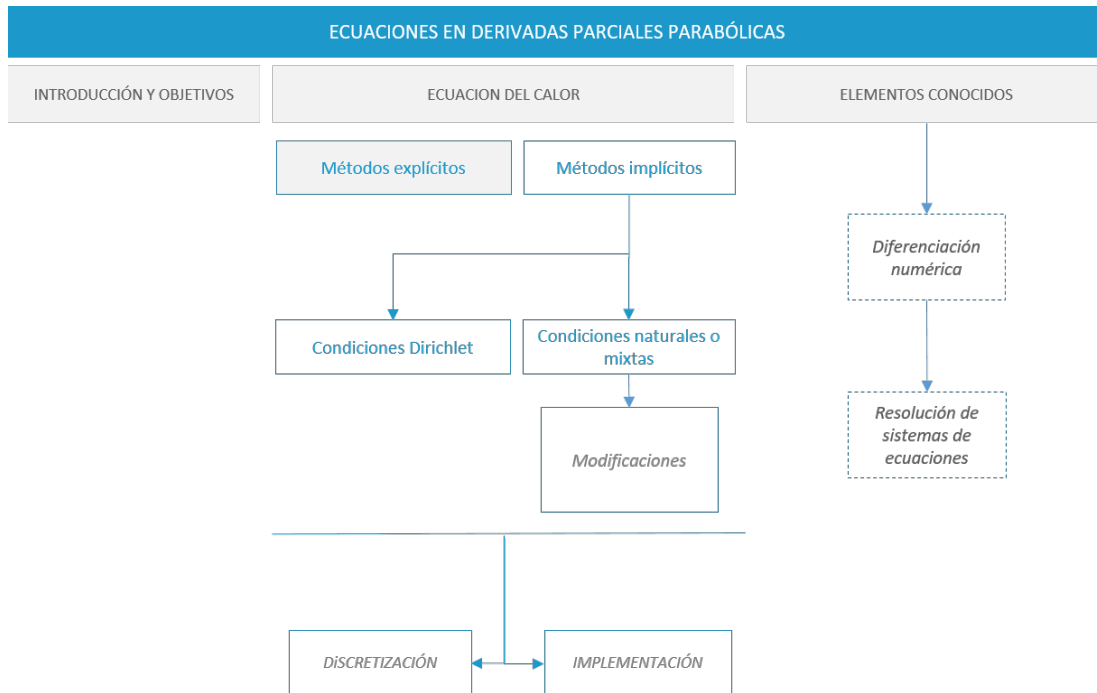

Ecuaciones en derivadas parciales parabólicas (2)

Índice

Esquema.	2
Ideas clave	3
6.1 Introducción y objetivos	3
6.2 Método implícito con condiciones de contorno Dirichlet	4
6.3 Método de Crank-Nicholson con condiciones de contorno Dirichlet	8
6.4 Métodos implícitos con condiciones naturales o mixtas	12
6.5 Ejercicios resueltos	19
6.6 Ejercicios propuestos	25

Esquema



6.1 Introducción y objetivos

En este tema profundizamos en la técnica de diferencias finitas aplicada a problemas parabólicos, con condiciones de contorno diferentes. El nexo común de los métodos que vamos a desarrollar es que son esquemas implícitos, es decir, que permiten calcular la solución del problema en cada instante, no mediante cálculos directos sino resolviendo sistemas de ecuaciones. Estos sistemas serán lineales si lo es la ecuación en derivadas parciales que describe el problema parabólico.

Los objetivos a alcanzar en este tema son:

- ▶ Método implícito con condiciones de contorno Dirichlet
- ▶ Método de Crank-Nicholson con condiciones de contorno Dirichlet
- ▶ Métodos implícitos con condiciones naturales y mixtas

Veremos dos tipos de métodos implícitos, cuya diferencia radica en el orden de precisión conseguido. En cada uno de ellos, analizaremos los siguientes aspectos:

- ▶ Transformación de la EDP en una ecuación en diferencias
- ▶ Convergencia y estabilidad del método implícito
- ▶ Implementación en Matlab

6.2 Método implícito con condiciones de contorno Dirichlet

Dadas las condiciones iniciales y de contorno del problema parabólico descrito por la ecuación clásica del calor,

$$u_t - \alpha^2 u_{xx} = 0, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0, \quad (1)$$

sujeta a la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L]$$

y a las condiciones de contorno de tipo Dirichlet

$$u(0, t) = h_1(t), \quad u(L, t) = h_2(t), \quad t > 0,$$

la distribución de nodos espaciales y temporales queda como se indica en la Figura 1.

