Ejercicio 10

a) Dem que es un espacio vectorial respecto a la suma de Polinomios y a la multiplicación de Polinomios por (numero real)

Sea $|P_n\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$.

Dem

Sea: $\Rightarrow |P_i\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \quad \wedge \quad |P_j\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$

$$|P_i\rangle \boxplus |P_j\rangle = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^{n-1}) \boxplus$$

$$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^{n-1})$$

Ejercicio 10

$$|P_i\rangle \boxplus |P_j\rangle = \{(a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \dots + (a_n+b_n)x^n\}.$$

$\Rightarrow$ Definimos $\boxed{\xi^i = a_i + b_j}$ Con $i = K$

$$|P_i\rangle \boxplus |P_j\rangle = \xi^0 + \xi^1 x + \xi^2 x^2 + \dots + \xi^n x^n$$

Como $a_i, b_j \in K$, $(a_i + b_j) \in K$ $\wedge$ $|P_i\rangle, |P_j\rangle, |P_i\rangle \boxplus |P_j\rangle$

$\in V$ //

Ejercicio 10

a) Dem que es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por (numero real)

Sea $|P_n\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$.

Dem

$$|P_i\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$\Rightarrow \alpha |P_i\rangle = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$\alpha |P_i\rangle = \alpha (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^{n-1})$$

$$\alpha |P_i\rangle = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \dots + \alpha a_n x^{n-1}]$$

Definiendo $\boxed{\varsigma^i = \alpha a_i}$ tenemos que:

$$\alpha |P_i\rangle = \varsigma^1 + \varsigma^2 x + \varsigma^3 x^2 + \dots + \varsigma^n x^{n-1}]$$

con $\alpha, a_i \in \mathbb{K} \wedge |P_i\rangle \in \mathbb{V}$ entonces:

$$\alpha |P_i\rangle \in \mathbb{V}$$

Ejercicio 10

b) si los coeficientes a_i son enteros, ¿P_n será un espacio vectorial? ¿Por qué?

Rta:

sea $|P_i\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ con $a_i \in \mathbb{K}$ siendo $\mathbb{K} \in \mathbb{Z}$

Suponga multiplicación de polinomios por un $\alpha \in Q$

$$\alpha|P_i\rangle = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$\alpha|P_i\rangle = (\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \ldots + \alpha a_n x^n$$

Con $|P_i\rangle \in \mathbb{V}$; $\alpha a_i = \xi^i$ con $\alpha \in Q$ ^ $a_i \in \mathbb{Z}$

y por tanto $\alpha a_i = \xi^i \in Q$

Entonces $\alpha|P_i\rangle$ no pertenece a los enteros, como $\alpha \in \mathbb{Z}$ para que $\alpha|P_i\rangle \in \mathbb{Z}$, entonces P_n <u>no</u> es espacio vectorial

Ejercicio 10

c) ¿Cual de los siguientes subconjuntos de P_n es un subespacio vectorial.

Rta:

→ Para que sea considerado $S \in V$ se debe tener en cuenta que:

1. $|0\rangle \in V$ está en S
2. Si $|s_1\rangle, |s_2\rangle \in S$ entonces $|s_1\rangle \boxplus |s_2\rangle \in S$
3. Si $|s\rangle \in S$ y α es un elemento del campo K, entonces $\alpha|s\rangle \in S$

Ejercicio 10

c) ¿Cual de los siguientes subconjuntos de P_n es un subespacio vectorial.

Rta: Teniendo en cuenta lo anterior, se puede decir que:

III) Todas los Polinomios que tienen a x como un factor $(n>1)$

IV) Todos los Polinomios que tienen a $x-1$ con factor

1) Estos cumplen con el vector nulo los EVES

2) Cumplen propiedad suma:

$$\Rightarrow X|P_i\rangle \boxplus |P_j\rangle = X \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i \boxplus X \sum_{j=1}^{n-1} b_j x^j$$

$$= X\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i \boxplus \sum_{j=1}^{n-1} b_j x^j\right)$$

$$= X(|P_i\rangle \boxplus |P_j\rangle) \text{ //}$$

III

De Igual forma:

$$(X-1)(|P_1\rangle \boxplus |P_j\rangle) \text{ //}$$

IV

Ejercicio 10

c) ¿Cual de los siguientes Subconjuntos de P_n es un subespacio vectorial.

