Feuille 6

Interpolation – Méthode du krigeage

Danie Gerhardus Krige (1919–2013) est un ingénieur des mines sud-africain connu pour ses travaux en statistiques appliquées aux gisements et professeur à l'université du Witwatersrand, en Afrique du Sud.

Georges Matheron (1930–2000) est un mathématicien et géologue français, connu pour avoir fondé la géostatistique et cofondé (avec Jean Serra) la morphologie mathématique.

Les travaux de D.G. Krige sur le gisement du Witwatersrand ont inspiré à G. Matheron l'idée d'utiliser le variogramme plutôt que la covariance pour estimer des gisements. C'est pour honorer D.G. Krige, que G. Matheron a donné le nom de « Krigeage »à l'algorithme d'estimation au coeur de sa Théorie de la Variable Régionalisée (ou Géostatistique).

Danie Gerhardus Krige

Georges Matheron

Le krigeage est une méthode statistique d'interpolation spatiale qui s'applique en dimension 1, 2 ou 3 et qui permet d'interpoler ou d'extrapoler la valeur d'une variable $Z(x)$ en un point x quelconque en connaissant des valeurs observées $Z(X_i)$ aux points de mesure X_i, $1 \leqslant i \leqslant N$ et en se basant sur l'espérance et la variance des données.

Les domaines d'application sont nombreux et concernent la prospection et l'exploitation pétrolières et minières, le traitement du signal, l'imagerie médicale, la science de l'environnement, l'océanographie, la météorologie, l'hyrdrologie, la cartographie de la qualité de l'air. . .

Le krigeage porte le nom de son précurseur, l'ingénieur minier sud-africain D.G. Krige qui a tenu compte de la structure de dépendance spatiale des données pour déterminer la distribution spatiale de minerais et de filons de minerais à partir des résultats de forages. Cependant le terme de « krigeage »et le formalisme mathématique sont dûs à G. Matheron qui travaillait au centre de géostatistique de l'école des mines de Paris.

En météorologie, on appelle cette méthode « interpolation optimale »d'après les travaux du russe L.S. Gandin. En océanographie, elle est connue sous le nom de méthode « d'interpolation de Gauss-Markov »d'après les travaux de l'américain F.B. Bretherton. Enfin en statistique, il s'agit de la méthode de régression spatiale à effets alétoires. Le krigeage est la méthode optimale, au sens statistique du terme, d'estimation : elle prévoit la valeur d'une variable en x par une combinaison linéaire sans biais et à variance minimale des observations en X_i.

Dans ce chapitre, nous n'aborderons pas l'aspect statistique inhérent au krigeage. Nous présenterons seulement le krigeage comme une technique d'interpolation.

1 Base de la théorie

On se place en dimension 1 d'espace par commodité. On note $(X_1, \ldots, X_N)$ les points de mesure (supposés distincts) et $(Y_1, \ldots, Y_N)$ les relevés correspondants.

La méthode consiste à supposer que les mesures effectuées (les valeurs Y_i relevées) sont la somme de deux termes : la *dérive* qui est une fonction vivant dans un espace vectoriel de dimension finie (en général, on prendra un espace de polynômes) et un *terme alétoire* qui modélise les fluctuations aléatoires et qui permet

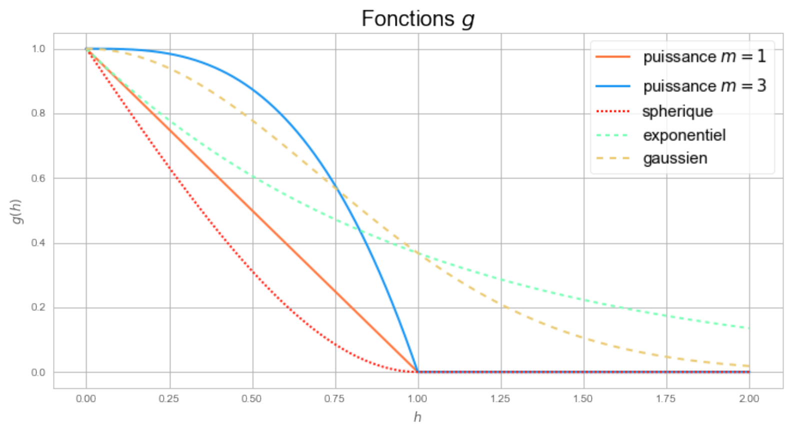

FIGURE 1 – Différentes fonctions utilisées pour l'interpolation par krigeage

de corriger la dérive pour interpoler.

Nous choisissons pour la dérive l'espace $\mathbb{R}_{M-1}[X]$ et nous notons P_j, $1 \leqslant j \leqslant M$ la base canonique de cet espace, c'est-à-dire

$$P_j(X) = X^{j-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant M.$$

Le terme aléatoire sera pris parmi les modèles suivants : ce sont des modèles couramment utilisés et qui rendent bien compte des données expérimentales. On pourra en trouver une représentation en figure 1.

