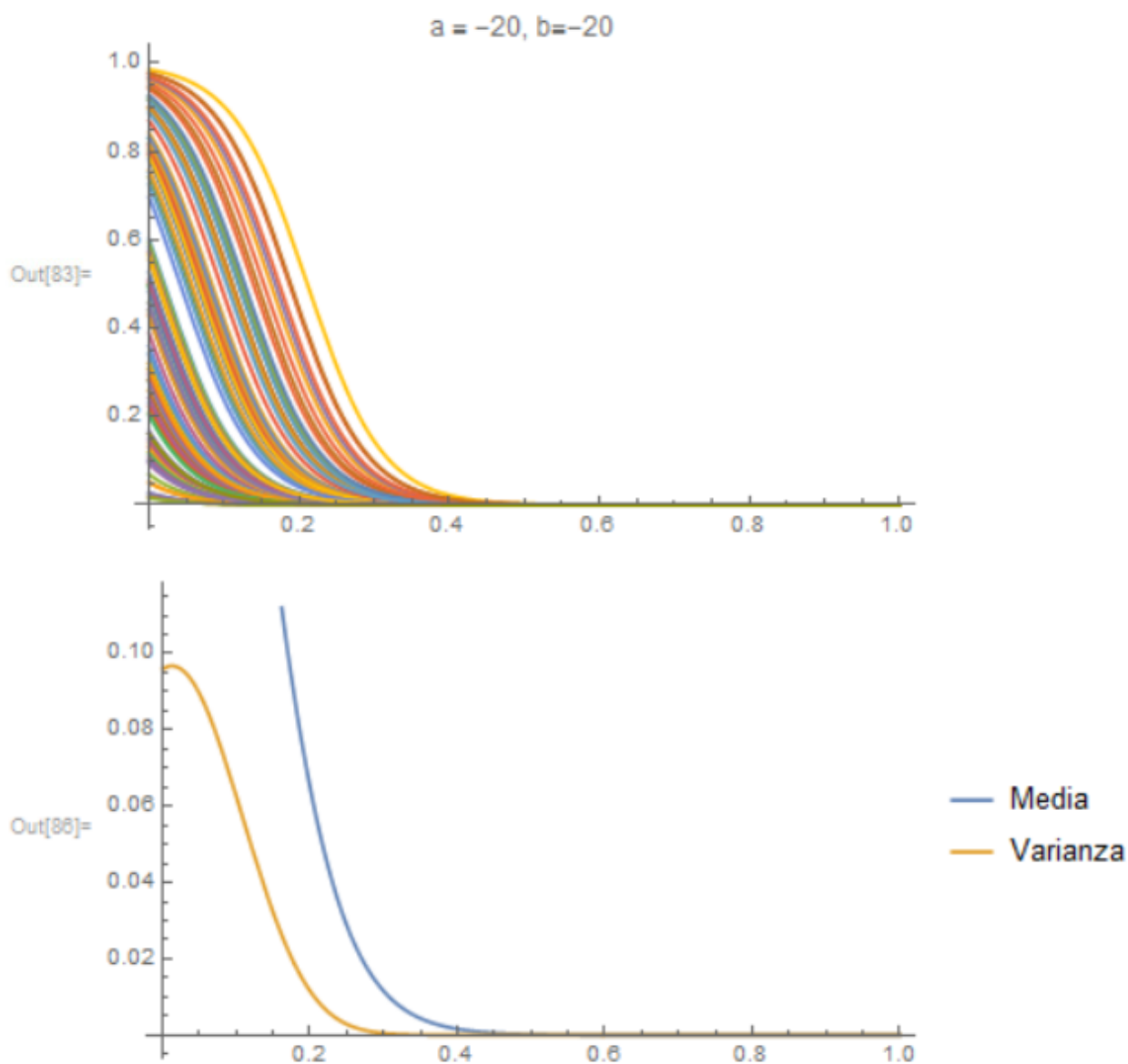


Figura 8: Solución, media y varianza para $a = -20$, $b = -20$

Como en $a < b < 0$ todo aparenta tender a 0.

2.2. Resolución para a o b nulos.

Estudiaremos ahora unos casos más simplificados, cuando una de las dos variables es 0.

