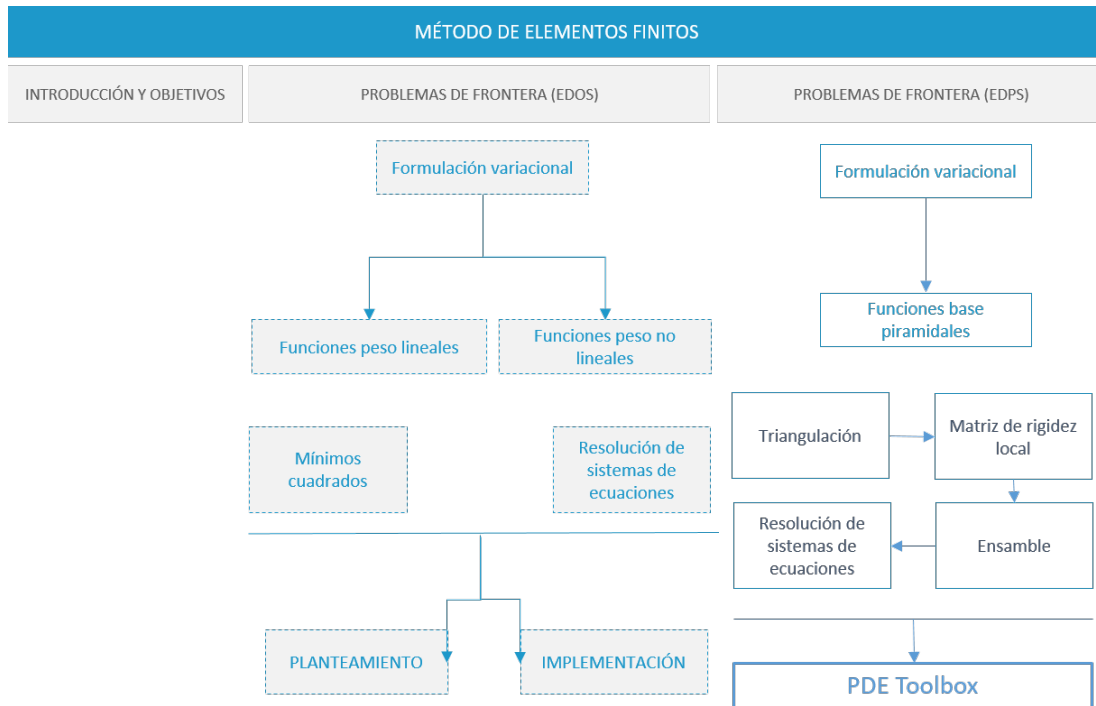


Métodos Numéricos II

Elementos finitos (2)

Índice

Esquema.	2
Ideas clave	3
10.1 Introducción y objetivos	3
10.2 Formulación variacional multidimensional.	4
10.3 Ejercicios resueltos	15
10.4 Ejercicios propuestos	21
10.5 Referencias bibliográficas	23



10.1 Introducción y objetivos

Utilizando como punto de partida la introducción a Rayleigh-Ritz del Tema 9, extendemos la técnica variacional a un problema genérico descrito por una ecuación en derivadas parciales con condiciones en la frontera de su dominio. Esta técnica tiene su origen en el cálculo de estructuras en ingeniería civil y, con el desarrollo de la computación de altas prestaciones, actualmente se aplica a incontables problemas de todas las ramas de la ingeniería. Véanse, por ejemplo, (Girault and Raviart, 1986) y (Radi and El Hami, 2018).

Los objetivos específicos que pretendemos alcanzar en este tema son:

- ▶ Introducir el principio variacional sobre un problema de frontera multidimensional
- ▶ Obtener un procedimiento general, que incluya los siguientes aspectos:
 - Encontrar el funcional que minimiza el problema de frontera a resolver
 - Subdividir el dominio en elementos (mallado)
 - Utilizar funciones de interpolación lineal que actúen sobre cada elemento (funciones base)
 - Minimizar el funcional actuando sobre la relación de interpolación
 - Ensamblar las ecuaciones resultantes del paso anterior y ajustarlas a las condiciones de contorno, con lo que se obtendrá el sistema de ecuaciones a resolver.
- ▶ Introducir la herramienta PDE Toolbox de Matlab para resolver problemas modelizados mediante ecuaciones en derivadas parciales utilizando elementos finitos.

10.2 Formulación variacional multidimensional

Como una generalización del problema de frontera que planteamos en el Tema 9, consideramos la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + r(x, y) u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

donde $(x, y) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que denotamos por S a la frontera del dominio Ω .

Además, la frontera $S = S_1 \cup S_2$ de forma que las condiciones de contorno son

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in S_1$$

y

$$p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\theta_1) + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\theta_2) + g_1(x, y) u = g_2(x, y), \quad (x, y) \in S_2, \quad (2)$$

donde los ángulos $\theta_i, i = 1, 2$ definen la normal exterior a la frontera de Ω , como se observa en la Figura 1.

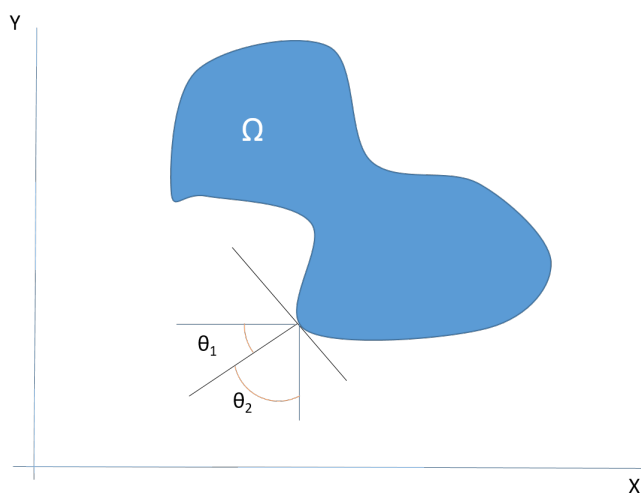


Figura 1: Angulos en la frontera

También en este caso, el principio variacional caracteriza a la solución del problema

de frontera como aquella que minimiza cierto funcional, como puede observarse en el siguiente resultado (Burden and Faires, 1989).

