Ejercicio 10

a) Dem que es un espacio vectorial respecto a la suma de Polinomios y a la multiplicación de Polinomios (Por (numero real))

Sea $|P_n\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

Dem

$\Rightarrow$ Sea: $|P_i\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ $\quad |P_j\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$

$|P_i\rangle \boxplus |P_j\rangle = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^{n-1}) \boxplus$

$(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^{n-1})$

Ejercicio 10

$$|P_i\rangle \boxplus |P_j\rangle = \{(a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \dots + (a_n+b_n)x^n\}.$$

$\Rightarrow$ Definimos $\boxed{\xi^i = a_i + b_j}$ Con $i = K$

$$|P_i\rangle \boxplus |P_j\rangle = \xi^0 + \xi^1 x + \xi^2 x^2 + \dots + \xi^n x^n$$

Como $a_i, b_j \in \mathbb{K}$, $(a_i+b_j) \in \mathbb{K}$ $\wedge$ $|P_i\rangle, |P_j\rangle, |P_i\rangle \boxplus |P_j\rangle$

$\in \mathbb{V}$ //

Ejercicio 10

a) Dem que es un espacio vectorial respecto a la suma de Polinomios y a la multiplicación de Polinomios por (numero real)

Sea $|P_n\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$.

Dem

$$|P_i\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$\Rightarrow \alpha |P_i\rangle = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$\alpha |P_i\rangle = \alpha (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^{n-1})$$

$$\alpha |P_i\rangle = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \dots + \alpha a_n x^{n-1}$$

Definiendo $\boxed{\varsigma^i = \alpha a_i}$ tenemos que:

$$\alpha |P_i\rangle = \varsigma^1 + \varsigma^2 x + \varsigma^3 x^2 + \dots + \varsigma^n x^{n-1}$$

Con $\alpha, a_i \in \mathbb{K} \wedge |P_i\rangle \in \mathbb{V}$ entonces:

$$\alpha |P_i\rangle \in \mathbb{V}$$

Ejercicio 10

b) si los coeficientes a_i son enteros, ¿P_n será un espacio vectorial? ¿Por qué?

Rta:

sea $|P_i\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ con $a_i \in \mathbb{K}$ siendo $\mathbb{K} \in \mathbb{Z}$

Suponga multiplicación de polinomios por un $\boxed{\alpha \in Q}$

$$\alpha |P_i\rangle = \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$\alpha |P_i\rangle = (\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \dots + \alpha a_n x^n$$

Con $|P_i\rangle \in \mathbb{V}$; $\boxed{\alpha a_i = \xi^i}$ con $\boxed{\alpha \in Q}$ $\wedge$ $\boxed{a_i \in \mathbb{Z}}$

y por tanto $\boxed{\alpha a_i = \xi^i \in Q}$

Entonces $\boxed{\alpha |P_i\rangle}$ no pertenece a los enteros, como $\boxed{\alpha \in \mathbb{Z}}$ para que $\boxed{\alpha |P_i\rangle} \in \mathbb{Z}$, entonces P_n <u>no</u> es espacio vectorial

Ejercicio 10

C) ¿Cual de los siguientes subconjuntos de P_n es un subespacio vectorial.

Rta:

-> Para que sea considerado $S \in V$ se debe tener en cuenta que:

1. $|0\rangle \in V$ está en S
2. Si $|s_1\rangle, |s_2\rangle \in S$ entonces $|s_1\rangle \boxplus |s_2\rangle \in S$
3. Si $|s\rangle \in S$ y α es un elemento del campo K, entonces $\alpha|s\rangle \in S$

Ejercicio 10

c) ¿Cual de los siguientes subconjuntos de P_n es un subespacio vectorial.

Rta: Teniendo en cuenta lo anterior, se puede decir que:

III) Todas los polinomios que tienen a x como un factor $(n>1)$

IV) Todos los polinomios que tienen a $x-1$ con factor

1) Estos cumplen con el vector nulo los EVES

2) Cumplen propiedad suma:

$$\Rightarrow x\,|P_i\rangle \boxplus |P_j\rangle = x\sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i \boxplus x\sum_{j=1}^{n-1} b_j x^j$$

$$= x\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i \boxplus \sum_{j=1}^{n-1} b_j x^j\right)$$

$$= x(|P_i\rangle \boxplus |P_j\rangle) \,/\!/$$

III

De igual forma:

$$(x-1)(|P_1\rangle \boxplus |P_j\rangle) \,/\!/$$

IV

Ejercicio 10

c) ¿Cual de los siguientes subconjuntos de P_n es un subespacio vectorial.

3) Multiplicación por escalar:

=> Caso III

$$x|p_i\rangle = x\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$$\alpha x|p_i\rangle = \alpha x \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

$\alpha \in \mathbb{K}$; $|p_i\rangle \in S$; $\boxed{\alpha x|p_i\rangle \in S}$

=> Caso IV

$$(x-1)|p_j\rangle = (x-1)\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

$$(\alpha x-\alpha)|p_j\rangle = \alpha(x-1)\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

$\alpha \in \mathbb{K}$; $|p_j\rangle \in S$; $\boxed{(\alpha x-\alpha)|p_j\rangle \in S.}$