TEMA / MATERIA | DÍA | MES | AÑO

3. Considere lo expuesto en la sección 1.9.3 y demuestre que:

$$A_k^{i'} \tilde{A}_{i'}^{j} = \delta_k^j$$

y además, como caso especial, establecer la relación con los cosenos directores que satisfacen:

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1.$$

Demostración

$$A_k^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \; ; \; \tilde{A}_{i'}^{j} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \; ; \; x^j = x^j(x^{i'}(x^k))$$

Por tanto:

$$A_k^{i'} \tilde{A}_{i'}^{j} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$$

Hallando $\frac{\partial x^j}{\partial x^k}$ obtenemos por regla de la cadena

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \Rightarrow A_k^{i'} \tilde{A}_{i'}^{j} = \frac{\partial x^j}{\partial x^k}$$

Ahora si $j = k$

$$A_j^{i'} \tilde{A}_{i'}^{j} = \frac{\partial x^j}{\partial x^j} = 1 = \delta_j^j \delta_k^k$$

Si $j \neq k$

$$A_j^{i'} \tilde{A}_{i'}^{j} = \frac{\partial x^j}{\partial x^k} = 0 = \delta_k^j$$

TEMA / MATERIA | DÍA | MES | AÑO

Estableciendo la relación con los cosenos directores que satisfaces:

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos^2(\gamma)^2 = 1$$

Consideramos $j = k$

La base ortonormal original $[\hat{e}_j]$ y $[\hat{e}'_{1'}]$ la base ortonormal rotada.

$$\hat{e}'_{1'} = A^{1'}_j \hat{e}_j$$

$$\hat{e}'_{1'} \cdot \hat{e}_j = A^{1'}_j$$

$$\boxed{A^{1'}_j = \cos(\theta_{1'j})}$$

Donde $\theta_{1'j}$ es el angulo entre $1'$ y j

$$\hat{e}'_{1'} \cdot \hat{e}'_{1'} = 1$$

$$A^{1'}_j A^{1'}_j (\hat{e}_j \cdot \hat{e}_j) = 1$$

$$A^{1'}_j A^{1'}_j = 1 \Rightarrow (A^{1'}_j)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (A^{1'}_1)^2 + (A^{2'}_2)^2 + (A^{3'}_3) = 1$$

Cuando se fija la base ortonormal rotada entonces:

$$\theta_{1'1} = \alpha, \quad \theta_{2'2} = \beta, \quad \theta_{3'3} = \gamma$$

Por tanto

$$\cos(\theta_{1'1})^2 + \cos^2(\theta_{2'2}) + \cos^2(\theta_{3'3}) = 1$$

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma) = 1.$$

TEMA / MATERIA | DÍA | MES | AÑO

4. Considere el radio vector posición $r = x^i \hat{i}_i = x\hat{i} + y\hat{j}$. Dado el conjunto de transformaciones que se indican a continuación, [demuestre en cuales casos las componentes] de la transforman como verdaderas componentes de vectores.

$(x,y) \to (-y,x)$, $(x,y) \to (x,-y)$,

$(x,y) \to (x-y, x+y)$, $(x,y) \to (x+y, x-y)$

Entonces:

$r = x^i i_i = x\hat{i} + y\hat{j}$

$r' = x^{i'} i_{i'}$

Hallamos que $x^{i'} = A^{i'}_j x^j$ con $i, j = 1, 2$

1) $(x^i, x^j) \to (-x^j, x^i)$

Implica que $x^{i'} = -x^j$ y $x^{j'} = x^i$

Así:

$$\begin{pmatrix} x^{i'} \\ x^{j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^i \\ x^j \end{pmatrix} = x^{i'} = Ax^j$$

$\Rightarrow A^{i'}_j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$, transforma como vector.