Teorema 1

Sean $p, q \in \mathcal{C}^1(\Omega \cup S)$, r, f funciones continuas en $\Omega \cup S$ y g_1, g_2 continuas en S_2 .

Supongamos además que

$$p(x, y) > 0, \quad q(x, y) > 0, \quad r(x, y) \leq 0 \text{ y } g_1(x, y) > 0.$$

Entonces una solución $v \in \mathcal{C}^2(\Omega \cup S)$ de la ecuación en derivadas parciales (2) es la única que minimiza el funcional

$$I(v) = \int \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \left[p(x, y) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + q(x, y) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - r(x, y) v^2 \right] + f(x, y) v \right) dx dy + \int_{S_2} \left(-g_2(x, y) v + \frac{1}{2} g_1(x, y) v^2 \right) dS$$

y cumple la condición

$$v(x, y) = g(x, y),$$

sobre S_1 .

Así, el método de elementos finitos, al igual que hacía la técnica de Rayleigh-Ritz en el caso unidimensional, aproxima la solución del problema de contorno minimizando el funcional I sobre una clase de funciones más pequeña.

El procedimiento a seguir consta de los siguientes pasos:

- ▶ Selección del tipo de elementos o funciones base, cuya combinación lineal nos proporcionará la aproximación a la solución buscada
- ▶ La triangularización del dominio y la definición sobre ellos de las funciones base, mediante interpolación de sus valores en los vértices o nodos
- ▶ La sustitución de dichos elementos de interpolación en el funcional y su minimi-

zación, dando lugar a sistemas de ecuaciones sobre cada elemento que posteriormente hay que ensamblar para construir el sistema de ecuaciones a resolver

- La solución de dicho sistema nos proporcionará los pesos de la combinación de funciones base que aproximará a la solución del problema

Debemos observar que la ecuación en derivadas parciales (1) es elíptica, por lo que la técnica que describiremos a lo largo de este tema se pueden aplicar de forma directa únicamente a este tipo de problemas. Cuando la EDP depende también del tiempo (en particular, cuando es parabólica o hiperbólica), podemos utilizar la técnica de elementos finitos sobre todas las variables, espaciales y temporales, o podemos hacerlo únicamente sobre las variables espaciales, discretizando la variable temporal mediante una técnica de diferencias finitas. Esto es factible si la ecuación en derivadas parciales es separable, y es la técnica más sencilla para abordar estos problemas. Para profundizar en estos aspectos, recomendamos los textos (Burden and Faires, 1989) y (Gerald and Wheatley, 2004).

Funciones base y minimización del funcional

Las funciones base suelen ser polinómicas de grado bajo (lineales o cuadráticas) y los elementos en los que se subdivide el dominio Ω habitualmente son triangulares, aunque en el caso de polinomios no lineales se usan también rectangulares. Consideraremos en adelante elementos triangulares (véase la Figura 2), cuyos vértices reciben el nombre de nodos, con funciones base lineales, $\phi(x, y) = a + bx + cy$. Llamaremos W al conjunto de elementos triangulares.

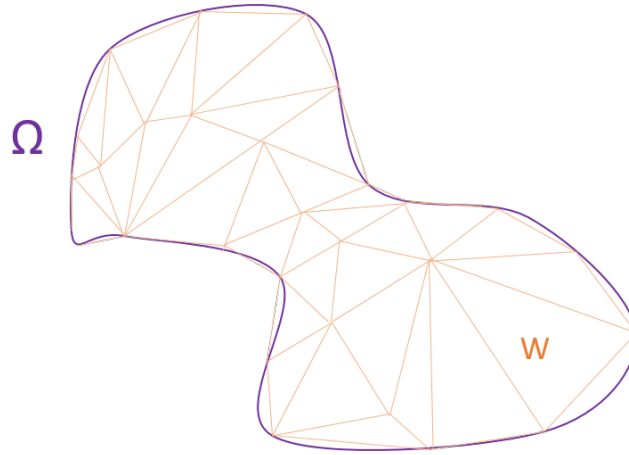


Figura 2: Triangulación del dominio

De este modo, el método de elementos finitos proporciona como aproximación al problema de frontera multidimensional una función construida como combinación lineal de las funciones base

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(x, y),$$

siendo $\phi_i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, m$ funciones lineales a trozos linealmente independientes definidas sobre W y $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Algunas de estas constantes se obtendrán de la minimización del funcional $I(\phi(x, y))$, (suponemos que son c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, $n < m$), mientras que el resto ($c_{n+1}, c_{n+2}, \dots, c_m$) se fijarán al imponer la condición de contorno $\phi(x, y) = g(x, y)$, $(x, y) \in S_1$. Por tanto, la expresión del funcional queda

$$\begin{aligned} I(\phi(x, y)) = & \int \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \left[p(x, y) \left(\sum_{i=1}^m c_i \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \right)^2 + q(x, y) \left(\sum_{i=1}^m c_i \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial y} \right)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - r(x, y) \left(\sum_{i=1}^m c_i \phi_i(x, y) \right)^2 \right] + f(x, y) \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(x, y) \right) dx dy \\ & + \int_{S_2} \left(-g_2(x, y) \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(x, y) + \frac{1}{2} g_1(x, y) \left(\sum_{i=1}^m c_i \phi_i(x, y) \right)^2 \right) dS \end{aligned}$$

y como condición necesaria para la minimización, exigiremos para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

que se satisfaga $\frac{\partial I(\phi(x, y))}{\partial c_j} = 0$; es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(\phi(x, y))}{\partial c_j} = & \int \int_{\Omega} \left(p(x, y) \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial x} \sum_{i=1}^m c_i \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial x} \right. \\ & + q(x, y) \frac{\partial \phi_j(x, y)}{\partial y} \sum_{i=1}^m c_i \frac{\partial \phi_i(x, y)}{\partial y} \\ & \left. - r(x, y) \phi_j(x, y) \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(x, y) + f(x, y) \phi_j(x, y) \right) dx dy \\ & + \int_{S_2} \left(-g_2(x, y) \phi_j(x, y) + g_1(x, y) \phi_j(x, y) \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(x, y) \right) dS = 0, \end{aligned}$$

o equivalentemente, para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{i=1}^m c_i \left[\int \int_{\Omega} \left(p(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} - r(x, y) \phi_j(x, y) \phi_i(x, y) \right) dx dy \right. \\ & \left. + \int_{S_2} g_1(x, y) \phi_j(x, y) \phi_i(x, y) dS \right] \\ & + \int \int_{\Omega} f(x, y) \phi_j(x, y) dx dy - \int_{S_2} g_2(x, y) \phi_j(x, y) dS. \end{aligned}$$

