Feuille 1

Dynamique du point matériel

La légende raconte qu'un beau jour, le physicien anglais Isaac Newton (1642-1727) était assis au pied d'un pommier. La chute d'un fruit l'a fait réfléchir. Pourquoi tombe-t-il au sol plutôt que de s'envoler vers le ciel ? Ça semble évident, mais c'est loin de l'être ! Pour que la pomme tombe vers le bas, elle doit être attirée par une force. Cette force, la gravité, était encore inconnue avant que Newton n'élabore la loi de la gravitation universelle.

En gros, cette loi dit que tous les objets s'attirent les uns les autres. Même la toute petite pomme attire la Terre vers elle, mais avec une force si faible qu'on ne peut pas la percevoir. Par contre, si l'on parvenait à faire pousser une pomme aussi grosse et lourde que la Terre, sa force gravitationnelle nous garderait les deux pieds collés dessus !

Avant de formuler cette loi qui a révolutionné la science, Newton a fait plusieurs autres découvertes fondamentales. L'astronomie, par exemple, avait toujours fasciné le jeune Isaac. À l'époque, les équipements perfectionnés dont nous disposons pour l'observation n'existaient pas. Qu'à cela ne tienne : Newton avait conçu un télescope révolutionnaire, à miroir courbé. Ce télescope « de type Newton » est encore utilisé de nos jours.

S'inspirant des travaux de son prédécesseur, l'astronome italien Galilée, Newton énonça les trois grandes lois du mouvement. Pendant plus de 200 ans, ces lois constituèrent les fondements de la physique. Elles étaient toutefois incomplètes, car elles ne s'appliquaient pas aux objets voyageant à des vitesses proches de celle de la lumière. Au début du XXe siècle, les travaux d'Albert Einstein ont comblé cette lacune.

1 Principe fondamental de la dynamique

Nous rappelons brièvement le principe fondamental de la dynamique ou "deuxième loi de Newton" énoncé ainsi sur la page wikipedia[1] : si un ensemble de forces $\{\vec{F}_i\}_i$ sont exercées sur un point M, celui-ci est animé d'une accélération $\vec{a}$ telle que

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}.$$

Dans cette formule, la flèche signifie que les quantités $\{\vec{F}_i\}_i$ et $\vec{a}$ sont vectorielles (en dimension 3 d'espace) et m est la masse du point matériel.

Par ailleurs, Isaac Newton a également donné une expression de la force exercée par un corps massique sur un autre dans sa loi de gravitation universelle. Deux corps ponctuels de masses respectives M_A et M_B s'attirent avec des forces vectoriellement opposées et de même valeur absolue. Cette valeur est proportionnelle au produit des deux masses, et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Ces 2 forces opposées ont pour axe commun la droite passant par les centres de gravité de ces deux corps. La valeur absolue de la force exercée sur le corps B par le corps A est donnée par la formule :

$$F_{A/B} = F_{B/A} = G\frac{M_A M_B}{d^2},$$

M_A et M_B exprimés en kilogramme (kg), d en mètre (m), $F_{A/B}$ et $F_{B/A}$ en Newton (N), où G est la constante

1. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Lois_du_mouvement_de_Newton`

gravitationnelle et d la distance entre les deux centres de gravité. Dans les unités SI, le CODATA recommande la valeur suivante : $G = 6.67430 \times 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot\ \mathrm{kg}^{-2}$.

2 Le problème de la chute libre

2.1 Modélisation

Nous considérons à présent un point matériel M de masse m qui tombe librement à la surface de la Terre. Ce point matériel est ainsi seulement soumis à la force de gravité. Pour simplifier, la Terre sera supposée être une boule parfaite. Dans cette partie, nous prendrons comme valeur numérique (lorsque cela sera nécessaire)

$$G = 6.67430\ 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}, \quad m_T = 5.9722\ 10^{24}\ \mathrm{kg}, \quad r = 6.375433\ 10^6\ \mathrm{m},$$

où G est la constante universelle de gravitation, m_T la masse de la terre et r le rayon moyen de la terre. Nous utiliserons les notations de la figure 1, en particulier, nous définissons h la hauteur du point M par rapport au sol.

