Laboratorio: Ecuaciones en derivadas parciales parabólicas

**Objetivos**

En esta actividad vas a poner en práctica los conceptos de ecuaciones en derivadas parciales relacionados con las EDPs parabólicas. Concretamente, la técnica de diferencias finitas aplicada a un problema con condiciones no Dirichlet.

**Descripción**

Consideremos la ecuación en derivadas parciales parabólica:

Con las condiciones de contorno:

Y la condición inicial:

Plantea el sistema lineal que resulta al discretizar el problema anterior mediante diferencias finitas de segundo orden con 100 subintervalos.

Si tenemos en cuenta las diferencias divididas **centrales** para y para , y las diferencias finitas **progresivas** para , el sistema lineal que resulta de discretizar el problema que queremos resolver mediante diferencias finitas es:

con *i=0, …,* y *j=0, …,*, donde es el número de nodos espaciales y el número de nodos temporales.

Transforma el problema en un esquema en diferencias finitas explícito de orden Aplica este esquema para determinar la solución en el instante , tomando y .

Del apartado anterior podemos despejar y reagrupar para obtener el esquema en diferencias finitas explícito:

con *i=0, …,10* y *j=0, …,1000*

Una vez apliquemos las condiciones de contorno basta con darnos cuenta que los puntos conflictivos son . Así, para todos aquellos *i,j* que no estén en esta condición tenemos que resolver (2).

Para ***i*=0**, tenemos que resolver:

Como no tenemos información de , vamos a utilizar las condiciones de contorno en en diferencias finitas centrales para sacar este valor:

Así, introduciendo en eliminamos la dependencia de , y obtenemos:

Juntando así y ya tenemos todo el problema que queremos resolver.

La implementación de esto es:

function [u,x,t] = CalorExpl\_Ent3\_1(alpha,ci,h2,L,nx,Tmax,nt)

% Metodo explicito para la ecuacion del calor con condiciones Dirichlet

% Inicializacion

h=L/nx; x=0:h:L;

k=Tmax/nt; t=0:k:Tmax;

cix=feval(ci,x);

c2t=feval(h2,t);

u=zeros(nx+1,nt+1);

u(:,1)=cix';

u(nx+1,:)=c2t;

% Condicion de estabilidad/convergencia

lambda=k\*alpha^2/h^2;

if lambda>1/2

disp('No se cumple el criterio de convergencia')

else

disp('sin problema')

end

for j=1:nt

u(1,j+1)=u(2,j)\*2\*lambda+u(1,j)\*(1+k-2\*lambda)-4\*h\*t(j)\*(lambda+lambda\*h/2);

for i=2:nx

u(i,j+1)=(1+k-2\*lambda)\*u(i,j)+(lambda-lambda\*h/2)\*u(i+1,j)+(lambda+lambda\*h/2)\*u(i-1,j);

end

end

end

Cuya llamada es:

alpha=1; ci=@(x) sin(x)+cos(x); h2=@(t) t.^2/2;

L=1; nx=10; Tmax=0.5; nt=1000;

[u,x,t] = CalorExpl\_Ent3\_1(alpha,ci,h2,L,nx,Tmax,nt);

Cuyo resultado presentamos en la tabla 1.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0.0 | 0.337582 |
| 0.1 | 0.425762 |
| 0.2 | 0.489118 |
| 0.3 | 0.526865 |
| 0.4 | 0.538684 |
| 0.5 | 0.524783 |
| 0.6 | 0.485986 |
| 0.7 | 0.423817 |
| 0.8 | 0.340600 |
| 0.9 | 0.239572 |
| 1.0 | 0.125000 |

Tabla 1: solución aproximada en 0.5 mediante un esquema en diferencias finitas explícito de orden .

Transforma el problema en un esquema en diferencias implícito de orden Aplica este esquema para determinar la solución en el instante , tomando y .

Para el método implícito vamos a tener que hacer una pequeña modificación. Ahora, si tenemos en cuenta las diferencias divididas **centrales** para y para , y las diferencias finitas **regresivas** para , el sistema lineal que resulta de discretizar el problema que queremos resolver mediante diferencias finitas es:

con *i=0, …,* y *j=0, …,*.

Despejando y reagrupar para obtener el esquema en diferencias finitas explícito:

con *i=0, …,10* y *j=0, …,1000*

Una vez apliquemos las condiciones de contorno basta con darnos cuenta que los puntos conflictivos son . Así, para todos aquellos *i,j* que no estén en esta condición tenemos que resolver (5).