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Ecuaciones diferenciales estocásticas	Apellidos: Avilés Cahill	27/02/2024
	Nombre: Adán	

2.2.1. Caso 7: $a = 0, b < 0$

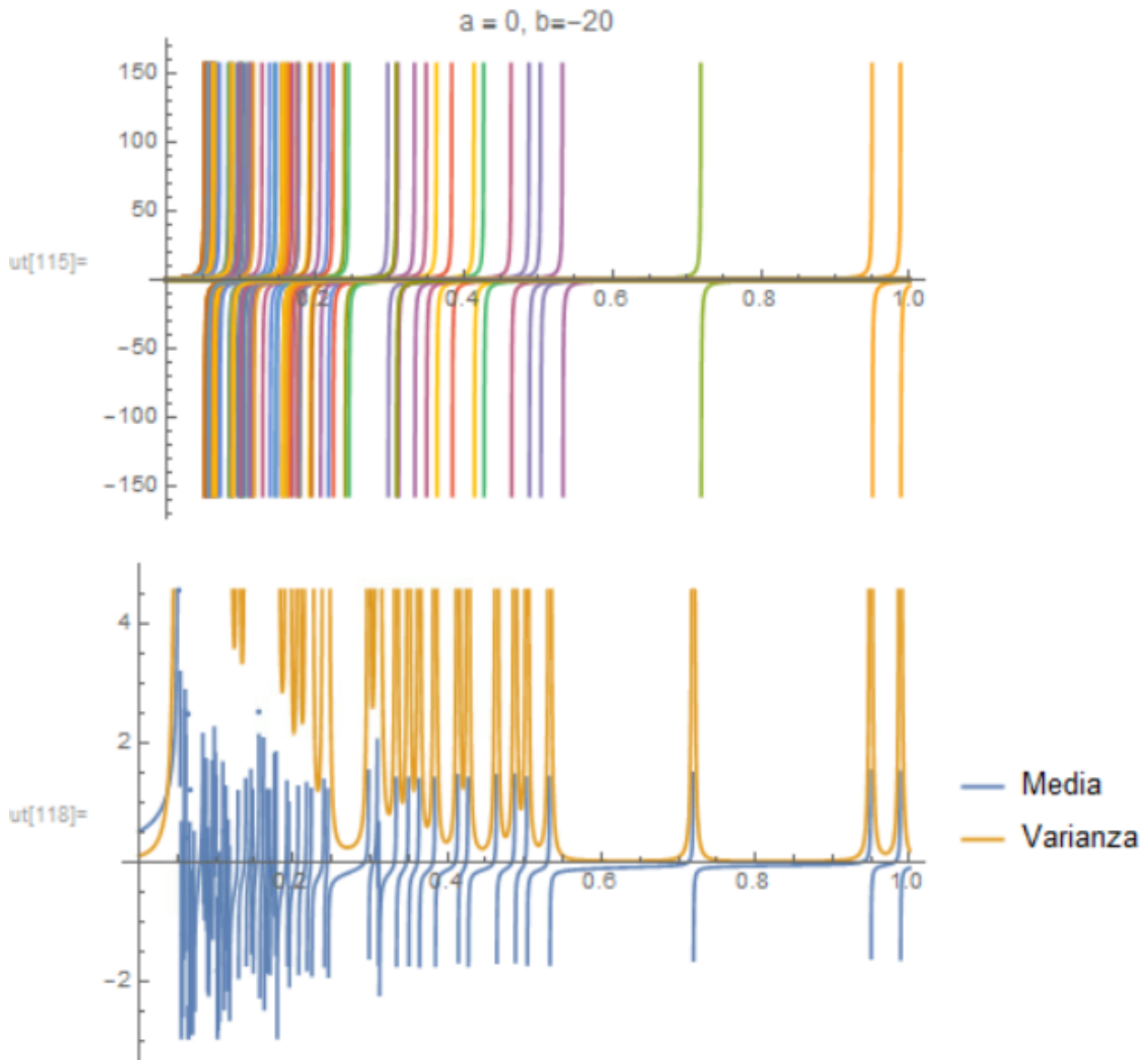


Figura 9: Solución, media y varianza para $a = 0, b = -20$

Podemos ver que los valores divergen formando asíntotas.

