

Feuille 4

Equation de transport — schéma de Lax-Friedrichs

Friedrichs est né à Kiel, Holstein le 28 septembre 1901. Sa famille déménage vite à Düsseldorf, où il grandit. Il étudie dans plusieurs universités allemandes, où il suit des cours sur la philosophie de Heidegger et de Husserl, avant de trouver sa voie dans les mathématiques. Pendant les années 1920, Friedrichs étudie à Göttingen, dont l'institut des mathématiques bénéficie du renom de son directeur, Richard Courant. Courant devient un collègue proche et ami de Friedrichs.

Les travaux les plus connus de Friedrichs aux mathématiques appliquées portent sur les équations différentielles ordinaires, et les équations aux dérivées partielles. Il a également travaillé et publié sur l'existence théorique des solutions de ces équations, les méthodes numériques, les opérateurs différentiels sur les espaces de Hilbert, déformations non-linéaires des plaques, les courants autour d'ailes, ondes solitaires, ondes de choc, combustion, ondes de choc dynamiques magnéto-fluides, flux relativistes, théorie des quanta, perturbation du spectre continu, théorie de la diffraction, et les équations hyperboliques symétriques.



Kurt Friedrichs



Peter Lax

Né en Hongrie, Peter Lax quitta le pays avec ses parents pour les États-Unis en 1941. Il travailla sur le projet Manhattan à Los Alamos en 1945-1946. Il obtient son doctorat en mathématiques en 1949 à l'université de New York, où il sera professeur (émérite depuis 1999). Il reçoit en 2005 le prix Abel pour l'ensemble de sa contribution en mathématiques pures et appliquées, et en particulier pour son travail sur les équations aux dérivées partielles.

Ses contributions à la mécanique des fluides et en calcul scientifique sur informatique sont importantes, il laisse son nom à de nombreux outils mathématiques, comme les schémas Lax-Wendroff et Lax-Friedrichs, les théorèmes de Lax, Lax-Milgram et de Lax-Wendroff.

Nous avons vu que l'équation de transport ne possède pas toujours de solution “simple” (ou analytique) lorsque la vitesse n'est pas constante. Il est alors intéressant de calculer une solution approchée par la méthode des différences finies.

1 La méthode des différences finies

Afin de faciliter la présentation, nous considérons des schémas “théoriques” permettant de discrétiser la totalité de \mathbb{R} , c'est-à-dire que nous évitons soigneusement de traiter les conditions aux limites qui sont malheureusement indispensables dès que l'implémentation des schémas est effective.

Considérons l'équation aux dérivées partielles (hyperbolique ou non) de type problème de transport qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + a(t, x) \partial_x u(t, x) = f(t, x), & t \in]0, T[, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1)$$

où a est la vitesse de transport supposée connue. Nous supposons que l'équation (1) possède une solution régulière (suffisamment régulière pour que toutes les dérivées nécessaires à son écriture soient bien des fonctions continues).

On souhaite calculer la valeur de la solution $u(t, x)$ en tout point de l'espace et du temps. Dans le cas général, ce que l'on sait faire de mieux consiste à déterminer une valeur "approchée" de la solution en un ensemble discret de points dans l'espace et dans le temps (il est ensuite possible, par interpolation de ces valeurs, de déterminer une valeur approchée de la solution en tout point de l'espace et du temps). On appelle cet ensemble discret de points un *maillage* ou une *grille*. Nous choisissons

1. un pas de temps $k > 0$,
2. un pas d'espace $h > 0$,

et nous définissons les points discrets du temps et de l'espace (appelés aussi les *points du maillage*) de la façon suivante

$$x_j = jh, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad t^n = nk, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nous cherchons alors à calculer une solution approchée v_j^n en ces points du maillage

$$v_j^n \simeq u(t^n, x_j), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pour cela, les opérateurs différentiels apparaissant dans l'équation (1) sont approchés par des différences finies obtenues par troncature de développements de Taylor. Comme ces développements ne sont valides que lorsque la solution est régulière, cette méthode n'est utilisable que lorsque la solution recherchée est régulière.

Notons que nous avons délibérément utilisé des symboles différents pour la solution continue u et pour la solution discrète v_j^n afin de ne pas les confondre.

