Imię i nazwisko: Ada Wojterska

Numer indeksu: 333169

Temat projektu:

**Rozwiązywanie układu równań liniowych , gdzie , , metodą SOR. Porównanie wyników dla różnych wartości parametru . Jeden z testów powinien prezentować wykres liczby iteracji wymaganej do osiągnięcia danej dokładności w zależności od parametru .**

**Część 1 – opis metody**

Metoda SOR jest iteracyjną metodą rozwiązywania układów równań liniowych.

Niech , gdzie , .

Rozpoczynamy od pewnego przybliżenia

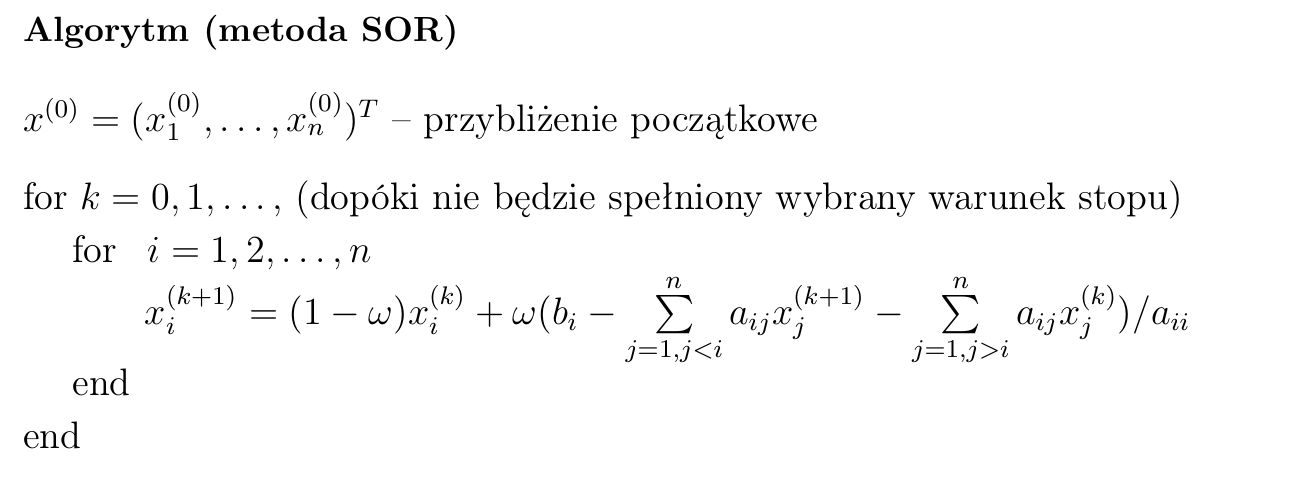
Celem metody SOR, tak jak innych metod iteracyjnych, jest stworzenie ciągu kolejnych przybliżeń , takich, że dla , gdzie zbieżność jest rozumiana w sensie pewnej normy.

Układ , możemy zapisać równoważnie jako , wtedy kolejne przybliżenia to:

Macierz nazywamy macierzą iteracji.

Metoda SOR jest uogólnioną metodą Gaussa-Seidla, która wykorzystuje parametr relaksacji . Do obliczenia wykorzystuje więc ona już obliczone , … , .

Algorytm metody SOR – z wykładu:



Porównując powyższy algorytm do algorytmu metody Gaussa-Seidla możemy zauważyć, że są one równoważne dla

Możemy również wyznaczyć i . W tym celu korzystamy z zapisania macierzy jako , gdzie to macierz trójkątna dolna, to macierz diagonalna, a to macierz trójkątna górna. Macierze są więc wyznaczone jednoznacznie.

Podstawiając tak rozpisaną macierz do równania ( równoważne z ) i odpowiednio przekształcając, otrzymujemy:

.

Zatem z powyższego wzoru wynika, że:

i

Ważnym twierdzeniem dotyczącym metody SOR jest także poniższe twierdzenie:

Promień spektralny Zatem wiedząc, że metoda iteracyjna jest zbieżna globalnie wtedy i tylko wtedy, gdy , na pewno nie jest ona zbieżna gdy .

Wiemy natomiast, że gdy macierz jest symetryczna i dodatnio określona, to metoda SOR jest zbieżna globalnie wtedy i tylko wtedy, gdy .

**Część 2 – opis programu**

Funkcje:

* SOR\_solver.m

Skrypty testujące:

* mainProjekt2.m
* ciekawe przypadki - ciekawe1.m, ciekawe2.m…

SOR\_solver.m

Jest to główna funkcja, na której opiera się działanie programu.

Argumenty wejściowe:

* A - macierz współczynników (n x n)
* B - wektor wyników (n x 1)
* omega – parametr relaksacji
* tol - tolerancja dla dokładności rozwiązania
* max\_iter – maksymalna liczba iteracji

Argumenty wyjściowe:

* x – znalezione przybliżenie lub NaN, jeżeli nie udało się znaleźć
* iter\_count – liczba iteracji potrzebnych do znalezienia (lub -1, gdy nie znaleziono)

Funkcja ta korzysta z przedstawionego wyżej algorytmu metody SOR z wykładu.

Wybrane przeze mnie to wektor zerowy długości n.

Maksymalnie max\_iter razy obliczane są wszystkie elementy przybliżonego wektora x. Następnie zwiększana jest liczba iteracji i sprawdzany warunek wyjścia z pętli. Wybrany przeze mnie warunek wyjścia z pętli to:

,

Gdzie wybrana norma to norma maksimum.

Jeżeli nie uda się spełnić tego warunku po max\_iter iteracjach, zwracana zostaje wartość NaN jako x i iter\_count = -1.

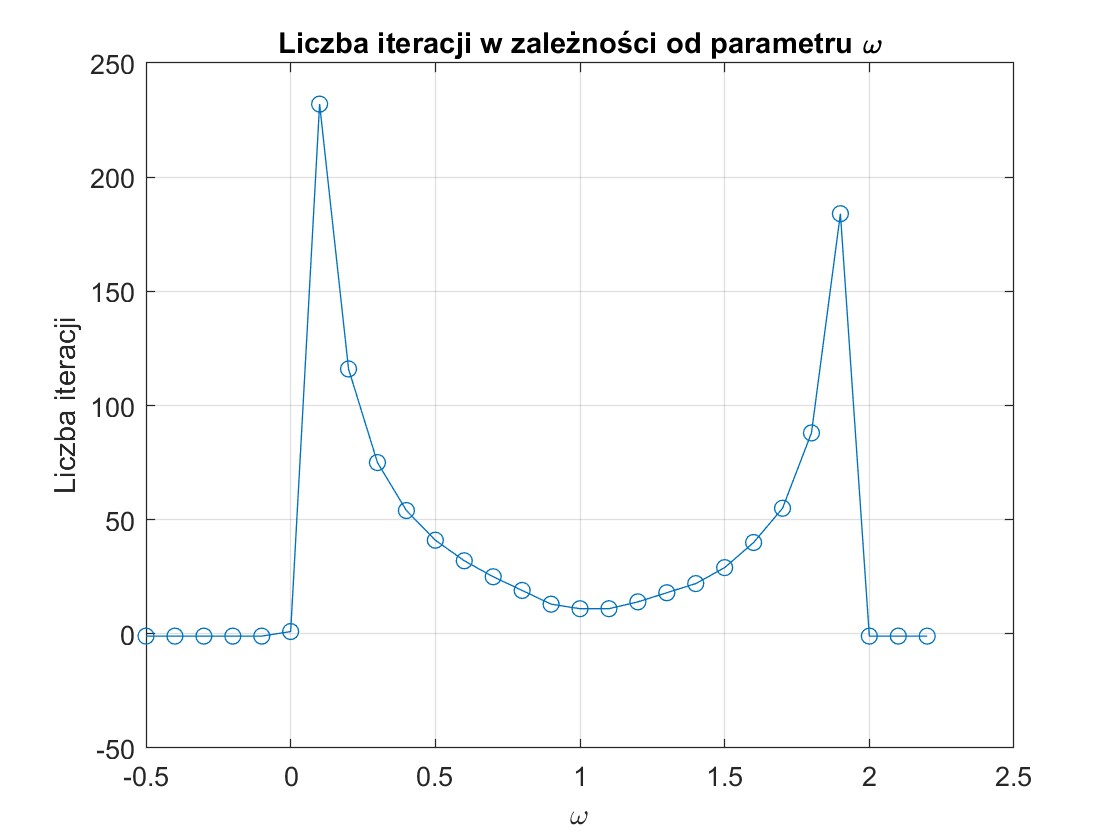
**Część 3 – ciekawe przypadki**

**Przypadek 1**

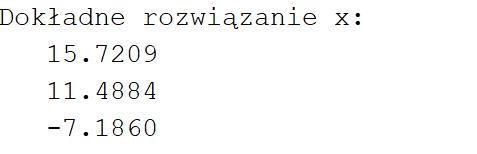
W pierwszym przypadku postanowiłam pokazać najważniejsze i najbardziej podstawowe zależności dotyczące metody SOR, a także metod iteracyjnych w ogólności.

