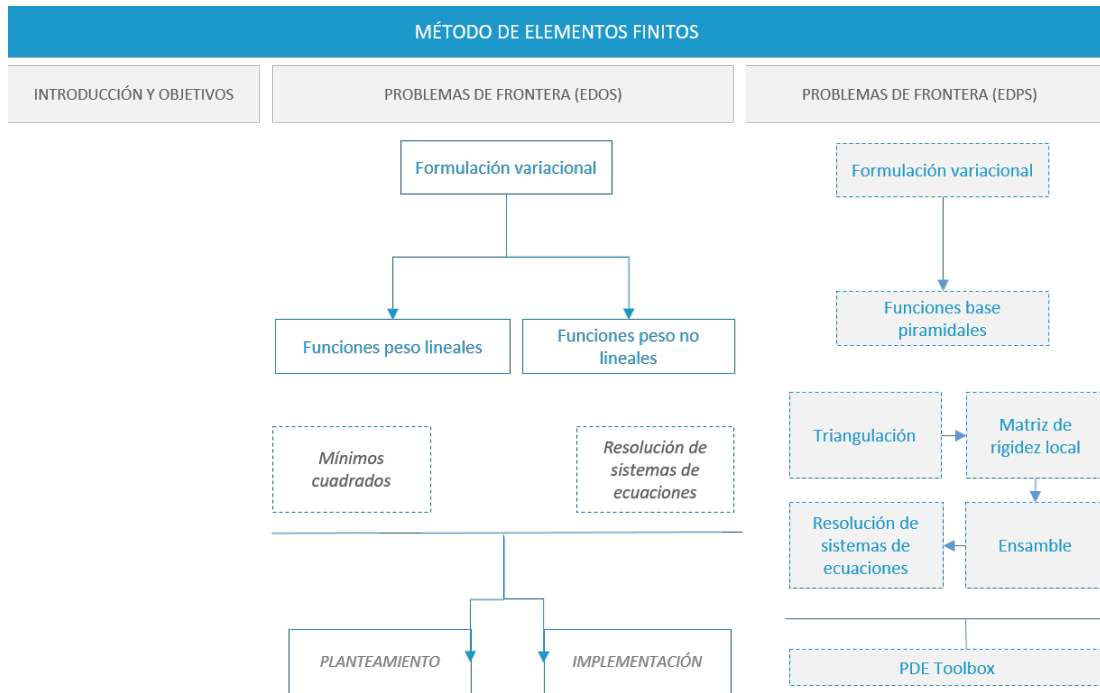


Métodos Numéricos II

Elementos finitos (1)

Índice

Esquema.	2
Ideas clave	3
9.1 Introducción y objetivos	3
9.2 Formulación variacional de un problema de frontera . . .	4
9.3 Método de Rayleigh-Ritz	5
9.4 Ejercicios resueltos	14
9.5 Ejercicios propuestos	21



9.1 Introducción y objetivos

Para introducir la técnica de elementos finitos comenzaremos con un problema unidimensional, es decir, un problema de contorno. Sobre este tipo de problemas la técnica de elementos finitos es conocida como método de Rayleigh-Ritz. Es una técnica variacional que aborda el problema desde un enfoque diferente: el problema de frontera se reformula primero como el problema de elegir, del conjunto de todas las funciones suficientemente diferenciables que satisfacen las condiciones de contorno, aquella función que minimiza una determinada integral (principio variacional). A continuación, el conjunto de funciones factibles se reduce y se encuentra una aproximación a partir de este conjunto que minimiza la integral. Esta es nuestra aproximación a la solución del problema de contorno.