- le modèle puissance avec palier

$$g(h) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{h}{a}\right)^m & \text{si } 0 \leqslant h \leqslant a, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

- le modèle sphérique

$$g(h) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{h}{a} + \dfrac{1}{2}\dfrac{h^3}{a^3} & \text{si } 0 \leqslant h \leqslant a, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

- le modèle exponentiel

$$g(h) = e^{-h/a};$$

- le modèle gaussien

$$g(h) = e^{-(h/a)^2};$$

- le modèle pépite

$$g(h) = \begin{cases} c & \text{si } h = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La valeur de g vaut zéro (ou est petite) lorsque h est grand (par exemple supérieur à a pour les modèles à palier) signifie que les valeurs ne sont pas corrélées à grande distance. On peut aussi imaginer faire des combinaisons linéaires de ces modèles. Cela permet de prendre en compte des gisements avec des pépites, c'est-à-dire des mmesures isolées au voisinage de pépite d'or qui faisaient conclure trop vite aux analystes miniers à une forte concentration en or.

Définition 1 (interpolation par krigeage)

On appelle *interpolation par krigeage* une interpolation de la forme

$$Y(x) = d(x) + w(x) = \sum_{j=1}^{M} \beta_j P_j(x) + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g(|x - X_i|),$$

vérifiant

$$Y(X_i) = Y_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \qquad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P_j(X_i) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant M.$$

Les vecteurs $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_M)$ forment la solution du système linéaire suivant

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} & 1 & X_1 & \dots & X_1^{M-1} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} & 1 & X_2 & \dots & X_2^{M-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} & 1 & X_N & \dots & X_N^{M-1} \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_N & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_1^{M-1} & X_2^{M-1} & \dots & X_N^{M-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \hline \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_M \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \\ \hline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right),$$

avec $K_{ij} = g(|X_i - X_j|)$, $1 \leqslant i, j \leqslant N$. On admettra que le choix du modèle g assure que ce système linéaire admet une unique solution.

2 Etude de quelques modèles

Dans cette partie, la dimension M est fixée à 2, c'est-à-dire que la dérive est linéaire. Nous prendrons également toujours le même nuage de points

$$X = (0, 1, 2, 3, 4) \qquad \text{et} \qquad Y = (1, 2, 1.5, 3, 2).$$

1) Commençons par étudier le cas d'un modèle linéaire où $g(h) = 1 - h$ sans palier. La fonction Y s'écrit

$$Y(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i |x - X_i|.$$

La fonction obtenue est linéaire par morceaux, non dérivable aux points X_i et passe par tous les points d'interpolation : c'est donc l'interpolation affine par morceaux. La partie gauche de la figure 2 représente le résultat pour le nuage de nos 5 points.

2) Lorsque $g(h) = 1 - h^3$, modèle cubique sans palier, la fonction Y s'écrit

$$Y(x) = \beta_1 + \beta_2 x + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i |x - X_i|^3.$$

La fonction obtenue est cubique par morceaux et de classe $\mathcal{C}^2$ partout y compris aux points X_i. Il s'agit donc d'une spline cubique représentée dans la partie droite de la figure 2.

3) Nous allons à présent étudier l'effet d'un palier. Considérons le modèle cubique avec palier $g(h) = 1-(h/a)^3$ pour $0 \leqslant h \leqslant a$ et $g(h) = 0$ pour $h > a$. Cela revient à négliger l'influence des points situés à une distance

