

3. Considerando lo expuesto en la sección 1.9.3 y demuestre que:

$$A_R^{i' \sim j} = \delta_{k' k}$$

y además, como caso especial, establecer la relación entre los cosenos directores que satisfacen:

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1.$$

Demonstración

$$A_R^{i' \sim j} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} A_i^j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i'}} = x^{i'}(x^{i'}(x^k))$$

Por tanto:

$$A_R^{i' \sim j} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$$

Haciendo  $\frac{\partial x^j}{\partial x^k}$  obtenemos por regla de la cadena

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \Rightarrow A_R^{i' \sim j} = \frac{\partial x^j}{\partial x^k}$$

Ahora si  $j = k$

$$A_j^{i' \sim j} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = 1 = \delta_j^i \delta_k^k$$

Si  $j \neq k$

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = \frac{\partial x^j}{\partial x^k} = 0 = \delta_j^j$$

Estableciendo la relación con los cosenos directores que satisfacen:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

Consideramos:  $\hat{e}_j = k$

La base ortonormal original  $[\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3]$  y  $[\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3]$  en base ortonormal rotada.

$$\hat{e}'_j = A_j^{(1)} \hat{e}_1 + A_j^{(2)} \hat{e}_2 + A_j^{(3)} \hat{e}_3$$

$$\hat{e}'_1 = \hat{e}_1 + A_1^{(1)} \hat{e}_2 + A_1^{(2)} \hat{e}_3$$

$$\boxed{A_1^{(1)} = \cos(\theta_{11})}$$

Donde  $\theta_{11}$  es el ángulo entre  $\hat{e}'_1$  y  $\hat{e}_1$

$$\hat{e}'_1 \cdot \hat{e}'_1 = 1$$

$$A_1^{(1)} A_1^{(1)} (\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1) = 1$$

$$A_1^{(1)} A_1^{(1)} = 1 \Rightarrow (A_1^{(1)})^2 = 1$$

$$\Rightarrow (A_1^{(1)})^2 + (A_2^{(1)})^2 + (A_3^{(1)})^2 = 1$$

Cuando se fija la base ortonormal rotada entonces:

$$\theta_{11} = \alpha, \quad \theta_{22} = \beta, \quad \theta_{33} = \gamma$$

Por tanto

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1.$$

9. Consideré el radio vector Posición  $r = x^i \hat{i} + y^j \hat{j}$   
 Dado el conjunto de transformaciones que se indican  
 (Configuración, Demuestre en cuales casos las componentes)  
 de la transformación como verdaderas componentes de  
 vectores.

$$(x, y) \rightarrow (-y, x), \quad (x, y) \rightarrow (x, -y)$$

$$(x, y) \rightarrow (x-y, x+y), \quad (x, y) \rightarrow (x+y, x-y)$$

Entonces:

$$r = x^i \hat{i}_b = x^i \hat{i} + y^j \hat{j}$$

$$r' = x'^i \hat{i}_b$$

$$\text{Hallamos que } x'^i = A_j^i x^j \quad \text{en } i, j = 1, 2$$

$$1) (x^i, x^j) \rightarrow (-x^j, x^i)$$

$$\text{Implícita que } x'^i = -x^j \quad y \quad x'^j = x^i$$

Así:

$$\begin{pmatrix} x'^1 \\ x'^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = x'^i = Ax^i$$

$$\therefore A_j^i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A, \quad \text{transforma como vector.}$$

$$b) (x^1, x^3) \rightarrow (x^1, -x^3)$$

$$x^1 = x^1 \quad \wedge \quad x^3 = -x^3$$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow x^1 = Ax^1$$

$$\Rightarrow A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A$$

Por lo que transforma como vector

$$c) (x^1, x^3) \rightarrow (x^1 - x^3, x^1 + x^3)$$

$$x^1 = x^1 - x^3 \quad \wedge \quad x^3 = x^1 + x^3$$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix} \Rightarrow x^1 = Ax^1$$

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Por lo que transforma como vector

$$\text{d) } (x^1, x^2) = (x^1 + x^3, x^1 - x^3)$$
$$x^1 = x^1 + x^3 \quad ; \quad x^2 = x^1 - x^3$$

Puedo escribirse como:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^1 = Ax^3$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

Transforma como vector.

2. Demuestre:

$$a) \cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)$$

$$b) \sin(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha)$$

Solución:

$$z = x + iy = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n(e^{i\theta})^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$|z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta ; m=3$$

Es decir:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = (\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

$$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta \sin\theta - 3\cos\theta \sin^2\theta - i\sin^3\theta = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$\Rightarrow \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \sin 3\theta = 3\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta //$$

1.º en el 2º miembro se aplica la fórmula de la suma de ángulos

d)  $\nabla \cdot (\nabla \times a)$  ¿Qué puede decir  $\nabla \times (\nabla \cdot a)$ ?

