Scribe

5) Considere el espacio vectorial de las matrices complejas 2×2 hermiticas, tal y como demostraremos con rigor en la sección 4.3.2.2, una matriz hermitica (o autoadjunta)

Esto es una matriz será igual a su transpuesta conjugada $\boxed{(A^{+})^{i}_{j} = (A^{*})^{j}_{i}}$

$$(A^{*})^{j}_{i} = A^{j}_{i} \Rightarrow H_{ermitica}$$ adjunta

$$A = A^{+} = A^{*}$$

$$A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{+} = \begin{pmatrix} z_1^{*} & z_3^{*} \\ z_2^{*} & z_4^{*} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z_1 = z_1^{*} \\ z_2 = z_3^{*} \\ z_3 = z_2^{*} \\ z_4 = z_4^{*} \end{cases} \in \mathbb{C} \Rightarrow z_j = x + iy \; ; \; j = 1,2,3,4$$

a) Muestre que las matrices de Pauli $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ forman una base de ese espacio vectorial

Sol:

Matrices de Pauli:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Relacionando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 + iy_1 = x_1 - iy_1 \Rightarrow \boxed{iy_1 = -iy_1} \Rightarrow x_1 = x_1 \\ x_4 + iy_4 = x_4 - iy_4 \Rightarrow \boxed{iy_4 = -iy_4} \Rightarrow x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$x_2 + iy_2 = x_3 - iy_3 \Rightarrow x_3 + iy_3 = x_2 - iy_2$$
$$x_3 + iy_3 = x_2 - iy_2 \Rightarrow x_2 + iy_2 = x_3 - iy_3$$

pues es H.

$$A = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 & x_2 + iy_2 \\ x_3 + iy_3 & x_4 + iy_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 + iy_2 \\ x_2 - iy_2 & x_4 \end{pmatrix}$$

$$= x_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$+ iy_2\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\text{Base} = \left\{ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \right\}$$

dimensión de 4, se cumple que las bases son las matrices de Pauli. L.I., genera a A^H.

b) Compruebe que esa base es ortogonal bajo la definición de producto interno
$\langle a|b\rangle = Tr(A^{\dagger}B)$ que introdujimos en los ejercicios de esa sección.

Sol $\qquad ij = k;\ jk = i;\ ki = j$

Las matrices de Pauli deben ser ortogonales.

Se tiene que $\sigma_0 = I$, por tanto:

$$\langle I|\sigma_1\rangle = Tr(I^{\dagger}\sigma_1) = Tr(\sigma_1) = 0$$

$$\langle I|\sigma_2\rangle = Tr(I^{\dagger}\sigma_2) = Tr(\sigma_2) = 0$$

$$\langle I|\sigma_3\rangle = Tr(I^{\dagger}\sigma_3) = Tr(\sigma_3) = 0$$

(son hermíticas entonces $A^{\dagger}B = AB$

$$\langle \sigma_1|\sigma_2\rangle = Tr(\sigma_1^{\dagger}\sigma_2) = Tr(\sigma_1\sigma_2) = Tr\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \sigma_1|\sigma_3\rangle = Tr(\sigma_2^{\dagger}\sigma_3) = Tr(\sigma_2\sigma_3) = Tr\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$Tr(\sigma_1^{\dagger}\sigma_3)$

$$\langle \sigma_1|\sigma_3\rangle = Tr(\sigma_1\sigma_3) = tr\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

c) Explique si se pueden construir subespacios vectoriales de matrices reales e imaginarios puras

Sol

Para matrices reales, $A^{\dagger} = \overline{A}^{T} = A^{T}$
Como son hermíticas, $\overline{a} = a$ para todo a en los reales.

Sea ahora A una matriz hermítica es decir, simétrica, y suponiendo es real. Para:

Existe un subespacio real de las hermíticas:

$$S = \{ A \in M_{2x2} \text{ tal que } A^{\dagger} = A \}$$

Haciendo que $S \subseteq A^{H}$, haciéndolo subespacio.

Ahora para las complejas puras:
Suponga un subespacio C de complejos:

$$C = \{ B \in M_{2x2} \} \text{ tal que } B = \begin{pmatrix} ai & bi \\ ci & di \end{pmatrix}$$

Esto es subespacio si:

1) Nulo:

$$B = \begin{pmatrix} 0i & 0i \\ 0i & 0i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B \in C$$

Scribe

2) Elemento inverso:

$$B=\begin{pmatrix} ai & bi \\ ci & di \end{pmatrix} \; ; \; \bar{B}=\begin{pmatrix} \tilde{a}i & \bar{b}i \\ \tilde{c}i & \bar{d}i \end{pmatrix}$$

y por tanto, tambien su suma.

$$B+\bar{B}=\begin{pmatrix} (a+\bar{a})i & (b+\bar{b})i \\ (c+\bar{c})i & (d+\bar{d})i \end{pmatrix}$$

Es decir $B \in C$

2) multipiicacion por un escalar

$$\alpha B=\begin{pmatrix} \alpha ai & \alpha bi \\ \alpha ci & \alpha di \end{pmatrix}$$

haciendo que cualquier α por un elemento de la matriz sean imaginarios puros

$B \in C$.

Por tanto el subespacio C existe si está $C \subseteq A^H$. Estando en el espacio de las hermiticas.