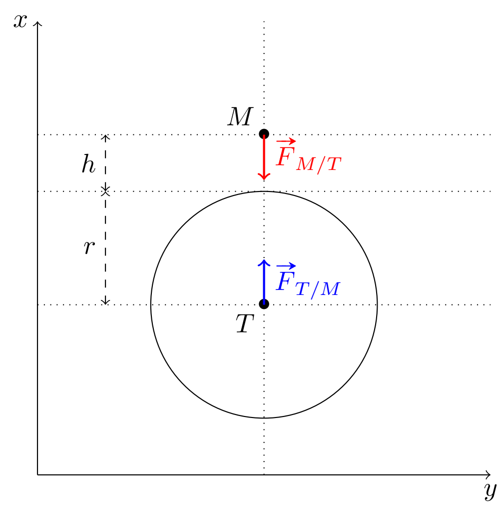

FIGURE 1 – Problème de la chute libre

<u>Exercice 1</u> : *Les équations de la chute libre*

Q1. Ecrivez l'expression vectorielle de la force $\vec{F}_{M/T}$ exercée par la Terre sur le point matériel M.

Q2. En supposant que h est très petit devant r, faites un développement limité à l'ordre 0 afin d'obtenir l'expression classique

$$\vec{F}_{M/T} = (-mg, 0).$$

Vous donnerez l'expression exacte ainsi qu'une valeur numérique de la constante g.

Q3. Ecrivez l'équation différentielle qui régit la hauteur h en appliquant le principe fondamental de la dynamique.

<u>Solution de l'exercice 1</u> : *Les équations de la chute libre*

Q1. La force $\vec{F}_{M/T}$ exercée par la Terre sur le point matériel M s'écrit dans le repère donné à la figure 1

$$\vec{F}_{M/T} = \Big(-G\frac{m\, m_T}{(r+h)^2}, 0\Big).$$

Q2. Un développement à l'ordre 0 donne

$$\vec{F}_{M/T} = \left(-G\frac{m_T}{r^2}m, 0\right).$$

Nous avons donc

$$g = \frac{Gm_T}{r^2} \simeq 9.80665 \text{ m} \cdot \text{s}^-2.$$

Q3. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit ici, après projection sur l'axe x.

$$mh'' = -m\,g \qquad \Longrightarrow \qquad h'' = -g.$$

2.2 Analyse

L'objectif de la partie modélisation est presque atteint. Nous avons transformé le problème physique par un problème mathématique qui pourrait s'écrire ainsi : "Trouver une fonction régulière h (par exemple de classe $\mathcal{C}^2$) qui vérifie l'équation différentielle $h'' = -g$."

Or il est bien connu que ce problème admet une infinité de solutions. Plus précisément il existe une unique solution pour chaque condition initiale d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème .1 (Cauchy-Lipschitz)

Considérons l'EDO

$$u'(t) = f(t, u(t)), \qquad t \in I,$$

munie de la donnée initiale $u(0) = u_0 \in \Omega$. Supposons que f est une fonction continue et localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable [a] sur $I \times \Omega$, pour Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Alors, il existe une unique solution maximale de l'EDO, définie sur l'intervalle maximal I_M, intervalle ouvert tel que $0 \in I_M \subset I$.

a. On entend par ceci : f est localement en (t, x) lipschitzienne par rapport à x, c'est-à-dire que pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ voisinage de (t_0, x_0) et κ une constante réelle tels que $\forall (t, x, y)$ tels que $(t, x) \in \mathcal{O}$ et $(t, y) \in \mathcal{O}$: $|f(t, y) - f(t, x)| \leq \kappa |x - y|$.

Remarque .2

Pour les mathématiciens, il est toujours important de se poser les questions de l'existence et de l'unicité des solutions d'un problème donné. Dans d'autres communautés, ces questions ne sont pas centrales : l'existence va souvent de soi et si plusieurs solutions sont possibles, il suffit de sélectionner la "bonne".

Exercice 2 : *Résolution du problème de Cauchy*

Nous pouvons ainsi définir $u = (h, h') \in \mathbb{R}^2$.

Q1. Montrez que la fonction vectorielle u vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec second membre. Ecrivez la sous forme matricielle $u' = Au + b$.

Q2. Résolvez le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + b, \quad t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Indication : vous pouvez résoudre directement l'équation d'ordre 2 posée sur h.