Más concretamente, los objetivos a alcanzar en este tema son los siguientes:

- ▶ Introducir el principio variacional
- ▶ Obtener un procedimiento general para los problemas de frontera unidimensionales
- ▶ Aplicar el método de mínimos cuadrados
- ▶ Obtener las soluciones con funciones de ponderación lineales
- ▶ Aprender cómo obtener soluciones con funciones de ponderación no lineales

9.2 Formulaci3n variacional de un problema de frontera

Consideremos el problema de frontera que describe la deformaci3n, $y(x)$, de una viga de longitud unidad, que soporta cargas $p(x)$ y $f(x)$,

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (1)$$

El principio variacional es fundamental en la aplicaci3n de la t3cnica de Rayleigh-Ritz y caracteriza a la soluci3n del problema de frontera como la funci3n que minimiza cierta integral sobre todas las funciones del conjunto $\mathcal{C}_0^2[0, 1]$, conjunto formado por las funciones $u \in \mathcal{C}^2[0, 1]$ que satisfacen las condiciones de contorno $u(0) = u(1) = 0$. Concretamente, para el problema que nos ocupa esta propiedad viene descrita en el siguiente resultado.

Teorema 1

Sean $p \in \mathcal{C}^1[0, 1]$, $q, f \in \mathcal{C}[0, 1]$ tales que cumplen

$$p(x) > 0, q(x) \geq 0, \text{ para } x \in [0, 1].$$

La funci3n $y \in \mathcal{C}_0^2[0, 1]$ es la 3nica soluci3n de

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x)$$

si y solo si y es la 3nica funci3n que minimiza la integral

$$I(u) = \int_0^1 \left(p(x) (u'(x))^2 + q(x)u^2(x) - 2f(x)u(x) \right) dx.$$

Notemos que las soluciones del problema variacional tienen dimensi3n infinita; el m3todo de elementos finitos construye aproximaciones de dimensi3n finita a estos pro-

blemas.

9.3 Método de Rayleigh-Ritz

En el método de Rayleigh-Ritz, la integral I se minimiza, no sobre todas las funciones del espacio $C_0^2[0, 1]$, sino sobre un subespacio generado por un conjunto finito de funciones $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ llamadas funciones base o de ponderación. Estas funciones deben ser linealmente independientes y satisfacer las condiciones de contorno $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0, i = 1, 2, \dots, n$.

Así, encontraremos una aproximación

$$\phi = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j,$$

a la solución del problema de contorno $y(x)$, eligiendo las constantes c_1, c_2, \dots, c_n de manera que se minimice $I(\phi(x))$. Por tanto, una vez seleccionadas las funciones de ponderación, calculamos el residuo

$$R(\phi(x)) = \int_0^1 \left(p(x) (\phi'(x))^2 + q(x) \phi^2(x) - 2f(x) \phi(x) \right) dx$$

y utilizamos el método de mínimos cuadrados con el objetivo de minimizar el residuo.

Calcularemos

$$\nabla R(\phi(x)) = 0 \leftrightarrow \frac{\partial R(\phi(x))}{\partial c_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Así, el mínimo deberá satisfacer las ecuaciones

$$\sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 (p(x) \phi'_i(x) \phi'_j(x) + q(x) \phi_i(x) \phi_j(x)) dx \right] c_i - \int_0^1 f(x) \phi_j(x) dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

que forman un sistema lineal $Ac = b$, donde la matriz A es simétrica y sus elementos

son

$$a_{ij} = \int_0^1 [p(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)] dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

y b es un vector de componentes

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

El caso más sencillo corresponde a la utilización de funciones base lineales a trozos, capaces de proporcionar soluciones suficientemente precisas para muchos problemas. Sin embargo, mostraremos también un tipo de funciones base no lineales, constituidas por splines cúbicos, es decir, funciones cúbicas a trozos.

Funciones base lineales

En el caso de las funciones de ponderación lineales vamos a trabajar con unas funciones especiales para el método de los elementos finitos, que son las funciones triangulares. El primer paso consiste en tomar una partición con $n + 1$ subintervalos del intervalo $[0, 1]$, de nodos (no necesariamente equiespaciados) $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$. Tomando $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, definimos las funciones base $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$ de la forma

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x_{i+1} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

con derivada

$$\phi_i'(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_{i-1}, \\ \frac{1}{h_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ -\frac{1}{h_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & x_{i+1} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

cuya representación gráfica puede verse en la Figura 1.

