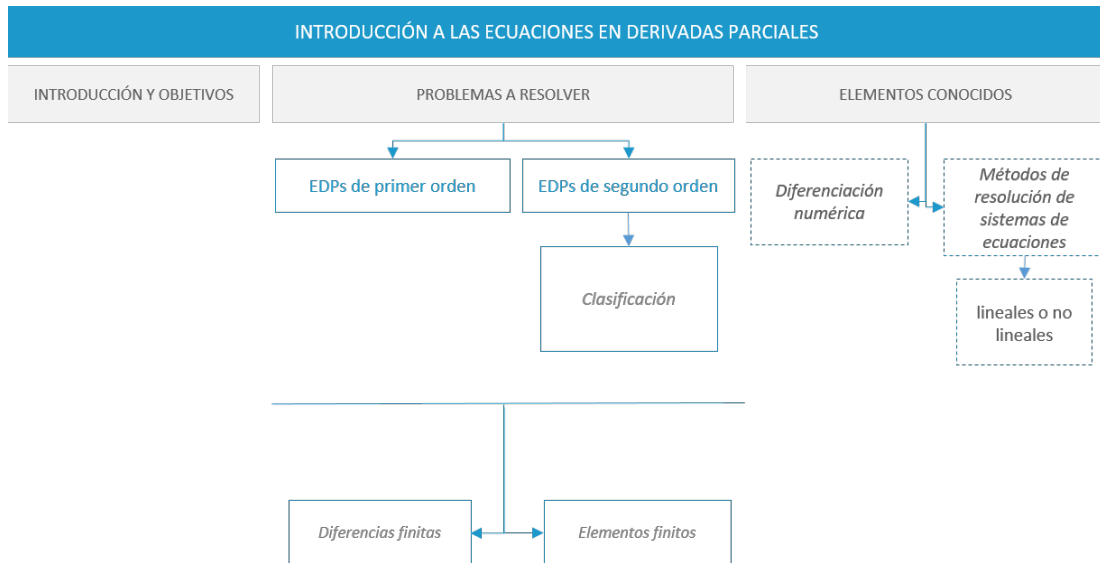


Métodos Numéricos II

Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales

Índice

Esquema.	2
Ideas clave	3
4.1 Introducción y objetivos	3
4.2 Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden . . .	4
4.3 Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden . .	6
4.4 Técnicas numéricas de resolución.	12
4.5 Referencias bibliográficas	21



4.1 Introducción y objetivos

El estudio de las ecuaciones en derivadas parciales o EDPs se inició en el siglo XVIII con los trabajos de los suizos d'Alembert y Euler y los franceses Lagrange y Laplace, en el contexto de la modelización matemática de fenómenos de la Física del Medio Continuo.

En la actualidad, permiten modelizar numerosos problemas físicos, de mecánica de fluidos, de elasticidad, aerodinámicos, de ondas de cualquier tipo, de convección-difusión, distribución de calor, potencial, problemas de economía (Modelos de Black-Scholes), campos electromagnéticos (Ecuaciones de Maxwell), Astronomía, Electricidad, etc. Véanse, por ejemplo, (Myint-U and Debnath, 2007) y (Larsson and Thome, 2016).

De manera imprecisa, una EDP es una ecuación que involucra una función desconocida $u(x, y, \dots)$ que depende al menos de dos variables independientes y algunas de sus derivadas parciales.

Llamamos orden de la EDP al mayor de los órdenes de las derivadas parciales que aparecen en la ecuación. En esta asignatura, trabajaremos fundamentalmente con ecuaciones de primer y segundo orden, que suelen ir acompañada de condiciones de contorno y/o condiciones iniciales.

Los objetivos a alcanzar en este tema son:

- Introducir los problemas descritos mediante ecuaciones en derivadas parciales

- ▶ Definir los problemas de primer orden
- ▶ Definir y clasificar los problemas de segundo orden
- ▶ Introducir las herramientas que nos permitirán resolver los problemas de segundo orden en los siguientes capítulos

4.2 Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

Sea $N \geq 1$ un número natural. Una EDP de primer orden en las N variables independientes x_1, x_2, \dots, x_N , es cualquier expresión de la forma

$$F(x_1, \dots, x_N, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_N}) = 0,$$

donde $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\forall i$, F es una función continua en un abierto Ω de \mathbb{R}^{2N+1} y u es la función incógnita o variable dependiente de x_1, x_2, \dots, x_N .