Este sistema puede expresarse matricialmente como $Ac = b$, siendo $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)^T$,

A la matriz de tamaño $n \times m$ (conocida como matriz de rigidez), de componentes

$$\begin{aligned} a_{i,j} = & \int \int_{\Omega} \left(p(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} - r(x, y) \phi_j(x, y) \phi_i(x, y) \right) dx dy \\ & + \int_{S_2} g_1(x, y) \phi_j(x, y) \phi_i(x, y) dS, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

y el vector de términos independientes $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ tiene como componentes

$$b_i = - \int \int_{\Omega} f(x, y) \phi_i(x, y) dx dy + \int_{S_2} g_2(x, y) \phi_i(x, y) dS - \sum_{k=n+1}^m a_{i,k} c_k,$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Dependiendo del tipo de funciones peso que se utilicen, la matriz A puede ser definida positiva y tener una estructura de bandas, lo que facilita considerablemente la

resolución del sistema.

Triangulación e interpolación

Asumiremos que la región del plano $\Omega = W = \bigcup_{i=1}^r T_i$, donde cada $T_i, i = 1, 2, \dots, r$ es una región triangular de nodos $p_j^{(i)} = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)})$, para $j = 1, 2, 3$. Además, la frontera S de W es un conjunto de líneas rectas enlazadas. Estos triángulos no deben estar superpuestos y deben definirse de forma que no haya ningún vértice de algún triángulo ubicado sobre el lado de otro.

Asociamos a cada nodo del triángulo T_i una función piramidal

$$P_j^{(i)}(x, y) = \alpha_j^{(i)} + \beta_j^{(i)}x + \gamma_j^{(i)}y,$$

tal que

$$P_j^{(i)}(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases},$$

(véase la Figura 3). Conocidos los nodos $p_j^{(i)}$ de cada triángulo T_i , la resolución de un sencillo sistema lineal $Md = e^{(j)}$ nos proporciona los coeficientes $d = (\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}, \gamma_j^{(i)})^T, j = 1, 2, 3$. Notemos que la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(i)} & y_1^{(i)} \\ 1 & x_2^{(i)} & y_2^{(i)} \\ 1 & x_3^{(i)} & y_3^{(i)} \end{pmatrix}$$

es no singular por la construcción de la triangulación y el vector $e^{(j)}$ es el vector unitario cuya única componente no nula es la j -ésima. De este modo, la solución es única y por tanto también la función piramidal definida sobre cada vértice de un triángulo.

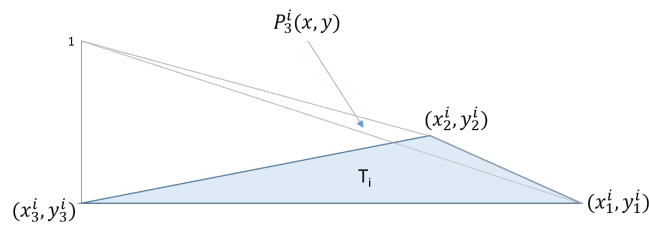


Figura 3: Función piramidal

Sobre cada triángulo T_i , las funciones peso serán las tres funciones piramidales. Así, el proceso de minimización del funcional se lleva a cabo sobre cada triángulo de W . Este proceso puede simplificarse reduciendo el tamaño del sistema mediante la técnica de ensamblaje.

Notemos que con esta construcción de las funciones piramidales, que asimilaremos con las funciones base en cada triángulo, la matriz de coeficientes A será simétrica, definida positiva y no singular, por lo que el sistema lineal que proporciona los pesos de la función solución aproximada tendrá solución única.

Ejemplo 1.

Consideremos el dominio cuadrangular de la Figura 4, separada en cuatro regiones triangulares T_1 a T_4 . Los nodos o vértices de esta triangularización son $N_1 = (1, 0)$, $N_2 = (0, 1)$, $N_3 = (-1, 0)$, $N_4 = (0, -1)$ y $N_5 = (0, 0)$.

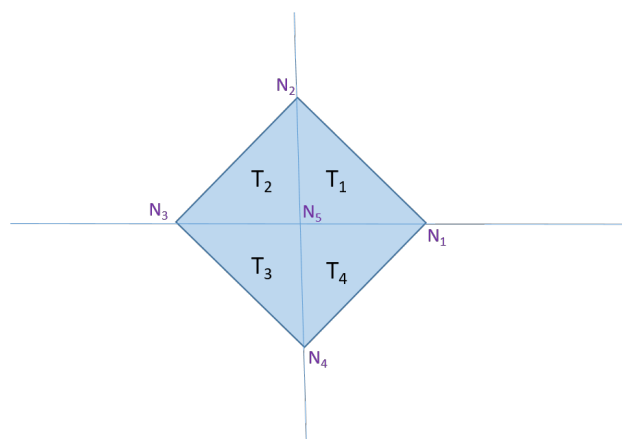


Figura 4: Dominio cuadrangular y triangularización

Utilizando la notación descrita en esta sección para los vértices de cada triángulo,

podemos afirmar que $N_1 = p_1^1 = p_2^4$, $N_2 = p_2^1 = p_1^2$, $N_3 = p_1^3 = p_2^2$, $N_4 = p_1^4 = p_2^3$ y $N_5 = p_3^1 = p_3^2 = p_3^3 = p_3^4$.