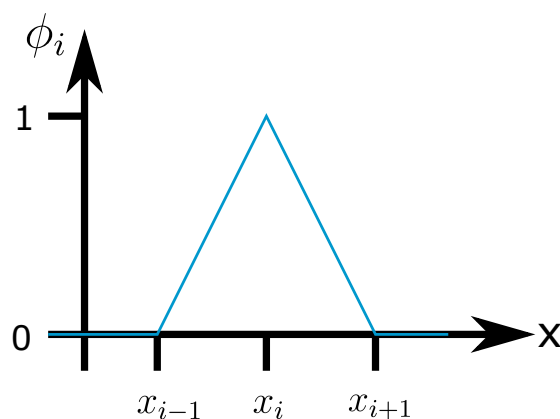


Figura 1: Funciones base lineales a trozos

Veamos algunas propiedades de las funciones de ponderación lineales: teniendo en cuenta que las funciones ϕ_i y ϕ_i' son no nulas únicamente en el intervalo abierto $]x_{i-1}, x_{i+1}[$, entonces

- $\phi_i \phi_j = 0, j \notin \{i-1, i, i+1\}$
- $\phi_i' \phi_j' = 0, j \notin \{i-1, i, i+1\}$

Podemos observar estas propiedades también en la Figura 2.

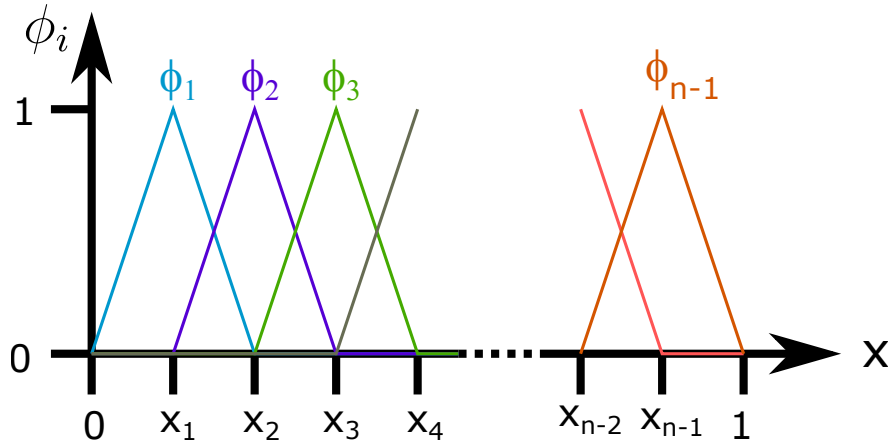


Figura 2: Funciones base lineales a trozos

De esta forma, el sistema $Ac = b$ es un sistema tridiagonal de tamaño $n \times n$. Los elementos no nulos de la matriz simétrica A son:

$$\begin{aligned}
 a_{i,i} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_{i-1}^2} p(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i^2} p(x) dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_{i-1}^2} (x - x_{i-1})^2 q(x) dx, \\
 &\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i^2} (x_{i+1} - x)^2 q(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n \\
 a_{i,i+1} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{1}{h_i^2} p(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_i^2} (x_{i+1} - x)(x - x_i) q(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.
 \end{aligned}$$

Por su parte, las componentes del vector b vienen dadas por

$$b_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}} f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x_{i+1} - x}{h_i} f(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Se puede demostrar que la matriz A es definida positiva, por lo que el sistema $Ac = b$ tiene solución única, y los métodos iterativos estacionarios de resolución de sistemas lineales (Jacobi, Gauss-Seidel, métodos SOR, etc) son convergentes. Estas técnicas iterativas son especialmente útiles cuando el tamaño del sistema es muy grande; en otro caso, aprovecharemos la estructura tridiagonal de la matriz A para resolver el sistema con el método de Crout. Además, bajo ciertas condiciones, la aproximación obtenida es de orden 2.

A continuación, mostramos el código correspondiente al método descrito, en el que las

integrales se aproximan mediante la fórmula de cuadratura de trapecios. Obviamente, diferentes técnicas pueden aplicarse con similar resultado, en función del grado de precisión de la cuadratura.

En el siguiente vídeo se muestra de forma detallada la implementación del método, así como su modificación para adaptarlo a otras fórmulas de cuadratura.