Ejemplo 1.

$2xu_x - y = 2u_y - u$ es una ecuación de primer orden con x e y como variables independientes y $u(x, y)$ como función incógnita.

Aunque nuestro objetivo general es resolver numéricamente problemas descritos por ecuaciones en derivadas parciales, desarrollaremos a continuación el proceso inverso, lo que nos proporcionará una idea clara de qué tipo de soluciones buscamos.

Consideremos un sistema de superficies dado por la ecuación

$$f(x, y, z, a, b) = 0, \tag{1}$$

donde a y b son parámetros arbitrarios. Derivamos la ecuación respecto de x e y , ob-

teniendo

$$f_x + z_x f_z = 0, \quad f_y + z_y f_z = 0.$$

El conjunto de estas tres ecuaciones involucra dos parámetros arbitrarios a y b . En general, podemos eliminar estos parámetros para obtener una ecuación de la forma

$$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0. \quad (2)$$

La ecuación (1), conteniendo dos parámetros arbitrarios, recibe el nombre de solución completa o integral completa de la ecuación (2).

Por otra parte, cualquier relación de la forma

$$f(\phi, \psi) = 0,$$

que implica una función arbitraria f de dos funciones conocidas $\phi = \phi(x, y, z)$ y $\psi = \psi(x, y, z)$ y proporciona una solución de una EDP de primer orden se llama solución general o integral general de esta ecuación.

La solución general de una EDP de primer orden con dos variables independientes depende de una función arbitraria. Esta solución general se puede obtener a partir de su integral completa.

Ejemplo 2.

Vamos a probar que la familia de esferas

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = r^2,$$

satisfacen la EDP lineal de primer orden

$$yz_x - xz_y = 0.$$

Diferenciando la familia de esferas respecto de x e y , obtenemos

$$x + z_x(z - c) = 0, \quad y + z_y(z - c) = 0,$$

y eliminando la constante c de estas ecuaciones, resulta

$$yz_x - xz_y = 0.$$

Ejemplo 3.

Consideremos la familia de esferas

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2,$$

es la solución general de la EDP no lineal de primer orden

$$z^2(z_x^2 + z_y^2 + 1) = r^2.$$

Derivando parcialmente la familia de esferas respecto de x e y , obtenemos

$$(x - a) + zz_x = 0, \quad (y - b) + zz_y = 0.$$

Eliminando a y b de estas ecuaciones resulta

$$z^2(z_x^2 + z_y^2 + 1) = r^2.$$

4.3 Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

En el contexto de problemas de contorno multidimensionales, nos vamos a encontrar con problemas tan importantes como los de convección-difusión, problemas que modelizan diferentes tipos de ondas, acústicas, electromagnéticas, etc. y las ecuaciones de Laplace y de Poisson.

Estos problemas vienen descritos por una ecuación en derivadas parciales y condicio-

nes de contorno e iniciales. Suele haber una función incógnita u que depende, como máximo de las tres variables espaciales x , y y z y de la variable temporal t .

Consideremos la EDP de segundo orden en dos variables

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Supongamos que $u(x, y) = P(x, y) + \phi(y) + \varphi(x)$ es la solución general, para $\phi(y)$ y $\varphi(x)$ funciones arbitrarias. Para cada elección particular de $\phi(y)$ y $\varphi(x)$, la solución la podemos expresar como $z = f(x, y)$, lo que se interpreta geométricamente como una superficie en el sistema cartesiano XYZ .

Para funciones arbitrarias $\phi(y)$ y $\varphi(x)$, obtenemos una familia de superficies cada miembro de la cual corresponde a una selección particular de $\phi(y)$ y $\varphi(x)$, esto es, una solución particular.

Estas ideas se pueden generalizar a los casos donde hay mas de dos variables independientes. Así por ejemplo, tendríamos que una solución $u(x, y, z)$ de una EDP de tres variables la podríamos interpretar geométricamente como la hipersuperficie $p = u(x, y, z)$ en 4 dimensiones.

Algunos ejemplos significativos en este ámbito son:

Ejemplo 4. Problema parabólico

La distribución de temperatura en una varilla de longitud L , cuyos extremos están a 0 grados y en el instante inicial se le inyecta una fuente de calor representada por una función f , se modeliza mediante la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0, t) = u(L, t) = 0, t > 0$, y la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, para cualquier valor de x en el intervalo $[0, L]$.