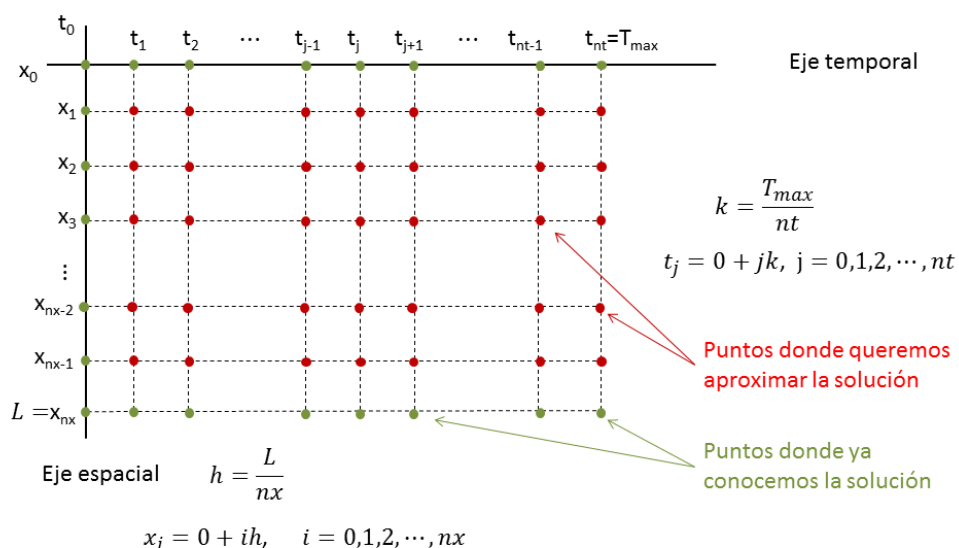


Figura 1: Distribución de nodos para las EDPs parabólicas

Como en el método explícito, utilizaremos aproximaciones de primer orden para la variable temporal y simétricas para la derivada parcial segunda respecto a la variable espacial. En este caso, emplearemos diferencias regresivas en u_t y centrales en u_{xx} ,

$$\frac{u(x, t) - u(x, t - k)}{k} = \alpha^2 \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2},$$

y evaluando la expresión anterior en los puntos (x_i, t_j) , $i = 1, 2, \dots, nx - 1$, $j = 1, \dots, nt$, encontramos su expresión en diferencias

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} = \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

Denotamos nuevamente $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2}$ y llevamos a la izquierda del signo igual las incógnitas del instante mayor

$$(1 + 2\lambda)u_{i,j} - \lambda u_{i+1,j} - \lambda u_{i-1,j} = u_{i,j-1}, \quad i = 1, 2, \dots, nx - 1, j = 1, 2, \dots, nt.$$

Así, para encontrar la solución en el instante t_j debemos resolver el sistema lineal

$$Au^{(j)} = u^{(j-1)} + d_j, \quad j = 1, 2, \dots, nt,$$

donde los términos independientes son la suma de la solución en el instante anterior y el vector

$$d_j = (\lambda h_1(t_j), 0, \dots, 0, \lambda h_2(t_j))^T;$$

denotamos por $u^{(j)}$ la columna j -ésima de la matriz u y la matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 + 2\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + 2\lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 + 2\lambda \end{pmatrix}, \quad u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}.$$



Convergencia, estabilidad e implementación

Debido a las aproximaciones utilizadas de las derivadas parciales, el orden de convergencia del método implícito es de $O(k + h^2)$. Por otra parte, puede probarse que el proceso es incondicionalmente convergente, por lo que su convergencia no dependerá del número de subintervalos utilizados en la discretización.

En cuanto a la implementación, la diferencia respecto al método explícito radica en el bucle principal. En éste, para cada $j = 1, 2, \dots, nt$, debemos resolver el sistema tridiagonal $Az = u^{(j-1)} + d_j$, de manera que para cada $i = 1, 2, \dots, nx - 1$, asignaremos $U_{i,j} = z_i$. Este sistema tridiagonal lo resolveremos mediante el algoritmo de Crout, que ya utilizamos en los problemas de frontera unidimensionales. Además, la matriz de coeficientes es la misma independientemente del instante t_j en que nos encontremos, por lo que puede definirse fuera del bucle. Así, dentro del mismo definiremos el vector de términos independientes y llamaremos al algoritmo de Crout. Podemos ver el código a continuación.

```
dp=(1+2*lambda)*ones(nx-1,1);
ds=-lambda*ones(nx-2,1);
di=ds;

for j=2:nt+1
    d=u(2:nx,j-1);
    d(1)=d(1)+lambda*U(1,j-1);
    d(end)=d(end)+lambda*U(nx+1,j-1);
    z=Crout(dp,ds,di,d);
    u(2:nx,j)=z;
end
```

Ejemplo 1. Ecuación del calor con $\alpha = 1$ y $L = 1$, utilizando el método implícito.

Sea la EDP parabólica

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in [0, 1], t \geq 0,$$

sujeta a las condiciones

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1], \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

vamos a obtener la solución numérica con el método implícito. Consideraremos $h = 0.1$ y $k=0.01$. Obtendremos la solución en $T = 0.5$. La solución exacta es $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$, por lo que podremos compararla con la aproximada y calcular el error exacto (Tabla 1).

x_i	$u_{i,50}$	$u(x, 0.5)$	$ u(x_i, 0.5) - u_{i,50} $
0	0	0	-
0.1	0.002898	0.002222	6.76e-4
0.2	0.005512	0.004227	1.29e-3
0.3	0.007587	0.005818	1.77e-3
0.4	0.008919	0.006840	2.10e-3
0.5	0.009378	0.007192	2.19e-3
0.6	0.008919	0.006840	2.10e-3
0.7	0.007587	0.005818	1.77e-3
0.8	0.005512	0.004227	1.29e-3
0.9	0.002898	0.002222	6.76e-4
1	0	0	-

Tabla 1: Resultados numéricos del Ejemplo 1

Recordemos que este ejemplo lo tratamos de resolver en el Tema 4 mediante el método explícito con el mismo tamaño de paso en las respectivas variables, pero no logró converger, ya que el error de redondeo acumulado produjo errores

exactos del orden de 10^3 . Sólo cuando aumentamos sustancialmente el número de subintervalos en la variable temporal, se cumplió la condición de estabilidad y convergencia del método explícito, proporcionando una buena aproximación pero con un alto coste computacional.