2 Quelques schémas pour l'équation d'advection

Nous allons dans cette section présenter quelques schémas parmi les plus simples et les plus usuels qui permettent de simuler l'équation d'advection

$$\begin{cases} \partial_t u + a \partial_x u = 0, & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u^0(x), & \text{dans } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2)$$

où u^0 est une condition initiale donnée et $a \in \mathbb{R}$ la vitesse de transport donnée constante.

Pour la condition initiale, il est naturel de prendre simplement $v_j^0 = u^0(0, x_j)$, $j \in \mathbb{Z}$. Cependant, certaines situations ne permettent pas de prendre la valeur exacte de la donnée initial, parce qu'elle n'est pas connue à une précision absolue par exemple. Pour tenir compte de ce genre de situations, nous ne supposons pas toujours que cette égalité a lieu.

Nous commençons par proposer des discrétisations de la dérivée par rapport au temps (toutes ces relations sont obtenues par un développement de type Taylor) :

$$\partial_t u(t^n, x_j) \simeq \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{k}, \quad (3)$$

$$\simeq \frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{k}, \quad (4)$$

$$\simeq \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2k}. \quad (5)$$

Notons que ces relations de presque égalités n'auront de sens que si effectivement v_j^n approche bien $u(t^n, x_j)$.

De la même manière, nous pouvons proposer des discrétisations de la dérivées par rapport à l'espace :

$$\partial_x u(t^n, x_j) \simeq \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h}, \quad (6)$$

$$\simeq \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{h}, \quad (7)$$

$$\simeq \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h}. \quad (8)$$

En combinant ces relations, nous proposons plusieurs schémas, avec la notation $\beta = a \frac{k}{h}$:

- le schéma **explicite décentré à droite** (obtenu avec (3) et (6))

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \beta(v_{j+1}^n - v_j^n),$$

- le schéma **explicite décentré à gauche** (obtenu avec (3) et (7))

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \beta(v_j^n - v_{j-1}^n),$$

- le schéma **explicite centré** (obtenu avec (3) et (8))

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{1}{2}\beta(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n),$$

- le schéma **implicite décentré à droite** (obtenu avec (4) et (6))

$$v_j^{n+1} + \beta(v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}) = v_j^n,$$

- le schéma **implicite décentré à gauche** (obtenu avec (4) et (7))

$$v_j^{n+1} + \beta(v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) = v_j^n,$$

- le schéma **implicite centré** (obtenu avec (4) et (8))

$$v_j^{n+1} + \frac{1}{2}\beta(v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) = v_j^n,$$

- le schéma **saute mouton** (obtenu avec (5) et (8))

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} - \beta(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n).$$

Remarquons que les schémas qualifiés d'explicite fournissent une formule qui permet directement de calculer les valeurs à l'instant $n+1$ à partir des valeurs à l'instant n , tandis que les schémas implicites ont des formules où un système linéaire (ici de taille infinie car il n'y a pas de bord au domaine) doit être résolu à chaque pas de temps. Pour le schéma saute mouton, la solution à l'instant $n+1$ dépend de la solution aux deux instants précédents : il faut donc avoir recours à un autre schéma pour calculer la solution à l'instant $t^1 = k$.

D'autres schémas classiques (et utiles) sont obtenus par des développements limités plus élaborés (avec notamment prise en compte des termes croisés en temps et en espace). En voici quelques uns :

- le schéma de **Lax-Friedrichs**

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n) - \frac{1}{2}\beta(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n),$$

- le schéma de **Lax-Wendroff**

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{1}{2}\beta(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\beta^2(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n).$$

Nous n'avons pas tenu compte jusqu'ici d'éventuelles conditions de bord. Ces conditions, liées au problème physique, mathématique et/ou numérique, sont nécessaires pour restreindre le schéma à un intervalle $]a, b[$. D'autre part, nous nous sommes placés ici dans le cadre de la dimension un d'espace, mais il est possible d'étendre la méthode des différences finies au cas de la dimension quelconque, en utilisant un maillage structuré de \mathbb{R}^d .

