6) En el caso tridimensional tenemos que, si $\{e_i\}$ define un sistema de coordenadas (dextrógiro) y no necesariamente ortogonal, entonces demuestre que:

a)
$$e^i = \frac{e_j \times e_k}{e_i \cdot (e_j \times e_k)} \qquad i, j, k = 1, 2, 3$$

y sus permutaciones cíclicas,

Sol:

a) Definamos a e^i como $e_j \times e_k$
Considerando las permutaciones cícicas ya que anticonmutan debe ser así.

$ijk \Rightarrow jki \Rightarrow kij = 1 \neq \Rightarrow -1$

$\Rightarrow e^i = e_j \times e_k$

$\Rightarrow$ Consideremos el sistema dextrógiro tal que: $e^i e_j = \delta^i_j = 0$

Entonces si $i = j$

$$e^i e_j \Rightarrow e^i e_i = 1 \; ; \; e^i = (e^j \times e^k)$$

$$\Rightarrow (e^j \times e^k) \cdot e_i = 1$$

si $i \neq j$

$$e^i e_j = 0 \Rightarrow (e^j \times e^k) \cdot e_j = 0$$

Teniendo que $e^i = e^j \times e^k$
Normalizando a e^i, tenemos que:

$$\Rightarrow e^i = \frac{e^i}{e_i \cdot e^i}$$

y se cumple pues $e^i e_i = \delta^i_i = 1$

si son ciclicas el e^i no se afecta pues el producto vectorial es ciclico, cumpliendo que:

$$e^i = \frac{e_j \times e_K}{e_i (e_j \times e_k)} \quad i, j, k \text{ ciclicas}$$

de otra forma quedaría negativo (anticiclico).

b) si los volumenes

$V = e_1 \cdot (e_2 \times e_3)$ y $\bar{V} = e^1 \cdot (e^2 \times e^3)$

entonces $V\bar{V} = 1$

Sol

Tenemos que:

$V = e_1 \cdot (e_2 \times e_3)$

Sabiendo que $e^1 = e_2 \times e_3$, entonces:

$V = e_1 \cdot e^1 = \delta_1^1 = 1$

Ahora con $\bar{V} = e^1 \cdot (e^2 \times e^3)$ se tiene que:

$$\bar{V} = \frac{(e^2 \times e^3) \cdot (e^2 \times e^3)}{e_1 \cdot (e^2 \times e^3)}$$

$$= \frac{(e^2 \times e^3)^2}{e_1 \cdot \cancel{(e^2 \times e^3)}} = 1$$

$\Rightarrow V\bar{V} = 1$ ó bien verifiquemos con las determinantes:

Si $A = (e_1\ e_2\ e_3)$ y $\bar{A} = (e^1\ e^2\ e^3)$

$$\bar{A}^T A = \underbrace{\begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ e^2 & 0 & 0 \\ e^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\bar{A}^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$\bar{A}^T A = \begin{pmatrix} e^1 e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 e_3 \end{pmatrix} = I$$

$\det(\bar{A}^T A) = \det(I) = 1$

Es decir $\det(\bar{A}^T) = \tilde{V} = \det(\bar{A})$.

Tambien decir que $\det(A) = V$

Por tanto: $\tilde{V} V = 1 \iff V\tilde{V} = 1$ //

Powered by CamScanner

1) ¿que vector satisface $a \cdot e^i = 1$?
Demuestre que a es unico.

-Sol

Para que $a \cdot e^i = 1$, se debe tener que a no sea ortogonal a e^i, es decir definamos a a como $a^j e_j$, tal que:

$$= a^j e_j \cdot e^i = \delta^i_j$$

por tanto: $i \neq j$

$$e^i \cdot a^j e_j = \delta^i_j \, a^j = (a^j (e^i \cdot e_j))^j = a^i = 1$$

Por lo que $e^i \cdot a e_j = 1$ para que se de que $a \cdot e^i = 1$

Teniendo que $a = e_1 + e_2 + 3$ entonces

$\Rightarrow a \, e^i = 1$ y otro $b \cdot e^i = 1$

$\Rightarrow$ Podemos dar que $a = b$. demostrando su unicidad si:

$\Rightarrow (a - b) \cdot e^i = 0$ $\quad$ $a \cdot e^i - b \cdot e^i$ $\quad$ // Por propiedad producto escalar