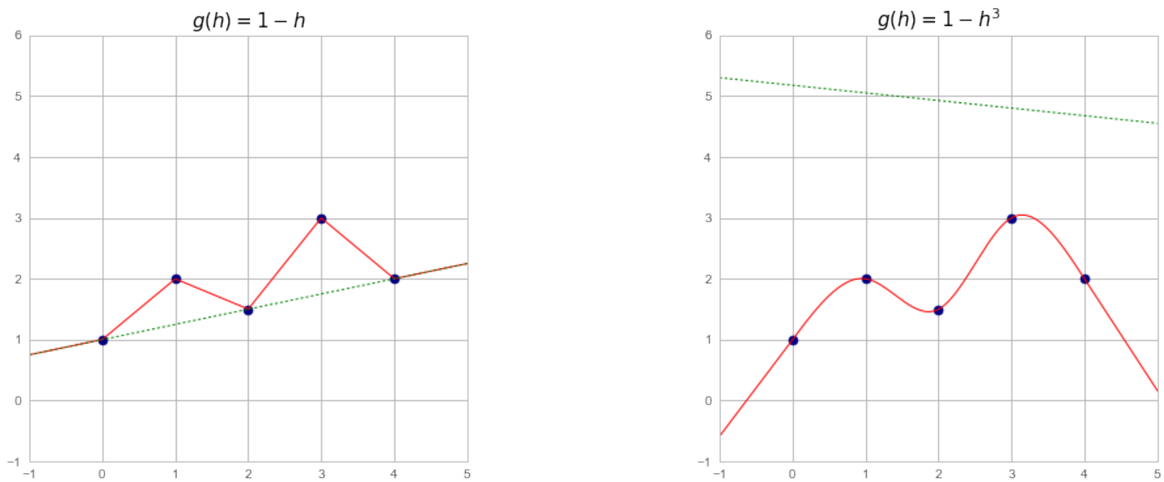

FIGURE 2 – Exemple d'interpolation par krigeage avec palier

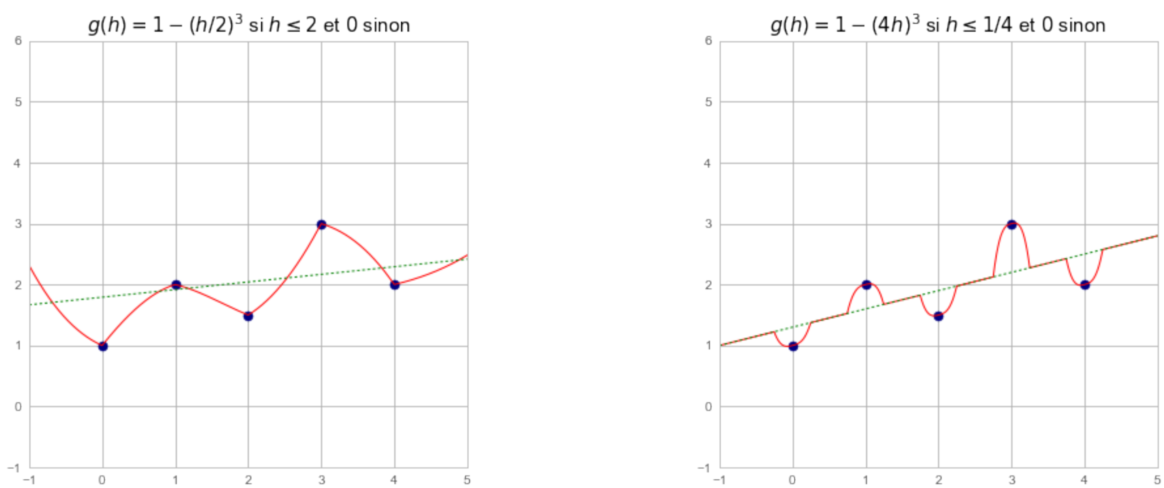

FIGURE 3 – Exemple d'interpolation par krigeage avec palier

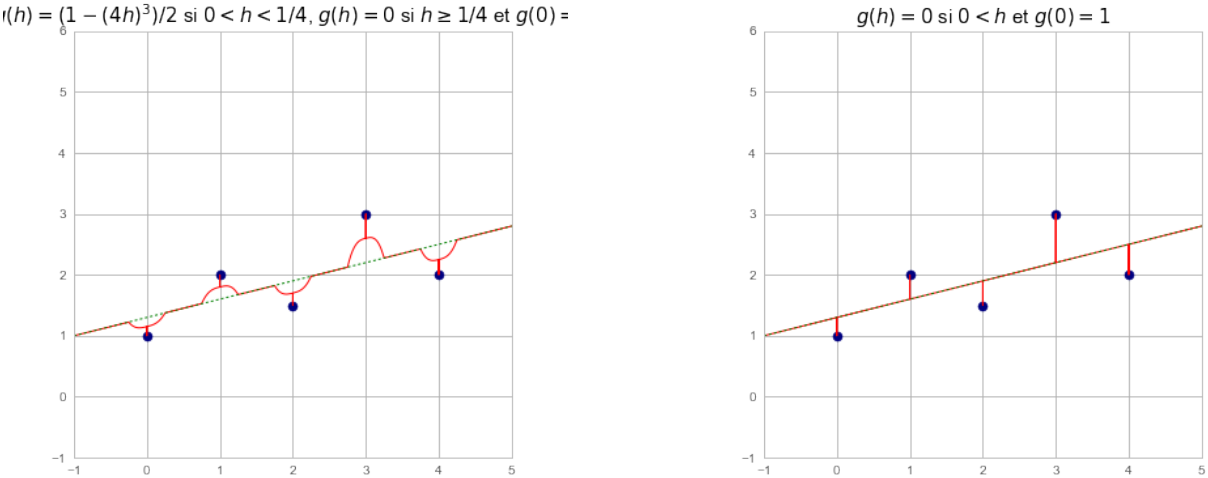

FIGURE 4 – Exemple d'interpolation par krigeage avec pépite

supérieure à a. Quand a diminue, on perd d'abord la régularité de la spline (voir la partie gauche de la figure 3 avec $a = 2$) puis pour $a < 1$ dans le cas présent, on observe bien la distance d'influence (voir la partie droite de la figure 3 avec $a = 1/4$).

4) L'effet pépite se traduit par la modification de la fonction g : on peut faire une combinaison convexe entre les fonctions continues précédentes et la fonction pépite qui est discontinue. Par exemple, si

$$g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0, \\ \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{h^3}{a^3}\right) & \text{si } 0 < h < a, \\ 0 & \text{si } a \leqslant h, \end{cases}$$

on obtient l'interpolation représentée sur la partie gauche de la figure 4 où l'on observe que la courbe a tendance à "s'éloigner" des points d'interpolation.

Si l'on augmente l'effet pépite à l'extrême, comme sur la partie droite de la figure 4, on peut montrer que la courbe converge vers la droite d'approximation au sens des moindres carrés.