Respecto a la construcción de las funciones piramidales, en el triángulo T_1 , es fácil calcular cada una de ellas imponiendo las condiciones:

- ▶ $P_1^{(1)}(x, y) = \alpha_1^{(1)} + \beta_1^{(1)}x + \gamma_1^{(1)}y$, tal que $P_1^{(1)}(p_1^1) = 1$, $P_1^{(1)}(p_2^1) = 0$, $P_1^{(1)}(p_3^1) = 0$. Luego, $P_1^{(1)}(x, y) = x$
- ▶ $P_2^{(1)}(x, y) = \alpha_2^{(1)} + \beta_2^{(1)}x + \gamma_2^{(1)}y$, tal que $P_2^{(1)}(p_1^1) = 0$, $P_2^{(1)}(p_2^1) = 1$, $P_2^{(1)}(p_3^1) = 0$, por lo que $P_2^{(1)}(x, y) = y$
- ▶ $P_3^{(1)}(x, y) = \alpha_3^{(1)} + \beta_3^{(1)}x + \gamma_3^{(1)}y$ tal que $P_3^{(1)}(p_1^1) = 0$, $P_3^{(1)}(p_2^1) = 0$, $P_3^{(1)}(p_3^1) = 1$. Así, $P_3^{(1)}(x, y) = 1 - x - y$



Accede al vídeo: Ejemplo

Las funciones piramidales $P_1^{(i)}(x, y)$, $P_2^{(i)}(x, y)$ y $P_3^{(i)}(x, y)$ asociadas a un triángulo T_i , se llaman también coordenadas baricéntricas y toman valores entre 0 y 1 en los puntos interiores de T_i y mayores que 1 o menores que 0 en los exteriores, y el valor 0 ó 1 en los puntos frontera. Se tiene además que $\sum_{j=1}^3 P_j^i(x, y) = 1$ en todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Minimización del funcional sobre W

Una vez ordenados los nodos N_1, N_2, \dots, N_n sobre $\Omega \cup S$, a cada nodo N_k le asociamos una función base ϕ_k lineal sobre cada triángulo, que toma valor unidad en N_k y es nula en el resto de nodos. Estas condiciones hacen que ϕ_k coincida con P_j^i sobre el triángulo T_i cuando $N_k = p_j^i$.

Vamos a trabajar sobre elementos triangulares rectos y regulares, definidos a distancia h entre nodos, tanto vertical como horizontalmente (véase Figura 5). Seleccionamos uno de los triángulos del mallado, por ejemplo el formado por N_{31} , N_{32} y N_{40} (en azul en la figura), que denotaremos en notación local por $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_1 + h, y_2)$ y $p_3 = (x_1, y_1 + h)$.

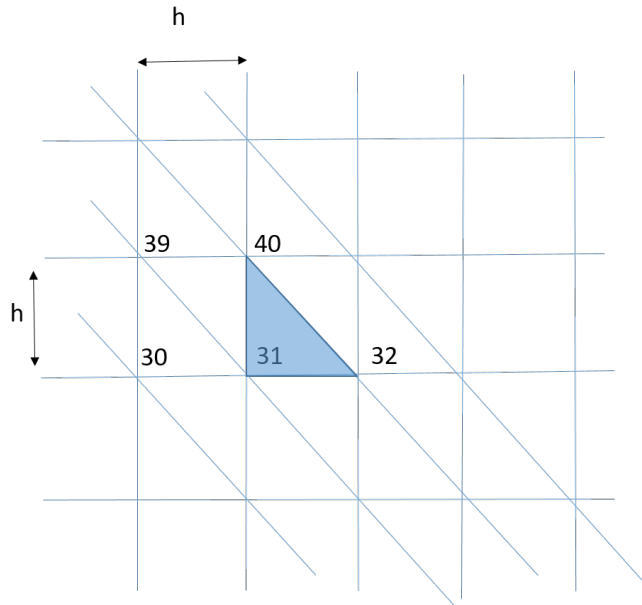


Figura 5: Triangularización regular

Las funciones piramidales (o restricción de las funciones base) sobre este triángulo serán:

$$\begin{aligned}\phi_1(x, y) &= 1 - \frac{1}{h}(x - x_1) - \frac{1}{h}(y - y_1), \\ \phi_2(x, y) &= \frac{1}{h}(x - x_1), \\ \phi_3(x, y) &= \frac{1}{h}(y - y_1).\end{aligned}$$

Así, sus respectivos gradientes son

$$\nabla\phi_1(x, y) = \left(-\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}\right)^T, \quad \nabla\phi_2(x, y) = \left(\frac{1}{h}, 0\right)^T, \quad \nabla\phi_3(x, y) = \left(0, \frac{1}{h}\right)^T$$

y la matriz de rigidez asociada al triángulo se obtiene elemento a elemento,

$$a_{1,1} = \int \int_{T_{41}} \left(\frac{p(x,y) + q(x,y)}{h^2} - r(x,y) \left(1 - \frac{x-x_1}{h} - \frac{y-y_1}{h} \right)^2 \right) dx dy \\ + \int_{S_2} g_1(x,y) \left(1 - \frac{x-x_1}{h} - \frac{y-y_1}{h} \right)^2 dS,$$

$$a_{1,2} = \int \int_{T_{41}} \left(\frac{p(x,y)}{h^2} - r(x,y) \frac{x-x_1}{h} \left(1 - \frac{x-x_1}{h} - \frac{y-y_1}{h} \right) \right) dx dy \\ + \int_{S_2} g_1(x,y) \frac{x-x_1}{h} \left(1 - \frac{x-x_1}{h} - \frac{y-y_1}{h} \right) dS,$$

$$a_{1,3} = \int \int_{\Omega} \left(\frac{q(x,y)}{h^2} - r(x,y) \left(\frac{y-y_1}{h} \right) \left(1 - \frac{x-x_1}{h} - \frac{y-y_1}{h} \right) \right) dx dy \\ + \int_{S_2} g_1(x,y) \left(\frac{y-y_1}{h} \right) \left(1 - \frac{x-x_1}{h} - \frac{y-y_1}{h} \right) dS, \dots$$

así como los elementos del vector de términos independientes, cuyo primer elemento es

$$b_1 = - \int \int_{T_{41}} f(x,y) \left(1 - \frac{x-x_1}{h} - \frac{y-y_1}{h} \right) dx dy \\ + \int_{S_2} g_2(x,y) \left(1 - \frac{x-x_1}{h} - \frac{y-y_1}{h} \right) dS - \sum_{k=n+1}^m a_{1,k} c_k.$$

Ejemplo 2. Problema de Poisson rectangular

Consideremos el problema de Poisson,

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x,y),$$

donde $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ y las condiciones de frontera son homogéneas $u(0,y) = u(1,y) = 0, u(x,0) = u(x,1) = 0$.