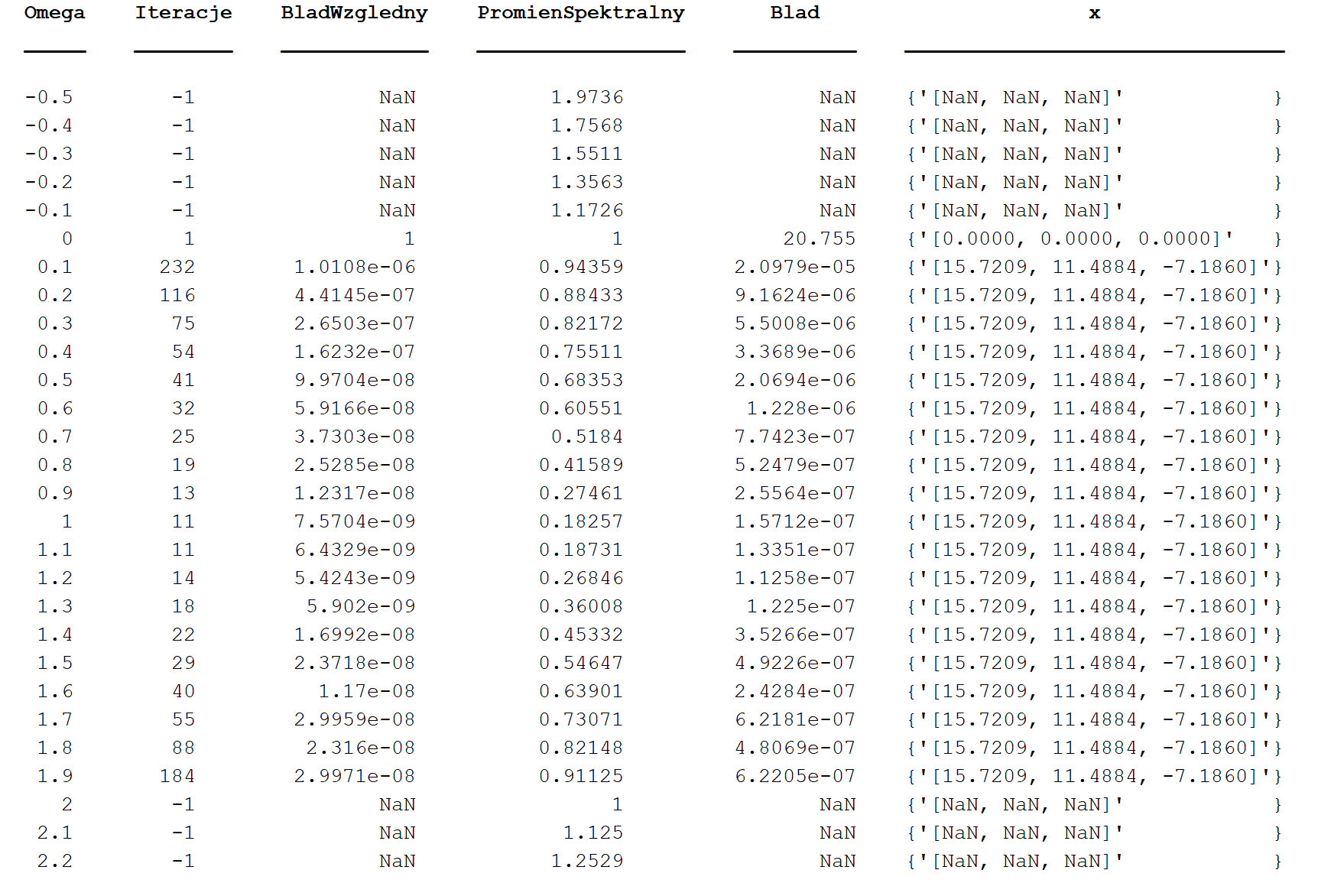
Wykorzystałam do tego celu macierz i .

Jest to macierz symetryczna oraz dodatnio określona, co sprawia, że zgodnie z twierdzeniem metoda SOR jest zbieżna globalnie wtedy i tylko wtedy, gdy , czyli na całym możliwym przedziale zbieżności. W takim przypadku wykres we wszystkich rozważanych przeze mnie przypadkach przyjmował kształt w przybliżeniu paraboli z najmniejszą liczbą potrzebnych iteracji w okolicach .



Liczba potrzebnych iteracji bardzo drastycznie wzrasta w trakcie oddalanie się od tego punktu (w szczególności jest bardzo wysoka w okolicy 0 i 2).





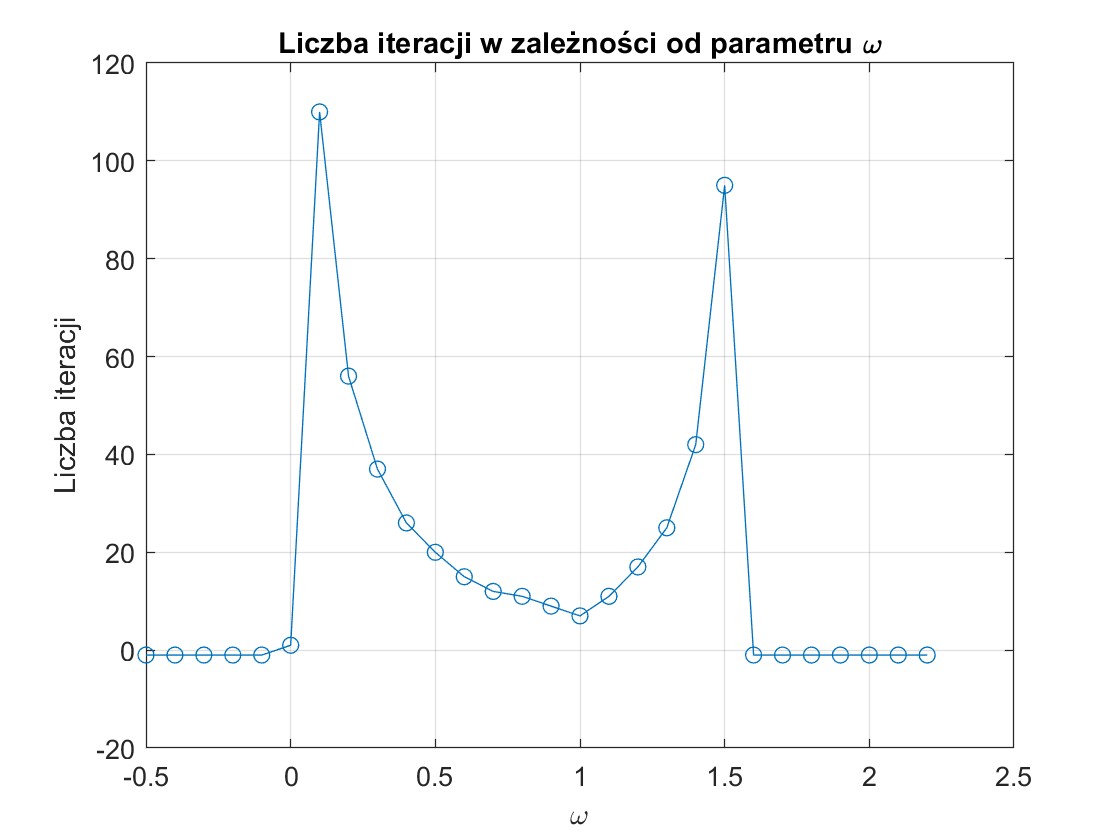
Analiza tabeli pozwala nam wysunąć dodatkowe wnioski dotyczące rozważanej metody. Tak jak każda metoda iteracyjna jest ona zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy promień spektralny macierzy iteracyjnej jest mniejszy od 1. Czym jest on mniejszy, tym mniejsza jest liczba iteracji potrzebna do osiągnięcia oczekiwanego wyniku oraz błąd względny otrzymanego rozwiązania

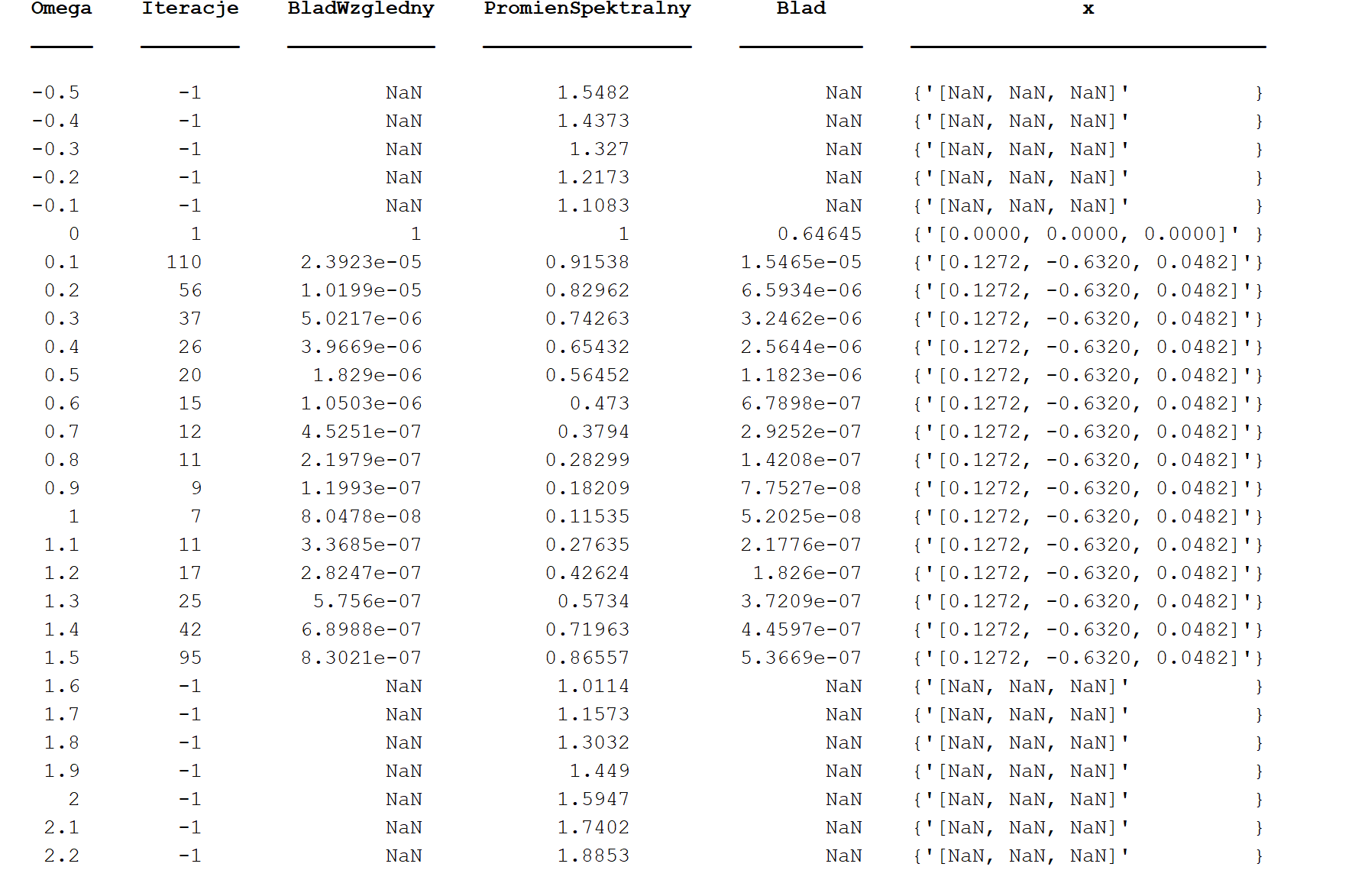
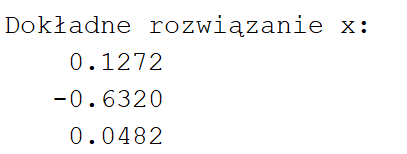
**Przypadek 2**

Drugi przypadek obrazuje nam sytuację, w której metoda SOR nie jest zbieżna dla całego przedziału (0,2) parametru relaksacji. Zdarza się bowiem często, że przedział zbieżności jest tylko pewnym wycinkiem wyżej wspomnianego przedziału.

Tak jest np. dla macierzy i .

W tym przypadku dla nie jesteśmy w stanie odnaleźć rozwiązania układu naszą metodą. Obrazuje to ponownie wykres oraz tabela.