 Accede al vídeo: Implementación del método



```
function c=RRlin(p,q,f,t,m)
% t: particion del intervalo
%     (incluidos los extremos)
% m: numero de pasos para la cuadratura (2*m)
n=length(t)-1;
for i=1:n
    % Amplitud intervalos
    l=t(i); r=t(i+1); h=r-l;
    % Paso y Nodos de integracion
    k=h/(2*m); x=l:k:r;
    px=feval(p,x);      ph(i)=trapz(x,px)/h^2;
    qx=feval(q,x);
    ql(i)=trapz(x,qx.*(x-l).^2)/h^2;
    qr(i)=trapz(x,qx.*(r-x).^2)/h^2;
    qh(i)=trapz(x,qx.*(x-l).*(r-x))/h^2;
    fx=feval(f,x);
    fl(i)=trapz(x,fx.*(x-l))/h;
    fr(i)=trapz(x,fx.*(r-x))/h;
end
```

```

L=1:n-1;   C=2:n-1;   R=2:n;
% Matriz de coeficientes
a=ph(L)+ph(R)+ql(L)+qr(R); % Diagonal principal
b=qh-ph;    b=b(C); % Sub y superdiagonal
d=fl(L)+fr(R); % Terminos independientes
c=Crout(a,b,b,d);
end

```

Mostramos a continuación un ejemplo de cómo se aplica esta técnica sobre un problema de frontera concreto.

Ejemplo 1.

Vamos a resolver el problema de contorno

$$-y'' + \pi^2 y = 2\pi^2 \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Identificando coeficientes con la forma

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = f(x),$$

observamos que $p(x) = 1$, $q(x) = \pi^2$ y $f(x) = 2\pi^2 \sin(\pi x)$.

Definimos los elementos finitos como rectas y tomamos 5 nodos equiespaciados, de modo que los nodos vienen determinados por

$$x_i = \frac{i}{4}, \quad i = 1, 2, 3,$$

siendo $h = \frac{1}{4}$. Nótese que $y(x_0) = y(0) = 0$ y que $y(x_5) = y(1) = 0$.

Para obtener el sistema matricial, comenzamos por los coeficientes de la matriz

A. Calculamos de forma analítica los elementos de la diagonal principal,

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [1 + \pi^2(x - x_i)^2] dx + \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [1 + \pi^2(x_{i+1} - x)^2] dx = \\ &= \frac{2(3 + h^2\pi^2)}{3h}, \end{aligned}$$

los elementos de las diagonales inferior y superior,

$$a_{i,i+1} = \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [-1 + \pi^2(x_{i+1} - x)(x - x_i)] dx = -\frac{1}{h} + \frac{h\pi^2}{6}.$$

Por último, los elementos del vector b serán

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} 2\pi^2 \sin(\pi x)(x - x_{i-1}) dx + \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} 2\pi^2 \sin(\pi x)(x_{i+1} - x) dx = \\ &= -\frac{4 \sin(\pi x_i)}{h} (\cos(\pi h) - 1). \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema que tenemos que resolver es

$$\begin{bmatrix} \frac{2(3+h^2\pi^2)}{3h} & -\frac{1}{h} + \frac{h\pi^2}{6} & 0 \\ -\frac{1}{h} + \frac{h\pi^2}{6} & \frac{2(3+h^2\pi^2)}{3h} & -\frac{1}{h} + \frac{h\pi^2}{6} \\ 0 & -\frac{1}{h} + \frac{h\pi^2}{6} & \frac{2(3+h^2\pi^2)}{3h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = -\frac{4(\cos(\pi h) - 1)}{h} \begin{bmatrix} \sin(\pi x_1) \\ \sin(\pi x_2) \\ \sin(\pi x_3) \end{bmatrix},$$

cuya solución es

$$c_1 \approx 0.72516, \quad c_2 \approx 1.0255, \quad c_3 \approx 0.72516.$$

La solución analítica es $y(x) = \sin(\pi x)$. En la Tabla 1 mostramos la solución aproximada y la exacta en cada nodo, así como el error exacto cometido.

x_i	$\phi(x_i)$	$y(x_i)$	$ \phi(x_i) - y(x_i) $
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2500	0.7252	0.7071	0.0180
0.5000	1.0255	1.0000	0.0255
0.7500	0.7252	0.7071	0.0180
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Tabla 1: Resultados numéricos del Ejemplo 1

Funciones base no lineales

Las funciones a trozos nos resultan útiles para resolver determinados tipos de problemas; sin embargo, aunque sean continuas no son diferenciables. Es por ello que en ocasiones se recurre a utilizar otro tipo de funciones de ponderación.