Para ***i*=0**, tenemos que resolver:

Como no tenemos información de , vamos a utilizar las condiciones de contorno en en diferencias finitas centrales para sacar este valor:

Así, introduciendo en eliminamos la dependencia de , y obtenemos:

Para ***i*=nx-1**, tenemos que resolver:

Como por el enunciado tenemos que de , obtenemos:

Juntando así , y ya tenemos todo el problema que queremos resolver. Si lo planteamos en notación matricial nos queda:

La implementación de esto es:

function [u,x,t] = CalorImpl\_Entr3\_2(alpha,ci,h2,L,nx,Tmax,nt)

% Metodo explicito para la ecuacion del calor con condiciones Dirichlet

% Inicializacion

h=L/nx; x=0:h:L;

k=Tmax/nt; t=0:k:Tmax;

cix=feval(ci,x);

c2t=feval(h2,t);

u=zeros(nx+1,nt+1);

u(nx+1,:)=c2t;

u(:,1)=cix';

% Condicion de estabilidad/convergencia

lambda=k\*alpha^2/h^2;

dp=(1+2\*lambda-k)\*ones(nx,1);

ds=(-lambda+lambda\*h/2)\*ones(nx-1,1);

ds(1)=-2\*lambda;

di=(-lambda-lambda\*h/2)\*ones(nx-1,1);

for j=2:nt+1

d=u(1:nx,j-1);

d(1)=d(1)-4\*h\*t(j)\*(lambda+lambda\*h/2);

d(end)=d(end)+(lambda-lambda\*h/2)\*u(nx+1,j);

z=Crout(dp,ds,di,d);

u(1:nx,j)=z;

end

end

Cuya llamada es:

[u,x,t] = CalorImpl\_Entr3\_2(alpha,ci,h2,L,nx,Tmax,nt);

Cuyo resultado presentamos en la tabla 2.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0.0 | 0.336386 |
| 0.1 | 0.424576 |
| 0.2 | 0.487965 |
| 0.3 | 0.525769 |
| 0.4 | 0.537669 |
| 0.5 | 0.523875 |
| 0.6 | 0.485211 |
| 0.7 | 0.423201 |
| 0.8 | 0.340167 |
| 0.9 | 0.239345 |
| 1.0 | 0.125000 |

Tabla 2: solución aproximada en 0.5 mediante un esquema en diferencias finitas implícito de orden

Describe el esquema en diferencias finitas que resulta de aplicar la idea de Crank-Nicholson a esta ecuación en derivadas parciales. Escribe la expresión matricial del sistema resultante, identificando cada una de las matrices del sistema y resuelve la EDP. Representa gráficamente e indica en una tabla la solución obtenida en el instante .

Para este apartado vamos a necesitar la ecuación en el instante sumada a en el instante :

con *i=0, …,10* y *j=0, …,1000*

Una vez apliquemos las condiciones de contorno basta con darnos cuenta que los puntos conflictivos son . Así, para todos aquellos *i,j* que no estén en esta condición tenemos que resolver (8).

Para ***i*=0**, tenemos que resolver:

Como no tenemos información de , vamos a utilizar las condiciones de contorno en en diferencias finitas centrales para sacar este valor:

Así, introduciendo en eliminamos la dependencia de , y obtenemos:

Para ***i*=nx-1**, tenemos que resolver:

Como por el enunciado tenemos que de , obtenemos:

Juntando así , y ya tenemos todo el problema que queremos resolver. Si lo planteamos en notación matricial nos queda:

La implementación de esto es:

function [u,x,t] = CalorCN\_Entr3\_3(alpha,ci,h2,L,nx,Tmax,nt)

% Metodo explicito para la ecuacion del calor con condiciones Dirichlet

% Inicializacion

h=L/nx; x=0:h:L;

k=Tmax/nt; t=0:k:Tmax;

cix=feval(ci,x);

c2t=feval(h2,t);

u=zeros(nx+1,nt+1);

u(nx+1,:)=c2t;

u(:,1)=cix';

% Condicion de estabilidad/convergencia

lambda=k\*alpha^2/h^2;

dp=(1+lambda-k/2)\*ones(nx,1);

ds=(-lambda/2+lambda\*h/4)\*ones(nx-1,1);

ds(1)=-lambda;

di=(-lambda/2-lambda\*h/4)\*ones(nx-1,1);

dpB=(1-lambda+k/2)\*ones(nx,1);

dsB=(lambda/2-lambda\*h/4)\*ones(nx-1,1);

dsB(1)=lambda;

diB=(lambda/2+lambda\*h/4)\*ones(nx-1,1);

B=diag(dpB,0)+diag(dsB,1)+diag(diB,-1);

for j=2:nt+1

d=B\*u(1:nx,j-1);

d(1)=d(1)-4\*h\*(lambda/2+lambda\*h/4)\*(t(j)+t(j-1));

d(end)=d(end)+(lambda/2-lambda\*h/4)\*(u(nx+1,j)+u(nx+1,j-1));

z=Crout(dp,ds,di,d);

u(1:nx,j)=z;

end

end

Cuya llamada es:

alpha=1; ci=@(x) sin(x)+cos(x); h2=@(t) t.^2/2;L=1;nx=10;Tmax=1;nt=2000;

[u,x,t] = CalorCN\_Entr3\_2(alpha,ci,h2,L,nx,Tmax,nt);

Cuyo resultado presentamos en la tabla 3.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 0.0 | 0.336984 | -1.43473 |
| 0.1 | 0.425169 | -1.23726 |
| 0.2 | 0.488541 | -1.04509 |
| 0.3 | 0.526317 | -0.857922 |
| 0.4 | 0.538176 | -0.674783 |
| 0.5 | 0.524329 | -0.493963 |
| 0.6 | 0.485599 | -0.312907 |
| 0.7 | 0.423509 | -0.128117 |
| 0.8 | 0.340384 | 0.064955 |
| 0.9 | 0.239458 | 0.272007 |
| 1.0 | 0.125000 | 0.500000 |

Tabla 3: solución aproximada en 0.5 y en 1 mediante un esquema en diferencias finitas Crank-Nicholson de orden

A continuación, representamos en la figura 1 la solución en t=1 para el método de Crank-Nicholson.

