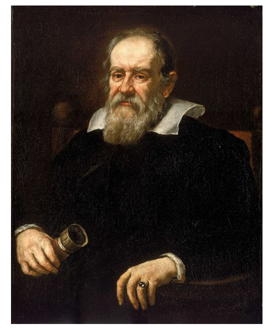
Feuille 2

Dynamique du point matériel (suite)

Le mathématicien italien Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557) fut le premier qui appliqua le raisonnement mathématique au tir de l'artillerie. Encore fortement imprégné de l'impetus, il se donna beaucoup de peine pour démontrer qu'aucune partie de la trajectoire d'un boulet de canon n'est en ligne droite, mais qu'il décrit une courbe dès l'origine de son mouvement hors de la bouche ; il prouva de plus qu'un canon tire le plus loin possible sous l'angle de 45°. Tartaglia passe encore pour avoir découvert le quart de cercle des canonniers. Il était réservé à Galilée (1564-1642) et à son élève Evangelista Torricelli de serrer de plus près les lois de la chute des corps. Tartaglia prouva qu'un boulet au sortir du canon se meut suivant une courbe, Galilée démontra que cette courbe était une parabole pourvu que le point de chute du boulet fût dans le même plan que la batterie d'où il avait été tiré et que la pièce fût élevée au-dessus de l'horizon ; il prouva de plus que c'était une moitié de parabole quand le canon dans les mêmes circonstances était pointé horizontalement. Evangelista Torricelli étendit ces découvertes, il montra que le boulet, soit qu'il tombât au-dessus ou au-dessous du plan où se trouvait son point de départ, décrivait une parabole d'une plus ou moins grande amplitude suivant l'angle sous lequel le canon était pointé et suivant la force de la poudre.



Galilée

La notion d'impetus proclamée en prolongement de la physique d'Aristote disparaîtra au cours du xviie siècle pour céder place à celle d'inertie professée par Galilée.

3 Approche mathématique de la balistique extérieure

3.1 Modèle sans force de frottement

La balistique est l'étude d'un projectile au voisinage du sol. En première approximation, le projectile subit seulement la force de gravité (nous verrons plus tard l'influence des forces de frottement de l'air).

En notant $(x(t), y(t))$ la position dans le plan de tir selon la figure 1 à l'instant t, le principe fondamental de la dynamique appliqué au projectile s'écrit :

$$\begin{cases} x''(t) = 0, & & t > 0, \\ y''(t) = -g, & & t > 0, \\ x(0) = 0, & x'(0) = v_0 \cos\theta, & \\ y(0) = 0, & y'(0) = v_0 \sin\theta, & \end{cases} \tag{1}$$

où v_0 est la norme de la vitesse initiale et θ l'angle initial.

L'objectif est, avec un v_0 fixé et une distance d donnée, de déterminer, s'il existe un angle θ permettant d'atteindre le point $(d, 0)$.

Dans le cas du système (1), nous pouvons décrire complètement la trajectoire du projectile et répondre analytiquement à la question.

<u>Exercice 1</u> : ***résolution du système de la balistique***

Q1. Déterminez la solution (unique) du problème de Cauchy (1).

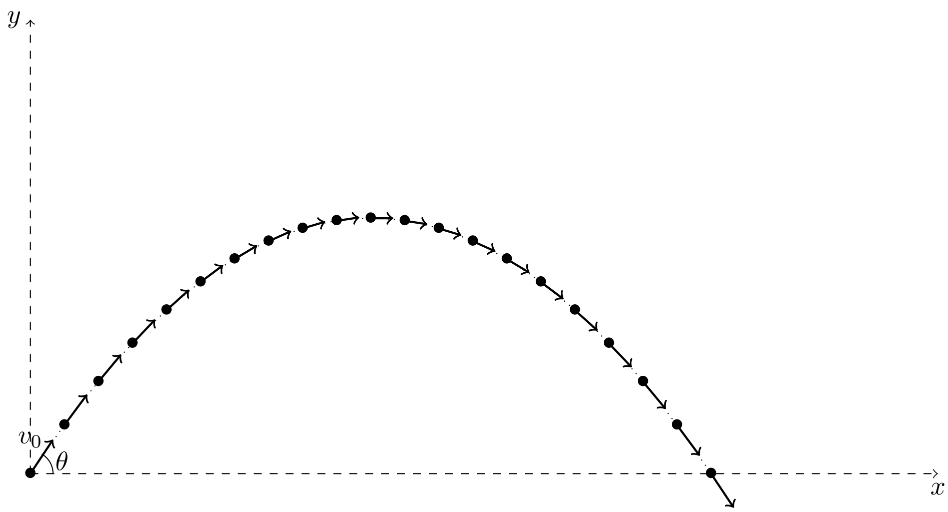


FIGURE 1 – Problème de la balistique : représentation de la position et de la vitesse lors d'un tir

Q2. Déterminez l'instant $t_f > 0$ pour lequel $y(t_f) = 0$. Calculez alors la portée du tir, c'est-à-dire $x(t_f)$.

Q3. Déduisez de la question précédente quels sont tous les points qui sont à portée de tir ainsi que la/les valeur(s) des angles de tir θ correspondantes.