Queremos aproximar el valor de la temperatura en muchos puntos de esa varilla elegidos de una determinada manera.

Ejemplo 5. Problema parabólico bidimensional

Los problemas de difusión del calor en cuerpos planos rectangulares (dos dimensiones espaciales x e y), vienen descritos por una ecuación parabólica con condición inicial y condiciones de frontera

$$\begin{aligned}u_t(x, y, t) &= \alpha^2 u_{xx}(x, y, t) + \beta^2 u_{yy}(x, y, t), \quad (x, y) \in R = [a, b] \times [c, d], \quad t \geq 0 \\u(x, y, 0) &= f(x, y), \\u(a, y, t) &= h_1(y, t), \quad u(b, y, t) = h_2(y, t), \\u(x, c, t) &= h_3(x, t), \quad u(x, d, t) = h_4(x, t).\end{aligned}$$

donde las dimensiones del cuerpo son $[a, b] \times [c, d]$.

Ejemplo 6. Ecuación de Burgers

Un ejemplo particularmente interesante de problema parabólico, por su aplicabilidad en numerosos problemas de Ciencias e Ingeniería, es la ecuación de Burgers, ecuación en derivadas parciales no lineal que modeliza problemas de dinámica de fluidos, dinámica de gases, problemas de transporte, etc.

$$u_t(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) = cu_{xx}, \quad x \in (a, b), \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (a, b),$$

$$u(a, t) = g_1(t), \quad u(b, t) = g_2(t), \quad t > 0.$$

Necesitamos encontrar aproximaciones de la solución en puntos del intervalo $[a, b]$ y en el instante de tiempo que se desee.

Las ondas de un instrumento musical, las ondas sísmicas, las ondas que provoca una piedra en el agua, las ondas de la luz, las ondas de aparatos electrónicos y otros muchos ejemplos se pueden modelizar mediante los llamados problemas hiperbólicos,

en los que aparece una ecuación en derivadas parciales acompañada de condiciones de contorno y condiciones iniciales.

Ejemplo 7. Ecuación de ondas

Este podría ser uno de los problemas hiperbólicos más sencillos, en el que la ecuación involucrada es unidimensional (sólo aparece una variable espacial) y las condiciones de contorno son Dirichlet

$$u_{tt}(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0,$$

$$\text{condiciones de contorno } u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$\text{condiciones iniciales } u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [a, b],$$

donde α es un número real en el que intervienen constantes físicas, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones reales.

¿Cómo podemos aproximar el valor de la función u en cualquier $x \in [a, b]$ y cualquier instante de tiempo?

Ejemplo 8. Ecuación del telégrafo

La siguiente ecuación en derivadas parciales que describe este problema se conoce como la ecuación del telégrafo. Se trata de un problema hiperbólico con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas y condiciones iniciales

$$u_{tt} + u_t + 2u = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0, t) = u(1, t) = 0$ y las condiciones iniciales $u(x, 0) = \sin(\pi x)$ y $u_t(x, 0) = 0$.

Al igual que en el resto de problemas, queremos encontrar valores aproximados de la solución para $x \in [0, 1]$ y cualquier instante de tiempo.

A diferencia de los dos ejemplos anteriores, en el siguiente se plantea un problema

hiperbólico bidimensional (dos variables espaciales) con sus correspondientes condiciones iniciales y de contorno

Ejemplo 9. Ecuación de ondas bidimensional

La ecuación en derivadas parciales que describe el problema es

$$u_{tt}(x, y, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, y, t) + \beta^2 u_{yy}(x, y, t), \quad (x, y) \in R = [a, b] \times [c, d], \quad t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno

$$u(a, y, t) = h_1(y, t), \quad t \geq 0,$$

$$u(b, y, t) = h_2(y, t), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, c, t) = h_3(x, t), \quad t \geq 0,$$

$$u(x, d, t) = h_4(x, t), \quad t \geq 0,$$

con $h_i, i = 1, 2, 3, 4$, funciones conocidas de las variables correspondientes y las condiciones iniciales

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y) \in R = [a, b] \times [c, d],$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y), \quad (x, y) \in R = [a, b] \times [c, d].$$

Otro grupo dentro de este tipo de problemas son los descritos por ecuaciones elípticas. Estas ecuaciones surgen de manera natural en el estudio de problemas físicos independientes del tiempo, como la distribución de calor en una región plana, la energía potencial de un punto en el plano bajo la acción de fuerzas gravitacionales y problemas estacionarios acerca de fluidos incompresibles.