3) Multiplicación por escalar:

=> Caso III

$$x|p_i\rangle = x\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$\alpha x|p_i\rangle = \alpha x\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$\alpha \in \mathbb{K}$; $|p_i\rangle \in S$; $\boxed{\alpha x|p_i\rangle \in S}$ ✓

=> Caso IV

$$(x-1)|p_j\rangle = (x-1)\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

$$(\alpha x-\alpha)|p_j\rangle = \alpha(x-1)\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

$\alpha \in \mathbb{K}$; $|p_j\rangle \in S$; $\boxed{(\alpha x-\alpha)|p_j\rangle \in S.}$ ✓✓

Tarea 2.2.4

6) Compruebe si los cuaterniones $|a\rangle$ forman un espacio vectorial respecto a esa operación suma $\oplus$ y multiplicación analoga a la de los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas

1. La suma de dos cuaterniones es otro cuaternion

2. Asociatividad

$$(|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle = |a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle)$$

3. $$|0\rangle = 0 + 0|q_1\rangle + 0|q_2\rangle + 0|q_3\rangle$$

$$|a\rangle + |0\rangle = |a\rangle$$

4. Inverso aditivo

$$-|a\rangle = a^0 - a^1|q_1\rangle + a^2|q_2\rangle - a^3|q_3\rangle$$

$$|a\rangle + (-|a\rangle) = |0\rangle$$

5. Conmutatividad

$|a\rangle + |b\rangle = |b\rangle + |a\rangle$ (suma de reales conmutativa)

6. multiplicación por escalar

$\alpha|a\rangle$ es otro cuaternion

7) Distributividad

$(\alpha+\beta)|a\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|a\rangle$ se cumple por distributividad

8) Compatibilidad con el producto en IR de escalares

$\alpha(\beta|a\rangle) = (\alpha\beta)|a\rangle$ se cumple por asociatividad del producto en IR

b) Dados dos cuaterniones cualesquiera $|b\rangle = (b^0, b)$ y $|r\rangle \equiv (r^0, r)$ y su tabla de multiplicación, muestre que el producto entre esos cuaterniones

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$$

Podrá representarse como:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \longleftrightarrow (d^0, d)$$

$$(d^0, d) = (b^0 r^0 - b \cdot r,\ r^0 b + b^0 r + (b \times r))$$

donde $(\cdot \ \wedge \times)$ corresponden a los productos escalares y vectoriales en IR^3.

Scribe

$$(b^0, b) = b^0 + b^i q_i > \quad ; \quad (r^0, r) = r^0 + r^i q_i >$$

$$= (b^0 + b \cdot |q_i>) \odot (r^0 + r \cdot |q_i>)$$

$$= b^0 r^0 + b^0 r \cdot |q_i> + r^0 b |q_i> +$$

$$\boxed{(b \cdot |q_i>)(r |q_i>)}$$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ij = k \; ; \; jk = i \; ; \; ki = j$

(~~no~~ anti Conmutar)

donde $(b \cdot |q_i>)(r \cdot |q_i>) =$

$$(b^1 \hat{i} + b^2 \hat{j} + b^3 \hat{k})(r^1 \hat{i} + r^2 \hat{j} + r^3 \hat{k})$$

Por tanto:

$$\Rightarrow b^1 r^1 \hat{i}^2 + (b^1 r^2 (\hat{i}\hat{j})) + b^1 r^3 (\hat{i}\hat{k}) + b^2 r^1 (\hat{j}\hat{i}) + b^2 r^2 \hat{j}^2$$
$$+ b^2 r^3 (\hat{j}\hat{k}) + b^3 r^1 (\hat{k}\hat{i}) + b^3 r^2 (\hat{k}\hat{j}) + b^3 r^3 \hat{k}^2$$

$$\Rightarrow -b^1 r^1 + (b^1 r^2 \hat{k}) + (-b^1 r^3 \hat{j}) + b^2 r^1 \hat{k}$$
$$+ (-b^2 r^2) + b^2 r^3 \hat{i} + b^3 r^1 \hat{j} + b^3 r^2 (-\hat{i})$$
$$+ (-1) b^3 r^3$$