TEMA / MATERIA | DÍA | MES | AÑO

b) $(x^i, x^j) \to (x^i, -x^j)$

$x^{i'} = x^i \wedge x^{j'} = -x^j$

$$\begin{pmatrix} x^{i'} \\ x^{j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^i \\ x^j \end{pmatrix} \Rightarrow x^{i'} = A x^j$$

$$\Rightarrow A^{i'}_{j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A$$

Por lo que transforma como vector.

c) $(x^i, x^j) \to (x^i - x^j, x^i + x^j)$

$x^{i'} = x^i - x^j \wedge x^{j'} = x^i + x^j$

$$\begin{pmatrix} x^{i'} \\ x^{j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^i \\ x^j \end{pmatrix} \Rightarrow x^i = A x^j$$

$$A^{i'}_{j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Por lo que transforma como vector

TEMA / MATERIA

DÍA MES AÑO

d) $(x^{i}, x^{j}) = (x^{i} + x^{j}, x^{i} - x^{j})$

$x^{i'} = x^{i} + x^{j}$, $x^{j'} = x^{i} - x^{j}$

Puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} x^{i'} \\ x^{j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{i} \\ x^{j} \end{pmatrix} = x^{i'} = A x^{j}$$

$$A^{i'}_{j} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

transforma como vector.

TEMA / MATERIA | DIA | MES | AÑO

2. Demuestre:

a) $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}^2(\alpha)$

b) $\mathrm{sen}(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\,\mathrm{sen}(\alpha) - \mathrm{sen}^3(\alpha)$

Solución:

$z = x + iy = |z| e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$z^n = (|z| e^{i\theta})^n = |z|^n (e^{n\theta})^n = |z|^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta)$

$|z|^n(\cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta) = |z|^n(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n$

$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta \quad ; n = 3$

Es decir:

$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^3 = \cos 3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta$

$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta - i\,\mathrm{sen}^3\theta = \cos 3\theta + i\,\mathrm{sen}\,3\theta$

$\Rightarrow \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta$

$\Rightarrow \mathrm{sen}\,3\theta = 3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}^3\theta$ //

TEMA / MATERIA | DÍA | MES | AÑO

d) $\nabla \cdot (\nabla \times a)$ ¿Qué puede decir $\nabla \times (\nabla \cdot a)$?

Entonces:

Sea $a = a(r)$ un campo vectorial

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times a) = \partial^i (\nabla \times a)_i$$

$$= \partial^i (\epsilon_{ijk} \partial^j a^k)$$

$$= \epsilon_{ijk} \partial^i (\partial^j a^k)$$

$$= \epsilon_{jik} \partial^j (\partial^i a^k)$$

$\boxed{\text{Por conmutación} \Rightarrow \partial^i (\partial^j a^k) = \partial^j (\partial^i a^k)}$

$$= -\epsilon_{ijk} \partial^i (\partial^j a^k).$$

Por tanto:

$$\epsilon_{ijk} \partial^i (\partial^j a^k) = -\epsilon_{ijk} \partial^i (\partial^j a^k)$$

$$\epsilon_{ijk} \partial^i (\partial^j a^k) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times a) = 0$$

y $\nabla \times (\nabla \cdot a)$ no está definido pues $\nabla \cdot a$ es un escalar y no se puede.

TEMA / MATERIA

DIA | MES | AÑO

f) $\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a.$

donde $a = a(r)$ entonces:

$$\nabla \times (\nabla \times a) = \varepsilon_{ijk}\, \partial^j (\nabla \times a)^k$$
$$= \varepsilon_{ijk}\, \partial^j (\varepsilon^{klm} \partial_l a_m)$$
$$= \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon^{klm}\, \partial^j (\partial_l a_m)$$
$$= \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon^{lmk} (\partial_l a_m)$$
$$= (\delta^i_l \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_l)\, \partial^j (\partial_l a_m)$$
$$= a^j (\partial_i a_j) - \partial^j (\partial_j a_i)$$
$$= a_j (\partial^i a_j) - \partial^j \partial_j a_i$$
$$= \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a$$

TEMA / MATERIA | DÍA | MES | AÑO

2) Considere

$r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x^i \hat{\imath}_i$

$a = a(r) = a(x,y,z) = a^i(x,y,z)\hat{\imath}_i$

$b = b(r) = b(x,y,z) = b^i(x,y,z)\hat{\imath}_i$

$\phi = \phi(r) = \phi(x,y,z) =$

$\psi = \psi(r) = (x,y,z)$

Utilizando la notación de índices e inspirándose en el ejemplo 1.19 demuestre las siguientes identidades vectoriales:

a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

Entonces:

Sean $\phi = \phi(r)$; $\psi = \psi(r)$ campos escalares

$$(\nabla(\phi\psi))^i = \partial^i(\phi\psi)$$
$$= \psi\partial^i(\phi) + \phi\partial^i(\psi)$$
$$= (\phi\nabla\psi)_i + (\psi\nabla\phi)_i$$