Ejemplo 10. Problema elíptico.

Este ejemplo describe un problema elíptico de Poisson, en un dominio rectangular $[a, b] \times [c, d]$, y con condiciones de contorno en toda la frontera de dicho dominio. Se pretende aproximar el valor de la función solución $u(x, y)$ en cual-

quier punto interior del dominio.

$$\nabla^2 u(x, y) \equiv u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in R,$$

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ para } (x, y) \in S,$$

donde $R = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ y S es la frontera de R .

Ejemplo 11. Ecuación de Helmholtz

Problema elíptico en un dominio rectangular con numerosas aplicaciones en electromagnetismo, termodinámica, etc.

$$u_{xx} + u_{yy} = -4u, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1,$$

con las condiciones de contorno

$$u(x, 0) = \cos(2x), \quad u(x, 1) = \cos(2x) + \sin 2, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0, y) = \sin(2y) + 1, \quad u(1, y) = \sin(2y) + \cos 2, \quad y \in [0, 1].$$

En términos generales, consideremos la ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden

$$A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y),$$

definida en una región del plano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Diremos que la ecuación es:

- ▶ Hiperbólica en Ω si $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ para todo punto de Ω .
- ▶ Parabólica en Ω si $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ para todo punto de Ω .
- ▶ Elíptica en Ω si $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ para todo punto de Ω .

Ejemplo 12. Ejemplos

- ◇ Las ecuaciones $u_{xx} = u_{yy}$ y $u_{xy} = 0$ son hiperbólicas en cualquier región de \mathbb{R}^2 .
- ◇ La ecuación $u_x = u_{yy} + e^{-xy}$ es parabólica en cualquier región de \mathbb{R}^2 .
- ◇ La ecuación $u_{xy} - 2u_{xx} - 3u_{yy} = \sin xy$ es elíptica en cualquier región de \mathbb{R}^2 .
- ◇ La ecuación $yu_{xx} + y_{yy} = 0$ es
 - elíptica en el semiplano $y > 0$,
 - parabólica en la recta $y = 0$,
 - hiperbólica en el semiplano $y < 0$.

4.4 Técnicas numéricas de resolución

Las técnicas que vamos a utilizar para resolver los problemas modelizados mediante EDPs van a ser los métodos en diferencias finitas a lo largo de los siguientes cuatro temas y la de elementos finitos en los dos últimos.

Mediante la técnica de diferencias finitas, el problema de contorno se transforma en un sistema lineal o no lineal que resolveremos con los procedimientos desarrollados en la asignatura Métodos Numéricos I: Método de Gauss, algoritmo de Crout, método de Newton, etc.

Diferencias finitas

Las diferencias finitas son aproximaciones de las derivadas parciales de la función $u(x, t)$ respecto de alguna de las variables de las que depende y de cualquier orden. Su expresión no es más que una combinación lineal de la función $u(x, t)$ evaluada en distintos puntos. Concretamente, la diferencia progresiva,

$$u_x(x, t) \approx \frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h}, \quad u_t(x, t) \approx \frac{u(x, t + k) - u(x, t)}{k},$$

es una aproximación en la que se comete un error de orden $O(h)$, así como la diferencia regresiva,

$$u_x(x, t) \approx \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h}, \quad u_t(x, t) \approx \frac{u(x, t) - u(x, t - k)}{k},$$

que también es una aproximación de orden $O(h)$ de la derivada parcial. Sin embargo, la diferencia central o simétrica,

$$u_x(x, t) \approx \frac{u(x + h, t) - u(x - h, t)}{2h},$$

es una aproximación de segundo orden, $O(h^2)$.

A partir de estas aproximaciones, es posible diseñar diferencias progresivas, regresivas y centrales para derivadas de cualquier orden cometiendo errores de orden $O(h)$ o $O(h^2)$ al igual que en las derivadas primeras. Así, la aproximación con diferencias simétricas de una derivada parcial de segundo orden es

$$u_{xx}(x, t) \approx \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2}.$$

La aplicación de estas aproximaciones al problema lo transforman en un esquema en diferencias, que se puede resolver de forma explícita (mediante cálculos directos) o implícita, mediante la resolución de sistemas de ecuaciones, lineales o no lineales.