$$\Rightarrow \underbrace{(b^2 r^3 \hat{i} - b^3 r^2 \hat{i}) + (b^3 r^1 \hat{j} - b^1 r^3 \hat{j}) + (b^1 r^2 \hat{k} - b^2 r^1 \hat{k})}_{\text{Producto vectorial}} \underbrace{(-b^1 r^1 - b^2 r^2 - b^3 r^3)}_{\text{escalar}}$$

sintaxis de funciones

```
def nombre(a,b):
    c=2
    d=a+b+c
    return d
```

Ejemplo:

```
def imprimir_hola():
    print("hola")
```

• df_stars

$\Rightarrow \boxed{-b\cdot r + (b\times r)}$

$\Rightarrow (b_0 + b\cdot|q_i\rangle) \odot (r_0 + r\cdot|q_i\rangle$

$\Rightarrow b_0 r_0 + b^0|r\rangle + r^0|b\rangle + (-b\cdot r)(b\times r)$

$\Rightarrow b_0 r_0 - b\cdot r + r^0|b\rangle + b^0|r\rangle + (b\times a)$

Agrupando parte vectorial y escalar

$|d\rangle = (d_0, d) = (b_0, b) \odot (r_0, r)$

$= b_0 + b\cdot|q_i\rangle \odot r_0 + r\cdot|q_i\rangle$

$\Rightarrow b_0 r_0 - b\cdot r,\ b_0|r\rangle + r^0|b\rangle + (b\times r)$

c) Ahora con índices dados

$|b\rangle = b^{\alpha}|q_\alpha\rangle \wedge |r\rangle = r^{\alpha}|q_\alpha\rangle$

Entonces ~~compruebe~~ que $\begin{cases} \hat{i}\hat{j} = \hat{k} & \hat{j}\hat{k} = \hat{i} & \hat{k}\hat{i} = \hat{j} \\ \hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = 1 \end{cases}$

$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$

$$= \underbrace{a|q_0\rangle + S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha|q_j\rangle + A^{[jk]i}b_j r_k|q_i\rangle}$$

donde a representa un escalar, $S^{(\alpha j)}\delta^0_\alpha$ (recuerde que los índices latinos toman los valores $j, k, l = 1, 2, 3$ mientras $\alpha = 0, 1, 2, 3$ donde $S^{(ij)}$ indica $(S^{ji} = S^{ij})$ que la cantidad S^{ij} es simétrica y por lo tanto

$(S^{\alpha j}\delta^0_\alpha + S^{j\alpha}\delta^0_\alpha)|q_j\rangle$

Mientras $A^{[jk]i}$ representa un conjunto antisimétricos en j y k:

$$A^{[jk]i} \rightarrow A^{jki} = -[A^{kj}]^i = (-A^{kji}$$

$$-A^{kji} \rightarrow (A^{jki}b_j r_k - A^{kji}b_j r_k)|q_i\rangle.$$

Para la parte escalar, $q|q_0\rangle = q$; $q \in \mathbb{K}$

• $S^{(\alpha j)} \overset{0}{S_\alpha} |q_j\rangle$ es un termino asociado a dos

Vectores que aparecen en la formula, que son simetricos y son sumados, por lo que este elemento debe ser simetrico

$A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$ Indica una permutación

anticiclica, asociada al producto cruz presente en la formula en las componentes de los vectores r y b en dirección $r \wedge b$ en dirección perpendicular a ellos por ello se incluye $|q_i\rangle$

Con las definiciones correctas para estos elementos es posible, ya que la estructura

$|a\rangle \circledcirc |b\rangle$ = escalar + simetrico + antisimetrico

d) Identifique las cantidades q, $S^{(ij)}$, $A^{[jk]i}$ en terminos de los componentes de los cuaterniones.

¿El Producto de cuaterniones $|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$ será un vector, pseudovector o ninguna de las anteriores? Explique porqué.