$\Rightarrow \nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$;

TEMA / MATERIA | DÍA | MES | AÑO

3. Considere lo expuesto en la sección 1.9.3 y demuestre que:

$$A_k^{i'}\tilde{A}_{i'}^{j}=\delta_k^j$$

y además, como caso especial, establecer la relación con los cosenos directores que satisfacen:

$$\cos(\alpha)^2+\cos(\beta)^2+\cos(\gamma)^2=1.$$

Demostración

$$A_k^{i'}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k};\ \tilde{A}_{i'}^{j}=\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}};\ x^j=x^j(x^{i'}(x^k))$$

Por tanto:

$$A_k^{i'}\tilde{A}_{i'}^{j}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$$

Hallando $\frac{\partial x^j}{\partial x^k}$ obtenemos por regla de la cadena

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^k}=\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\Rightarrow A_k^{i'}\tilde{A}_{i'}^{j}=\frac{\partial x^j}{\partial x^k}$$

Ahora si $j=k$

$$A_j^{i'}\tilde{A}_{i'}^{j}=\frac{\partial x^j}{\partial x^j}=1=\delta_j^j\delta_k^k$$

Si $j\neq k$

$$a_j^{i'}\tilde{A}_{i'}^{j}=\frac{\partial x^j}{\partial x^k}=0=\delta_k^j$$

TEMA / MATERIA | DÍA | MES | AÑO

Estableciendo la relación con los cosenos directores que satisfaces:

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos^2(\gamma)^2 = 1$$

Consideramos $j = k$

La base ortonormal original $[\hat{e}_j]'$ y $[\hat{e}'_{1'}]$ la base ortonormal rotada.

$$\hat{e}'_{1'} = A^{1'}_{j}\, \hat{e}_j$$

$$\hat{e}'_{1'} \cdot \hat{e}_j = A^{1'}_{j}$$

$$\boxed{A^{1'}_{j} = \cos(\theta_{1'j})}$$

Donde $\theta_{1'j}$ es el ángulo entre $\hat{1}'$ y $\hat{j}$

$$\hat{e}'_{1'} \cdot \hat{e}'_{1'} = 1$$

$$A^{1'}_{j}\, A^{1'}_{j}\, (\hat{e}_j \cdot \hat{e}_j) = 1$$

$$A^{1'}_{j}\, A^{1'}_{j} = 1 \Rightarrow (A^{1'}_{j})^2 = 1$$

$$\Rightarrow (A^{1'}_{1})^2 + (A^{2'}_{2})^2 + (A^{3'}_{3}) = 1$$

Cuando se fija la base ortonormal rotada entonces:

$$\theta_{1'1} = \alpha, \quad \theta_{2'2} = \beta, \quad \theta_{3'3} = \gamma$$

Por tanto

$$\cos(\theta_{1'1})^2 + \cos^2(\theta_{2'2}) + \cos^2(\theta_{3'3}) = 1$$

$$\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma) = 1.$$

TEMA / MATERIA | DÍA | MES | AÑO

9. Considere el radio vector posición $r = x^{i}\hat{i}_{i} = x\hat{i} + y\hat{j}$
Dado el conjunto de transformaciones que se indican a continuación, demostre en cuales casos las componentes de la transforman como verdaderas componentes de vectores.

$(x,y) \to (-y,x)$, $(x,y) \to (x,-y)$,

$(x,y) \to (x-y, x+y)$, $(x,y) \to (x+y, x-y)$

Entonces:

$r = x^{i}\hat{i}_{i} = x\hat{i} + y\hat{j}$

$r' = x^{i'}\hat{i}_{i'}$

Hallamos que $x^{i'} = A^{i'}_{j} x^{j}$ con $i, j = 1, 2$

1) $(x^{i}, x^{j}) \to (-x^{j}, x^{i})$

Implica que $x^{i'} = -x^{j}$ y $x^{j'} = x^{i}$

Así:

$$\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{1} \\ x^{2} \end{pmatrix} = x^{i'} = A x^{j}$$

$\Rightarrow A^{i'}_{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$, transforma como vector.