Intuiciones:

Sea  $a = a(r)$  un campo vectorial

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times a) &= a^1 (\nabla \times a)_2 \\ &= a^1 (\epsilon_{ijk} a^j a^k) \\ &= \epsilon_{ijk} a^1 (a^j a^k) \\ &= \epsilon_{ijk} a^i (a^j a^k) \\ &\quad \left[ \text{por comutación} \Rightarrow a^1 (a^j a^k) = a^j (a^i a^k) \right] \\ &= -\epsilon_{ijk} a^i (a^j a^k). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\epsilon_{ijk} a^i (a^j a^k) = -\epsilon_{ijk} a^i (a^j a^k)$$

$$\epsilon_{ijk} a^i (a^j a^k) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times a) = 0$$

g)  $\nabla \times (\nabla \cdot a)$  no está definido porque  $\nabla \cdot a$  es un escalar y no se puede.

$$f) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}.$$

dónde  $a = a(r)$  entonces:

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \epsilon_{ijk} \partial^j (\nabla \times \mathbf{a})^k \\
 &= \epsilon_{ijk} \partial^j (\epsilon^{kmn} \partial_m a_n) \\
 &= \epsilon_{ijk} \epsilon^{kmn} \partial^j (\partial_m a_n) \\
 &= \epsilon_{ijk} \delta^{m k} (\partial_j \partial_m) \\
 &= (\delta^i_s \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_s) \partial^j (\partial_s a_m) \\
 &= a^j (\partial_i \partial_j) - \partial^j (\partial_i a_j) \\
 &= a^j (\partial^i a_j) - \partial^j a_i \\
 &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}
 \end{aligned}$$

2) Considerar

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{x}^i$$

$$a = a(\mathbf{r}) = a(x, y, z) = a^i(x, y, z)\mathbf{i}$$

$$b = b(\mathbf{r}) = b(x, y, z) = b^i(x, y, z)\mathbf{i}$$

$$\phi = \phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z) =$$

$$\psi = \psi(\mathbf{r}) = (x, y, z)$$

Utilizando la notación de índices se inspira en el ejemplo 1.1.4 demostrar las siguientes identidades vectoriales:

$$a) \nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

Entonces:

Sean  $\phi = \phi(\mathbf{r})$ ;  $\psi = \psi(\mathbf{r})$  campos escalares

$$\begin{aligned} (\nabla(\phi\psi))^i &= \partial^i(\phi\psi) \\ &= \psi\partial^i(\phi) + \phi\partial^i(\psi) \\ &= (\phi\nabla\psi)_i + (\psi\nabla\phi)_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi;$$

3. Considerando lo expuesto en la sección 1.9.3 y demuestre que:

$$A_K^{i'} \tilde{A}_i^j = f_k^j$$

y además, como caso especial, establecer la relación con las direcciones que satisfacen:

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1.$$

Demarcación

$$A_K^{i'} - \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^K} \tilde{A}_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} ; x^j = x^j(x^{i'}(x^K))$$

Pontanto:

$$A_K^{i'} \tilde{A}_i^j = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^K} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$$

Haciendo  $\frac{\partial x^j}{\partial x^K}$  obtenemos por regla de la cadena

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^K} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^K} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \Rightarrow A_K^{i'} \tilde{A}_{i'}^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^K}$$

Ahora si  $j = K$

$$A_j^{i'} \tilde{A}_{i'}^j = \frac{\partial x^j}{\partial x_i} = 1 = f_j f_K^j$$

Si  $j \neq K$

$$A_j^{i'} \tilde{A}_{i'}^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^K} = 0 = f_K^j$$

Estableciendo la relación con los cosenos directores que satisfacemos:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

Consideramos:  $j = k$

La base ortogonal original  $[\vec{e}_j]$  y  $[\vec{e}'_j]$   
la base ortogonal rotada.

$$\vec{e}'_j = A_j^{1'} \vec{e}_j$$

$$\vec{e}'_j \cdot \vec{e}_j = A_j^{1'}$$

$$||\vec{e}'_j|| = \sqrt{\cos^2(\alpha_{1j})}$$

Donde  $\alpha_{1j}$  es el angulo entre  $\vec{e}'_j$  y  $\vec{e}_j$

$$\vec{e}'_j \cdot \vec{e}'_j = 1$$

$$A_j^{1'} A_j^{1'} (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_j) = 1$$

$$A_j^{1'} A_j^{1'} = 1 \Rightarrow (A_j^{1'})^2 = 1$$

$$\Rightarrow (A_1^{1'})^2 + (A_2^{1'})^2 + (A_3^{1'})^2 = 1$$

Cuando se fija la base ortogonal rotada entonces:

$$\alpha_{11} = \alpha, \quad \alpha_{22} = \beta, \quad \alpha_{33} = \gamma$$

Por tanto

$$\cos^2(\alpha_{11}) + \cos^2(\alpha_{22}) + \cos^2(\alpha_{33}) = 1$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$