$q = b_0 r_0 - b \cdot r$ de la ecuación

$$|d\rangle = b_0 r_0 - b \cdot r,\ b_0 |r\rangle + r^0 |b\rangle + (b \times r)$$

Siendo q la parte escalar del producto de cuaterniones.

$$S^{\alpha j} \delta^0_\alpha = S^{j\alpha} \delta^0_\alpha = S^{0j} = S^{j0}$$

$$\Rightarrow S^{(\alpha j)} \delta^0_\alpha |q_j\rangle = \frac{1}{2}(S^{0j} + S^{j0}) |q_j\rangle$$

$$\Rightarrow S^{01} = S^{10} = r_0 b_j + b_0 r_j = \boxed{b_0 r_j + r_0 b_j}$$ parte simetrica

$$S^{(ij)} = b_i r_j + r_i b_j$$

$$A^{[jk]i} = \varepsilon^{jki}$$ → parte antisimetrica

→ Para recuperar la notación de índices para el producto vectorial

El Producto $|a\rangle \odot |b\rangle$ mezcla vectores, pseudovectores y escalares.

La parte vectorial de $|a\rangle \odot |b\rangle$ bajo una reflexión

$$d = \underbrace{r_0 b + b_0 r}_{\text{Vector}} + \underbrace{(b \times r)}_{\text{Pseudovector}}$$

$$|d\rangle = r_0 b + b_0 r + \underbrace{(b \times r)}_{\text{Pseudovector}}$$

$$\Rightarrow d^{i'} = A_j^{i'} a^j + \det|A_j^{i'}| A_j^{i'} a^j$$

con $A_j^{i'}$ la matriz de rotación.

$\rightarrow \det|A_j^{i'}| \neq 1$ para ciertos casos, Por tanto:

$d^{i'} \neq B_j^{i'} a^{j'}$ = No es vector como tal

ni $d^{i'} = \det|C_j^{i'}| C_j^{i'} a^j$ es Pseudo vector.

e) compruebe si las matrices de Pauli y la identidad

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$y \quad \sigma_0 \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pueden representar la base de los cuaterniones $\{|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle, |q_0\rangle\}$

Luego muestre que matrices complejas 2x2 del tipo:

$$|b\rangle \longleftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$$

Pueden ser consideradas como cuaterniones donde $z = x+iy \wedge w = a+ib$ son números complejos.

Dem

$|q_j\rangle I = |q_j\rangle$, con $|q_0\rangle |q_0\rangle = I^2 = I$

$\Rightarrow$ se tiene que $|q_j = i\sigma_j$; $j = 1,2,3$

$ij = k$; $jk = i$; $ki = j$

(anticonmutan)

$\Rightarrow i\sigma_1 i\sigma_2 = -\sigma_3$

$i\sigma_2 i\sigma_1 = \sigma_3$

$\Rightarrow i\sigma_2 i\sigma_3 = -\sigma_1$

$i\sigma_3 i\sigma_2 = \sigma_1$

$\Rightarrow$ como cumple con la tabla de multiplicación de los cuaterniones, las matrices de Pauli son base.

$\Rightarrow i\sigma_1 i\sigma_3 = -\sigma_2$

$i\sigma_3 i\sigma_1 = \sigma_2$

$|q_j = i\sigma_j$

$j = 1,2,3$

Consideremos la matriz:

$$|b\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+ib & x-iy \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow z = x+iy$; $w = a+ib$

Pueden ser cuaterniones pues:

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iy & 0 \\ 0 & -iy \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ib \\ ib & 0 \end{pmatrix}$$

$$|b\rangle = xI + ib\sigma_1 + iy\sigma_3 + ai\sigma_2$$

Por tanto $|b\rangle$ es una combinación lineal de las matrices de pauli.