En esta ocasión vamos a trabajar con polinomios cúbicos a trozos, también conocidos como splines cúbicos. Esta función a trozos se define como

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-2, 2), \\ \frac{1}{4} [(2-x)^3 - 4(1-x)^3 - 6x^3 + 4(1+x)^3], & -2 < x \leq -1, \\ \frac{1}{4} [(2-x)^3 - 4(1-x)^3 - 6x^3], & -1 < x \leq 0, \\ \frac{1}{4} [(2-x)^3 - 4(1-x)^3], & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{4} (2-x)^3, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

La Figura 3 representa a la función a trozos $S(x)$.

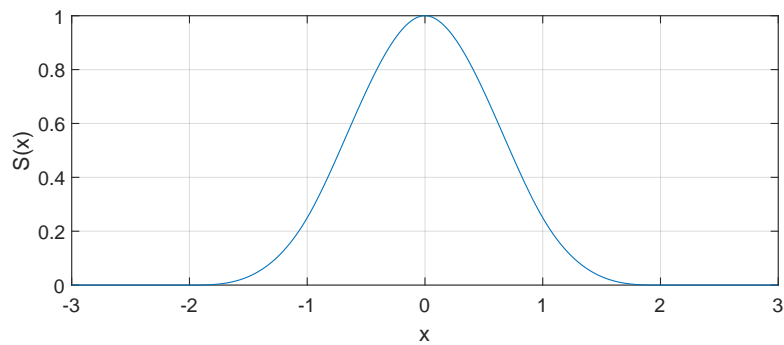


Figura 3: Representación de una función base cúbica

Con estas funciones base, podemos expresar la solución numérica como

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i \phi_i(x),$$

donde definimos las funciones base (centrales) $\phi_i \in \mathcal{C}_0^2[0, 1]$ como

$$\phi_i(x) = S\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad i = 2, 3, \dots, n-1,$$

donde $h = 1/(n+1)$ y $x_i = ih$. Notemos que es necesario ajustar la definición en los nodos cercanos a la frontera del intervalo,

$$\begin{aligned} \phi_0(x) &= S\left(\frac{x}{h}\right) - 4S\left(\frac{x+h}{h}\right), & \phi_1(x) &= S\left(\frac{x-h}{h}\right) - S\left(\frac{x+h}{h}\right), \\ \phi_n(x) &= S\left(\frac{x-nh}{h}\right) - S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right), & \phi_{n+1}(x) &= S\left(\frac{x-(n+1)h}{h}\right) - 4S\left(\frac{x-(n+2)h}{h}\right). \end{aligned}$$

Así pues, trabajaremos con un conjunto de funciones $\phi_i, i = 0, 1, \dots, n, n+1$ linealmente independientes. En la Figura 4 se muestra un ejemplo de estas funciones para $n = 4$.