Solution de l'exercice 2 : *Résolution du problème de Cauchy*

Q1. La fonction u vérifie l'équation différentielle vectorielle d'ordre 1

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad \text{avec } f(t,x) = Ax + b, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

Q2. Nous devons résoudre $h'' = -g$, munie des conditions initiales $h(0) = h_0$ et $h'(0) = v_0$. La solution s'écrit

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2, \qquad t \geq 0.$$

Nous devons ainsi revenir à la modélisation du problème en se posant la question suivante : "est-il physiquement raisonnablede se donner une condition initiale sur la position ainsi que sur la vitesse pour le problème de la chute libre ?". Comme la réponse est évidemment oui, nous pouvons reformuler le problème de la chute libre sous la forme d'un problème de Cauchy avec données initiales particulières $v_0 = 0$. La solution est alors unique et s'écrit

$$h(t) = h_0 - \tfrac{1}{2} g t^2, \qquad t \geq 0.$$

Il est ainsi possible de déterminer la durée de la chute, c'est-à-dire l'instant t_f tel que $h(t_f) = 0$ (impact). Nous avons immédiatement

$$t_f = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

2.3 Simulations numériques : la méthode d'Euler explicite

Le modèle de la chute libre peut être complètement résolu analytiquement (nous avons l'existence et l'unicité de la solution ainsi qu'une expression simple à calculer). Cependant, ce n'est pas toujours le cas et il est parfois utile (pour ne pas dire le plus souvent) de calculer une approximation de la solution. Dans cette section, nous proposons une méthode (la méthode d'Euler explicite) permettant d'approcher la solution exacte d'un problème de Cauchy et nous comparons la solution approchée avec la solution exacte afin de valider cette méthode.

2.3.1 Description de la méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler explicite permet de calculer une valeur approchée de la solution d'un problème de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), & t \in]0, T[, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{PC}$$

où $T > 0$ est l'instant final et f est une fonction régulière (les hypothèses de régularité seront décrites ultérieurement) par exemple de classe $\mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R})$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il est alors immédiat que la solution u est définie sur l'intervalle $[0, T]$ et de classe $\mathcal{C}^2$.

Un pas de temps $\Delta t > 0$ est fixé. La méthode consiste à calculer des valeurs approchées $v_k \simeq u(t_k)$, $k \geq 0$, avec $t_k = k\Delta t$, par les formules

$$\begin{cases} v_{k+1} = v_k + \Delta t f(t_k, v_k), & 0 \leq k \leq T/\Delta t, \\ v_0 = u_0. \end{cases} \tag{EE}$$

Notons que le nombre de termes de la suite (v_k) est fini (à cause de l'instant final T qui est aussi fini) mais qu'il dépend de Δt. En particulier, plus Δt est petit, plus le nombre de termes de la suite est grand avant d'atteindre l'instant final. Dans la pratique, il n'est pas forcémenent nécessaire de limiter ce nombre à l'avance.

Exercice 3 : ***Analyse de la méthode d'Euler explicite***

Q1. Montrez que la solution exacte u du problème (PC) vérifie

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t, u(t))\ \mathrm{d}t, \qquad 0 \leq k \leq T/\Delta t.$$

On remarque alors que la méthode d'Euler explicite (EE) consiste à approcher l'intégrale par la méthode des rectangles à gauche.

Q2. Montrez qu'il existe des constantes notées C et D telles que

$$\epsilon_{k+1} \leq \epsilon_k(1 + C\Delta t) + \tfrac{1}{2}D\Delta t^2, \qquad 0 \leq k \leq T/\Delta t.$$

Q3. Démontrez le lemme suivant : si $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite postive vérifiant

$$\exists \rho > 0, \exists \alpha \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N} \quad \theta_{n+1} \leq (1+\rho)\theta_n + \alpha,$$

alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \theta_n \leq (1+\rho)^n\theta_0 + \frac{\alpha}{\rho}\Big((1+\rho)^n - 1\Big) \leq e^{n\rho}\theta_0 + \frac{\alpha}{\rho}\Big(e^{n\rho} - 1\Big).$$

Q4. En utilisant le résultat de la question précédente, montrez qu'il existe une constante $\tilde{C}$ telle que

$$\sup_{k\in[0,T/\Delta t]} |u(t_k) - v_k| \leq \tilde{C}\Delta t.$$

On dira alors que la méthode d'Euler explicite est convergente d'ordre 1 (car la puissance du terme Δt est 1).

<u>**Solution de l'exercice 3**</u> **:** ***Analyse de la méthode d'Euler explicite***

Q1. Il suffit d'intégrer l'équation différentielle.