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} x+iy & a+ib \\ -a+ib & x-iy \end{pmatrix}$$

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$$

f) Muestre que una representación posible para la base de cuaterniones es: la matriz identidad y las matrices reales 4x4 de la forma.

$$|q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Asociamos cada matriz con un cuaternión:

$|q_0\rangle = I$ Pues $|q_i\rangle|q_0\rangle = |q_0\rangle|q_i\rangle$

$= |q_i\rangle \quad i = 1, 2, 3$

$|q_1\rangle|q_2\rangle = |q_3\rangle$ $\quad$ $|q_2\rangle|q_3\rangle = |q_1\rangle$

$|q_2\rangle|q_1\rangle = -|q_3\rangle$ $\quad$ $|q_3\rangle|q_2\rangle = -|q_1\rangle$

$|q_3\rangle|q_1\rangle = q_2$ $\quad$ $|q_2\rangle|q_2\rangle = -1$

$|q_1\rangle|q_3\rangle = -q_2$ $\quad$ $|q_3\rangle|q_3\rangle = -1$

$|q_1\rangle|q_1\rangle = -1$

g) Compruebe si la siguiente es una buena definición de producto interno:

$$\widetilde{\langle a|b\rangle} = |a\rangle^{*} \odot |b\rangle.$$

Sol

tenga en cuenta que:

$|a\rangle = a_0 + a^i \cdot |q\rangle$; $|b\rangle = b_0 + b^i|q\rangle$

$|a\rangle^{*} = a_0 - a^i|q_i\rangle$

$|a\rangle^{*} \odot |b\rangle = a_0 b_0 + a \cdot b - b_0|a\rangle + a_0|b\rangle + (b \times a)$

⇒ El producto Interno te debe dar un numero no un cuaternión.

No es una buena definición. X

i. Compruebe si la siguiente es una buena definición de norma para los cuaterniones:

$$n(|b\rangle) = \| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$$
$$= \sqrt{|a\rangle^{*} \odot |a\rangle}$$

Sol

$|a\rangle = a_0 + a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$

$|a\rangle^{*} = a_0 - a_1 \hat{i} - a_2 \hat{j} - a_3 \hat{k}$

$|a\rangle^{*} \odot |a\rangle = a_0 a_0 + a \cdot a$

$= a_0^2 + \|a\|^2$

$= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$\Rightarrow \sqrt{|a\rangle^{*} \odot |a\rangle} = n(|a\rangle) = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Es buena definición.

j) Compruebe si un cuaternión definido por:

$$\overline{|a\rangle} = \frac{|a\rangle^{*}}{\| |a\rangle \|^2}$$

Puede ser considerado como el inverso o simétrico de $|a\rangle$, respecto a la multiplicación $\odot$

$$\overline{|a\rangle} = \frac{|a\rangle^{*}}{\| |a\rangle \|^2} \Rightarrow |a\rangle \odot \overline{|a\rangle}$$

$$\Rightarrow |a\rangle \odot \frac{|a\rangle^{*}}{\| |a\rangle \|^2}$$

Luego

$$|a\rangle \odot \frac{|a\rangle^{*}}{\| |a\rangle \|^2} = (a_0 + a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \odot \left(\frac{a_0}{\| |a\rangle \|^2} + \frac{a_1}{\| |a\rangle \|^2}\hat{i} + \frac{a_2}{\| |a\rangle \|^2}\hat{j} + \frac{a_3}{\| |a\rangle \|^2}\hat{k} \right)$$

$$= \frac{a_0^2}{\| |a\rangle \|^2} + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{\| |a\rangle \|^2} = 1$$

siendo el inverso.

K) Compruebe si los cuaterniones las forman un grupo respecto a la operación multiplicación ⊙

Construya la tabla de multiplicación del Grupo Cuaterniones

⊙	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-j
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

$ij = k$; $jk = i$

$ki = j$

anticonmutan

i) Los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas, $|v\rangle$, pueden ser representados como cuaterniones, donde la parte es nula $r^0 = 0 \Rightarrow |v\rangle = v^j |q_j\rangle$. Compruebe si el siguiente producto conserva la norma:

$$|v'\rangle = |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle$$

Esto es $\| |v'\rangle \|^2 = (v^{1'})^2 + (v^{2'})^2 + (v^{3'})^2$

$$= (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$$

Sol

$$\frac{1}{\| |a\rangle \|} = \| |\bar{a}\rangle \|$$

Sea $|v'\rangle = |\bar{a}\rangle \odot |v\rangle \odot |a\rangle$

$$\| |v'\rangle \| = \cancel{\| \bar{a}\rangle \|} \; \| |v\rangle \| \; \cancel{\| |a\rangle \|}$$

$$\| |v'\rangle \| = \| |v\rangle \|$$

Powered by CamScanner