Ejemplo 13. Método de Lax-Friedrichs

Consideremos la EDP de primer orden

$$u_t(x, t) + au_x(x, t) = 0, \quad a > 0, \quad x \in [0, L], \quad t > 0,$$

sujeta a las condiciones $u(0, t) = cc_1(t), u(L, t) = cc_2(t), t > 0; \quad u(x, 0) = ci(x), x \in [0, L]$. Aplicando diferencias progresivas para aproximar u_t y centrales en el caso de u_x , obtenemos

$$\frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} + a \frac{u(x+h, t) - u(x-h, t)}{2h} = 0.$$

Dados los pasos espacial $h = \frac{L}{nx}$ y temporal $k = \frac{T}{nt}$, definimos los nodos $x_i = 0 + ih, i = 0, 1, 2, \dots, nx-1, nx$ y $t_j = 0 + jk, j = 0, 1, \dots, nt-1, nt$. Evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, t_j)

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + a \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad i = 1, \dots, nx-1, j = 1, \dots, nt-1.$$

Denotamos por $\lambda = \frac{ak}{h}$ y despejamos las incógnitas del instante mayor,

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}), \quad i = 1, \dots, nx-1, j = 1, \dots, nt-1,$$

generando un esquema incondicionalmente inestable. Sin embargo, si reemplazamos $u_{i,j}$ por el promedio de $u_{i-1,j}$ y $u_{i+1,j}$, obtenemos el esquema de Lax-Friedrichs,

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j} - u_{i-1,j}),$$

$i = 1, \dots, nx-1, j = 1, \dots, nt-1$. Puede probarse que el error de truncamiento es de orden $O(k + h)$ y que el esquema es estable si $\lambda \leq 1$. La implementación en Matlab de este método se muestra a continuación.



Esquema explícito de Lax-Friedrichs

```
function [U,x,t] = ...
    Lax_Fri(cc1,cc2,ci,a,L,nx,Tmax,nt)
% Metodo de Lax-Friedrichs

h=L/nx;      x=0:h:L;
k=Tmax/nt;   t=0:k:Tmax;
c1t=feval(cc1,t);   c2t=feval(cc2,t);
cix=feval(ci,x);
U=zeros(nx+1,nt+1);
U(1,:)=c1t; U(nx+1,:)=c2t; U(:,1)=cix';
U(1,1)=(c1t(1)+cix(1))/2;
U(end,1)=(c2t(1)+cix(end))/2;
lambda=k*a/h;
if lambda>1
    disp('No se cumple la condicion de ...
        estabilidad')
else
    disp('sin problema')
end
for j=1:nt
    for i=2:nx
        U(i,j+1)=(1/2)*(U(i+1,j)+U(i-1,j))....
            -lambda/2*(U(i+1,j)-U(i-1,j));
    end
end
end
```


En el caso particular en que $a = 5$, $L = 2$, $cc_1(t) = e^{-25t^2}$, $cc_2(t) = e^{-(2-5t)^2}$ y $ci(x) = e^{-x^2}$, busquemos la solución aproximada en $T = 2$ mediante el método Lax-Friedrichs con:

(a) $h = 0.2$, $k = 0.01$,

(b) $h = 0.2$, $k = 0.1$,

obteniendo los resultados que se muestran en la Tabla 1.

x_i	$u_{i,200}$	$ u(x_i, 2) - u_{i,200} $	$u_{i,20}$	$ u(x_i, 2) - u_{i,20} $
0.0	1.3888e-11	0	1.3888e-11	0
0.2	5.0852e-05	1.8642e-07	-8.0791e+04	8.0791e+04
0.4	1.2559e-04	4.5550e-07	9.1897e+04	9.1897e+04
0.6	2.2532e-04	8.1344e-07	4.6340e+05	4.6340e+05
0.8	3.4670e-04	1.2283e-06	-3.1233e+05	3.1233e+05
1	4.7940e-04	1.6758e-06	-1.1969e+06	1.1969e+06
1.2	6.0312e-04	2.0472e-06	6.3009e+05	6.3009e+05
1.4	6.8477e-04	2.2595e-06	1.9981e+06	1.9981e+06
1.6	6.7619e-04	2.1088e-06	-7.9489e+05	7.9489e+05
1.8	5.1411e-04	1.4384e-06	-1.6379e+06	1.6379e+06
2.0	1.2341e-04	0	1.2341e-04	0

Tabla 1: Resultados numéricos del método de Lax-Friedrichs.