Q2. Nous majorons de la façon suivante

$$\begin{aligned}
|u(t_{k+1}) - v_{k+1}| &\leq |u(t_k) - v_k| + \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t, u(t)) - f(t_k, v_k)|\ \mathrm{d}t \\
&\leq |u(t_k) - v_k| + \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t, u(t)) - f(t_k, u(t_k))| + |f(t_k, u(t_k)) - f(t_k, v_k)|\ \mathrm{d}t \\
&\leq |u(t_k) - v_k| + \int_{t_k}^{t_{k+1}} |u'(t) - u'(t_k)| + |f(t_k, u(t_k)) - f(t_k, v_k)|\ \mathrm{d}t \\
&\leq |u(t_k) - v_k|(1 + C\Delta t) + \tfrac{1}{2}\Delta t^2 \|u''\|_{\mathrm{L}^\infty([0,T])},
\end{aligned}$$

où C est la constante de Lipschitz de f par rapport à la seconde variable sur l'intervalle $t \in [0, T]$. Ainsi, en posant $\epsilon_k = |u(t_k) - v_k|$, l'erreur à l'instant t_k, nous avons

$$\epsilon_{k+1} \leq \epsilon_k(1 + C\Delta t) + \tfrac{1}{2}D\Delta t^2, \qquad 0 \leq k \leq T/\Delta t.$$

Q3. Nous faisons une preuve par récurrence. Pour simplifier les notations, nous définissons $a = 1 + \rho$. La propriété (P_n) est définie par $\theta_n \leq a^n\theta_0 + \alpha(a^n - 1)/(a - 1)$. La propriété (P_0) est vraie. Supposons que (P_N) est vraie. Alors on

$$\theta_{n+1} \leq a\theta_n + \alpha \leq a\Big(a^n\theta_0 + \alpha\frac{a^n - 1}{a - 1}\Big) + \alpha = a^{n+1}\theta_0 + \alpha\frac{a^{n+1} - a + a - 1}{a - 1} = a^{n+1}\theta_0 + \alpha\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1},$$

ce qui est exactement (P_{n+1}) est vraie. Cela termine la preuve de la première partie. Pour la second inégalité, il suffit de remarquer que $(1 + x)^n \leq e^{nx}$, pour $x \geq 0$. Cette dernière inégalité se démontre à partir de $e^x \geq 1 + x \geq 1$ et en élevant à la puissance n.

Q4. D'après la question 2, nous pouvons appliquer la question 2 à $\theta_n = \epsilon_k$ avec $\theta_0 = 0$, $\rho = C\Delta t$ et $\alpha = D\Delta t^2/2$. On obtient

$$\epsilon_k \leq \left(e^{Ck\Delta t} - 1\right)\frac{D\Delta t^2}{2C\Delta t} \leq \left(e^{CT} - 1\right)\frac{D}{2C}\Delta t, \qquad 0 \leq k \leq T/\Delta t.$$

On en déduit que

$$\sup_{k\in[0,T/\Delta t]} |u(t_k) - v_k| \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$$

le schéma est donc convergent.

2.3.2 Implémentation en python

Afin de calculer numériquement une solution approchée du problème de la chute libre à l'aide du schéma d'Euler explicite, télécharger le notebook à compléter `chute_libre.ipynb`.

Avant de compléter le notebook, nous devons écrire la méthode dans le cas de notre problème. Comme le schéma d'Euler explicite permet d'approcher les solutions des équations différentielles d'ordre 1, nous récrivons le problème sous cette forme. Nous définissons $U = (h, h')$ le vecteur solution. Le problème s'écrit donc, avec les notations $U_0 = h$ et $U_1 = h'$,

$$\begin{cases} U_0'(t) = U_1(t), \quad U_1'(t) = -g, \quad t \in]0, T[, \\ U_0(0) = h_0, \qquad U_1(0) = 0. \end{cases}$$

Le schéma d'Euler explicite correspondant consiste donc à construire deux suites $(V_{0,k}, V_{1,k})$ par les relations

$$\begin{cases} V_{0,k+1} = V_{0,k} + V_{1,k}\Delta t, \quad V_{1,k+1} = V_{1,k} - g\Delta t, \\ \quad V_{0,0} = h_0, \qquad\qquad V_{1,0} = 0. \end{cases}$$

Même si ces relations peuvent se simplifier dans notre cas particulier, nous implémenterons ces formules qui peuvent facilement être généralisées à d'autres problèmes. Vous pouvez à présent commencer à travailler sur le notebook.