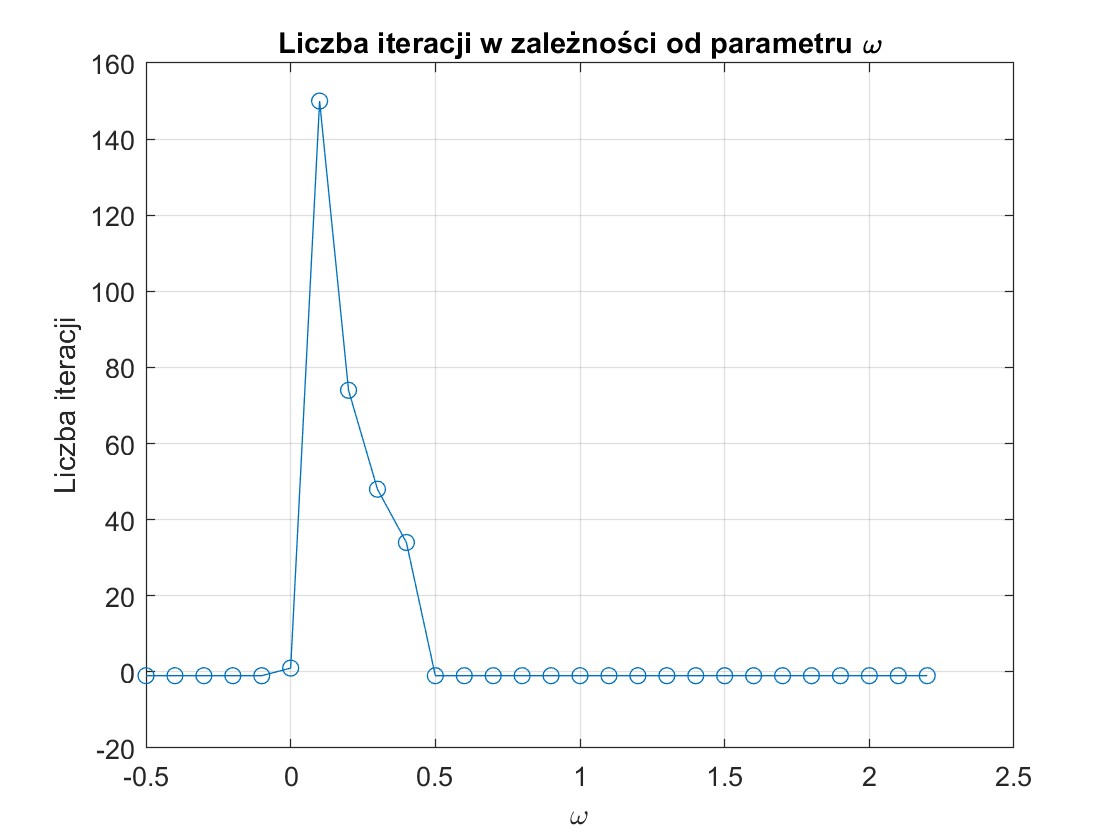
Ponownie najbardziej optymalne jest wybranie parametru relaksacji bliskiego 1 – mamy wtedy do czynienia z najmniejszym błędem względnym oraz najmniejszą liczbą iteracji.

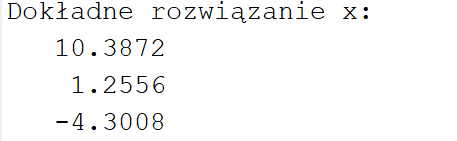
**Przypadek 3**

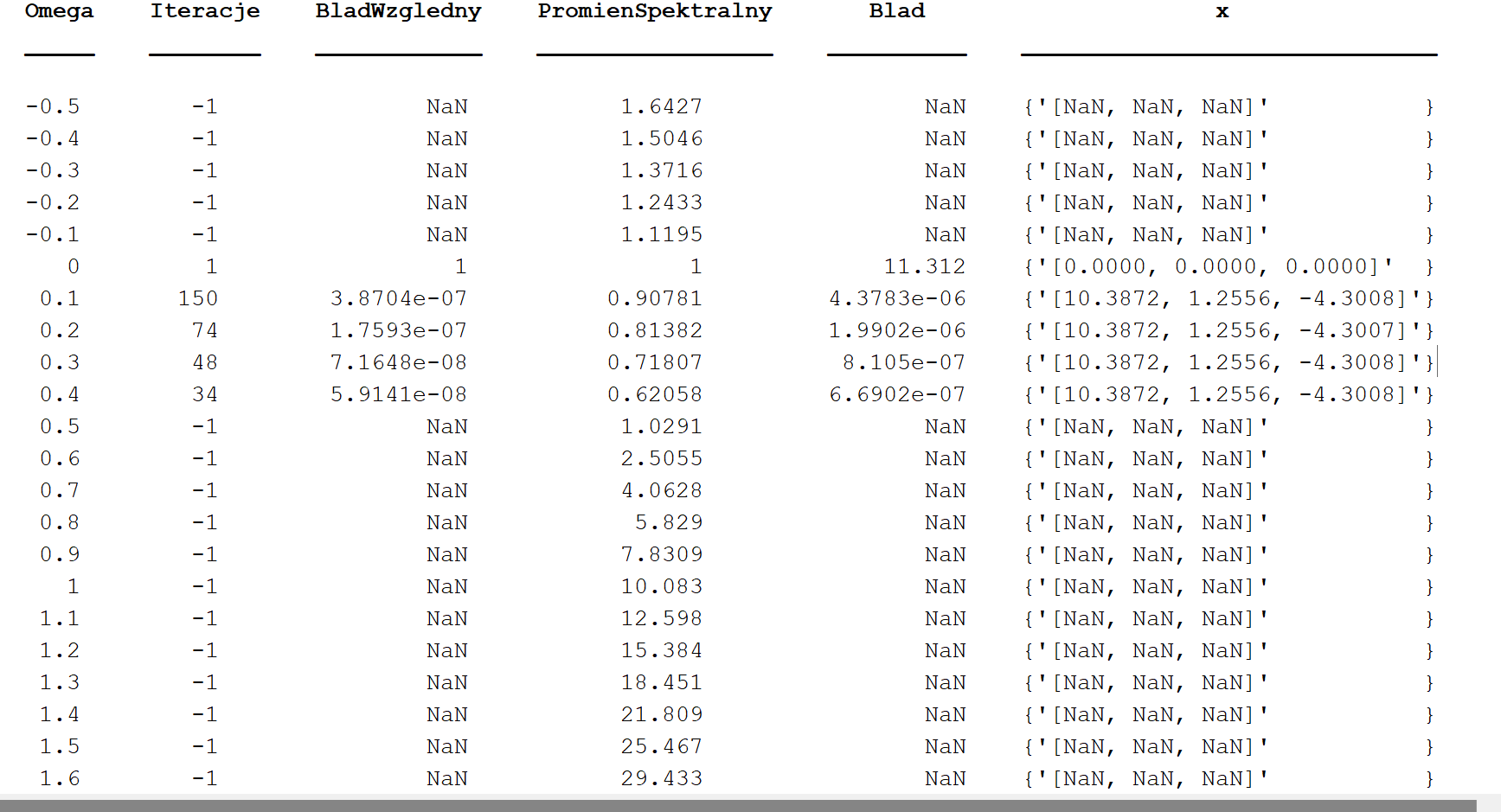
W tym przypadku chciałam pokazać, że odpowiedni dobór współczynnika relaksacji może pozwolić nam uzyskać zbieżność w układach takich, w których zawodzi podstawowa metoda Gaussa-Seidla. Pamiętajmy, że metody te są równoważne dla .

Rozważmy macierz i .

Kiedy przyjmiemy między innymi , nie jest ona zbieżna. Potwierdza to obliczenie promienia spektralnego dla tego przypadku. Jednak prawidłowy wybór parametru omega pozwala nam znaleźć takie jego wartości, dla których wykorzystanie metody SOR umożliwia odnalezienie rozwiązania układu, co obrazuje wykres oraz tabela. W poprzednich przypadkach mogliśmy dojść bowiem do wniosku, że metoda SOR nie jest przydatna, ponieważ zazwyczaj wystarczałoby użycie metody Gaussa-Seidla do uzyskania satysfakcjonujących wyników. Ten przypadek obala tę hipotezę, pokazując, że istnieją przypadki, w których metoda SOR jest zdecydowanie lepszym wyjściem.