6.3 Método de Crank-Nicholson con condiciones de contorno Dirichlet

Consideremos de nuevo el problema parabólico

$$u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0,$$

$$u(0, t) = h_1(t), \quad u(L, t) = h_2(t), \quad t > 0; \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L].$$

El método de Crank-Nicholson es un método en diferencias implícito que se obtiene al hacer la media aritmética entre el resultado de aproximar la EDP en el instante t_j con diferencias progresivas para u_t y simétricas para u_{xx} ,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = 0,$$

y el resultado de aproximar la EDP en el instante t_{j+1} con diferencias regresivas para u_t y simétricas para u_{xx} ,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \alpha^2 \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} = 0,$$

obteniendo la expresión en diferencias

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \frac{\alpha^2}{2} \left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \right] = 0,$$

para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$ y $j = 0, 1, \dots, nt - 1$.

Llamando $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2}$ y llevando las variables correspondientes a instantes más altos a la izquierda de la igualdad, obtenemos el método implícito

$$(1 + \lambda)u_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (1 - \lambda)u_{i,j} + \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}),$$

para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$ y $j = 0, 1, \dots, nt - 1$.

Fijando el índice j y escribiendo todas las ecuaciones para $i = 1, 2, \dots, nx - 1$ obtenemos la expresión matricial del método

$$Au^{(j+1)} = Bu^{(j)} + d_j, \quad j = 0, 1, \dots, nt - 1,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & -\lambda/2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda/2 & 1 + \lambda & -\lambda/2 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda/2 & 1 + \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + \lambda \end{pmatrix}, u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix}, u^{(0)} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{nx-1}) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda/2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda/2 & 1 - \lambda & \lambda/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda/2 & 1 - \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - \lambda & \lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda/2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

y

$$d_j = \left(\frac{\lambda}{2} (h_1(t_{j+1}) + h_1(t_j)), 0, \dots, 0, \frac{\lambda}{2} (h_2(t_{j+1}) + h_2(t_j)) \right)^T,$$

siendo tanto la matriz A como B tridiagonales.

Para encontrar la solución en el instante t_{j+1} resolvemos el sistema lineal en el que A es la matriz de coeficientes y $Bu^{(j)} + d_j$ el vector de términos independientes.

Convergencia, estabilidad e implementación

Las especiales características de este método, combinando aproximaciones en los instantes anterior y posterior a t_j , hacen que el orden de convergencia resultante sea $O(k^2 + h^2)$, frente al orden lineal en la variable temporal que tenían los dos métodos anteriores. Además, como método implícito, puede probarse que es incondicionalmente convergente y, como tal, estable sean cuales sean las particiones que utilicemos en los intervalos donde están definidas las variables independientes x y t .

Respecto a la implementación, no es muy diferente de la llevada a cabo en el método implícito, aunque en este caso son dos las matrices tridiagonales que hay que definir. La primera A , será la matriz de coeficientes del sistema que resolveremos con el algoritmo de Crout, por lo que no habrá que definirla por completo, sino tan sólo sus diagonales no nulas. Sin embargo, la matriz B nos permitirá calcular el vector de términos independientes del sistema, por lo que sí habrá que construirla a partir de sus diagonales.

De nuevo, no hay diferencia en la inicialización de las variables, ni en la construcción de la matriz solución aproximada u , por lo que esa parte del algoritmo es igual a la del método explícito, como puede verse a continuación.

► Inicializar las variables:

- Establecemos los pasos espacial h y temporal k , a partir de los cuales definimos los nodos x_i y t_j .
- Definimos el parámetro $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2}$.
- La matriz de tamaño $(nx + 1) \times (nt + 1)$, solución aproximada u , se define inicialmente con ceros.

- ▶ Almacenamos en la primera columna de u los datos proporcionados por la condición inicial $f(x)$ y en la primera y última filas, los correspondientes a las condiciones de contorno $h_1(t)$ y $h_2(t)$.
- ▶ Definimos los vectores diagonal principal (dpA, tamaño $nx - 1$), diagonal superior (dsA, tamaño $nx - 2$) y diagonal inferior (diA, tamaño $nx - 2$) de la matriz A .
- ▶ Construcción de la matriz B a partir de sus tres diagonales no nulas.
- ▶ Para cada valor del índice j ,
 - Calculamos el vector de términos independientes, $d = Bu^{(j)} + d_j$.
 - Llamamos al algoritmo de Crout para que resuelva el sistema tridiagonal $Az = d$.
 - Almacenamos la solución del sistema z en la columna $j + 1$.

Ejemplo 2. Ecuación del calor con $\alpha = 1$ y $L = 1$, utilizando el método de Crank-Nicholson.

Retomamos el mismo problema, con la ecuación homogénea del calor,

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

sujeta a las condiciones

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1], \quad u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

aplicando en esta ocasión el método de Crank-Nicholson, con $h = 0.1$ y $k = 0.01$. Obtendremos la solución en $T = 0.5$. Sabemos que la solución exacta es $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$, por lo que podremos compararla con la aproximada y calcular el error exacto (Tabla 2).

x_i	$u_{i,50}$	$u(x, 0.5)$	$ u(x_i, 0.5) - u_{i,50} $
0	0	0	-
0.1	0.002305	0.002222	8.27e-5
0.2	0.004385	0.004227	1.57e-4
0.3	0.006035	0.005818	2.17e-4
0.4	0.007094	0.006840	2.55e-4
0.5	0.007495	0.007192	2.68e-4
0.6	0.007094	0.006840	2.55e-4
0.7	0.006035	0.005818	2.17e-4
0.8	0.004385	0.004227	1.57e-4
0.9	0.002305	0.002222	8.27e-5
1	0	0	-

Tabla 2: Resultados numéricos del Ejemplo 2

Observamos que, debido al mayor orden de precisión del método de Crank-Nicholson, el error exacto es menor en este caso, respecto al obtenido con el esquema implícito en el Ejemplo 1.