9. Considera el radio vector posición  $r = \vec{x}^1 \mathbf{i} + \vec{y} \mathbf{j} = \vec{x}^1 \mathbf{i} + \vec{y} \mathbf{j}$   
 Dado el conjunto de transformaciones que se indican  
 en continuación, descubre en cuáles casos las componentes  
 de  $\vec{x}$  trasformadas como componentes componentes de  
 vectores.

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow (-\vec{y}, \vec{x}), (\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow (\vec{x}_1, -\vec{y})$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow (\vec{x}-\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}), (\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow (\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}-\vec{y})$$

Entonces:

$$\vec{r} = \vec{x}^1 \mathbf{i}_x = \vec{x}^1 \mathbf{i} + \vec{y} \mathbf{j}$$

$$\vec{r}' = \vec{x}' \mathbf{i}_x$$

Hallamos que  $\vec{x}' = A_j^i \vec{x}^j$  con  $j=1, 2$

$$1) (\vec{x}^i, \vec{x}^j) \rightarrow (-\vec{x}^j, \vec{x}^i)$$

Implica que  $\vec{x}^i = -\vec{x}^j$  y  $\vec{x}^j = \vec{x}^i$

Así:

$$\begin{pmatrix} \vec{x}^1' \\ \vec{x}^2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}^1 \\ \vec{x}^2 \end{pmatrix} = \vec{x}' = A \vec{x}$$

$$\Rightarrow A_{ij}^{ii} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A \text{ transforma como vector.}$$

$$b) (x^i, x^j) \rightarrow (x^i, -x^j)$$

$$x^{i'} = x^i \quad \wedge \quad x^{j'} = -x^j$$

$$\begin{pmatrix} x^i \\ x^{j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^i \\ x^j \end{pmatrix} \Rightarrow x'^i = Ax^i$$

$$\Rightarrow A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A$$

Por lo que transforma como vector.

$$c) (x^i, x^j) \rightarrow (x^i - x^j, x^i + x^j)$$

$$x^{i'} = x^i - x^j \quad \wedge \quad x^{j'} = x^i + x^j$$

$$\begin{pmatrix} x^{i'} \\ x^{j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^i \\ x^j \end{pmatrix} \Rightarrow x'^i = Ax^i$$

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Por lo que transforma como vector

$$d) (x^1, x^3) = (x^1 + x^3, x^1 - x^3)$$

$$x^1 = x^1 + x^3 \quad | \quad x^3 = x^1 - x^3$$

Puedo escribirse como:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^3 \end{pmatrix} = x' = Ax$$

$$A_{ij}^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

Transforma como vector.

2) Consideremos

$$r = x^1 + y^1 + z^1 = x^1 \uparrow;$$

$$a = a(r) = a(x, y, z) = a^i(x, y, z) \uparrow_i$$

$$b = b(r) = b(x, y, z) = b^i(x, y, z) \uparrow_i$$

$$\phi = \phi(r) = \phi(x, y, z) =$$

$$\psi = \psi(r) = (x, y, z)$$

Utilizando la notación de Índices e inspirandonos en el ejemplo 1.19 demuestre lo siguiente:  
Identidades vectoriales:

$$a) \nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

Entonces:

Sean  $\phi = \phi(r)$ ;  $\psi = \psi(r)$  Campos escalares

$$\begin{aligned} (\nabla(\phi\psi))^1 &= \partial^1(\phi\psi) \\ &= \psi\partial^1(\phi) + \phi\partial^1(\psi) \\ &= (\phi\nabla\psi)_1 + (\psi\nabla\phi)_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi;$$

6) Demuestre que:

a)  $\log(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2}i$

b)  $\log(1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4}i$

c)  $\log(e) = 1 + 2\pi n i$

d)  $\log(i) = \left(\ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)\pi i$

Teniendo en cuenta  $\log(z) = \ln|z| + i(\theta + 2\pi n)$

a)  $\log(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2}i$

$|z| = -ie$

$|\zeta| = e$

$\theta = -\frac{\pi}{2}$

$\log(-ie) = \ln(e) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$

Con  $n=0 \Rightarrow \log(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2}i$

b)  $\log(1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4}i$

$z = 1-i$ ;  $|z| = \sqrt{2}$ ;  $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Entonces:

$$\log(1-i) = \ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$$

Can  $n=0$

$$\Rightarrow \log(1-i) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi i}{4}$$

