

6) En el caso tridimensional, tenemos que si e_i y e_j define un sistema de coordenadas (dextrógiro) y no necesariamente ortogonal, entonces demostraremos que:

a) e_i

$$e_i = \frac{e_j \times e_k}{e_i \cdot (e_j \times e_k)} \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

y sus permutaciones cíclicas,

BDI:

a) Definimos e^i como $e_j \times e_k$
considerando las permutaciones cíclicas ya que anticomutan de la siguiente manera.

$$ijk \Rightarrow jki \Rightarrow kij = 1 \neq \Rightarrow -1$$

$$\Rightarrow e^i = e_j \times e_k$$

$$e^i = \frac{e_j \times e_k}{e_i \cdot (e_j \times e_k)}$$

Además ~~de~~ e^i

Consideremos el sistema dextrógiro tal que: $e^i e_j = \delta^i_j = 0$

b) Si los vectores

$$V = e_1 \cdot (e_2 \times e_3) \quad y \quad \bar{V} = e^1 \cdot (e^2 \times e^3)$$

entonces $V \bar{V} = 1$

Sol

Tenemos que:

$$V = e_1 \cdot (e_2 \times e_3)$$

Y sabiendo que $e^1 = e_2 \times e_3$, entonces:

$$V = e_1 \cdot e^1 = \delta_{11} = 1$$

Ahora con $\bar{V} = e^1 \cdot (e^2 \times e^3)$ -se tiene que:

$$\begin{aligned}\bar{V} &= \frac{(e^2 \times e^3) \cdot (e^2 \times e^3)}{e_1 \cdot (e^2 \times e^3)} \\ &= \frac{(e^2 \times e^3)^2}{e_1 \cdot (e^2 \times e^3)} = 1\end{aligned}$$

$\Rightarrow V \bar{V} = 1 \Rightarrow$ ó bien verificamos con las determinantes:

Si: $A = (e_1 \ e_2 \ e_3)$ y $\bar{A} = (e^1 \ e^2 \ e^3)$

$$\bar{A}^T A = \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ e^2 & 0 & 0 \\ e^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A}^T$$

$$A$$

$$\bar{A}^T A = \begin{pmatrix} e^1 e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 e_3 \end{pmatrix} = I$$

$$\det(\bar{A}^T A) = \det(I) = 1$$

Es decir $\det(\bar{A}^T) = \tilde{v} = \det(\bar{A})$.

También decir que $\det(A) = v$

$$\text{Por tanto: } \tilde{v}v = 1 \Leftrightarrow vv = 1 //$$

Q) ¿Qué vector satisface $q \cdot e^i = 1$?
Demuestre que q es único.

→ Sol

Para que $q \cdot e^i = 1$, se debe tener que q no sea ortogonal a e^i , es decir:
definamos a q como $q = \sum f_j e_j$, tal que:

$$q \cdot e_j \cdot e^i = f_j$$

Por tanto: $f_i + f_j = 1$

$$e^i \cdot q = \sum f_j q^j = (q^j (e^i \cdot e_j)) = q^i = 1$$

Por lo que $e^i \cdot q = 1$ para que se de
que $q \cdot e^i = 1$

Teniendo que $q = e_1 + e_2 + e_3$ entonces

$$\Rightarrow q \cdot e^i = 1 \text{ y otro } b \cdot e^i = 1$$

\Rightarrow podemos dar que $q = b$. demostriando
su unicidad. Si:

$$\Rightarrow (q - b) \cdot e^i = 0 \quad q \cdot e^i = 1 \text{ y } b \cdot e^i = 1 \text{ [Por Propiedad producto escalar]}$$

$$(q \cdot e^i - b \cdot e^i) = 0$$

$$q \cdot e^i = b \cdot e^i$$

$$q = b$$

siendo q único.

d) Encuentre el producto vectorial de dos vectores a y b que están representados en un sistema de coordenadas oblicuo:

Dada la base:

$$w_1 = 4\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$w_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j}$$

$$w_3 = 2\hat{k}$$

Encuentre:

1. Las bases reciprocas $\{e_i^*\}$

2. Las componentes covariantes y contravariantes del vector $a = i + 2j + 3k$

Sol: I)

Tenemos que:

$$e^i = \frac{(e_j \times e_k)}{e^i \cdot (e_j \times e_k)}$$

Entonces:

$$w^1 = \frac{(w_2 \times w_3)}{w_1 \cdot (w_2 \times w_3)} : w^2 = \frac{(w_3 \times w_1)}{w_2 \cdot (w_3 \times w_1)}$$

$$w^3 = \frac{(w_1 \times w_2)}{w_3 \cdot (w_1 \times w_2)}$$

scribe

por tanto las bases reciprocas son:

$$w^1 = \frac{1}{2}\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j}$$

$$w^2 = -\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j}$$

$$w^3 = -\frac{1}{9}\hat{i} + \frac{1}{9}\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k}$$

II) Componentes covariantes:

Tenemos que:

$$q = 1 + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

los componentes covariantes de ese vector:

$$q = l_1 e^1$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema

$$\cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \lambda_1 = 1$$

$\lambda_1 = 11$

$$\cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) \lambda_2 = 2$$

$\lambda_2 = 9$

$$\cdot \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & & \end{matrix} = 3$$

$$\lambda_3 = 6$$

Los componentes covariantes son:

$$\lambda_1 = 11 ; \lambda_2 = 9 ; \lambda_3 = 6$$

• Componentes Contravariantes (base inicial)

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \\ l^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

⇒ Resolviendo:

$$\begin{aligned} l^1 &= 3 \\ l^2 &= -9/3 \\ l^3 &= -7/2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad \text{y}$$

Serían estos los componentes contravariantes.

Punto 7.

Espacio \rightarrow Matrices hermiticas 2×2

Producto Interno $\rightarrow \langle a | b \rangle \stackrel{?}{=} \text{Tr}(A^\dagger B)$

Entonces encuentre la base dual asociada a la base asociada a la base de Pauli.

Ademas dado un vector generico, encontraremos su 1-forma asociada.

sol

base reciproca de Pauli

$$\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}^0, \tilde{\sigma}^1, \tilde{\sigma}^2, \tilde{\sigma}^3\}$$

base normal:

$$\bar{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

Como son hermiticas:

$$(A^\dagger)_j^i = A_j^i = A_j \Leftrightarrow \langle e^i | A | e_j \rangle \Leftrightarrow \langle e^i | A^\dagger | e_j \rangle$$

Entonces:

$$\langle \sigma_i | \sigma_0 \rangle = 2f_j^i$$

$$\langle \frac{1}{2} \sigma_i | \sigma_j \rangle = f_j^i$$

La base dual:

$$(\sigma^i | \sigma_j) = f_j^i ; \sigma^i = \frac{1}{2} \sigma_i$$

Entonces:

$$\tilde{\sigma} = \left\{ \frac{1}{2} \sigma_0, \frac{1}{2} \sigma_1, \frac{1}{2} \sigma_3, \frac{1}{2} \sigma_4 \right\}$$

Es base dual.

Ahora para un vector genérico en este espacio vectorial:

1) Sea un vector \mathbf{q} perteneciente al espacio V

y $\langle q \rangle$ un vector del espacio canónico \tilde{V}

Entonces:

$$|\mathbf{q}\rangle = w^i \sigma_i \quad \langle q| = w_i \sigma^i$$

$$w_i = \langle \sigma_i | \mathbf{q} \rangle = \langle \sigma_i | w^j \sigma_j \rangle \\ = w^j \langle \sigma_i | \sigma_j \rangle = 2 w_i$$

$$w_i = 2 w^i (1-\text{forma asociada})$$