6.4 Métodos implícitos con condiciones naturales o mixtas

En los métodos implícitos, el hecho de que el problema parabólico tenga condiciones de contorno no Dirichlet

$$\alpha_1 u(0, t) + \alpha_2 u_x(0, t) = \gamma, \quad \beta_1 u(L, t) + \beta_2 u_x(L, t) = \delta, \quad \alpha_2, \beta_2 \neq 0,$$

afecta, como es previsible, a la primera y última ecuaciones de los sistemas que hay que resolver en cada instante temporal. Además, hay que contar con un aumento en

el número de incógnitas del problema, ya que en ese caso sólo se conoce el valor exacto de la solución en el instante inicial. Esto se traduce en que los sistemas lineales tridiagonales a resolver para cada instante t_j son de tamaño $nx + 1$, en lugar de $nx - 1$, como hasta ahora.

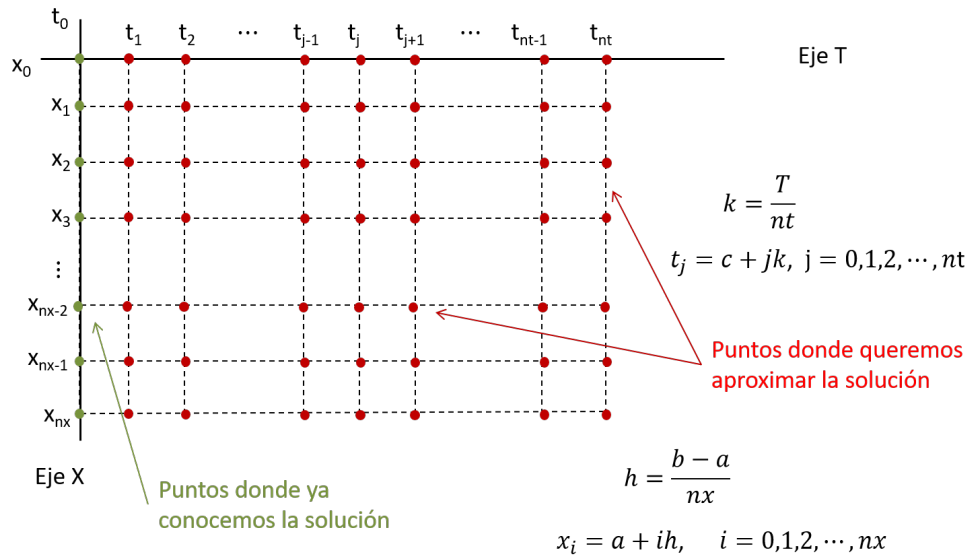


Figura 2: Distribución de nodos para las EDPs parabólicas con condiciones no Dirichlet

En la Figura 2 observamos el mallado, con los nodos en rojo indicando las posiciones en las que el valor de $u(x, t)$ es una incógnita. En el esquema en diferencias del método implícito,

$$(1 + \lambda)u_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (1 - \lambda)u_{i,j} + \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}),$$

ahora $i = 0, 1, 2, \dots, nx - 1, nx$ y $j = 0, 1, \dots, nt - 1$.

Dado un índice temporal j fijo y arbitrario, la primera ecuación del esquema en diferencias es

$$(1 + \lambda)u_{0,j+1} - \frac{\lambda}{2}(u_{1,j+1} + u_{-1,j+1}) = (1 - \lambda)u_{0,j} + \frac{\lambda}{2}(u_{1,j} + u_{-1,j}). \quad (2)$$

En esta expresión aparecen $u_{-1,j}$ y $u_{-1,j+1}$; de forma análoga a como hicimos en el método explícito, debemos utilizar la condición de contorno natural evaluada en sendos instantes t_j y t_{j+1} . Utilizando una aproximación central de la derivada parcial $u_x(0, t)$ y

reemplazándola en la condición de contorno, podemos despejar $u_{-1,j}$ (resp. $u_{-1,j+1}$),

$$u_{-1,j} = \frac{2h\alpha_1}{\alpha_2}u_{0,j} + u_{1,j} - \frac{2h\gamma}{\alpha_2}, \quad u_{-1,j+1} = \frac{2h\alpha_1}{\alpha_2}u_{0,j+1} + u_{1,j+1} - \frac{2h\gamma}{\alpha_2}.$$

Regresando a la ecuación (2),

$$\left(1 + \lambda - \frac{\lambda h\alpha_1}{\alpha_2}\right)u_{0,j+1} - \lambda u_{1,j+1} = \left(1 - \lambda + \frac{\lambda h\alpha_1}{\alpha_2}\right)u_{0,j} + \lambda u_{1,j} - 2\frac{\lambda h\gamma}{\alpha_2}.$$

De forma análoga se gestiona la última ecuación del sistema, correspondiente a x_{nx} , utilizando la segunda condición de contorno no Dirichlet, con aproximaciones de segundo orden, obteniéndose

$$(1 + \lambda)u_{nx,j+1} - \frac{\lambda}{2}(u_{nx+1,j+1} + u_{nx-1,j+1}) = (1 - \lambda)u_{nx,j} + \frac{\lambda}{2}(u_{nx+1,j} + u_{nx-1,j}),$$

donde el índice $nx + 1$ está fuera de rango. Despejando $u_{nx+1,j+1}$ y $u_{nx+1,j}$ de la segunda condición de contorno, previa aproximación de $u_x(x_{nx}, t_j)$ y $u_x(x_{nx}, t_{j+1})$ por diferencias centrales, obtenemos

$$\left(1 + \lambda + \frac{\lambda h\beta_1}{\beta_2}\right)u_{nx,j+1} - \lambda u_{nx-1,j+1} = \left(1 - \lambda - \frac{\lambda h\beta_1}{\beta_2}\right)u_{nx,j} + \lambda u_{nx-1,j} + 2\frac{\lambda h\delta}{\beta_2}.$$