3 Analyse numérique du schéma de Lax-Friedrichs

Dans cette section, nous cherchons à démontrer que la solution calculée par le schéma aux différences finies de Lax-Friedrichs est proche (en un certain sens) de la solution exacte du problème continu. Cette étude passe par plusieurs notions :

- la *convergence* qui décrit dans quelle mesure la solution numérique est proche de la solution continue,
- la *consistance* qui décrit dans quelle mesure l'opérateur discret approche bien l'opérateur continu
- la *stabilité* qui assure que les erreurs (arrondis, imprécisions dans la connaissance de la donnée initiale, erreurs dues au schéma numérique) se propagent sans trop s'amplifier.

Nous donnons enfin un résultat qui permet de relier ces trois notions.

Dans la suite, nous supposons que l'espace est restreint à l'intervalle $]0, L[$. En ce qui concerne les conditions aux limites, nous considérerons des conditions périodiques, ce qui simplifie l'analyse. Comme nous ne considérons que le cas des maillages uniforme, le pas d'espace est liée à la longueur du domaine de calcul et ne peut pas être pris complètement librement. Par ailleurs, comme les bords de l'intervalle constitués des points 0 et L sont plutôt à considérer comme des points de bord plutôt que comme des points où l'équation aux dérivées partielles à un sens, nous décalons légèrement les points du maillage afin qu'ils ne touchent pas le bord. Ainsi, la discrétisation en espace est constituée d'un nombre fini de points (voir Fig. 1) :

$$x_j = (j + \frac{1}{2})h, \quad 0 \leq j \leq N_h - 1, \quad \text{avec} \quad h = L/N_h.$$

De même, le temps est discrétisé sur l'intervalle $[0, T]$, $T > 0$, à l'aide du pas de temps k par

$$t^n = nk, \quad 0 \leq n \leq M_k, \quad \text{avec} \quad k = T/M_k.$$

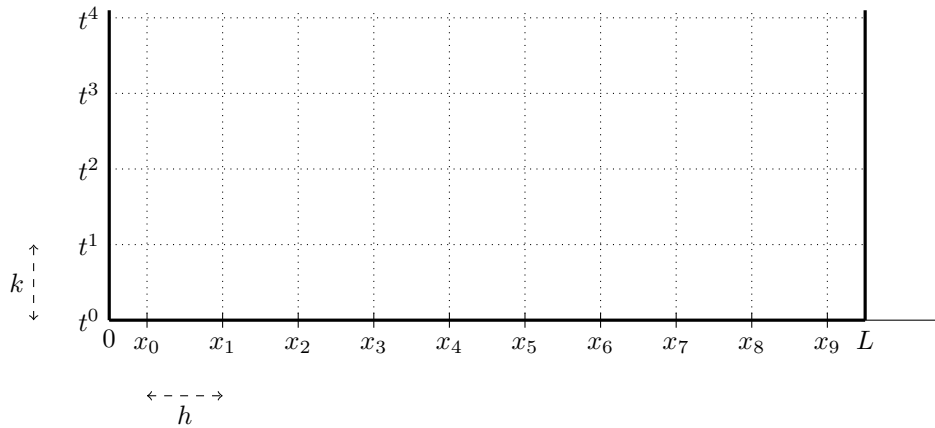


FIGURE 1 – Maillage pour les différences finies

Dans toute la suite, nous noterons u une solution du problème (2) d'advection et $(v_j^n)_{0 \leq j < N_h, 0 \leq n \leq M_k}$ la solution approchée donnée par le schéma de Lax-Friedrichs

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n) - \frac{1}{2}\beta(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n).$$

DÉFINITION 1 (ERREUR LOCALE)

Nous définissons l'*erreur locale* du schéma aux différences finies de Lax-Friedrichs pour le problème de l'advection de la façon suivante

$$e_j^n = v_j^n - u(t^n, x_j), \quad 0 \leq j < N_h, \quad 0 \leq n \leq M_k. \quad (9)$$

DÉFINITION 2 (CONVERGENCE)

Le schéma aux différences finies de Lax-Friedrichs est dit *convergent* pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ pour le problème de l'advection si pour toute solution u du problème (2) on a

$$\lim_{(k,h) \rightarrow (0,0)} \sup_{0 \leq n \leq M_k} \|e^n\|_\infty = 0 \quad \text{dès que} \quad \lim_{(k,h) \rightarrow (0,0)} \|e^0\|_\infty = 0.$$