En este caso, $p(x,y) = q(x,y) = 1$ y $r(x,y) = 0$ y el conjunto S_2 es vacío ($m = 0$). Utilizamos la triangulación previamente descrita, sobre un triángulo regular

T_{41} que no pertenece a la frontera del dominio. Además, las integrales pueden calcularse de forma exacta mediante fórmulas de cuadratura sencillas (ya que el integrando es una constante o un polinomio de segundo grado), obteniéndose la matriz de rigidez

$$A_{T_{41}} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

donde hemos utilizado que el área del triángulo es $\frac{h^2}{2}$.

Respecto al vector de términos independientes,

$$b_j = - \int \int_{T_{41}} f(x, y) \phi_j(x, y) dx dy,$$

que se puede aproximar numéricamente por el producto del área del triángulo y la suma de los valores del integrando en los vértices del mismo (fórmula de cuadratura de Newton-Cotes exacta para polinomios de primer grado). Teniendo en cuenta que la función peso $\phi_j(x, y)$ toma valor 1 en p_j y 0 en el resto,

$$b_j = h^2 f(x_j, y_j), \quad j = 1, 2, 3.$$

Ensamblaje de los sistemas y resolución

Para la construcción de la matriz de rigidez global o ensamblaje se han de sumar de forma adecuada las respectivas matrices de cada uno de los triángulos del mallado en la posición fila-columna correspondiente, que corresponden al mismo nodo. En el ejemplo previo, cada nodo de la triangulación es el "vértice" de una estrella formada por seis triángulos contruidos de la misma forma.

Así, el elemento $i = 1, j = 1$ de la matriz $A_{T_{41}}$ se sumará en la posición $a_{31,31}$ de la matriz global A , el término $i = 1, j = 2$ de la matriz $A_{T_{41}}$ se sumará en la posición $a_{31,32}$, el elemento $i = 1, j = 3$ de la matriz $A_{T_{41}}$ se sumará en la posición $a_{31,40}$ y así

sucesivamente.

De este modo, los elementos no nulos de la fila 31 de la matriz A serían

$$a_{31,22} = a_{31,30} = a_{31,32} = a_{31,40} = -1, \quad a_{31,31} = 4.$$

y, teniendo en cuenta la suma de los términos independientes resultantes en cada uno de los triángulos, la ecuación número 31 del sistema global sería

$$-u_{22} - u_{30} + 4u_{31} - u_{32} - u_{40} = h^2 f(N_{41}),$$

que coincide con la correspondiente ecuación aplicando diferencias finitas. Por supuesto, la técnica de los elementos finitos es más general, ya que se puede aplicar sobre dominios más complejos y con funciones base polinómicas de grado más alto.

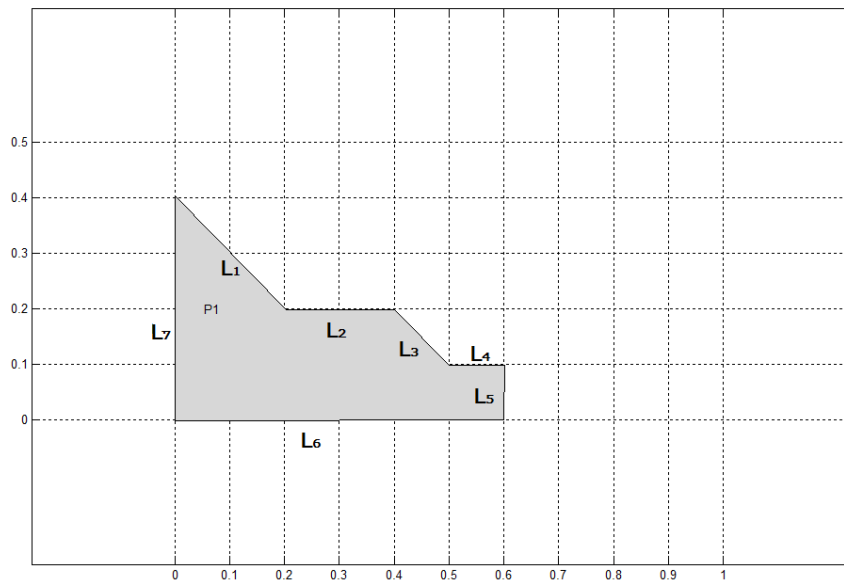
10.3 Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.

Utiliza la técnica de elementos finitos para calcular la temperatura $u(x, y)$ que satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in P_1,$$

sobre la región bidimensional P_1 , descrita en la siguiente figura,



bajo las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= 4, & (x, y) \in L_6, (x, y) \in L_7, \\
 \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) &= x, & (x, y) \in L_2, (x, y) \in L_4, \\
 \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) &= y, & (x, y) \in L_5, \\
 \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) &= \frac{x+y}{\sqrt{2}}, & (x, y) \in L_1, (x, y) \in L_3,
 \end{aligned}$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ denota la derivada direccional en la dirección normal a la frontera de la región en el punto (x, y) .

Solución.

Para resolver este y otros problemas mediante la técnica de diferencias finitas, utilizaremos el Toolbox de Matlab "PDETOOL". En las Figuras 6 y 7 se muestran los comandos disponibles en la barra de herramientas.