Así, el sistema de ecuaciones que hemos de resolver para calcular la columna $j + 1$ de la matriz u está definido por

$$Au^{(j+1)} = Bu^{(j)} + d_j, \quad j = 0, 1, \dots, nt - 1,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \lambda - \frac{\lambda h\alpha_1}{\alpha_2} & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda/2 & 1 + \lambda & -\lambda/2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda/2 & 1 + \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda/2 & 1 + \lambda & -\lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1 + \lambda + \frac{\lambda h\beta_1}{\beta_2} \end{pmatrix},$$

$$u^{(j)} = \begin{pmatrix} u_{0,j} \\ u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{nx-1,j} \\ u_{nx,j} \end{pmatrix}, \quad u^{(0)} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{nx-1}) \\ f(x_{nx}) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 - \lambda + \frac{\lambda h \alpha_1}{\alpha_2} & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda/2 & 1 - \lambda & \lambda/2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda/2 & 1 - \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda/2 & 1 - \lambda & \lambda/2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 - \lambda - \frac{\lambda h \beta_1}{\beta_2} \end{pmatrix}$$

y el vector de términos independientes es

$$d_j = \left(-2 \frac{\lambda h \gamma}{\alpha_2}, 0, 0, \dots, 0, 2 \frac{\lambda h \delta}{\beta_2} \right)^T.$$

En cuanto a la implementación, es muy similar a la del método implícito con condiciones Dirichlet, basta adaptar las variables de entrada a las nuevas condiciones de contorno, introduciendo las constantes α_i , β_i , $i = 1, 2$, δ y γ en lugar de $h_1(t)$ y $h_2(t)$, y en el algoritmo, ampliar el tamaño de las matrices A y B y el vector de términos independientes d , adaptando sus elementos a lo descrito previamente.

Ejemplo 3.

Consideremos la ecuación en derivadas parciales:

$$u_t = u_{xx} + e^{-t}, \quad x \in [0, 1], \quad t > 0,$$

con las condiciones:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 1 - x, & x \in [0, 1], \\ u_x(0, t) &= 0, & t > 0, \\ u_x(1, t) + u(1, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned}$$

Aplica el método de Crank-Nicholson para determinar la solución en el instante $t = 1$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.0005$.

Solución: Consideramos los nodos $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, nx$ y $t_j = jk$, $j = 0, 1, \dots, nt$, con $h = 1/nx$ y $k = 1/nt$, siendo nx y nt el número de subintervalos en cada variable. Al aplicar la idea de Crank-Nicholson sobre el problema parabólico, obtenemos para $i = 0, \dots, nx$ y $j = 0, \dots, nt - 1$:

$$\begin{aligned} u_{i,j+1} - u_{i,j} &= \frac{\lambda}{2} (u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) \\ &\quad + \frac{k}{2} (e^{-t_j} + e^{-t_{j+1}}). \end{aligned}$$

Al despejar los términos en el instante t_{j+1} y sustituir $u_{-1,j}$ y $u_{nx+1,j}$ por sus aproximaciones, nos queda:

$$(1 + \lambda)u_{0,j+1} - \lambda u_{1,j+1} = (1 - \lambda)u_{0,j} + \lambda u_{1,j} + \frac{k}{2} (e^{-t_j} + e^{-t_{j+1}}),$$

$$\begin{aligned} (1 + \lambda)u_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) &= (1 - \lambda)u_{i,j} + \frac{\lambda}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \\ &\quad + \frac{k}{2} (e^{-t_j} + e^{-t_{j+1}}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 + \lambda + h\lambda)u_{nx,j+1} - \lambda u_{nx-1,j+1} &= (1 - \lambda - h\lambda)u_{nx,j} + \lambda u_{nx-1,j} \\ &\quad + \frac{k}{2} (e^{-t_j} + e^{-t_{j+1}}). \end{aligned}$$

Así pues, en cada paso j hay que resolver el sistema lineal tridiagonal:

$$Au^{(j+1)} = Bu^{(j)} + d_j,$$

donde $u^{(j)}$ representa la solución en el instante t_j ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + \lambda & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 + \lambda + h\lambda \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 1 - \lambda & \frac{\lambda}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - \lambda & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 - \lambda - h\lambda \end{pmatrix}$$

y

$$d_j = \frac{k}{2}(e^{-t_j} + e^{-t_{j+1}})(1, 1, \dots, 1)^T.$$

Implementamos este método, adaptando el correspondiente a las condiciones Dirichlet.



Ejemplo0603.m

```
function u = Ejemplo0603(nx,a,b,nt,T,c,f)
h = (b-a)/nx;    x = a:h:b;
k = T/nt;        t = 0:k:T;
fx = feval(f,x);  fx = fx(:);
a = c*k/h^2;     % c = alpha^2
u = zeros(nx+1,nt+1);
u(:,1) = fx;

dpA = [(1+a)*ones(1,nx)  1+a+a*h];
dsA = [-a  -a/2*ones(1,nx-1)];
diA = [-a/2*ones(1,nx-1)  -a];
d = zeros(nx+1,1);
dpB = [(1-a)*ones(1,nx)  1-a-a*h];
dsB = [a  a/2*ones(1,nx-1)];
diB = [a/2*ones(1,nx-1)  a];
B = diag(dpB)+diag(dsB,1)+diag(diB,-1);
for j = 1:nt
d = k/2*(exp(-t(j))+exp(-t(j+1)))*ones(nx+1,1);
d = B*u(:,j)+d;
u(:,j+1) = Crout(dpA,dsA,diA,d)';
end
```