Accede al vídeo: Discretización y resolución de una EDP de primer orden mediante el método de Lax-Friedrichs

Sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones lineales tienen la expresión $Ax = b$, donde A es una matriz de tamaño $n \times n$ y b es un vector de \mathbb{R}^n . Dado que, en general trabajaremos con sistemas de gran tamaño, debemos evitar siempre utilizar, para resolver el sistema, el método de la inversa o el método de Cramer. Aunque el algoritmo recomendado es el método de eliminación de Gauss, utilizaremos siempre que sea posible algunas de sus variantes, con menor coste computacional, como el algoritmo de Crout, que es el método más eficiente para resolver un sistema lineal cuando la matriz de coeficientes es tridiagonal. Fundamentalmente, es una adaptación de la factorización LU en la que se utilizan únicamente los elementos no nulos de la matriz A . Este algoritmo se ha utilizado ya en la resolución de los problemas de contorno unidimensionales, por lo que nos remitimos al Tema 3 para su revisión.

Los sistemas no lineales se expresan en general de la forma $F(x) = 0$, donde F es una función vectorial de varias variables, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Para estos sistemas, en general, no existen métodos directos de resolución y tenemos que recurrir a métodos iterativos que nos proporcionen valores aproximados de la solución. Uno de los métodos mas conocidos es el método de Newton, cuya expresión iterativa es

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots,$$

donde $F'(x^{(k)})$ es la matriz Jacobiana evaluada en el iterado $x^{(k)}$ y $x^{(0)}$ es la aproximación inicial. Además, conviene recordar que el cálculo de inversas es numéricamente inestable, por lo que, en general, en cada iteración del método de Newton el nuevo iterado se calculará mediante la expresión

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - d^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

siendo $d^{(k)}$ la solución del sistema lineal

$$F'(x^{(k)}) \cdot d^{(k)} = F(x^{(k)}),$$

que se obtendrá mediante técnicas directas o iterativas en función de la estructura y tamaño de la matriz $F'(x^{(k)})$.

Convergencia y estabilidad

Dada una EDP (con sus correspondientes condiciones de contorno y/o iniciales), una vez diseñado un método de aproximación de su solución mediante diferencias finitas, ha de analizarse el error cometido en la aproximación. Además, es conveniente saber si el comportamiento del método dependerá del tamaño de paso utilizado en las aproximaciones de las derivadas parciales (convergencia condicionada) o es independiente de la partición llevada a cabo en los intervalos de definición de las variables independientes (método incondicionalmente convergente). Así, si la función incógnita $u(x, t)$ depende de las variables independientes $x \in [a, b]$ y $t \in [0, T]$, llevamos a cabo sendas particiones de pasos $h = \frac{b-a}{nx}$ y $k = \frac{T}{nt}$, siendo nx y nt el número de subintervalos utilizados para cada variable independiente y definimos los nodos $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, nx$ y $t_j = 0 + jk, j = 0, 1, \dots, nt$.

Definición 1: Convergencia

Denotemos por $U(x, t)$ a la solución exacta de la EDP y por $u_{i,j} \equiv u(x_i, t_j)$ a la solución exacta de la ecuación en diferencias finitas $F(u_{i,j}) = 0$, obtenida tras la discretización. Diremos que el esquema en diferencias finitas es convergente si

$$u_{i,j} \rightarrow U(x_i, t_j), \quad \text{cuando} \quad h, k \rightarrow 0.$$

Definición 2: Error de truncamiento

La diferencia

$$e_{i,j} = U_{i,j} - u_{i,j} = U(x_i, t_j) - u(x_i, t_j),$$

recibe el nombre de error de truncamiento o de discretización. Sin embargo, si la solución exacta del esquema en diferencias $u_{i,j}$ es reemplazada por $U_{i,j}$ en los puntos $P_{i,j}$, entonces el valor $F(U_{i,j})$ se llama error de truncamiento local en $P_{i,j}$.