Dans la définition de convergence, nous avons introduit la norme infinie sur les vecteurs donnée pour $x \in \mathbb{R}^{N_h}$ par

$$\|x\|_\infty = \sup_{0 \leq j < N_h} |x_j|.$$

La notion de consistance permet de s'assurer que l'opérateur discret (le schéma de Lax-Friedrichs ici) est une bonne approximation de l'opérateur continu (l'équation d'advection ici). C'est une propriété qui décrit la relation entre le schéma et l'opérateur aux dérivées partielles et qui assure que la solution calculée par le schéma s'écarte peu localement de la solution exacte : autrement dit le schéma approche localement de manière correcte la physique décrite par l'opérateur.

PROPOSITION 3 (CONSISTANCE)

En supposant que le coefficient $\lambda = h/k$ est constant, le schéma aux différences finies de Lax-Friedrichs est *consistant* avec le problème de l'advection. C'est-à-dire que l'on a pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ régulière

$$\left\| (\partial_t \phi + a \partial_x \phi)(t^n, x_j) - \frac{2\phi(t^{n+1}, x_j) - \phi(t^n, x_{j+1}) - \phi(t^n, x_{j-1})}{2k} - a \frac{\phi(t^n, x_{j+1}) - \phi(t^n, x_{j-1})}{2h} \right\|_\infty \xrightarrow{(h,k) \rightarrow 0} 0.$$

Démonstration. Soit ϕ une fonction régulière (suffisamment pour les développements soient licites). Nous avons

$$\begin{aligned} \phi(t^{n+1}, x_j) &= \phi(t^n, x_j) + k \partial_t \phi(t^n, x_j) + \frac{k^2}{2} \partial_{tt} \phi(t^n + \zeta k, x_j), \\ \phi(t^n, x_{j-1}) &= \phi(t^n, x_j) - h \partial_x \phi(t^n, x_j) + \frac{h^2}{2} \partial_{xx} \phi(t^n, x_j - \xi^- h), \\ \phi(t^n, x_{j+1}) &= \phi(t^n, x_j) + h \partial_x \phi(t^n, x_j) + \frac{h^2}{2} \partial_{xx} \phi(t^n, x_j + \xi^+ h), \end{aligned}$$

où ζ , ξ^- et ξ^+ sont dans $[0, 1]$. Ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{2\phi(t^{n+1}, x_j) - \phi(t^n, x_{j+1}) - \phi(t^n, x_{j-1})}{2k} + a \frac{\phi(t^n, x_{j+1}) - \phi(t^n, x_{j-1})}{2h} \\ &= (\partial_t \phi + a \partial_x \phi)(t^n, x_j) + \frac{k}{2} \partial_{tt} \phi(t^n + \zeta k, x_j) \\ & \quad - \frac{h}{4k} ((h - ak) \partial_{xx} \phi(t^n, x_j - \xi^- h) + (h + ak) \partial_{xx} \phi(t^n, x_j + \xi^+ h)). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc bien la consistance du schéma de Lax-Friedrichs dans le cas où $k = \mathcal{O}(h)$. \square

PROPOSITION 4 (PRINCIPE DU MAXIMUM DISCRET)

Sous la condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) $|a|k/h \leq 1$, qui peut se récrire sous la forme

$$\lambda = \frac{h}{k} \geq |a|,$$

le schéma aux différences finies de Lax-Friedrichs vérifie le *principe du maximum*, c'est-à-dire

$$\forall 0 \leq n \leq M_k, \forall 0 \leq j < N_h, \quad \min_{0 \leq k < N_h} v_k^0 \leq v_j^n \leq \max_{0 \leq k < N_h} v_k^0,$$

quelle que soit la donnée initiale v^0 .