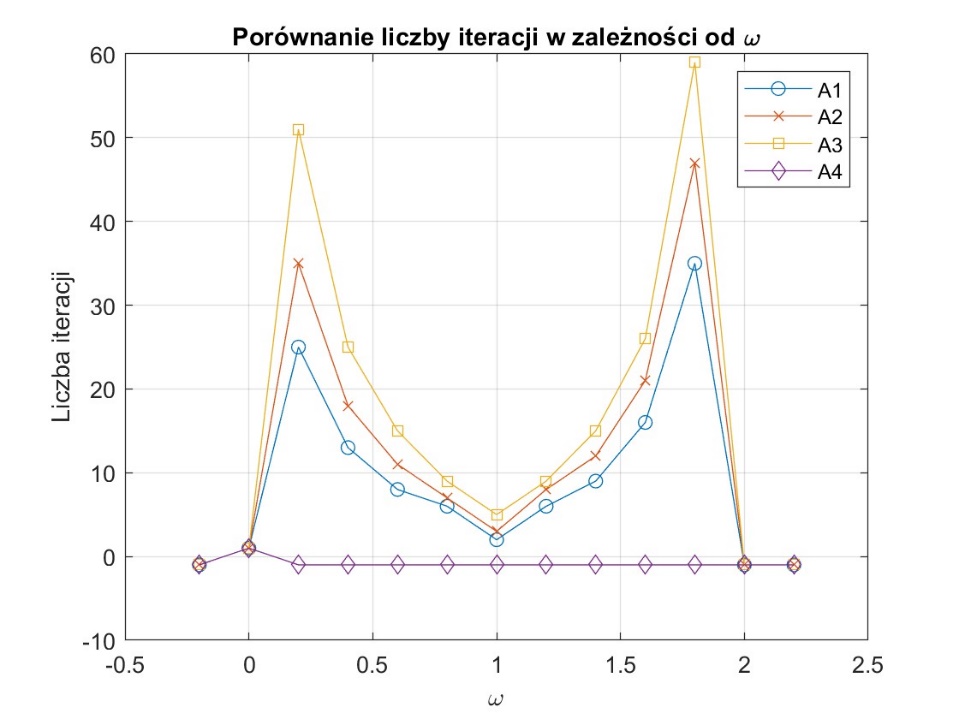


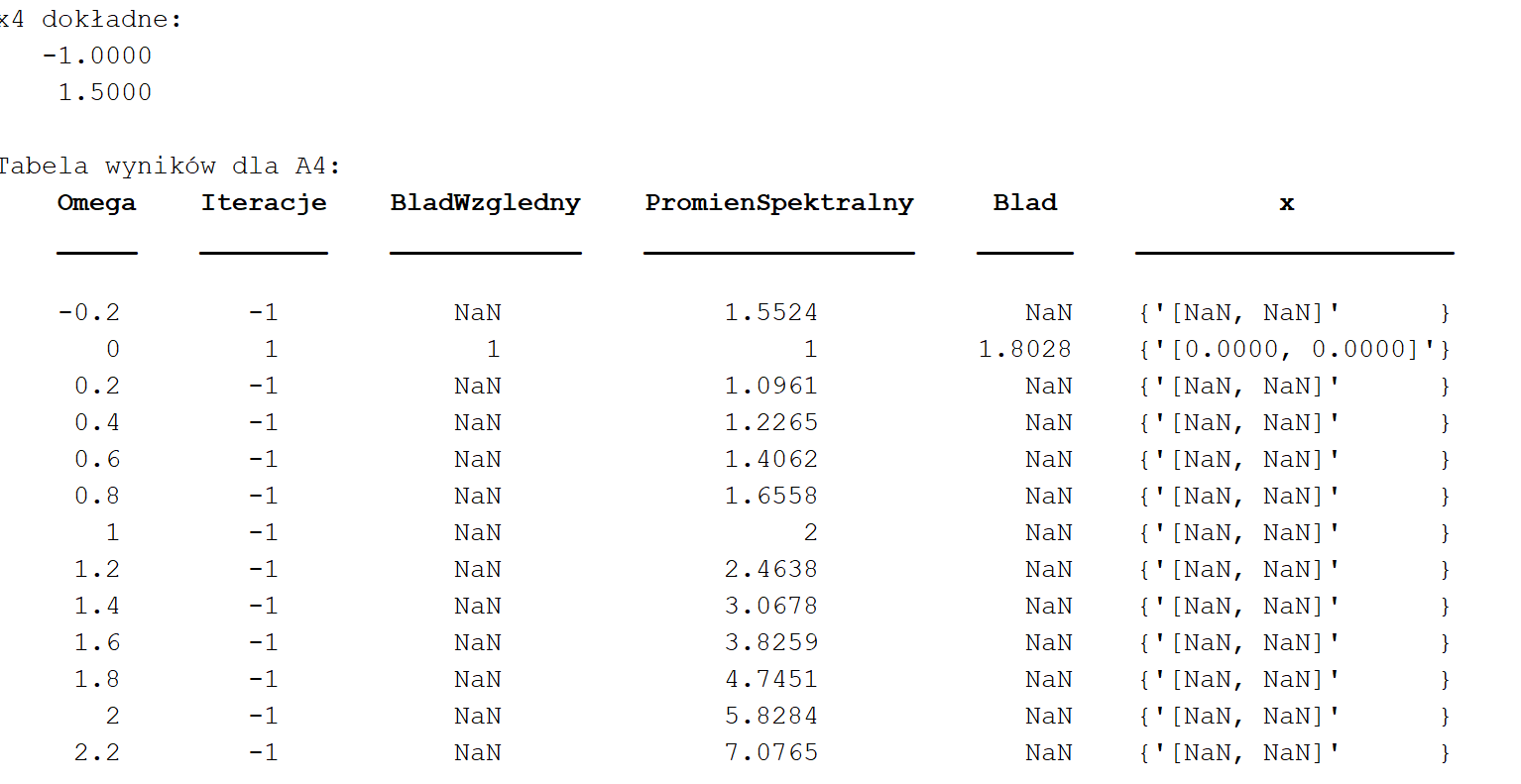
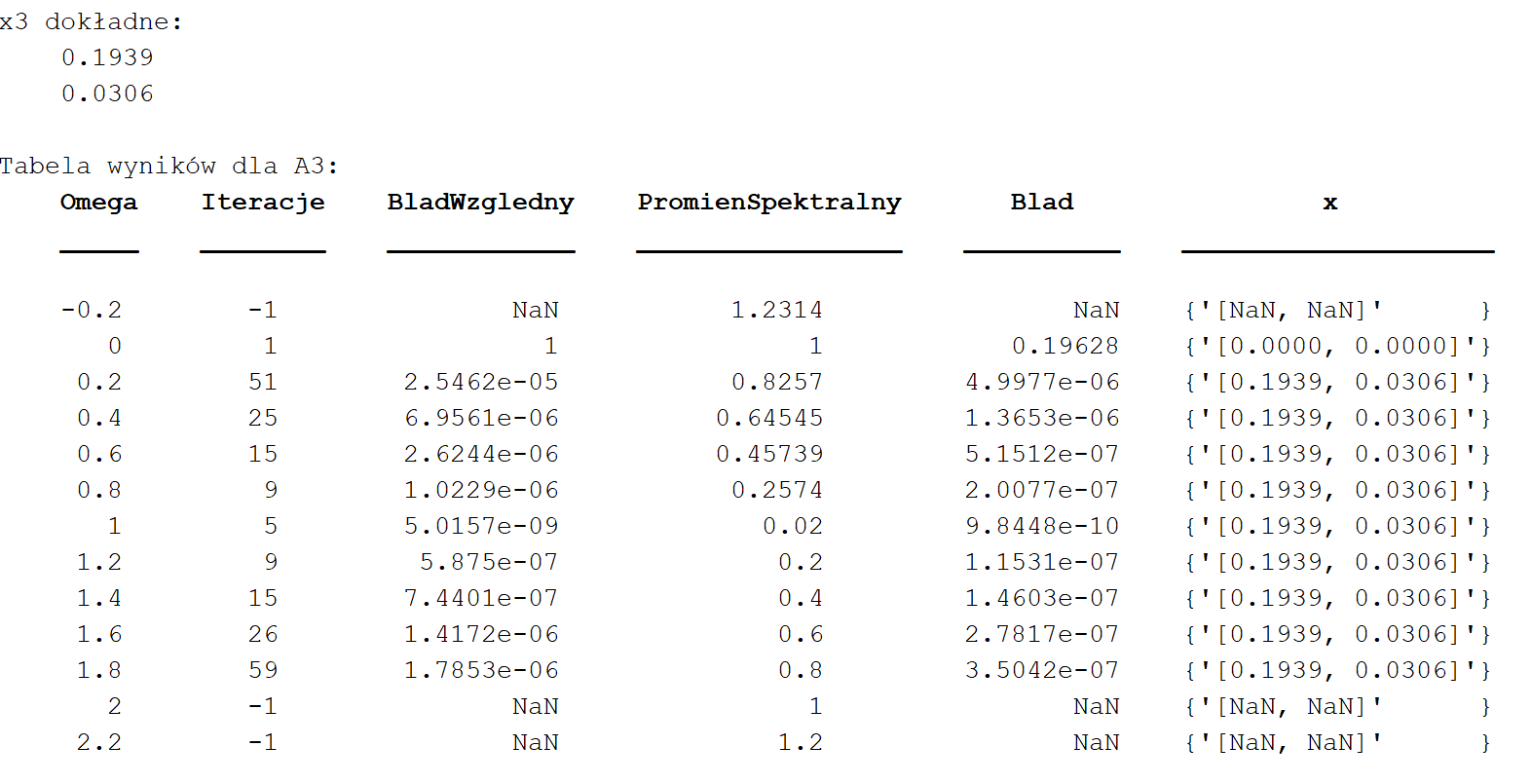
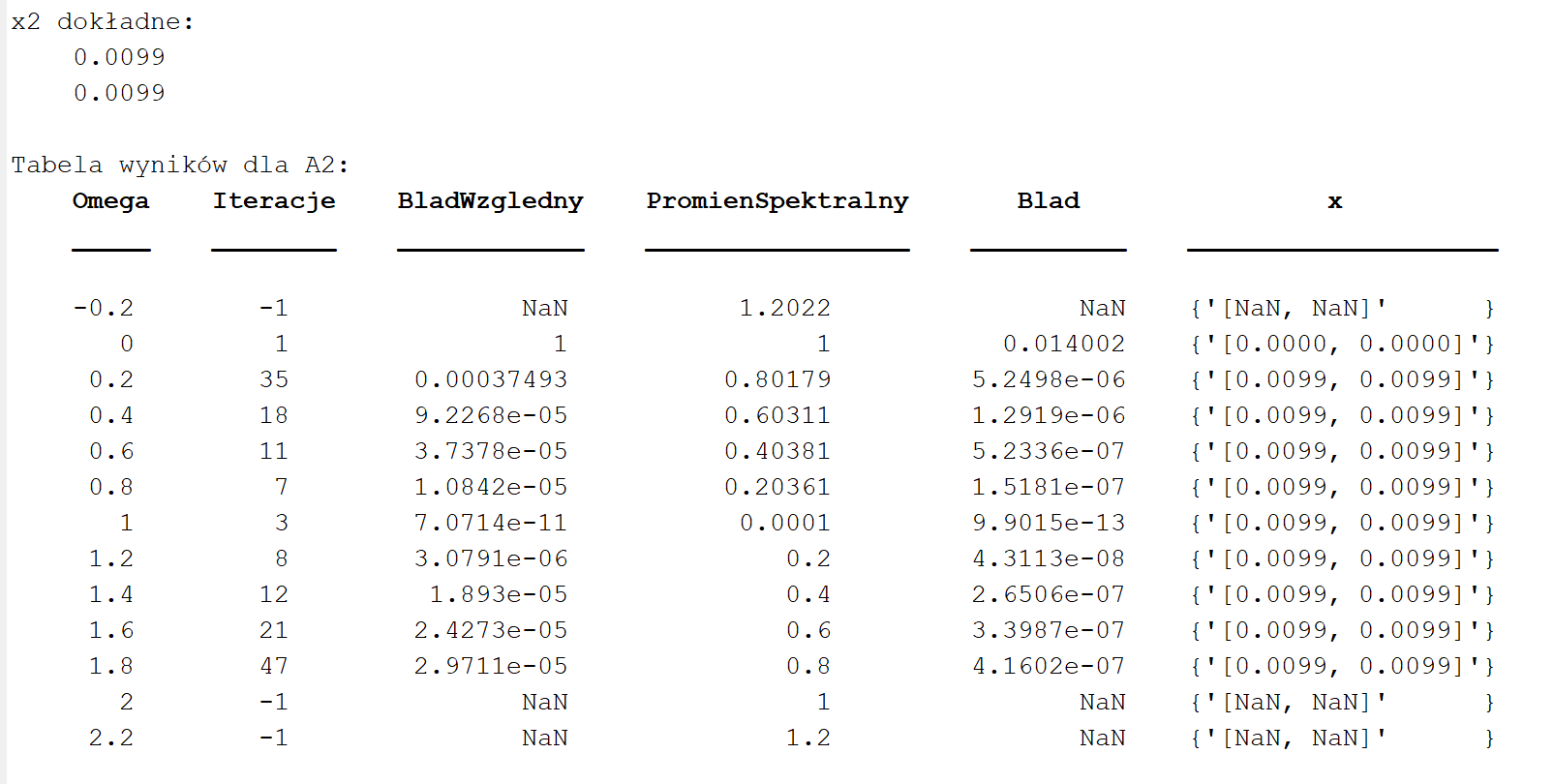
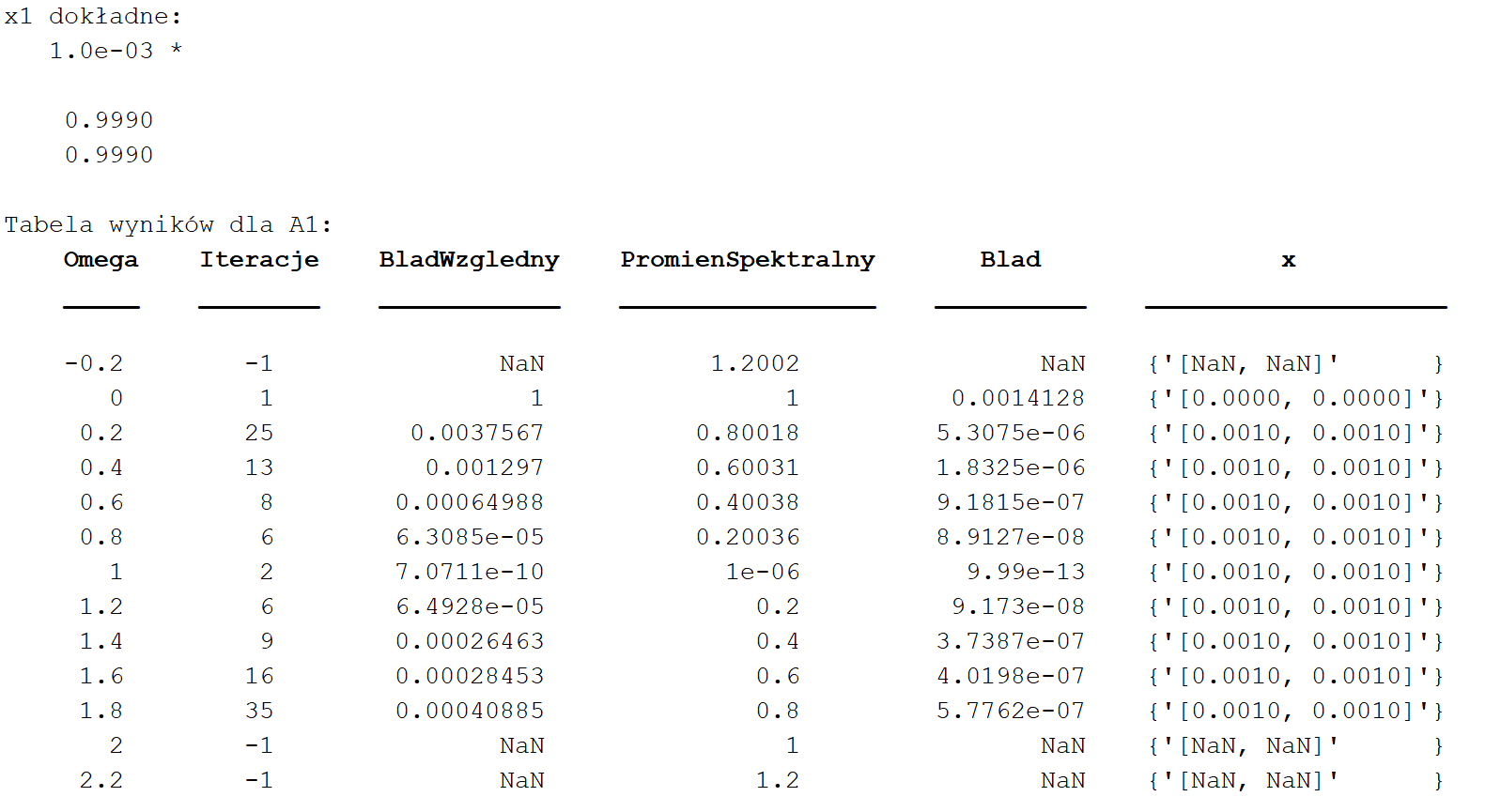
**Przypadek 4**