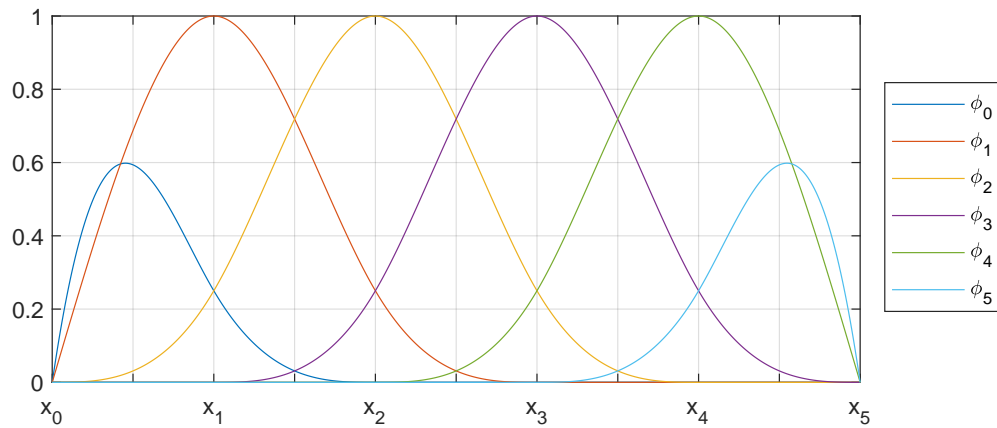


Figura 4: Funciones de ponderación cúbicas para $n = 4$

Estas funciones de ponderación cumplen las siguientes propiedades:

- ▶ Son linealmente independientes
- ▶ $\phi_i(x)$ es no nula como mucho en el intervalo $[x_{i-2}, x_{i+2}]$
- ▶ $\phi'_i(x)$ es no nula como mucho en el intervalo $[x_{i-2}, x_{i+2}]$
- ▶ $\phi_i(x)\phi_j(x) = 0$, excepto en determinados valores de j
- ▶ $\phi'_i(x)\phi'_j(x) = 0$ excepto en determinados valores de j

El siguiente paso consistiría en obtener las expresiones de los términos a_{ij} de la matriz A , los términos b_j de la matriz b y resolver el sistema de ecuaciones lineales. Se puede probar que la utilización de estas funciones base no lineales proporciona aproximaciones de la solución de orden 4.

9.4 Ejercicios resueltos

Ejercicio 1. Obtén la solución del problema de contorno

$$-y'' + 2y = -4 + e^{-x} - \frac{2}{e}x + 2x^2, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = y(1) = 0,$$

mediante la técnica de Rayleigh-Ritz lineal, tomando 11 nodos equiespaciados.

Solución. Aplicando directamente el algoritmo implementado RRlin.m,

```
>> c=RRlin(@(x) 1+0*x, @(x) 2+0*x, @(x) ...
-4+exp(-x)-2/exp(1)*x+2*x.^2, 0:.1:1, 10)
```

obtenemos los resultados que se muestran en la Tabla 2.

x_i	$\phi(x_i)$
0.0000	0.0000
0.1000	-0.1221
0.2000	-0.2151
0.3000	-0.2799
0.4000	-0.3173
0.5000	-0.3279
0.6000	-0.3123
0.7000	-0.2713
0.8000	-0.2053
0.9000	-0.1147
1.0000	0.0000

Tabla 2: Resultados del Ejercicio 1

Ejercicio 2. Consideremos el siguiente problema de frontera

$$\begin{aligned} -y'' + 4y &= 4x(1 - e^{-2}), \quad x \in [0, 1] \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

- (a) Utiliza las funciones $\phi_k(x) = \sin(k\pi x)$, $k = 1, 2, \dots, 5$, para encontrar una aproximación del problema (2) por elementos finitos.

(b) Sabiendo que la solución exacta del problema es

$$y(x) = \frac{1}{1+e^2}e^{-2x} - \frac{1}{1+e^2}e^{2x} + (1-e^{-2})x$$

determina el error cometido en cada nodo.

Solución.

(a) Consideremos la función $\phi(x) = \sum_{k=1}^5 c_k \sin(k\pi x)$. Vamos a determinar el valor de las constantes c_1, c_2, \dots, c_5 de tal manera que $\phi(x)$ minimice el funcional I definido en este capítulo. Siguiendo los pasos descritos, obtenemos un sistema lineal, de tamaño 5×5 , con incógnitas c_1, c_2, \dots, c_5 . La solución de este sistema es

$$C \approx (0.15745, -0.024483, 0.0073126, -0.0029401, 0.0013794)^T.$$

La función $\phi(x)$ es una aproximación a la solución del problema de frontera. El valor de esta función en los nodos utilizados en los apartados anteriores se muestra en la Tabla 3.

x_i	$\phi(x_i)$
0	0.00000
0.1	0.03876
0.2	0.07449
0.3	0.10670
0.4	0.13385
0.5	0.15151
0.6	0.15704
0.7	0.14981
0.8	0.12451
0.9	0.07314
1	0.00000