En el siguiente vídeo mostramos una introducción a esta herramienta.



Accede al vídeo: Introducción al Toolbox de Matlab PDETOOL






	Dibuja un rectángulo/cuadrado comenzando en una esquina.
	Dibuja un rectángulo/cuadrado comenzando en el centro.
	Dibuja una elipse/círculo comenzando en el perímetro.
	Dibuja una elipse/círculo comenzando en el centro.
	Dibuja un polígono. Pincha y arrastra para crear los lados del polígono. El polígono puede cerrarse haciendo click con el botón derecho del ratón o pinchando sobre el vértice inicial.

Figura 6: Comandos del PDE Toolbox Matlab (1)








	Entra en el modo para especificar condiciones de frontera.
	Abre el cuadro de diálogo para especificar la EDP a resolver.
	Inicializa la malla triangular.
	Refina la malla triangular.
	Resuelve la EDP.
	Abre el cuadro de diálogo para representar los resultados.
	Zoom on/off.

Figura 7: Comandos del PDE Toolbox Matlab (2)

Para resolver el problema, en primer lugar dibujamos el dominio poligonal P_1 ayudándonos de un mallado de paso $h = 0.1$. A continuación, pulsamos el botón $\partial\Omega$ para especificar las condiciones de contorno del problema. Al hacer doble click sobre cada lado de la frontera se abre un cuadro de diálogo donde especificamos el tipo de condición (en nuestro caso Neumann, en azul; si es de tipo Dirichlet, en rojo) y su valor (véanse las Figuras 8 y 9).

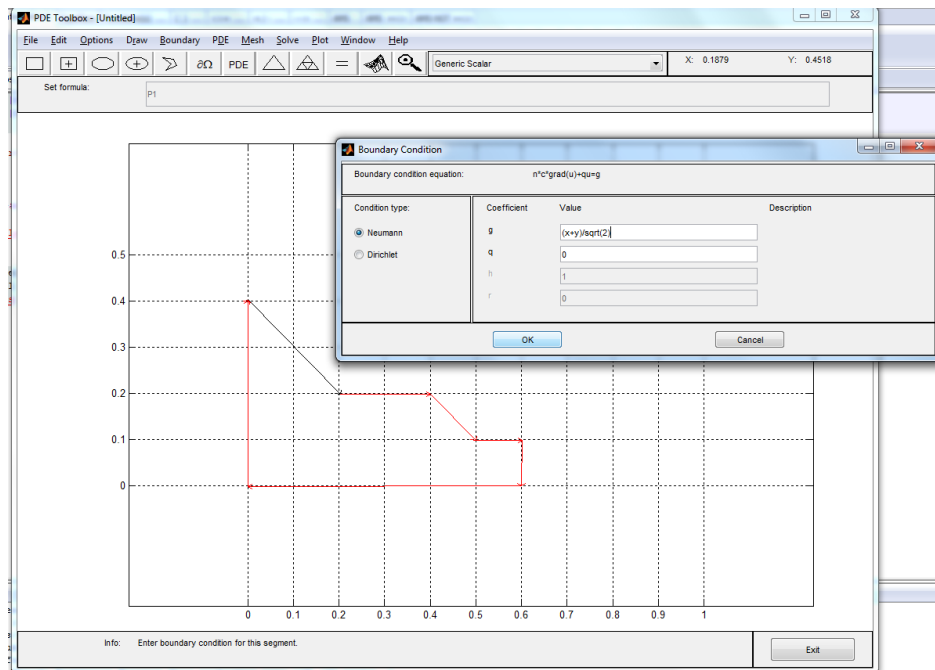


Figura 8: Establecimiento de los valores de frontera, PDE Toolbox Matlab (1)

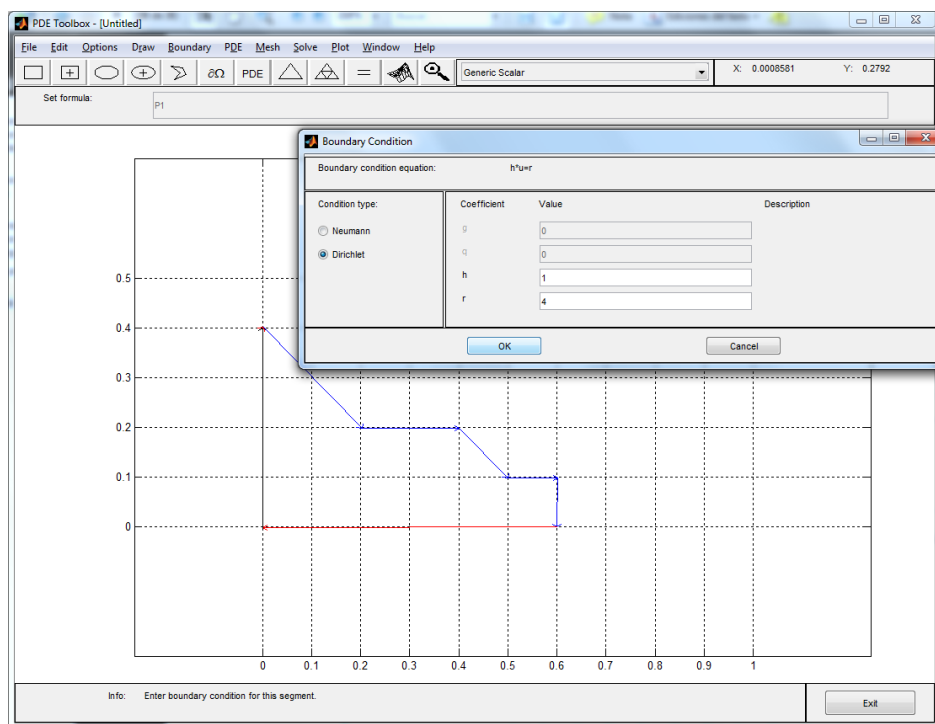


Figura 9: Establecimiento de los valores de frontera, PDE Toolbox Matlab (2)

A continuación, pulsamos el botón **PDE** para introducir el tipo de ecuación en derivadas parciales y su expresión. Se abre el cuadro de diálogo que podemos ver en la Figura 10.