(i)  $\log(e) = 1 + 2n\pi i$

$$z=0; |z|=e \text{ and } \theta=0$$

$$\begin{aligned}\log(e) &= \ln e + 2n\pi i \\ &= 1 + 2n\pi i\end{aligned}$$

d)  $\log(i) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi i$

$$z=i; |z|=1 \text{ and } \theta=\pi/2$$

$$\begin{aligned}\log(i) &= \ln(1) + i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \\ &= \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i\right)\end{aligned}$$

5. Encuentre todas las raíces de los siguientes expresiones:

(a)  $\sqrt{2}i$

(b)  $\sqrt{1 - \sqrt{3}}i$

(c)  $(-1)^{1/3}$

(d)  $8^{1/6}$

(e)  $\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}}i$

Solución

Teniendo en cuenta:

$$z^{1/n} = |z|^{1/n} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right]$$

(a)  $\sqrt{2}i$

Tomando,  $z = 2i$  y  $n = 2$

$$\Rightarrow |z| = 2 ; \theta = \pi/2$$

Con  $k = 0$

$$z_0 = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = -1 + i$$

Con  $k = 1$

$$z_1 = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] = -1 - i$$

(b)  $\sqrt{1 - \sqrt{3}}i$

Tomando  $z = 1 - \sqrt{3}i$

$$|z| = 2 ; \theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

• Para  $k=0$

$$z_0 = \sqrt{2} \left[ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right] = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

• Para  $k=1$

$$z_1 = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right] = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

(1) (-1)<sup>1/3</sup>

Tomando  $z=1$ ;  $|z|=1$ ;  $\theta=0$

• Para  $k=0$

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

• Para  $k=1$

$$z_1 = \cos\pi + i \sin\pi = -1$$

• Para  $k=2$

$$z_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

d)  $8^{1/6}$ ; tomando a  $z=8$

$$|z|=8; \theta=0$$

$$z_0 = \sqrt{2} (\cos 0 + i \sin 0) = \sqrt{2}$$

$$z_1 = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} i$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left( \cos \pi + i \sin \pi \right) = \sqrt{2}$$

$$z_4 = \sqrt{2} \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$z_5 = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

e)  $\sqrt{-8-8\sqrt{3}i}$ ;  $r = -8-8\sqrt{3}i$

$$\Rightarrow |z| = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16; \theta = \arctan \left( \frac{-8\sqrt{3}}{-8} \right)$$

$$\text{arg } z = \pi + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$z_0 = 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_1 = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2 \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$z_3 = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} - i$$

2. Demuestre:

$$a) \cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\sin^2(\alpha)$$

$$b) \sin(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\sin(\alpha) - \sin^3(\alpha)$$

:SOLUCIÓN:

$$z = x + iy = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n(e^{i\theta})^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$|z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = |z|^n((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta ; n=3$$

Es decir:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = (\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

$$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta \sin\theta - 3\cos\theta \sin^2\theta - i\sin^3\theta = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

$$\Rightarrow \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \sin 3\theta = 3\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta //$$

En la parte en rojo se aprecia la imaginaria

d)  $\nabla \cdot (\nabla \times a)$  ; ¿Qué' puede decir  $\nabla \times (\nabla \cdot a)$ ?

Ejemplos:

Sea  $a = a(r)$  un campo vectorial

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times a) &= a^1 (\nabla \times a)_2 \\ &= a^1 (\epsilon_{ijk} a^j a^k) \\ &= \epsilon_{ijk} a^1 (a^j a^k) \\ &= \epsilon_{ijk} a^j (a^1 a^k) \end{aligned}$$

[Por comutación  $\Rightarrow a^1 (a^j a^k) = a^j (a^1 a^k)$ ]

$$= -\epsilon_{ijk} a^1 (a^j a^k).$$

Por tanto:

$$\epsilon_{ijk} a^1 (a^j a^k) = -\epsilon_{ijk} a^1 (a^j a^k)$$

$$\epsilon_{ijk} a^1 (a^j a^k) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times a) = 0$$

y  $\nabla \times (\nabla \cdot a)$  no está definido pues  $\nabla \cdot a$  es un escalar y no se puede.

$$f) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$

donde  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$  entonces:

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) &= \epsilon_{ijk} \partial^j (\nabla \times \mathbf{a})^k \\ &= \epsilon_{ijk} \partial^j (\epsilon^{klm} \partial_l a_m) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon^{lmn} \partial^j (\partial_l a_m) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon^{lmn} (\partial_l a_m) \\ &= (f^i_j f^l_m - f^i_m f^l_j) \partial^j (\partial_l a_m) \\ &= q^j (\partial_l a_p) - \partial^j (\partial_l q_p) \\ &= q_a (\partial^a a_p) - \partial^a \partial_l q_p \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}\end{aligned}$$