Tabla 3: Solución aproximada del Ejercicio 2 por elementos finitos

- (b) En la Tabla 4, mostramos el valor de la solución exacta en cada uno de los nodos que hemos utilizado a lo largo del problema y el error cometido con la aproximación de elementos finitos, $e_i = |\phi(x_i) - y(x_i)|$, en cada nodo.

x_i	$\phi(x_i)$	e_i
0	0	0
0.1	0.038467	2.9528e-04
0.2	0.075007	5.2070e-04
0.3	0.107617	9.1701e-04
0.4	0.134136	2.8889e-04
0.5	0.152158	6.4490e-04
0.6	0.158934	1.8985e-03
0.7	0.151269	1.4558e-03
0.8	0.125382	8.7098e-04
0.9	0.076767	3.6312e-03
1	0	3.0250e-17

Tabla 4: Solución exacta y errores



Accede al vídeo: Implementación y ejecución del método paso a paso

Ejercicio 3.

(a) Demuestra que el problema de frontera:

$$-\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x) \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta, \quad (3)$$

puede transformarse con el cambio de variable $z = y - \beta x - (1 - x)\alpha$ en

$$-\frac{d}{dx}(p(x)z') + q(x)z = F(x) \quad x \in [0, 1], \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0. \quad (4)$$

(b) Utiliza el anterior cambio de variable y el método de Rayleigh-Ritz con elementos lineales (utiliza el método de Simpson en la aproximación de las integrales)

para estimar la solución al problema de frontera:

$$-y'' + y = x, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1 + e^{-1}.$$

Emplea para ello una partición de 10 subintervalos sobre $[0, 1]$.

- (c) Sabiendo que $y = x + e^{-x}$ es la solución exacta del problema del apartado b), determina el error cometido en la aproximación anterior.

Solución.

- (a) Directamente del cambio $z = y - \beta x - (1-x)\alpha$ deducimos que $y' = z' + \beta - \alpha$ e $y'' = z''$. Sustituyendo en la ecuación diferencial del problema (7) obtenemos:

$$-p'(x)(z' + \beta - \alpha) - p(x)z'' + q(x)(z + \beta x + (1-x)\alpha) = f(x),$$

es decir,

$$-\frac{d}{dx}(p(x)z') + q(x)z = f(x) + p'(x)(\beta - \alpha) + q(x)(\beta x + (1-x)\alpha) = F(x)$$

y en las condiciones de frontera:

$$z(0) = y(0) - 0 - (1-0)\alpha = 0,$$

$$z(1) = y(1) - \beta - (1-1)\alpha = 0,$$

obtenemos el problema de frontera (8).

- (b) Aplicamos el cambio de variable $z = y - \beta x - (1-x)\alpha$ sobre el problema de frontera:

$$-y'' + y = x, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1 + e^{-1}, \quad (5)$$

donde $\alpha = 1, \beta = 1 + e^{-1}$ y resulta el problema de contorno:

$$-z'' + z = (1 - e^{-1})x - 1, \quad x \in [0, 1], \quad z(0) = 0, \quad z(1) = 0, \quad (6)$$

sobre el que podemos aplicar el método de Rayleigh-Ritz. Este método aproxima la solución del problema (6) mediante la combinación lineal $z(x) \approx \phi(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x)$ de funciones base lineales a trozos $\phi_i(x)$.

Para ello, utilizaremos la función `RRlin.m` (modificada para utilizar la cuadratura de Simpson) sobre una partición del intervalo $[0, 1]$ definida por $x_i = ih$, donde $h = 1/10$. Así pues, las funciones de x que intervienen en la ecuación diferencial son $p(x) = 1$, $q(x) = 1$ y $F(x) = (1 - e^{-1})x - 1$. Utilizamos también una partición de 10 subintervalos en cada una de las aproximaciones por Simpson de las integrales que proporcionan los elementos de la matriz de coeficientes y los términos independientes del sistema.