$(a \cdot e^i - b \cdot e^i) = 0$

$a \cdot e^i = b \cdot e^i$

$a = b$

siendo a unico.

d) Encuentre el Producto vectorial de dos vectores a y b que están representados en un sistema de coordenadas Oblicuo:

Dada la base:

$w_1 = 4\hat{i} + 2\hat{j} + k$
$w_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j}$
$w_3 = 2\hat{k}$

Encuentre:

1. Las bases recíprocas $\{e^i\}$
2. Las componentes covariantes y contravariantes del vector $a = i + 2\hat{j} + 3k$

Sol: I)

Tenemos que:

$$e^i = \frac{(e_j \times e_K)}{e^i \cdot (e_j \times e_K)}$$

Entonces:

$$w^1 = \frac{(w_2 \times w_3)}{w_1 \cdot (w_2 \times w_3)} \quad ; \quad w^2 = \frac{(w_3 \times w_1)}{w_2 \cdot (w_3 \times w_1)}$$

$$w^3 = \frac{(w_1 \times w_2)}{w_3 \cdot (w_1 \times w_2)}$$

Por tanto las bases reciprocas son:

$$w^1 = \frac{1}{2}\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath}$$

$$w^2 = -\frac{1}{3}\hat{\imath} + \frac{2}{3}\hat{\jmath}$$

$$w^3 = -\frac{1}{9}\hat{\imath} + \frac{1}{9}\hat{\jmath} + \frac{1}{2}\hat{k}$$

II) componentes covariantes:

Tenemos que:

$$a = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

las componentes covariantos de ese vector: (bases reciprocas)

$$a = \lambda_i e^i$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -1/4 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 1/9 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

resolviendo el sistema

$\cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) l_1 = 1$

$l_1 = 11$

$\cdot \left(\frac{-1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) l_2 = 2$

$l_2 = 9$

$\cdot \ \frac{1}{2} l_3 = 3$

$l_3 = 6$

Las componentes covariantes son:

$l_1 = 11$; $l_2 = 9$; $l_3 = 6$

• componentes contravariantes (base inicial)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

=) Resolviendo:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^1 &= 3 \\ \lambda^2 &= -4/3 \\ \lambda^3 &= -7/2 \end{aligned}\right\}$$

Serian esos los componentes contravariantes.

Punto 7.

Espacio → matrices hermiticas 2x2

Producto Interno → $\langle a|b\rangle \rightleftharpoons Tr(A^\dagger B)$

Entonces encuentre la base dual asociada a capbase asociada a la base de Pauli.

Además dado un vector generico, encontraremos su 1-forma asociada.

SOl

base reciproca de Pauli:

$$\tilde{\sigma} = \{\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\}$$

base normal:

$$\sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

Como son hermiticas:

$$(A^\dagger)^i_j = \bar{A}^i_j = A^i_j \Leftrightarrow \langle e^i|A|e_j\rangle$$
$$\Leftrightarrow \langle e^i|A^\dagger|e_j\rangle$$

Powered by CamScanner

Entonces:

$$\langle \sigma_i | \sigma_j \rangle = 2\delta^i_j$$

$$\langle \tfrac{1}{2}\sigma_i | \sigma_j \rangle = \delta^i_j$$

La base dual:

$$\langle \sigma^i | \sigma_j \rangle = \delta^i_j \; ; \; \sigma^i = \tfrac{1}{2}\sigma_i$$

Entonces:

$$\tilde{\sigma} = \left\{ \tfrac{1}{2}\sigma_0, \tfrac{1}{2}\sigma_1, \tfrac{1}{2}\sigma_3, \tfrac{1}{2}\sigma_4 \right\}$$

Es base dual.

Ahora para un vector generico en este espacio vectorial:

$|a\rangle$ sea un vector perteneciente al espacio V

y $\langle a|$ un vector al espacio con base reciproca $\tilde{V}$

Entonces:

$$|a\rangle = w^i \sigma_i \quad \wedge \quad \langle a| = w_i \sigma^i$$

$$w_i = \langle \sigma_i | a \rangle = \langle \sigma_i | w^i \sigma_i \rangle$$

$$= w^i \langle \sigma_i \sigma_i \rangle = 2w^i$$

$w_i = 2w^i$ (1-forma asociada)

Powered by CamScanner