TEMA / MATERIA | DÍA | MES | AÑO

b) $(x^{\hat{\imath}}, x^{\hat{\jmath}}) \to (x^{\hat{\imath}}, -x^{\hat{\jmath}})$

$$x^{\hat{\imath}'} = x^{\hat{\imath}} \wedge x^{\hat{\jmath}'} = -x^{\hat{\jmath}}$$

$$\begin{pmatrix} x^{\hat{\imath}'} \\ x^{\hat{\jmath}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\hat{\imath}} \\ x^{\hat{\jmath}} \end{pmatrix} \Rightarrow x^{i'} = A x^{j}$$

$$\Rightarrow A^{i'}_{j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A$$

Por lo que transforma como vector.

c) $(x^{i}, x^{\hat{\jmath}}) \to (x^{\hat{\imath}} - x^{\hat{\jmath}}, x^{\hat{\imath}} + x^{\hat{\jmath}})$

$$x^{i'} = x^{\hat{\imath}} - x^{\hat{\jmath}} \wedge x^{\hat{\jmath}'} = x^{\hat{\imath}} + x^{\hat{\jmath}}$$

$$\begin{pmatrix} x^{\hat{\imath}'} \\ x^{\hat{\jmath}'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{\hat{\imath}} \\ x^{\hat{\jmath}} \end{pmatrix} \Rightarrow x^{\hat{\imath}} = A x^{j}$$

$$A^{i'}_{j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Por lo que transforma como vector

Powered by CamScanner

TEMA / MATERIA

DÍA | MES | AÑO

d) $(x^{i}, x^{j}) = (x^{i} + x^{j}, x^{i} - x^{j})$

$x^{i'} = x^{i} + x^{j} \;,\; x^{j'} = x^{i} - x^{j}$

Puede escribirse como:

$$\begin{pmatrix} x^{i'} \\ x^{j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{i} \\ x^{j} \end{pmatrix} = x^{i'} = A x^{j}$$

$$A^{i'}_{j} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A$$

transforma como vector.

TEMA / MATERIA | DÍA | MES | AÑO

2) Considere

$r = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = x^i \hat{\imath}_i$

$a = a(r) = a(x,y,z) = a^i(x,y,z)\hat{\imath}_i$

$b = b(r) = b(x,y,z) = b^i(x,y,z)\hat{\imath}_i$

$\phi = \phi(r) = \phi(x,y,z) =$

$\psi = \psi(r) = (x,y,z)$

Utilizando la notación de Indices e Inspirandose en el ejemplo 1.19 demuestre las siguientes identidades vectoriales:

a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

Entonces:

Sean $\phi = \phi(r)$; $\psi = \psi(r)$ campos escalares

$$(\nabla(\phi\psi))^i = \partial^i(\phi\psi)$$
$$= \psi\partial^i(\phi) + \phi\partial^i(\psi)$$
$$= (\phi\nabla\psi)_i + (\psi\nabla\phi)_i$$

$\Rightarrow \nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$;

6) Demuestre que:

a) $Log(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2} i$

b) $Log(1-i) = \frac{1}{2} + 2n\pi i$

c) $Log(e) = 1 + 2n\pi i$

d) $Log(i) = (2n + \frac{1}{2})\pi i$

Teniendo en cuenta $Log(z) = Ln|z| + i(\theta + 2\pi n)$

a) $Log(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2} i$

$z = -ie$

$|z| = e$

$\theta = -\frac{\pi}{2}$

• $Log(-ie) = Ln(e) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$

Con $n = 0 \Rightarrow$ $\boxed{Log(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2} i}$

b) $Log(1-i) = \frac{1}{2} \ln(2) - \frac{\pi}{4} i$

$z = 1 - i$; $|z| = \sqrt{2}$; $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Entonces:

$Log(1-i) = Ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$

DIA MES AÑO | TEMA / MATERIA

Powered by CamScanner

Con $n=0$

$\Rightarrow \operatorname{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi}{4}i$

c) $\operatorname{Log}(e) = 1 + 2n\pi i$

$z = e$; $|z| = e$ y $\theta = 0$

$$\operatorname{Log}(e) = \ln e + 2n\pi i$$
$$= 1 + 2n\pi i$$

d) $\operatorname{Log}(i) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i$

$z = i$; $|z| = i$ y $\theta = \pi/2$

$$\operatorname{Log}(i) = \ln(1) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$$
$$= \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i$$