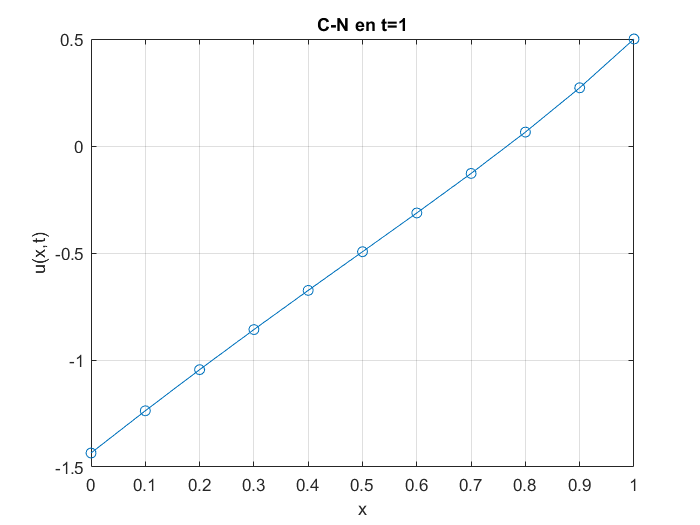


Figura 1: gráfica de la representación de la solución en t=1 aproximada mediante un esquema de Crank-Nicholson.

Anexo: Comprobación entre métodos

Si dibujamos la solución en t=0.5 para los tres métodos obtenemos la gráfica de la figura 2, donde se ve que los tres métodos dan prácticamente al mismo valor, viendo que para estos valores de y la solución converge al mismo valor.

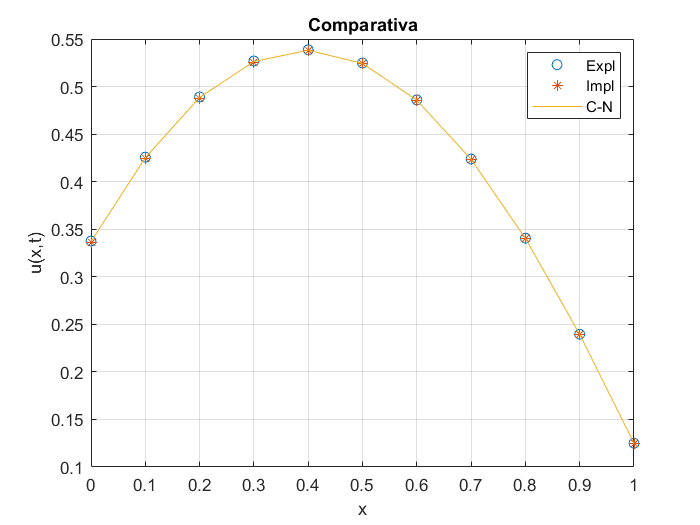


Figura 2: gráfica de la representación de la solución en t=0.5 aproximada mediante un esquema en diferencias finitas explícito, implícito y de Crank-Nicholson.

**Rúbrica**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ecuaciones en derivadas parciales parabólicas | Descripción | Puntuación máxima  (puntos) | Peso  % |
| Criterio 1 | Calidad en la presentación: expresiones matemáticas escritas con editor de ecuaciones, tablas en formato tabla, legibilidad de gráficos… La no presentación en Word supone un 0 en este apartado. | 1.5 | 15 % |
| Criterio 2 | Problema 1. Apartado a. Desarrollo matemático de la discretización. | 1 | 10 % |
| Criterio 3 | Problema 1. Apartado a. Tabla de resultados correcta. | 1.5 | 15 % |
| Criterio 4 | Problema 1. Apartado b. Desarrollo matemático de la discretización. | 1 | 10 % |
| Criterio 5 | Problema 1. Apartado b. Tabla de resultados correcta. | 1.5 | 15 % |
| Criterio 6 | Problema 1. Apartado c. Desarrollo matemático de la discretización. | 1 | 10 % |
| Criterio 7 | Problema 1. Apartado c. Expresión matricial correcta. | 1 | 10 % |
| Criterio 8 | Problema 1. Apartado c. Tabla de resultados correcta. | 1 | 10 % |
| Criterio 9 | Problema 1. Apartado c. Gráfica correcta. | 0.5 | 5 % |
|  |  | **10** | 100 % |