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Ecuaciones diferenciales estocásticas	Apellidos: Avilés Cahill	27/02/2024
	Nombre: Adán	

2.2.2. Caso 8: $a = 0, b > 0$

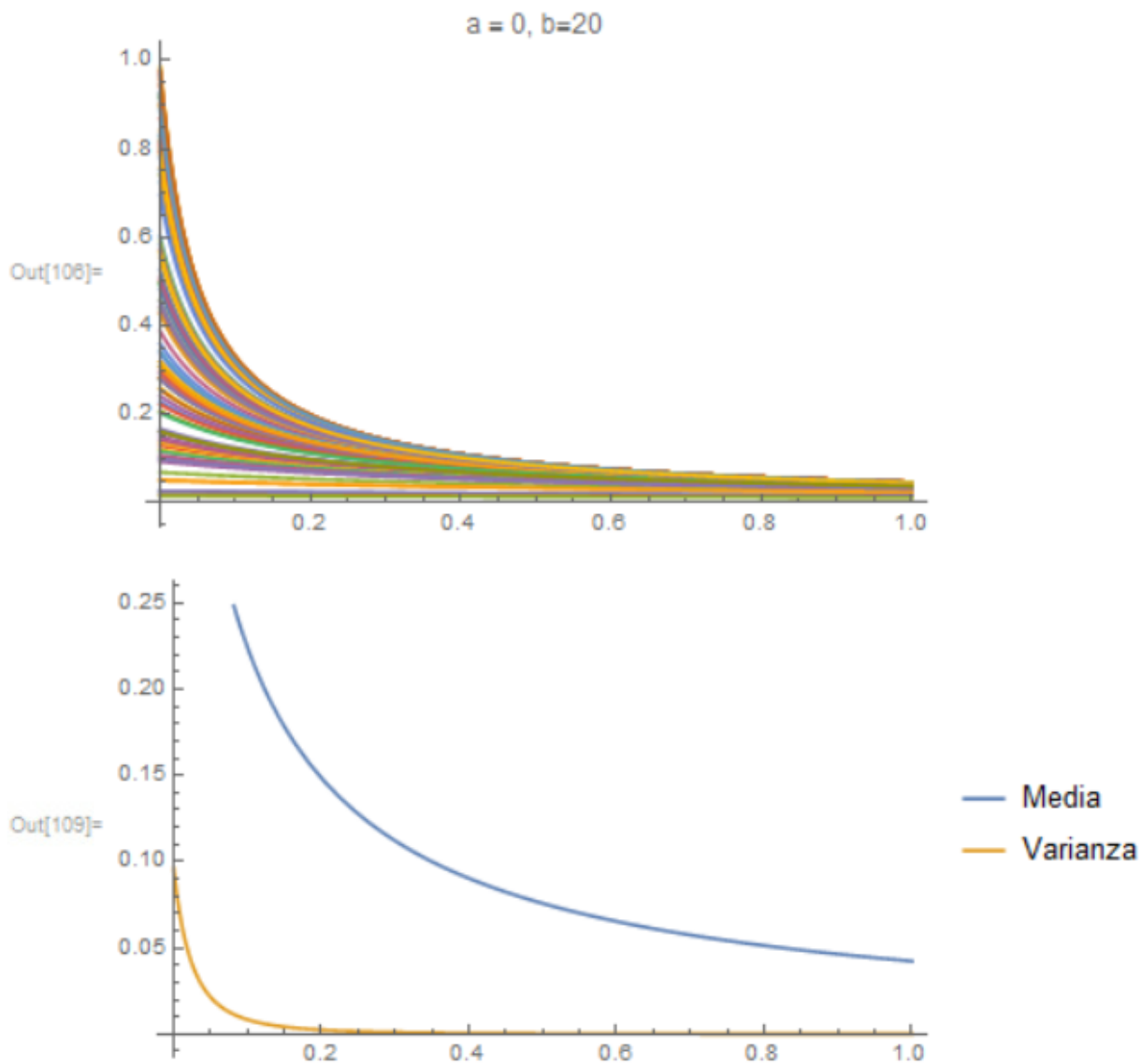


Figura 10: Solución, media y varianza para $a = 0, b = 20$

Al contrario que en el caso anterior, los valores convergen a cero.

2.2.3. Caso 9: $b = 0, a < 0$

En este caso, estamos estudiando $y' = ay$, que tiene una solución mucho más simple.