5. Encuentre todas las raíces de las siguientes expresiones:

(a) $\sqrt{2i}$

(b) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$

(c) $(-1)^{1/3}$

(d) $8^{1/6}$

(e) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$

Solución

Teniendo en cuenta:

$$z^{1/n} = |z|^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right]$$

a) $\sqrt{2i}$

Tomando $z=2i$ y $n=2$

$\Rightarrow |z| = 2$; $\theta = \pi/2$

• Con $k=0$

$$z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 1+i$$

• Con $k=1$

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = -1-i$$

b) $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$

Tomando $z = 1-\sqrt{3}i$

$|z| = 2$; $\theta = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

• Para $K=0$

$$z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \hat{i}\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i}$$

• Para $K=1$

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \hat{i}\,\text{sen}\left(\frac{6}{6}\pi\right)\right] = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\hat{i}$$

c) $(-1)^{1/3}$

Tomando $z=1$; $|z|=1$; $\theta=\pi$

• Para $K=0$

$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \hat{i}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}$$

• para $K=1$

$$z_1 = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi = -1$$

• para $K=2$

$$z_2 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + \hat{i}\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}$$

d) $8^{1/6}$; tomando a $z=8$

$|z| = 8$; $\theta = 0$

$$z_0 = \sqrt{2}\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = \sqrt{2}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\hat{i}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\hat{i}$$

Powered by CamScanner

$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi\right) = \sqrt{2}$

$z_4 = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

$z_5 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$

e.) $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$; $z = -8-8\sqrt{3}i$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{8^2+(8\sqrt{3})^2} = 16$; $\theta = \arctan\left(\frac{-8\sqrt{3}}{-8}\right)$

$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$z_0 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1+\sqrt{3}i$

$z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3}+i$

$z_2 = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1-\sqrt{3}i$

$z_3 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}-i$

TEMA / MATERIA | DÍA | MES | AÑO

2. Demuestre:

a) $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\,\text{sen}^2(\alpha)$

b) $\text{sen}(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\,\text{sen}(\alpha) - \text{sen}^3(\alpha)$

Solución:

$$z = x + iy = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

$$z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n (e^{i\theta})^n = |z|^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

$$|z|^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta) = |z|^n(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n$$

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta \; ; \; n = 3$$

Es decir:

$$(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^3 = (\cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta)$$

$$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta - i\,\text{sen}^3\theta = \cos 3\theta + i\,\text{sen}\,3\theta$$

$$\Rightarrow \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\text{sen}^2\theta$$

$$\Rightarrow \text{sen}\,3\theta = 3\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\theta \;//$$

Igualando en la [illegible] la imaginaria

TEMA / MATERIA | DÍA | MES | AÑO

d) $\nabla \cdot (\nabla \times a)$ ¿Qué puede decir $\nabla \times (\nabla \cdot a)$?

Entonces:

Sea $a = a(r)$ un campo vectorial

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times a) = \partial^i (\nabla \times a)_i$$
$$= \partial^i (\varepsilon_{ijk} \partial^j a^k)$$
$$= \varepsilon_{ijk} \partial^i (\partial^j a^k)$$
$$= \varepsilon_{jik} \partial^j (\partial^i a^k)$$

$$\boxed{\text{por conmutación} \Rightarrow \partial^i (\partial^j a^k) = \partial^j (\partial^i a^k)}$$

$$= -\varepsilon_{ijk} \partial^i (\partial^j a^k).$$

Por tanto:

$$\varepsilon_{ijk} \partial^i (\partial^j a^k) = -\varepsilon_{ijk} \partial^i (\partial^j a^k)$$

$$\varepsilon_{ijk} \partial^i (\partial^j a^k) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times a) = 0$$

y $\nabla \times (\nabla \cdot a)$ no está definido pues $\nabla \cdot a$ es un escalar y no se puede.

Powered by CamScanner

TEMA / MATERIA | DÍA | MES | AÑO

f) $\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a$

donde $a = a(r)$ entonces:

$$\nabla \times (\nabla \times a) = \varepsilon_{ijk}\, \partial^j (\nabla \times a)^k$$
$$= \varepsilon_{ijk}\, \partial^j (\varepsilon^{klm} \partial_l a_m)$$
$$= \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon^{klm}\, \partial^j (\partial_l a_m)$$
$$= \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon^{lmk} (\partial_l a_m)$$
$$= (\delta^i_l \delta^j_m - \delta^i_m \delta^j_l)\, \partial^j (\partial_l a_m)$$
$$= a^j (\partial_i a_j) - \partial^j (\partial_j a_i)$$
$$= a_j (\partial^i a_j) - \partial^j \partial_j a_i$$
$$= \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a$$