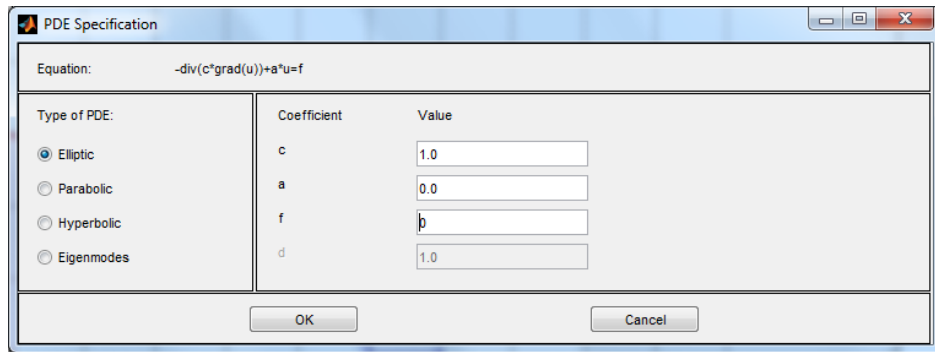


Figura 10: Definición de la EDP, PDE Toolbox Matlab

Existe la posibilidad de inicializar el problema con el mallado por defecto, aunque si es necesario, podemos refinarlo aumentando el número de elementos del mismo, desplegando el menú correspondiente, como observamos en la Figura 11.

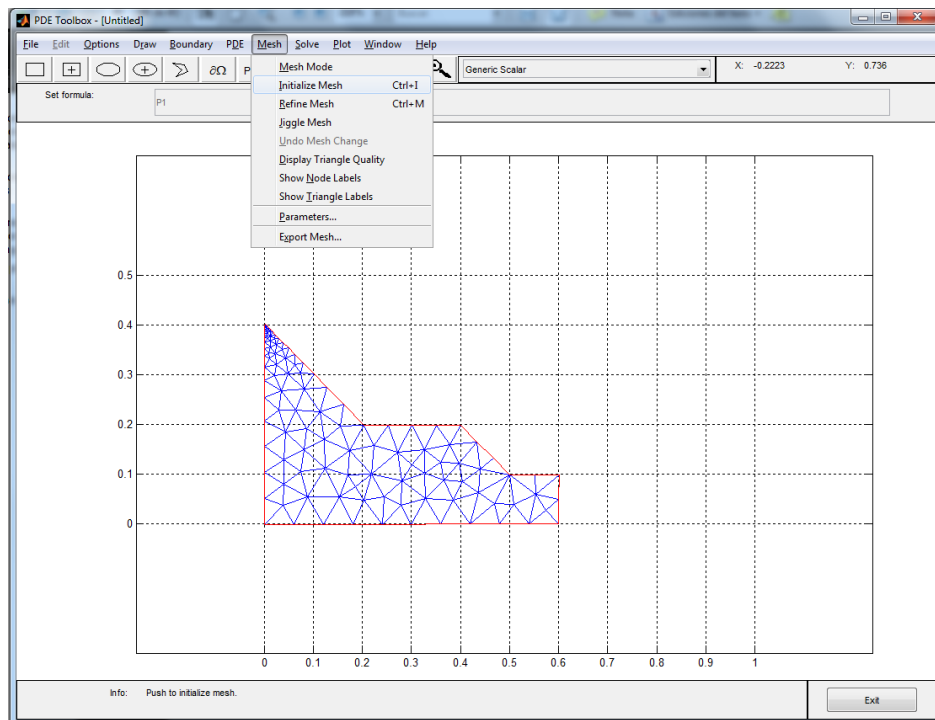


Figura 11: Definición del mallado, PDE Toolbox Matlab

Finalmente, resolvemos la EDP con el botón $=$ y fijamos las propiedades de visualización con el botón de la gráfica, Figura 12.

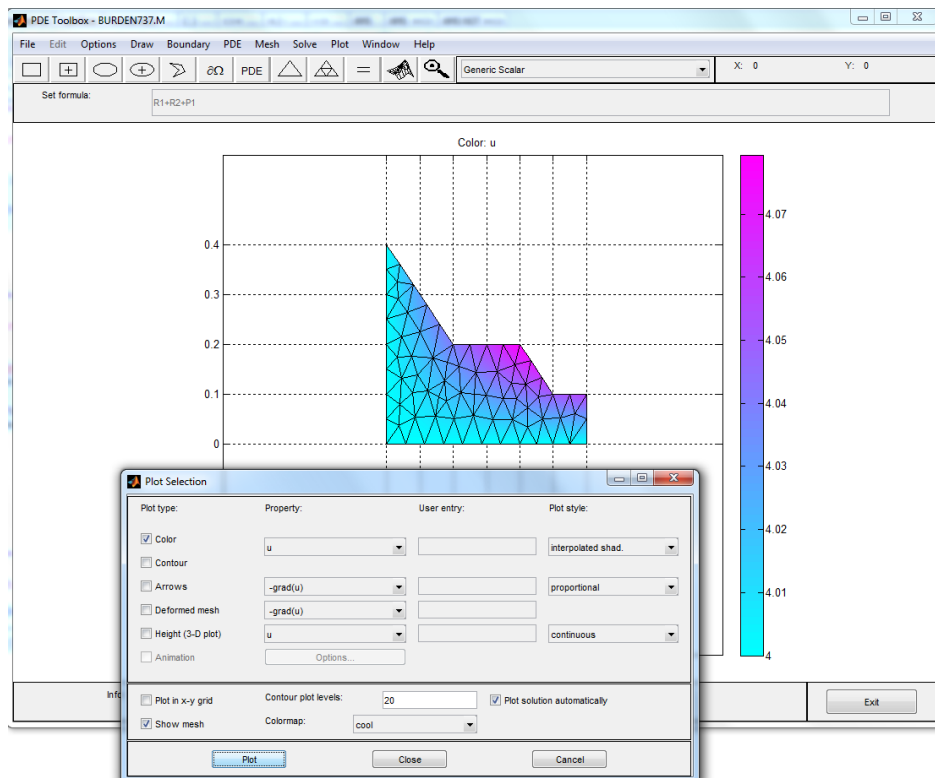


Figura 12: Solución y su visualización, PDE Toolbox Matlab

También conviene destacar que podemos exportar la solución a Matlab con el menú **Solve** y la opción **Export solution**, véase la Figura 13.