Ejecutando el código, obtenemos el vector de coeficientes

$$c = \begin{pmatrix} -0.031975, \\ -0.054887, \\ -0.069599, \\ -0.076890, \\ -0.077468, \\ -0.071970, \\ -0.060976, \\ -0.045009, \\ -0.024540 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la aproximación de la solución en el intervalo $[0, 1]$ es la función $\phi(x) = \sum_{i=1}^9 c_i \phi_i(x)$ que, evaluada sobre los puntos de la partición x_i , coincide con las componentes del vector c .

- (c) En la Tabla 5 mostramos la solución exacta, evaluada en los nodos que hemos utilizado a lo largo del problema, y el error cometido por la aproximación obtenida por el método de elementos finitos.

x_i	$y(x_i)$	$ y(x_i) - \phi(x_i) $
0	0	0
0.1	-0.031950	0.246681e-4
0.2	-0.054845	0.420202e-4
0.3	-0.069546	0.529500e-4
0.4	-0.076832	0.582182e-4
0.5	-0.077409	0.584667e-4
0.6	-0.071916	0.542313e-4
0.7	-0.060930	0.459518e-4
0.8	-0.044975	0.339821e-4
0.9	-0.024522	0.185970e-4
1	0	0

Tabla 5: Solución exacta y error en cada nodo

Notemos que si llevamos a cabo una partición del intervalo $[0, 1]$ mucho más fina, con 100 subintervalos, los resultados que proporciona el método de elementos finitos son considerablemente mejores, con un error en norma euclíde aproximadamente 1.359880×10^{-6} .

9.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4. Utiliza el método de Rayleigh-Ritz con elementos lineales para aproximar la solución del problema de contorno

$$-\frac{d}{dx}(xy') + 4y = 4x^2 - 8x + 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

utilizando 20 subintervalos y compara los resultados obtenidos con la solución exacta $y(x) = x^2 - x$, calculando el error exacto máximo e indicando en qué nodo se ha alcanzado.

Ejercicio 5. Consideremos el problema de contorno

$$-\frac{d}{dx}(e^x y') + e^x y = x + (2-x)e^x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Aproxima, mediante el método de Rayleigh-Ritz con elementos lineales y paso $h = 0.1$ la solución de este problema. Calcula el máximo error cometido en la aproximación, teniendo en cuenta que la solución exacta es $y(x) = (x-1)(e^{-x} - 1)$.

Ejercicio 6.

(a) Demuestra que el problema de frontera:

$$-\frac{d}{dx}(p(x)y') + q(x)y = f(x) \quad x \in [a, b], \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \quad (7)$$

puede transformarse con el cambio de variable $w = \frac{x-a}{b-a}$ en

$$-\frac{d}{dw}(p(w)z') + q(w)z = F(w) \quad w \in [0, 1], \quad z(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (8)$$

(b) Utiliza el anterior cambio de variable y el método de Rayleigh-Ritz con elementos lineales para estimar la solución al problema de frontera:

$$-x^2 y'' - 2xy' + 2y = -4x^2, \quad x \in [1, 3], \quad y(1) = 0, \quad y(3) = 6.$$

Emplea para ello una partición de 10 subintervalos.

(c) Sabiendo que $y(x) = x^2 - x$ es la solución exacta del problema del apartado b), determina el error cometido en la aproximación anterior.

Ejercicio 7. Utiliza el cambio de variable propuesto en el Ejercicio 3 para aproximar la solución del problema de contorno

$$-y'' + y = x, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1 + e^{-1},$$

mediante el método de Rayleigh-Ritz con elementos lineales y 10 subintervalos.

Ejercicio 8. Utiliza el cambio de variable propuesto en el Ejercicio 6 para aproximar la solución del problema de contorno

$$-\frac{d}{dx} (e^{-x}y') + e^{-x}y = (x-1) - (x+1)e^{-(x-1)}, \quad 1 \leq x \leq 2,$$

con condiciones de contorno

$$y(1) = 0, \quad y(2) = 2e(e-1),$$

mediante el método de Rayleigh-Ritz con elementos lineales y 20 subintervalos. Teniendo en cuenta que la solución exacta es $y(x) = x(e^x - e)$, calcula el error exacto en cada nodo y represéntalo gráficamente.