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Ecuaciones diferenciales estocásticas	Apellidos: Avilés Cahill	27/02/2024
	Nombre: Adán	

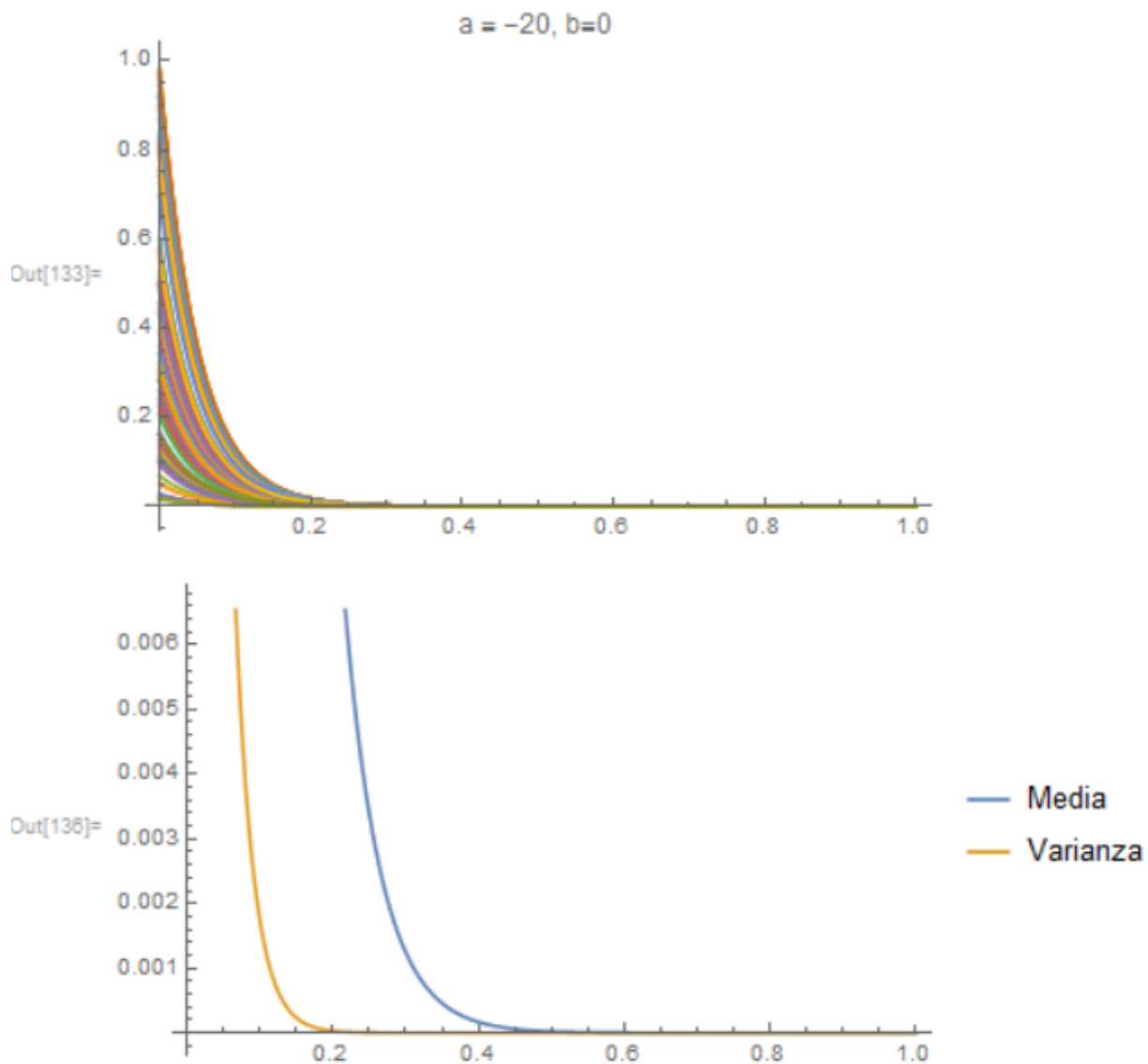


Figura 11: Solución, media y varianza para $b = 0$, $a = -20$

y con unos valores que convergen a 0

2.2.4. Caso 10: $b = 0$, $a > 0$

Para este último caso, tenemos que las soluciones divergen a infinito junto a la media, pero que la varianza es 0.