Ejecutando esta función con los datos del problema obtenemos los resultados de la Tabla 3, donde podemos ver el valor de la función incógnita, no solo en el instante final, sino también en algunos intermedios.

x_i	$u(x, 0.25)$	$u(x, 0.5)$	$u(x, 0.75)$	$u(x, 1)$
0	0.729378	0.768292	0.774739	0.750495
0.1	0.726189	0.765769	0.772158	0.747943
0.2	0.716726	0.758196	0.764416	0.740289
0.3	0.701284	0.745571	0.751510	0.727544
0.4	0.680309	0.727883	0.733435	0.709722
0.5	0.654342	0.705118	0.710188	0.686847
0.6	0.623944	0.677252	0.681765	0.658950
0.7	0.589614	0.644251	0.648165	0.626072
0.8	0.551724	0.606072	0.609392	0.588264
0.9	0.510450	0.562659	0.565455	0.545589
1	0.465740	0.513948	0.516374	0.498125

Tabla 3: Aproximaciones por el método de Crank-Nicholson del Ejemplo 3

6.5 Ejercicios resueltos

Ejercicio 1. Obtén la solución numérica de la EDP

$$u_t - \frac{4}{\pi^2} u_{xx} = 0, \quad x \in [0, 4], t \geq 0,$$

$$\text{CI: } u(x, 0) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \left(1 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right), \quad x \in [0, 4],$$

$$\text{CC: } u(0, t) = u(4, t) = 0, \quad t > 0,$$

con el método implícito en $T = \pi^2$ tomando $h = 0.4$ y $k = \frac{\pi^2}{50}$. Obtén el error absoluto en todos los nodos sabiendo que la solución exacta es

$$u(x, t) = e^{-t} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + e^{-t/4} \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right).$$

Indica en una tabla la solución numérica y el error absoluto en todos los nodos espaciales.

Solución.

En este problema basta aplicar de forma directa el algoritmo implementado para el método implícito con condiciones de tipo Dirichlet. Los resultados numéricos pueden verse en la Tabla 4.

x_i	$u_{i,nt}$	$ u_{i,nt} - u(x_i, T) $
0.000000	0.000000	0.000000
0.400000	0.028433	0.026237
0.800000	0.054056	0.049896
1.200000	0.074344	0.068658
1.600000	0.087311	0.080685
2.000000	0.091706	0.084805
2.400000	0.087123	0.080624
2.800000	0.074039	0.068559
3.200000	0.053751	0.049798
3.600000	0.028244	0.026176
4.000000	0.000000	0.000000

Tabla 4: Resultados numéricos del Ejercicio 1

Ejercicio 2. Obtén la solución numérica de la EDP

$$8\pi^2 u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in [0, 1], t \geq 0,$$

$$\text{CI: } u(x, 0) = \cos(2\pi x), \quad x \in [0, 1],$$

$$\text{CC: } u(0, t) = u(1, t) = e^{-t/2}, \quad t > 0,$$

con el método implícito en $T = \frac{\pi^2}{4}$ tomando $h = 0.1$ y $k = \frac{\pi^2}{100}$. Obtén el error absoluto en todos los nodos sabiendo que la solución analítica es

$$u(x, t) = e^{-t/2} \cos(2\pi x).$$

Indica en una tabla la solución numérica y el error absoluto en todos los nodos

espaciales.

Solución.

Nuevamente, este es un caso de aplicación directa del método implícito. En este caso, las condiciones de contorno no son homogéneas, pero sí son de tipo Dirichlet.

x_i	$u_{i,nt}$	$ u_{i,nt} - u(x_i, T) $
0.000000	0.291213	0.000000
0.100000	0.238974	0.003378
0.200000	0.088951	0.001039
0.300000	-0.099997	0.010007
0.400000	-0.253957	0.018361
0.500000	-0.312923	0.021710
0.600000	-0.253957	0.018361
0.700000	-0.099997	0.010007
0.800000	0.088951	0.001039
0.900000	0.238974	0.003378
1.000000	0.291213	0.000000

Tabla 5: Resultados numéricos del Ejercicio 2

Ejercicio 3. Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) - t^2 u(x, t) = x \cos xt, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u_x(0, t) = t, \quad u(1, t) = \sin t, \quad \forall t, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

- Describe el método implícito de orden $O(k + h^2)$, utilizando nx subintervalos en $[0, 1]$ y nt subintervalos en $[0, T]$, siendo T el instante máximo en el que pretendemos aproximar la solución.
- A partir del esquema anterior, determina la solución aproximada del problema

en el instante $T = 1$, tomando 10 subintervalos en el eje espacial y 100 en el eje temporal. Representa la solución en los instantes $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$. Sabiendo que la solución exacta es $u(x, t) = \sin xt$, calcula el error máximo cometido en cada uno de los instantes anteriores.

- (c) ¿Es posible aplicar el método de Crank-Nicholson a este problema? En caso afirmativo, describe el esquema en diferencias que obtendríamos.

Solución.

- (a) Utilizando una partición con nx subintervalos espaciales y nt temporales, de forma análoga a lo desarrollado en el tema, la expresión en diferencias asociada al método implícito para este problema es

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} - \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - t_j^2 u_{i,j} = x_i \cos x_i t_j,$$

donde $i = 0, 1, \dots, nx - 1$ y $j = 0, 1, \dots, nt$, ya que la primera condición de contorno no es de tipo Dirichlet, sino derivada. Agrupando términos, obtenemos

$$(1 - kt_j^2 + 2\lambda)u_{i,j} - \lambda u_{i+1,j} - \lambda u_{i-1,j} = u_{i,j-1} + kx_i \cos x_i t_j,$$

para $i = 0, 1, \dots, nx - 1, j = 0, 1, \dots, nt$.