W czwartym przykładzie skupiłam się na ukazaniu pewnych zależności pomiędzy typem macierzy, a szybkością zbieżności metody SOR. Rozważyłam macierze diagonalnie dominujące, jednocześnie biorąc pod uwagę różny „poziom” tej dominacji – od „dość słabej” do „bardzo silnej”.

Rozważyłam więc macierze:

Jak można zauważyć każda kolejna macierz A1 do A3 jest „coraz mniej diagonalnie dominująca”, macierz A4 już diagonalnie dominująca nie jest. Wykres ilości iteracji koniecznych do znalezienia rozwiązania sugeruje bardzo ciekawe wnioski:



Czym bardziej diagonalnie dominująca jest macierz, tym nasza metoda potrzebuje mniej iteracji do znalezienia zadowalającego przybliżenia rozwiązania. Co ciekawe, w przypadku ostatniej macierzy, nie jest ona zbieżna dla żadnej wartości parametru relaksacji. Możemy więc wnioskować, że metoda działa dużo lepiej dla macierzy „silniej” diagonalnie dominujących. 

Spodziewałam się, że w związku z wcześniejszymi wnioskami, również błędy względne w przypadku macierzy silniej diagonalnie dominujących okażą się większe, jednak nie okazało się to prawdą. Np. w przypadku macierzy A1 błędy względne są największe wśród wszystkich rozważanych w tym przykładzie.

**Przypadek 5**

W kolejnym przykładzie rozważyłam przypadek macierzy która jest coraz bliższa macierzy osobliwej, chcąc sprawdzić jak metoda SOR będzie sprawdzała się w takim przypadku. W tym celu wykorzystałam macierze:

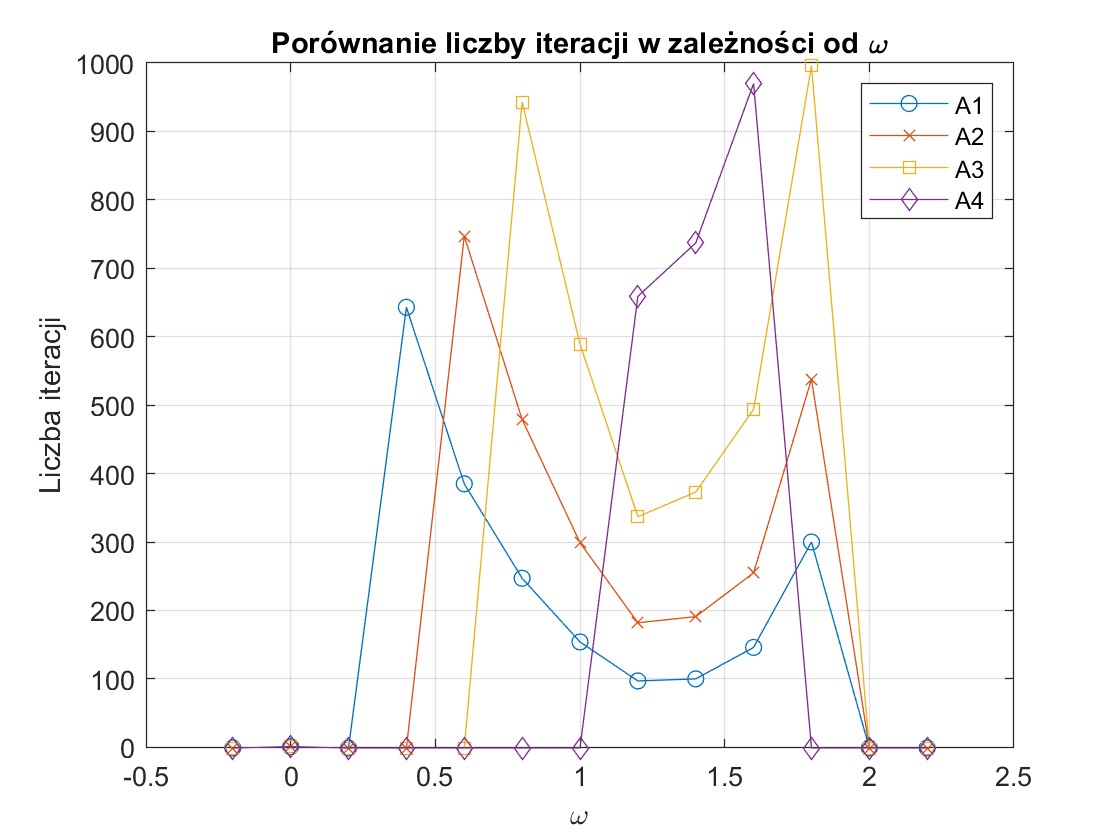
i ,

i ,

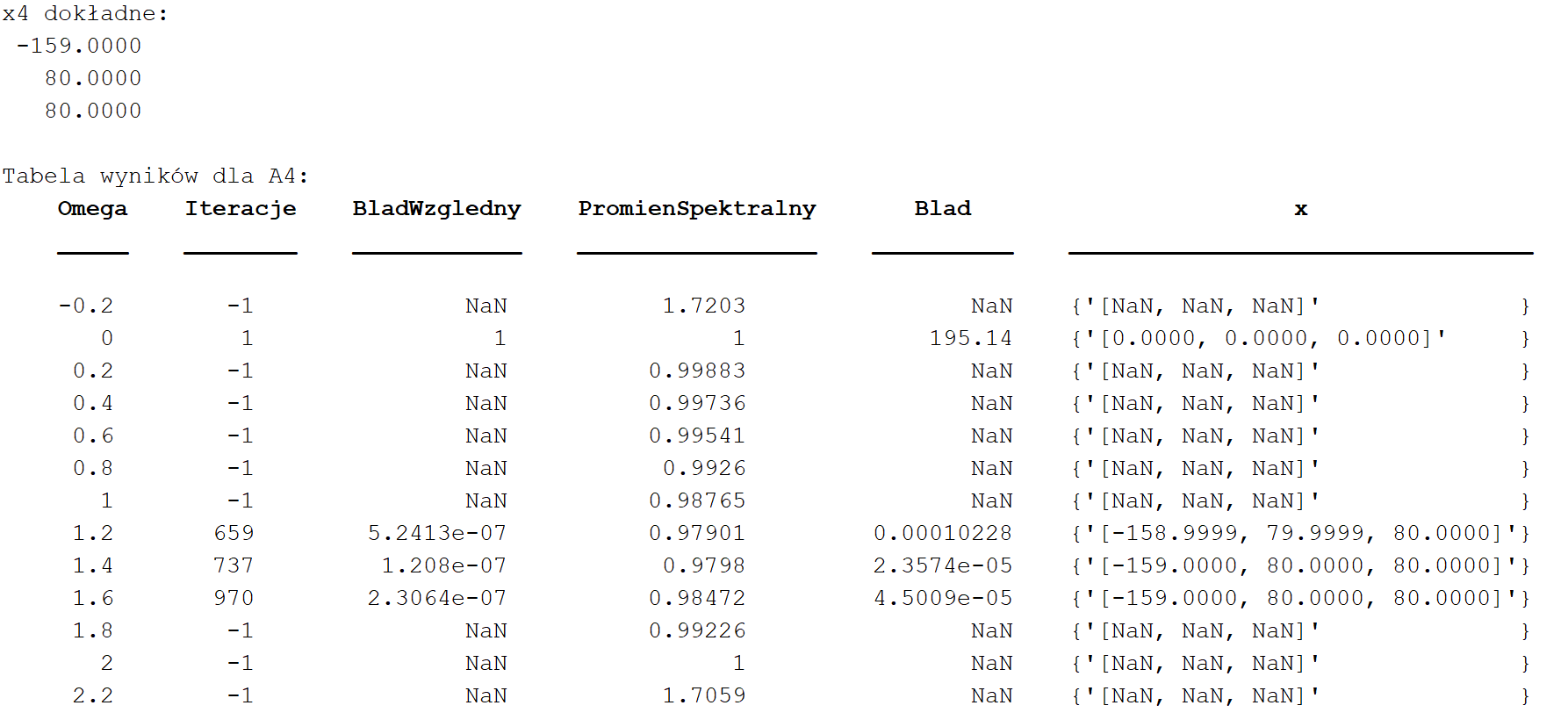
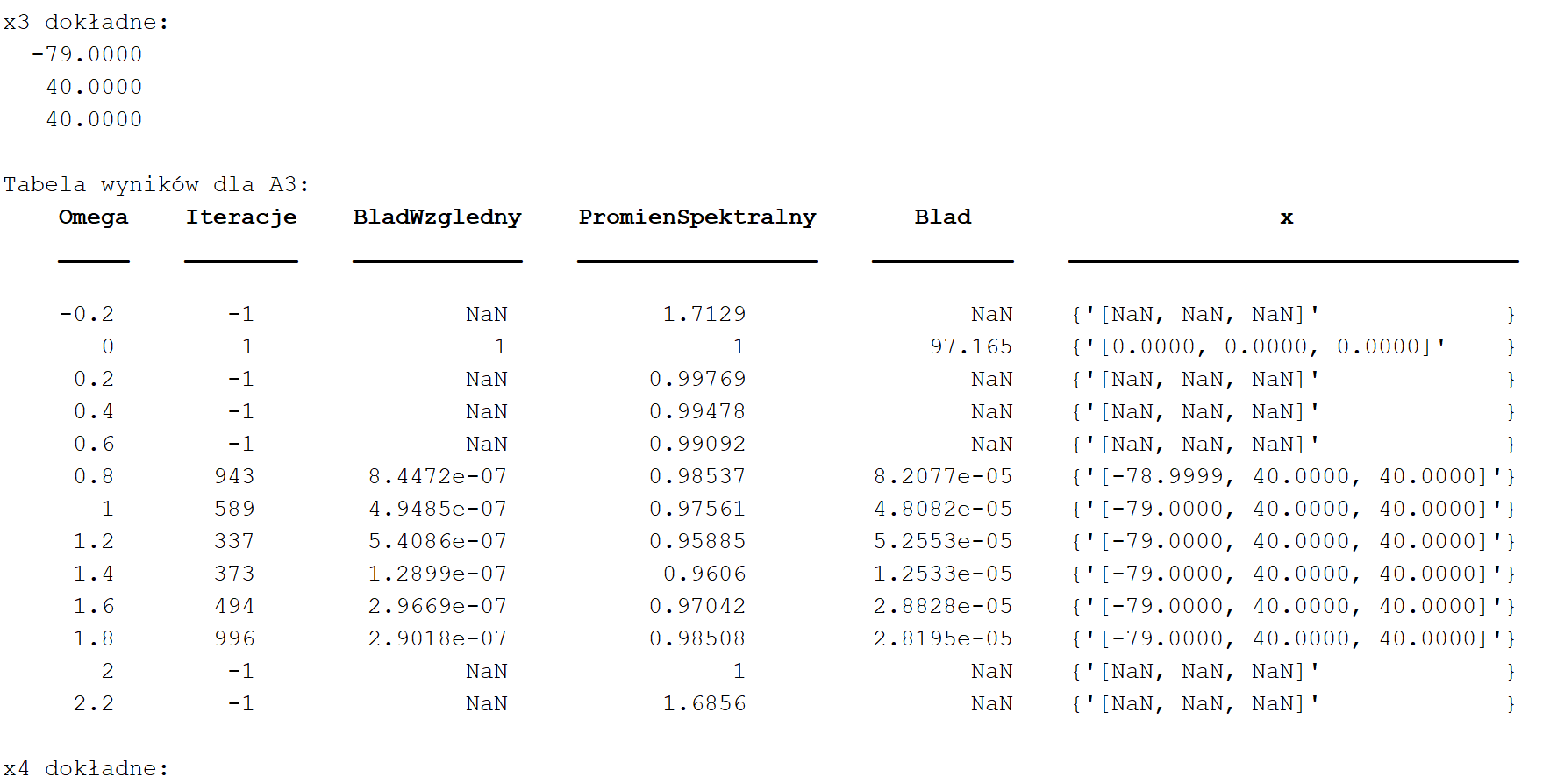
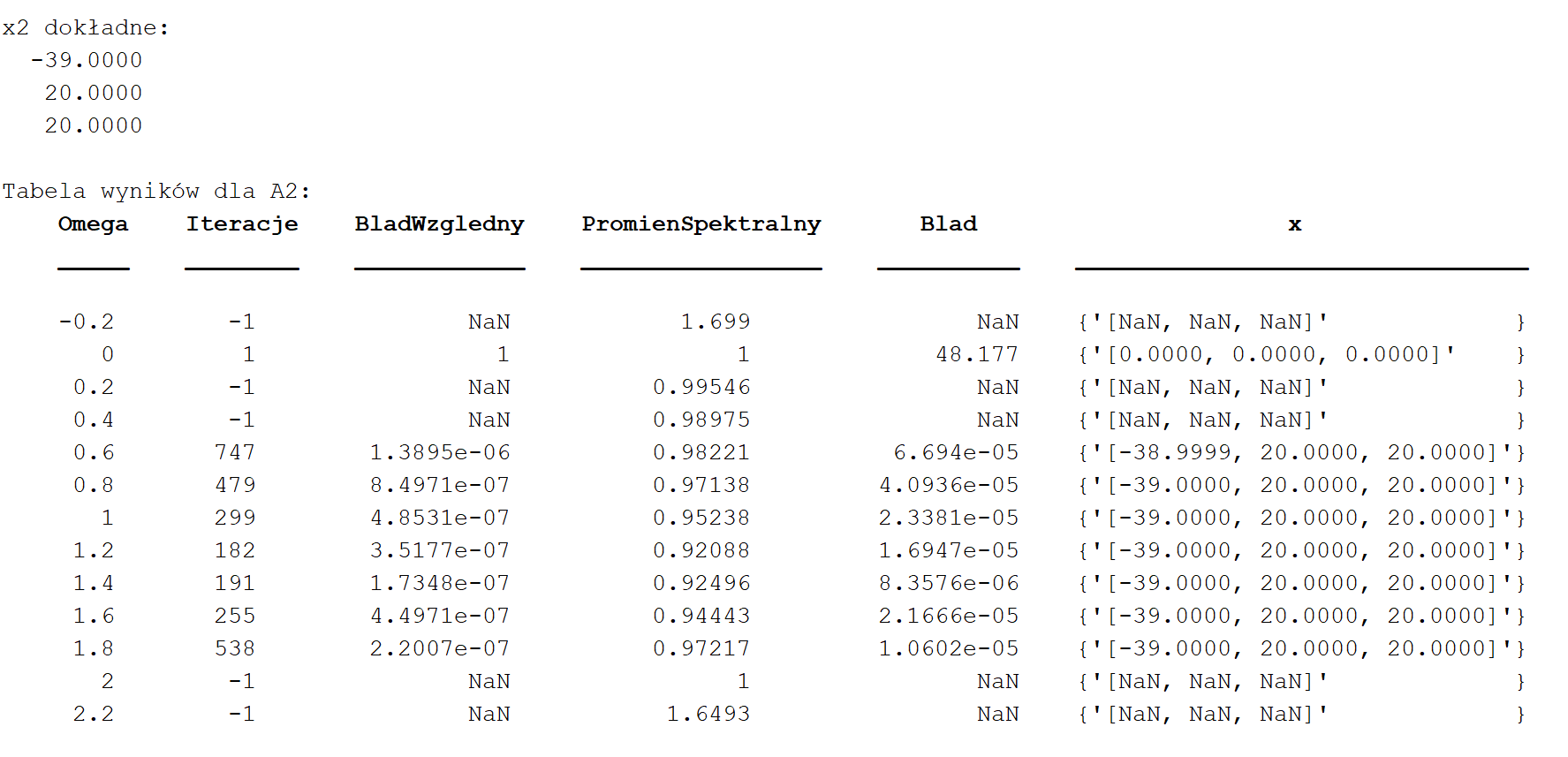
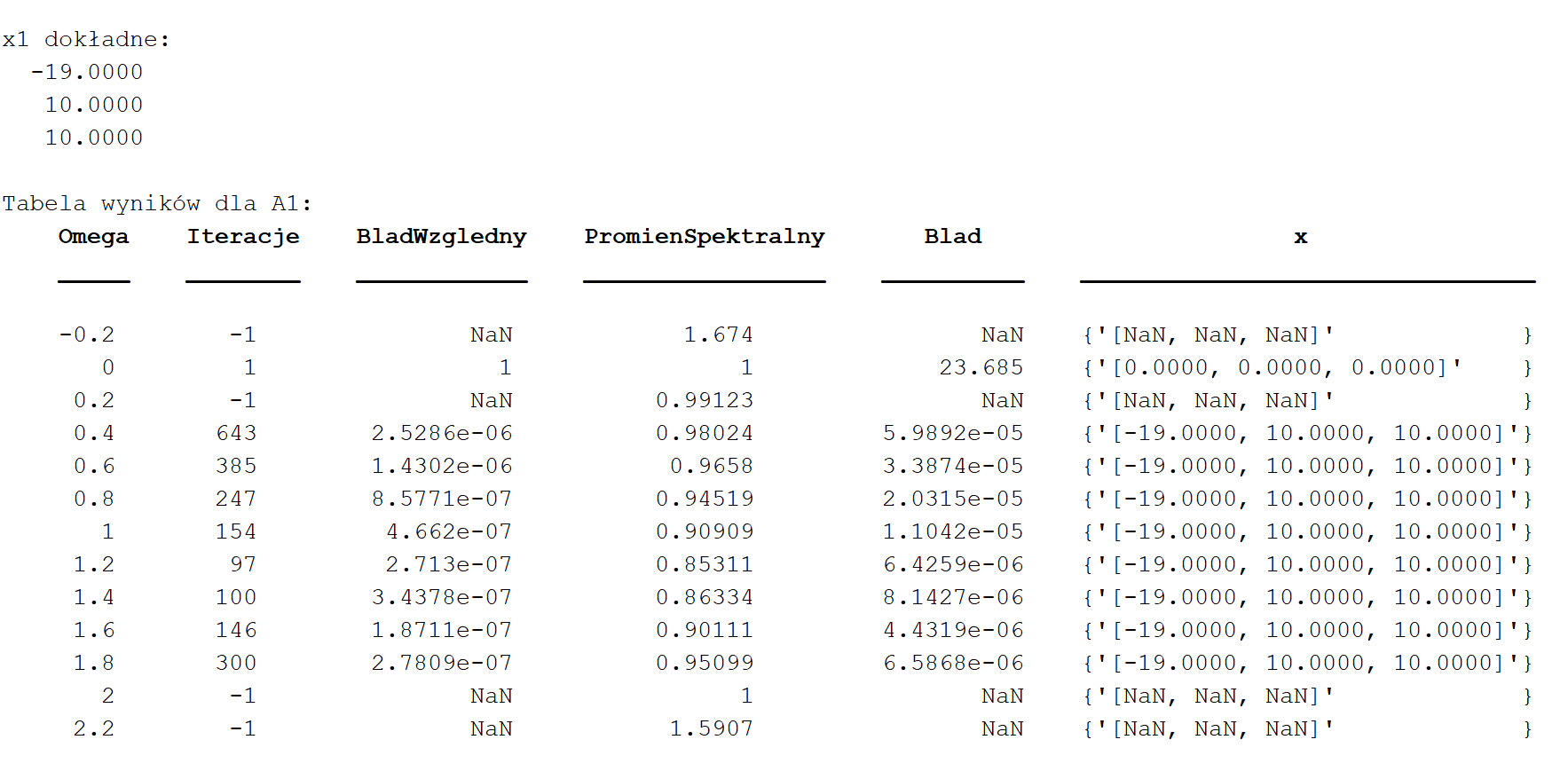
i ,