En general, este error se minimiza a medida que los pasos h y k disminuyen. Sin embargo, no sólo depende de h y de k sino también del número de términos en el truncamiento de la serie de Taylor.

Definición 3: Consistencia

Por otra parte, el esquema en diferencias finitas se dice que es consistente si

$$F(U_{i,j}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad h, k \rightarrow 0.$$

No debemos olvidar el error de redondeo, que depende del tipo de ordenador. En la práctica, la solución calculada es $u_{i,j}^*$ no $u_{i,j}$.

Definición 4: Error de redondeo

El error de redondeo en el punto $P_{i,j}$ es

$$r_{i,j} = u_{i,j} - u_{i,j}^*.$$

Este error no se reduce cuando los pasos espacial y temporal tienden a cero, más bien se produce el efecto contrario.

Definición 5: Error total

El error total que aparece en un esquema en diferencias finitas en $P_{i,j}$ es

$$U_{i,j} - u_{i,j}^* = (U_{i,j} - u_{i,j}) + (u_{i,j} - u_{i,j}^*) = e_{i,j} + r_{i,j}.$$

Usualmente, el error de discretización $e_{i,j}$ está acotado cuando $u_{i,j}$ está acotada, ya que $U_{i,j}$ es fija para una EDP dada. Este hecho es asumido para introducir el concepto de estabilidad.

Definición 6: Estabilidad

El esquema en diferencias finitas se dice que es estable si el error de redondeo es suficientemente pequeño para todo i, j tendiendo a $+\infty$, es decir, el crecimiento de $r_{i,j}$ está acotado.

Lax en 1954 estableció la siguiente relación entre estos conceptos.

Teorema 1: Teorema de Lax

Dado un problema contorno-inicial modelizado por una EDP lineal y su correspondiente aproximación en diferencias finitas que satisfaga el criterio de consistencia, entonces estabilidad y convergencia son equivalentes.



Accede al vídeo: Estabilidad del método de Lax-Friedrichs para la resolución de EDPs de primer orden

Por otra parte, en Temas 9 y 10 se tratará la resolución de problemas de contorno multidimensionales mediante la técnica de elementos finitos. A continuación introduciremos brevemente esta técnica, aunque proporcionaremos sus fundamentos teóricos en el Tema 9 (véase (Girault and Raviart, 1986)) para el caso unidimensional y en el Tema 10 para el multidimensional.

El método de diferencias finitas es de gran utilidad para dominios de integración regulares. Sin embargo, cuando el dominio del problema dispone de una geometría irregular, el método de diferencias finitas resulta extremadamente complicado de aplicar. El método de los elementos finitos vence los problemas de la geometría irregular de los dominios. Su esencia está en dividir el dominio en elementos, y desarrollar la solución para cada uno de esos elementos. La Figura 1 muestra cómo podríamos aplicar el método de elementos finitos a una superficie irregular.

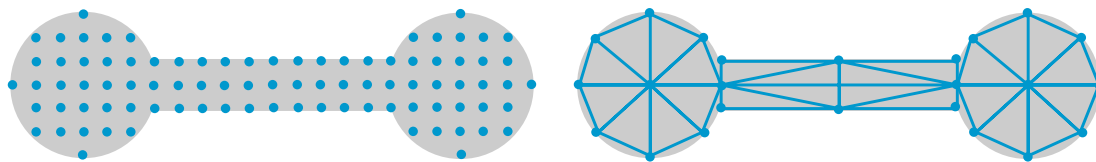


Figura 1: Discretización por diferencias finitas (izquierda) y por elementos finitos (derecha)

Este método fue originalmente desarrollado para su uso en la ingeniería civil y es ampliamente utilizado en todo tipo de aplicaciones prácticas. En lugar de mallados rectangulares se utilizan estructuras poligonales más sofisticadas, cuyos lados pueden ser definidos mediante rectas, formando en el caso más sencillo estructuras triangulares, o mediante curvas, como por ejemplo el caso de los splines cúbicos, que generan estructuras poligonales cuyos lados son polinomios cúbicos definidos a trozos.

4.5 Referencias bibliográficas

- Girault, V. and Raviart, P.-A. (1986). *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin. Theory and algorithms.
- Larsson, S. and Thome, E. (2016). *Partial differential equations with numerical methods*. Springer-Verlag, Berlin.
- Myint-U, T. and Debnath, L. (2007). *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. North-Holland, New York.