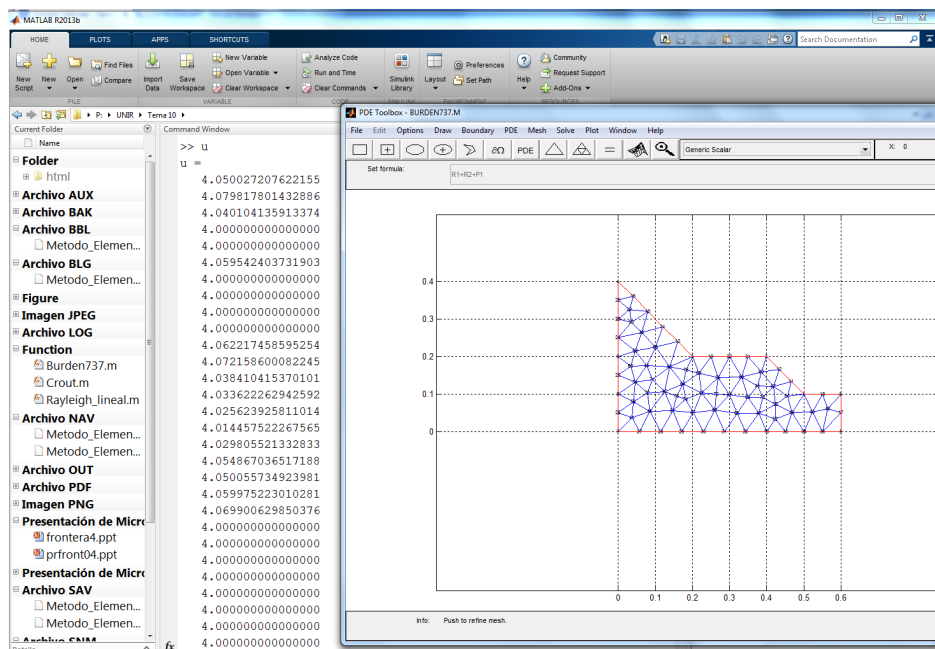


Figura 13: Exportado de la solución a Matlab, PDE Toolbox Matlab

Si además conocemos la solución exacta y queremos calcular el error, exportamos el mallado a Matlab con el menú Mesh y la opción Export Mesh. En la ventana de comandos podemos calcular la norma del error (con 76 nodos), obteniendo el valor 0.002031.

Para mejorar los resultados refinamos el mallado (266 nodos) y exportamos tanto la solución como el mallado. Con esta información, recalculamos el error, obteniéndose en este caso su norma, $8.29641e - 04$.

10.4 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2. Utiliza la técnica de elementos finitos implícita en la herramienta PDE-TOOL de Matlab para aproximar la solución de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(y^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right) - yu(x, y) = -x \quad (x, y) \in D$$

sobre la región triangular D definida por los vértices $P = (0, 0.5)$, $Q = (0.5, 0.5)$ y $R = (0, 1)$, con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} u(x, 0.5) &= 2x, & x &\in [0, 0.5] \\ u(0, y) &= 0, & y &\in [0.5, 1] \\ u(x, y) &= 0, & (x, y) &\in \overline{QR}. \end{aligned}$$

Emplea para ello un mallado de paso $h = 0.1$.

Ejercicio 3. Aproxima, utilizando PDETOOL, la solución de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - 12.5\pi^2 u(x, y) = -25\pi^2 \sin\left(\frac{5\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{5\pi}{2}y\right),$$

donde $(x, y) \in [0, 0.4] \times [0, 0.4]$, con condiciones en la frontera de tipo Dirichlet homogéneas y utilizando un mallado de paso 0.1. Compara la solución encontrada

con la exacta,

$$u(x, y) = \sin\left(\frac{5\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{5\pi}{2}y\right),$$

calculando el error cometido en cada nodo.

Ejercicio 4. Aproxima, utilizando PDETOOL, la solución de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) - 12.5\pi^2 u(x, y) = -25\pi^2 \cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{5\pi}{2}y\right),$$

donde $(x, y) \in [0, 0.4] \times [0, 0.4]$, con condiciones en la frontera de tipo Neumann homogénea, $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = 0$, utilizando un mallado de paso 0.1. Compara la solución encontrada con la exacta,

$$u(x, y) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right) \cos\left(\frac{5\pi}{2}y\right),$$

calculando el error cometido en cada nodo.

Ejercicio 5. Dado el problema parabólico

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad \alpha = 0.2,$$

bajo las condiciones de contorno de tipo Neumann

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0$$

y la condición inicial

$$u(x, 0) = \cos(x) - \cos(3x) + 0.75,$$

aproxima su solución utilizando el toolbox PDETOOL utilizando el número de nodos por defecto. Compara los resultados con la solución exacta

$$u(x, t) = 0.75 + e^{-\alpha^2 t} \cos(x) - e^{-(3\alpha)^2 t} \cos(3x).$$

10.5 Referencias bibliográficas

Burden, R. L. and Faires, J. D. (1989). *Numerical Analysis*. The Prindle, Weber and Schmidt Series in Mathematics. PWS-Kent Publishing Company, Boston, fourth edition.

Gerald, C. F. and Wheatley, P. O. (2004). *Applied numerical analysis / Curtis F. Gerald, Patrick O. Wheatley*. Pearson, Boston, Mass. ; London, 7th ed. edition.

Girault, V. and Raviart, P.-A. (1986). *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin. Theory and algorithms.

Radi, B. and El Hami, A. (2018). *Advanced Numerical Methods with Matlab® 2*. John Wiley & Sons, Ltd.