i .

Wyznacznik każdej macierzy jest więc coraz bliższy 0, a macierz jest coraz bliższa macierzy osobliwej. Jak się okazuje, ma to wpływ na zbieżność metody SOR.



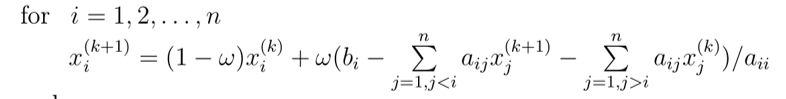
Każda kolejna z rozważanych macierzy ma mniejszy przedział wartości parametru relaksacji, który umożliwia zbieżność metody, a także konieczna jest zdecydowanie większa liczba iteracji do osiągnięcia warunku stopu. Możemy więc wnioskować, że metoda SOR nie radzie sobie w idealnym stopniu z macierzami prawie osobliwymi, ale daje jednak w ich przypadku szansę na zbieżność, gdy zawodzi już metoda Gaussa – Seidla (np. macierz A4).



Co ciekawe, błędy względne nie zwiększają się znacząco wraz ze zbliżaniem się wyznacznika macierzy do 0.

**Przypadek 6**

Ostatni przypadek, który postanowiłam sprawdzić, to macierz zawierająca 0 na przekątnej. Powód dla którego mógł on okazać się ciekawy to fakt, że we wzorze iteracyjnym na występuje dzielenie przez element , co jasno sugeruje problemy w momencie pojawienia się elementu zerowego na diagonali.



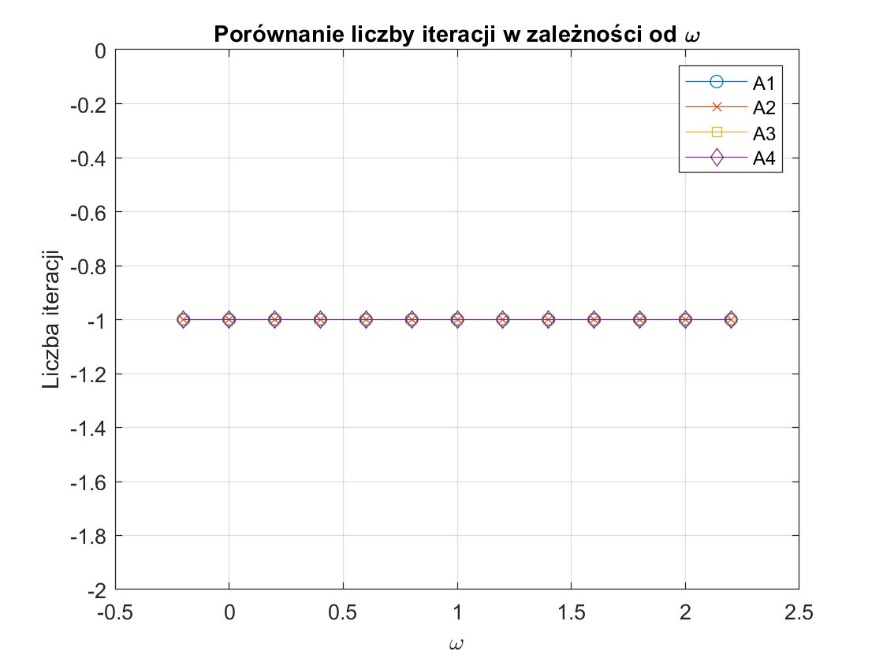
Potwierdzają to wykres oraz dane tabelaryczne dla 4 macierzy, którym postanowiłam się przyjrzeć.