Démonstration. Soit v_j^n la suite définie par le schéma de Lax-Friedrichs. On a

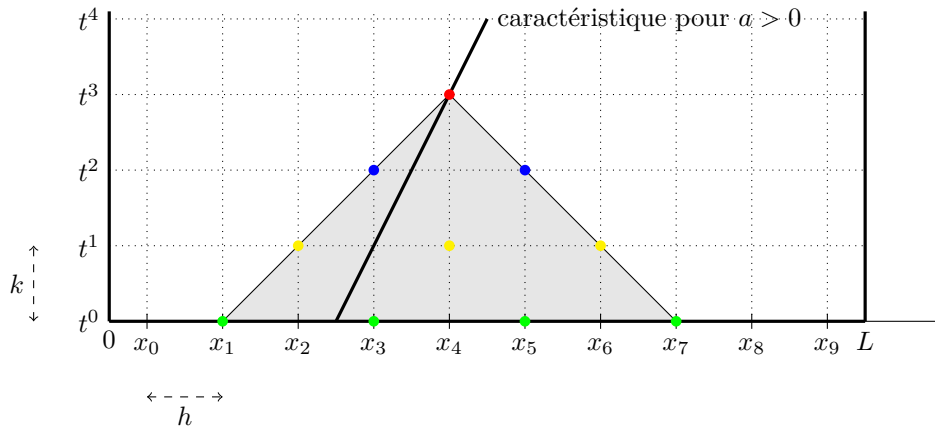
$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(1 + \beta)v_{j-1}^n + \frac{1}{2}(1 - \beta)v_{j+1}^n,$$

avec $\beta = a/\lambda$. Comme $|a|/\lambda \leq 1$, on a

$$(1 + \beta)/2 \in [0, 1] \quad \text{et} \quad (1 - \beta)/2 \in [0, 1].$$

La valeur de v_j^{n+1} est donc une combinaison linéaire convexe de v_{j-1}^n et de v_{j+1}^n , ce qui termine la preuve. \square

Le résultat de cette proposition est en accord avec la théorie des caractéristiques : le schéma semble avoir de meilleures propriétés si l'information est prise en des points qui encadrent les caractéristiques, c'est-à-dire qui suivent mieux les caractéristiques, ce que l'on voit sur la figure suivante.



Nous pouvons à présent énoncer le théorème de convergence qui est un cas particulier du théorème de Lax.

THÉORÈME 5 (CONVERGENCE DU SCHÉMA DE LAX-FRIEDRICHS)

Le schéma aux différences finies de Lax-Friedrichs pour le problème de l'advection est convergent pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ sous la condition CFL $|a|k/h \leq 1$, c'est-à-dire que pour toute solution u du problème (2) on a

$$\lim_{(k,h) \rightarrow (0,0)} \sup_{0 \leq n \leq M_k} \|v_j^n - u(t^n, x_j)\|_\infty = 0 \quad \text{dès que} \quad \lim_{(k,h) \rightarrow (0,0)} \|v_j^0 - u^0(x_j)\|_\infty = 0.$$

Démonstration. On note $e_j^n = v_j^n - u(t^n, x_j)$ l'erreur du schéma à l'étape n . Une étape du schéma s'écrit

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{2}(1 + \beta)v_{j-1}^n + \frac{1}{2}(1 - \beta)v_{j+1}^n,$$

Nous définissons aussi l'erreur de consistance

$$\varepsilon_j^n = \frac{2u(t^{n+1}, x_j) - u(t^n, x_{j+1}) - u(t^n, x_{j-1})}{2k} + a \frac{u(t^n, x_{j+1}) - u(t^n, x_{j-1})}{2h}$$

qui tend uniformément vers 0 lorsque h et k tendent vers 0. Nous avons donc

$$u(t^{n+1}, x_j) = \frac{1}{2}(1 + \beta)u(t^n, x_{j-1}) + \frac{1}{2}(1 - \beta)u(t^n, x_{j+1}) + k\varepsilon_j^n.$$

Par linéarité, en soustrayant les deux dernières expressions, nous déduisons

$$e_j^{n+1} = \frac{1}{2}(1 + \beta)e_{j-1}^n + \frac{1}{2}(1 - \beta)e_{j+1}^n - k\varepsilon_j^n,$$

donc, en utilisant que la condition CFL est satisfaite ($-1 \leq \beta \leq 1$),

$$\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^n\|_\infty + k\|\varepsilon^n\|_\infty \leq \|e^0\|_\infty + kn \sup_{0 \leq m \leq M_k} \|\varepsilon^m\|_\infty = \|e^0\|_\infty + T \sup_{0 \leq m \leq M_k} \|\varepsilon^m\|_\infty \xrightarrow{(k,h) \rightarrow 0} 0.$$

□