Hemos de analizar por separado la primera de las ecuaciones, donde habremos de utilizar la condición de contorno derivada. Así, para $i = 0$,

$$(1 - kt_j^2 + 2\lambda)u_{0,j} - \lambda u_{1,j} - \lambda u_{-1,j} = u_{0,j-1} + kx_0 \cos x_0 t_j.$$

De la condición de contorno deducimos la aproximación de segundo orden de $u_{-1,j}$,

$$u_x(0, t_j) = t_j \Leftrightarrow \frac{u_{1,j} - u_{-1,j}}{2h} = t_j \Leftrightarrow u_{-1,j} = u_{1,j} - 2ht_j.$$

Sustituyendo el valor de $u_{-1,j}$ obtenido anteriormente,

$$(1 - kt_j^2 + 2\lambda)u_{0,j} - 2\lambda u_{1,j} = u_{0,j-1} - 2\lambda ht_j + kx_0 \cos x_0 t_j,$$

Por tanto, el sistema a resolver es:

$$\begin{aligned} (1 - kt_j^2 + 2\lambda)u_{0,j} - 2\lambda u_{1,j} &= u_{0,j-1} - 2\lambda ht_j + kx_0 \cos x_0 t_j, \\ (1 - kt_j^2 + 2\lambda)u_{1,j} - \lambda u_{2,j} - \lambda u_{0,j} &= u_{1,j-1} + kx_1 \cos x_1 t_j, \\ &\vdots \\ (1 - kt_j^2 + 2\lambda)u_{nx-2,j} - \lambda u_{nx-1,j} - \lambda u_{nx-3,j} &= u_{nx-2,j-1} + kx_{nx-2} \cos x_{nx-2} t_j, \\ (1 - kt_j^2 + 2\lambda)u_{nx-1,j} - \lambda u_{nx,j} - \lambda u_{nx-2,j} &= u_{nx-1,j-1} + kx_{nx-1} \cos x_{nx-1} t_j, \end{aligned}$$

Expresado en forma matricial,

$$A \begin{pmatrix} u_{0,j} \\ u_{1,j} \\ \vdots \\ u_{nx-2,j} \\ u_{nx-1,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{0,j-1} \\ u_{1,j-1} \\ \vdots \\ u_{nx-2,j-1} \\ u_{nx-1,j-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kx_0 \cos x_0 t_j \\ kx_1 \cos x_1 t_j \\ \vdots \\ kx_{nx-2} \cos x_{nx-2} t_j \\ kx_{nx-1} \cos x_{nx-1} t_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\lambda ht_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \sin t_j \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda - kt_j^2 & -2\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 + 2\lambda - kt_j^2 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 + 2\lambda - kt_j^2 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 + 2\lambda - kt_j^2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Los resultados obtenidos al aplicar este método sobre el problema pueden visualizarse en la Figura 3,

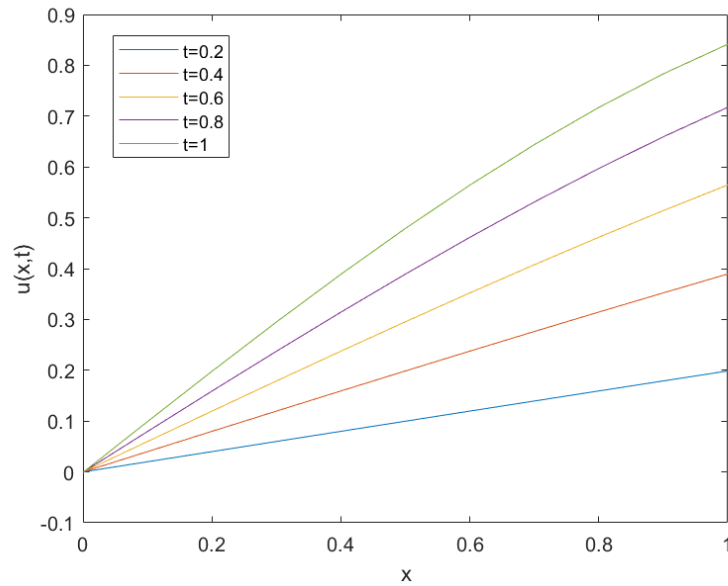


Figura 3: Solución aproximada del Ejercicio 3 en los instantes pedidos

donde cada curva representa una columna de la matriz de aproximaciones u correspondiente al instante indicado y los errores en esos mismos instantes aparecen en la Tabla 6, donde $e_{i,j} = |u(x_i, t_j) - u_{i,j}|$ representa el error exacto en cada par de nodos (x_i, t_j) , $i = 0, 1, \dots, nx$, $j \in \{21, 41, 61, 81, 101\}$.

x_i	$e_{i,21}$	$e_{i,41}$	$e_{i,61}$	$e_{i,81}$	$e_{i,101}$
0.0	8.4622e-06	6.1379e-05	2.0472e-04	5.0254e-04	1.0418e-03
0.1	7.7051e-06	5.2837e-05	1.7346e-04	4.2552e-04	8.8724e-04
0.2	7.9533e-06	4.7864e-05	1.5023e-04	3.6283e-04	7.5417e-04
0.3	9.0881e-06	4.5832e-05	1.3362e-04	3.1225e-04	6.4001e-04
0.4	1.0943e-05	4.6005e-05	1.2206e-04	2.7132e-04	5.4171e-04
0.5	1.3226e-05	4.7392e-05	1.1365e-04	2.3708e-04	4.5550e-04
0.6	1.5429e-05	4.8593e-05	1.0589e-04	2.0585e-04	3.7672e-04
0.7	1.6737e-05	4.7638e-05	9.5506e-05	1.7301e-04	2.9955e-04
0.8	1.5910e-05	4.1820e-05	7.8252e-05	1.3274e-04	2.1691e-04
0.9	1.1160e-05	2.7515e-05	4.8686e-05	7.7941e-05	1.2035e-04
1.0	0	0	0	0	0