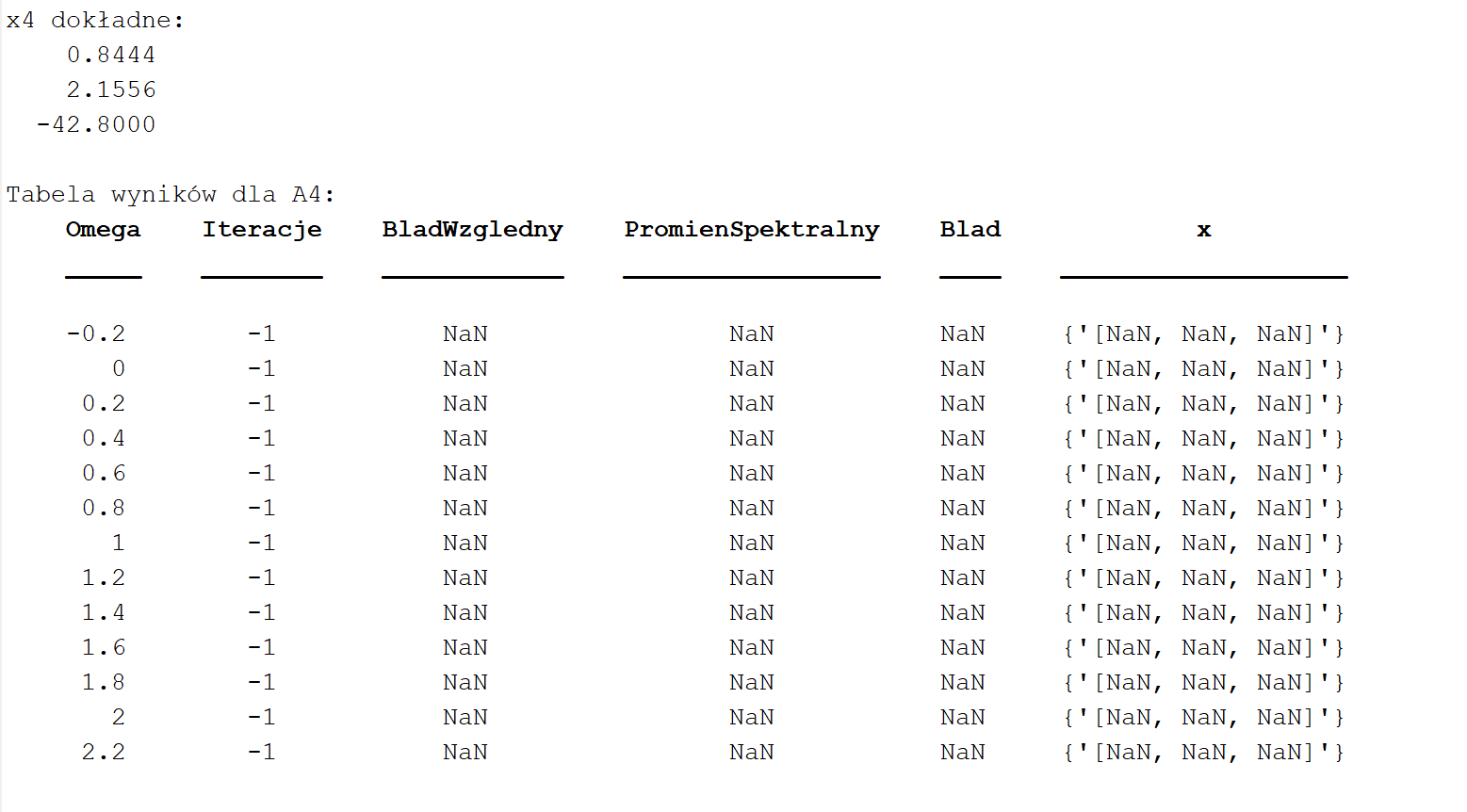
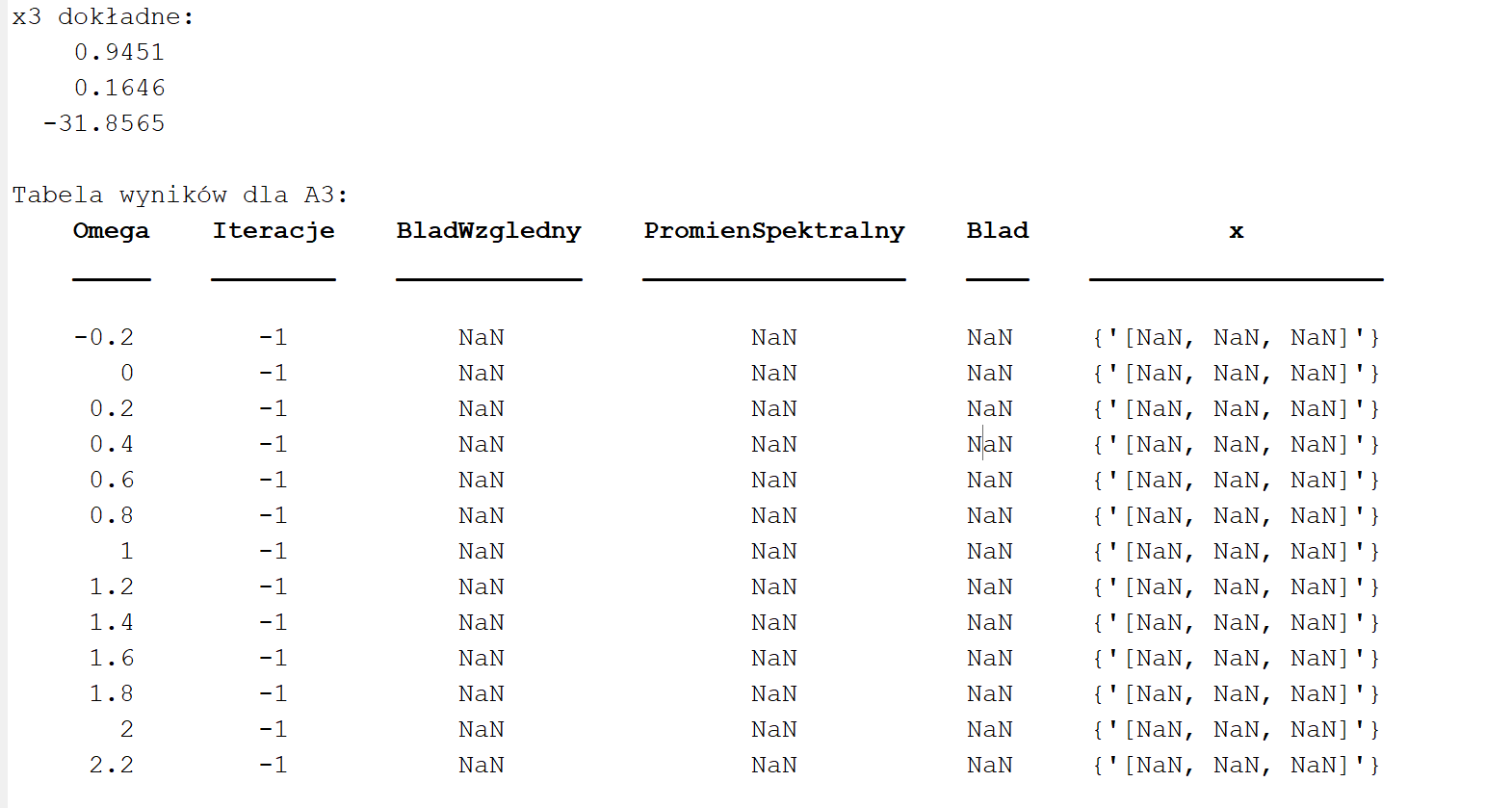
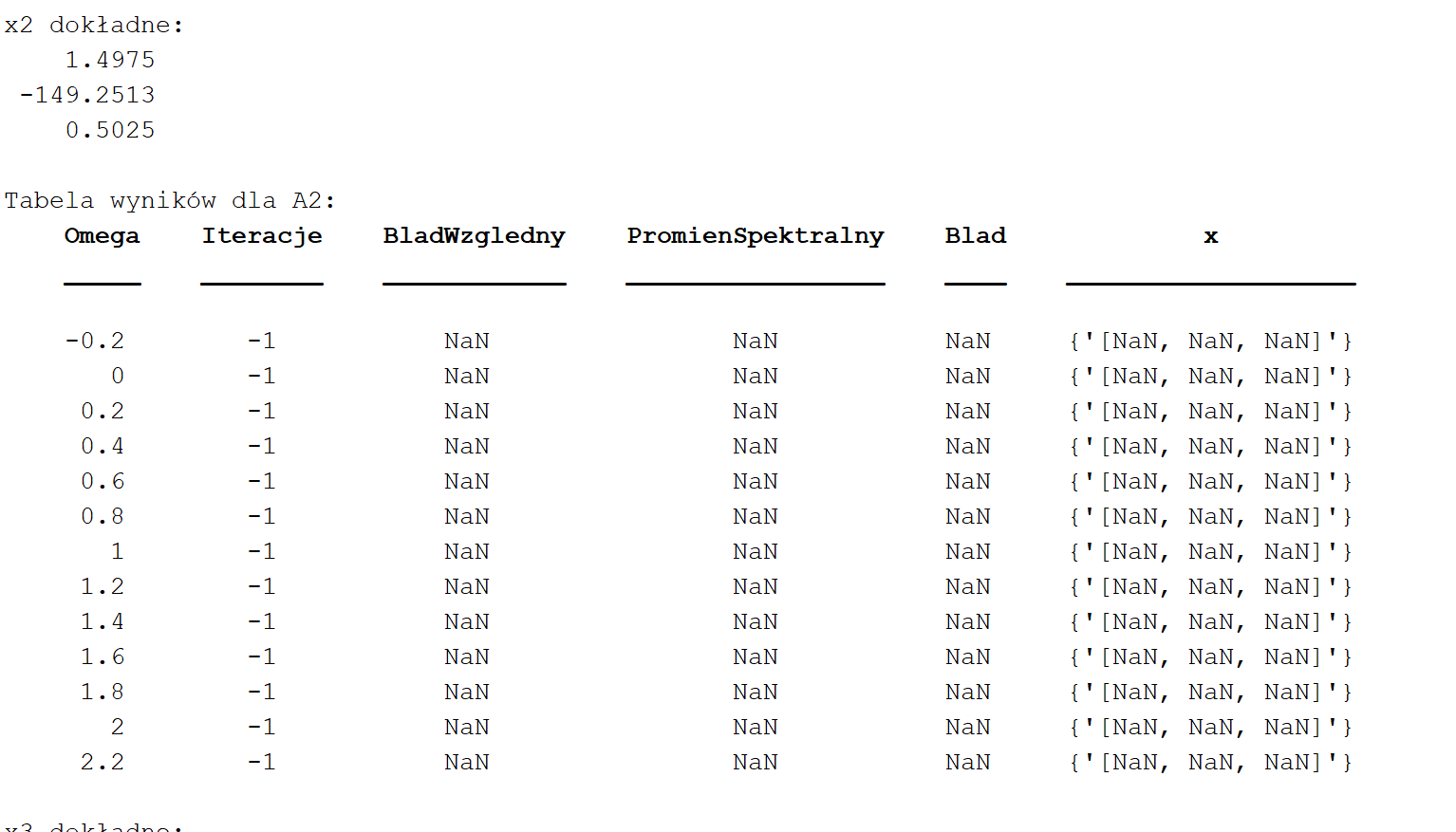
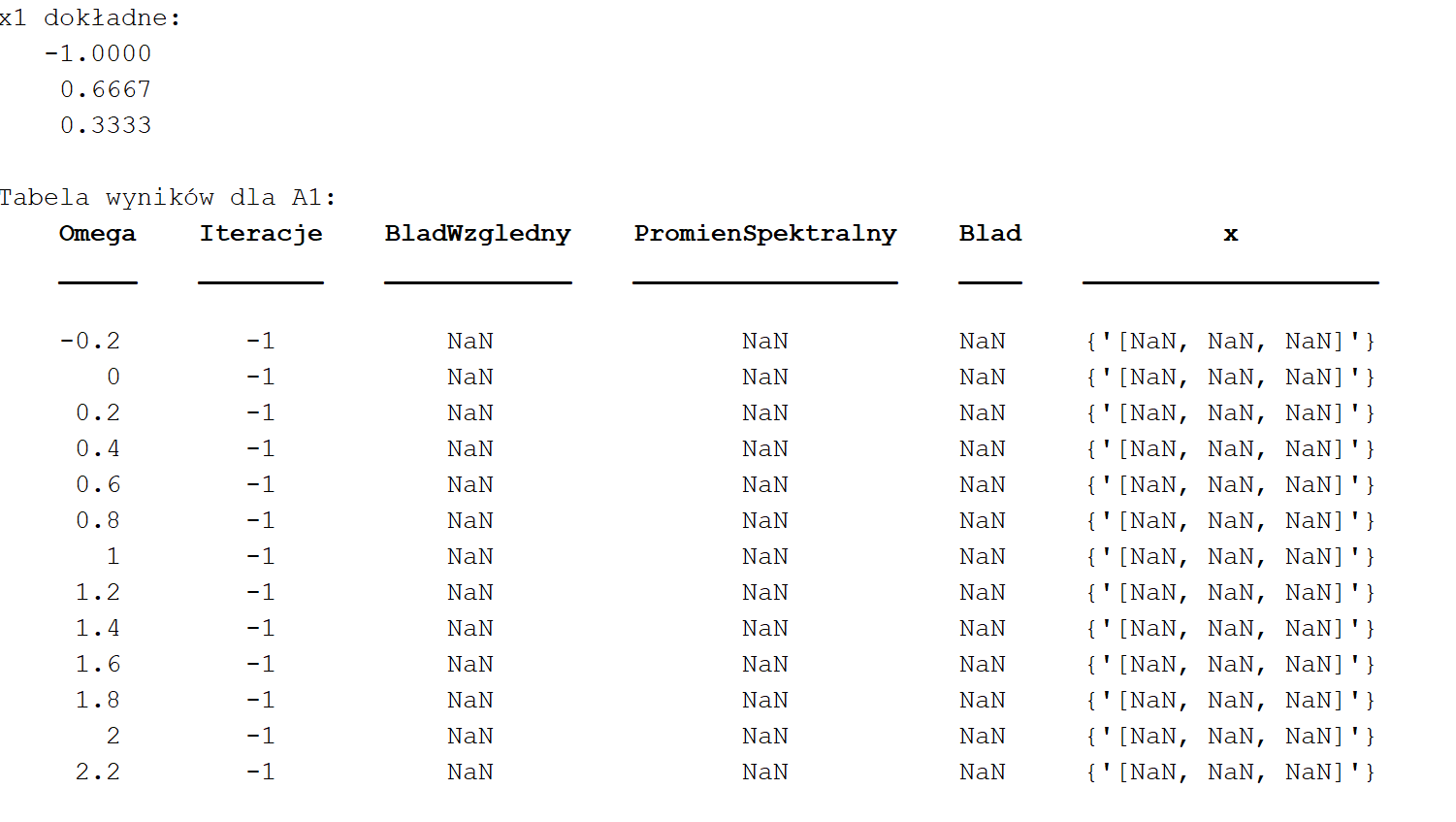
i ,

i ,

i ,

i .





**Część 4 – zastosowanie metody w praktycznym użyciu**

**Metoda SOR** jest metodą iteracyjną, która jest szczególnie efektywna w przypadku niektórych typów macierzy. Działa dobrze w sytuacjach, gdy:

* Macierz jest **rzadka**,
* Macierz jest **dominująca diagonalnie**,
* Macierz nie zawiera **zer na przekątnej**, ponieważ prowadzi to do dzielenia przez zero, co jest matematycznie nieokreślone,
* **Macierz może być symetryczna i dodatnio określona**, chociaż nie jest to konieczne do zastosowania metody SOR, ale w przypadku macierzy symetrycznych i dodatnio określonych, metoda ta działa bardziej stabilnie i może szybciej konwergować.

Pozwala to wykorzystywać metodę SOR w wielu zastosowaniach inżynierskich, fizycznych, finansach, także w zastosowaniach optymalizacyjnych – np. obliczania potencjałów elektrostatycznych w układach, symulacjach przewodzenia ciepła, analizie wytrzymałości konstrukcji i rozkładu naprężeń, przypływów finansowych.