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Ecuaciones diferenciales estocásticas	Apellidos: Avilés Cahill	27/02/2024
	Nombre: Adán	

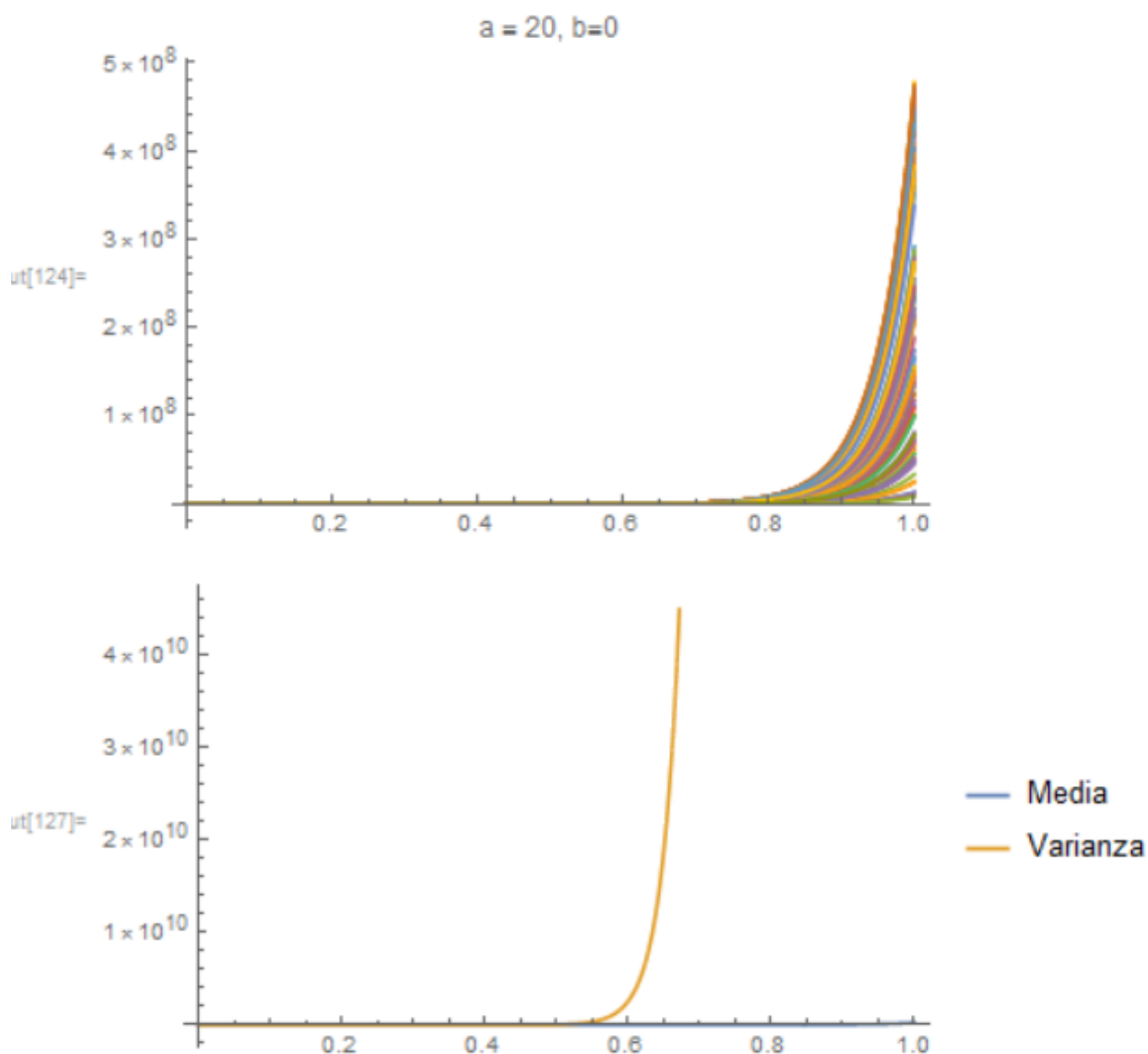


Figura 12: Solución, media y varianza para $b = 0$, $a = 20$

2.3. Conclusiones:

Como hemos observado, tenemos tres posibles escenarios para las soluciones (y por consecuencia para la media y varianza): la convergencia, la divergencia y las asíntotas. Como norma general, siempre que $b < a \leq 0$, tenemos que las soluciones tienden a formar asíntotas. Sin embargo, si $a = b < 0$, este no ocurre, convergiendo así a 0 las soluciones. Lo que podemos observar de este

Asignatura	Datos del alumno	Fecha
Ecuaciones diferenciales estocásticas	Apellidos: Avilés Cahill	27/02/2024
	Nombre: Adán	

problema es que es muy dependiente de los parámetros a y b , haciendo que el estudio de ellos sea tan importante, pues si nos hubiésemos centrado en el código y valores aleatorios de a, b , no habríamos llegado a estas conclusiones.