Tabla 6: Resultados numéricos del Ejercicio 3

- (c) Por supuesto, es posible aplicar el método de Crank-Nicholson a este problema. Para ello, debemos establecer la media entre las expresiones: diferencias progresivas para u_t y simétricas en u_{xx} en el instante t_j ,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - t_j^2 u_{i,j} = x_i \cos x_i t_j,$$

y diferencias regresivas para u_t y simétricas en u_{xx} en el instante t_{j+1} ,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} - t_{j+1}^2 u_{i,j+1} = x_i \cos x_i t_{j+1},$$

con lo que, haciendo el promedio y agrupando, obtenemos la expresión en diferencias resultante

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} \right) \\ - \frac{1}{2} (t_j^2 u_{i,j} + t_{j+1}^2 u_{i,j+1}) = \frac{1}{2} (x_i \cos x_i t_j + x_i \cos x_i t_{j+1}) \end{aligned}$$

para $i = 0, 1, \dots, nx - 1$, $j = 0, 1, \dots, nt$.



Accede al vídeo: Implementación y ejecución del método implícito paso a paso

6.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4. Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 2, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad \forall t, \quad u(x, 0) = \sin \pi x + x(1 - x), \quad x \in [0, 1].$$

Sabiendo que la solución exacta es

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + x(1 - x),$$

se pide:

- (a) Aproximar, mediante el método implícito, la solución del problema en el instante $T = 1$, tomando (a) $h = 0.1$, $k = 0.05$; (b) $nx = 10$ $nt = 10000$. Determina el error exacto y representa dicho error.
- (b) Aproxima, mediante el método de Crank-Nicholson, la solución del problema en el instante $T = 1$, tomando $h = 0.1$, $k = 0.05$. Escribe en una tabla los resultados, y el error en cada caso, para los instantes $t = 0.4$, $t = 0.8$ y $T = 1$. Representa la solución en los tres instantes

Ejercicio 5. Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) - t^2 u(x, t) = x \cos xt, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0,$$

con las condiciones de contorno e iniciales

$$u_x(0, t) = t, \quad u(1, t) = \sin t, \quad \forall t, \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

- (a) Describe el método implícito de orden $O(k + h^2)$, utilizando nx subintervalos en $[0, 1]$ y nt subintervalos en $[0, T]$, siendo T el instante máximo en el que pretendemos aproximar la solución.
- (b) A partir del esquema anterior, determina la solución aproximada del problema en el instante $T = 1$, tomando 10 subintervalos en el eje espacial y 100 en el eje temporal. Representa, para cada método, la solución en los instantes $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.
- (c) Sabiendo que la solución exacta es $u(x, t) = \sin xt$, calcula el error máximo cometido en cada uno de los instantes anteriores.
- (d) ¿Es posible aplicar el método de Crank-Nicholson a este problema? En caso afirmativo, describe el esquema en diferencias que obtendríamos.

Ejercicio 6. Demuestra que el cambio de variable $v(x, t) = \ln(u(x, t))$ transforma el problema no lineal

$$\begin{aligned}v_t &= v_{xx} + v_x^2, & 0 < x < 1, & t > 0, \\v_x(0, t) &= 1, & v(1, t) &= 0, & t > 0, \\v(x, 0) &= 0, & 0 < x < 1,\end{aligned}$$

en el problema lineal

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx}, & 0 < x < 1, & t > 0, \\u_x(0, t) &= u(0, t), & u(1, t) &= 1, & t > 0, \\u(x, 0) &= 1, & 0 < x < 1.\end{aligned}$$

- Transforma el problema lineal en un esquema en diferencias implícito. Aplica dicho esquema para aproximar la solución en el instante $t = 1.5$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.001$.
- Utiliza el método de Crank-Nicholson para aproximar la solución del problema lineal en $t = 1.5$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.01$. Compara los resultados con los obtenidos en a).

Ejercicio 7. Consideremos la ecuación en derivadas parciales parabólica

$$u_t = u_{xx} - u_x u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

con las condiciones

$$\begin{aligned}u(0, t) &= 2t, & t > 0, \\u(1, t) &= t^2/2, & t > 0, \\u(x, 0) &= \sin x + \cos x, & 0 < x < 1.\end{aligned}$$

- Transforma el problema en un esquema en diferencias implícito de orden $O(k + h^2)$. A partir de este esquema obtén la solución en el instante $t = 0.5$.
- Describe el esquema en diferencias finitas que resulta al aplicar la idea de Crank-Nicholson a esta ecuación en derivadas parciales y plantea cómo resol-

ver el sistema de ecuaciones resultante.

Ejercicio 8. Consideremos la ecuación en derivadas parciales

$$u_t = u_{xx} + u_x^2, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$

con las condición inicial $u(x, 0) = x^2 \sin(\pi x)$, $0 < x < 1$, y las condiciones de contorno $u(0, t) = u(1, t) = 0$ para $t > 0$.

- (a) Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas implícito de orden $O(k + h^2)$. Aplica este esquema para determinar la solución en el instante $t = 2$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.005$.
- (b) Utiliza el cambio de variable $u = \ln v$ para transformar el problema anterior en un problema lineal.
- (c) Utiliza el método de Crank-Nicholson para aproximar la solución del problema lineal en $t = 2$, tomando $h = 0.1$ y $k = 0.05$. Compara los resultados obtenidos con los del apartado a).