3.2 Ajout de la force de frottement

Si l'on souhaite améliorer le modèle précédent, il faut prendre en compte la force de frottement sur le projectile. Celle-ci est proportionnel à la vitesse avec un signe négatif. Le coefficient de proportionnalité est noté ν et il sera considéré comme petit (et strictement positif). Les équations s'écrivent alors

$$\begin{cases} x''(t) = -\nu x'(t), & & t > 0, \\ y''(t) = -g - \nu y'(t), & & t > 0, \\ x(0) = 0, & x'(0) = v_0 \cos\theta, & \\ y(0) = 0, & y'(0) = v_0 \sin\theta. & \end{cases} \tag{2}$$

La solution de ce système dépend du paramètre ν comme on peut le voir à la figure 2.

Il est possible d'intégrer également ce système. Pour la partie correspondant aux abscisses, nous avons après une première intégration $x'(t) = x'(0)e^{-\nu t} = v_0 \cos\theta\, e^{-\nu t}$. Une seconde intégration donne $x(t) = x(0) - v_0 \cos\theta/\nu\, e^{-\nu t}$, soit

$$x(t) = \frac{v_0 \cos\theta}{\nu}(1 - e^{-\nu t}).$$

Contrairement au cas sans frottement, l'abscisse x est bornée : quel que soit $t \geq 0$, nous avons $x(t) \in [0, v_0 \cos\theta/\nu[$ (la fonction est strictement croissante et majorée). Nous noterons $x_\infty = v_0 \cos\theta/\nu$. Pour la partie correspondant aux ordonnées, nous avons après une première intégration $y'(t) = A(t)e^{-\nu t}$ avec $A'(t)e^{-\nu t} = -g$, donc $A(t) = A(0) + g/\nu(1 - e^{\nu t})$ avec $y'(0) = A(0)$. Finalement

$$y'(t) = \Big(v_0 \sin\theta + \frac{g}{\nu}(1 - e^{\nu t})\Big)e^{-\nu t} = \Big(v_0 \sin\theta + \frac{g}{\nu}\Big)e^{-\nu t} - \frac{g}{\nu}.$$

Nous en déduisons immédiatement (comme $y(0) = 0$) que

$$y(t) = \frac{1}{\nu}\Big(v_0 \sin\theta + \frac{g}{\nu}\Big)(1 - e^{-\nu t}) - \frac{g}{\nu}t.$$

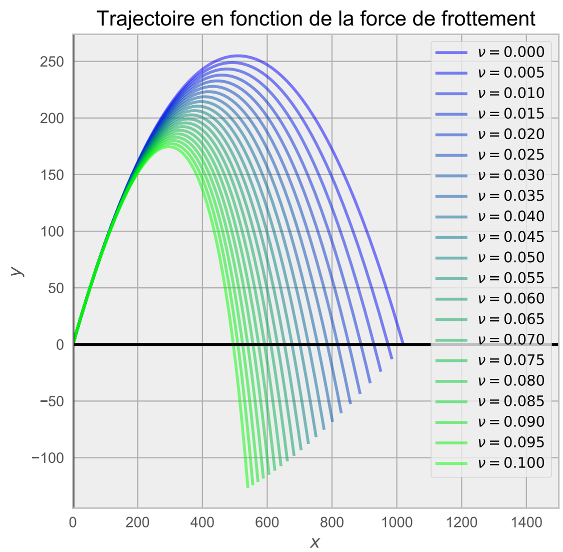


FIGURE 2 – Trajectoire en fonction du coefficient de frottement pour $v_0 = 100$ et $\theta = \pi/4$.

Peut-on paramétrer la trajectoire par l'abscisse comme dans le cas sans frottement ? On écrit

$$t = -\frac{1}{\nu}\ln\Big(1 - \frac{x\nu}{v_0\cos\theta}\Big), \qquad x \in [0, x_\infty[.$$

Comme $x < x_\infty$, la valeur sous le logarithme reste bien strictement positive et le temps t est bien défini. Et on en déduit que

$$y(x) = x\tan\theta + \frac{g}{\nu v_0\cos\theta}x + \frac{g}{\nu^2}\ln\Big(1 - \frac{x\nu}{v_0\cos\theta}\Big), \qquad x \in [0, x_\infty[.$$

Nous pouvons à présent nous intéresser à la question de la recherche d'un angle θ pour atteindre la distance d fixée. C'est-à-dire, étant donnée $d > 0$ donnée, peut-on trouver une (ou plusieurs valeurs) de $\theta \in [0, \pi/2]$ telle(s) que $F(\theta) = 0$ avec

$$F(\theta) = d\tan\theta + \frac{g}{\nu v_0\cos\theta}d + \frac{g}{\nu^2}\ln\Big(1 - \frac{d\nu}{v_0\cos\theta}\Big)?$$

Cette fois, il n'est pas question de trouver une formule analytique pour l'angle θ : la fonction F n'est pas un polynôme de degré 2 dont on peut calculer les racines. Il faut par ailleurs faire attention au fait que la fonction $F(\theta)$ n'est pas définie pour $\theta \in [0, \pi/2]$ puisqu'il faut que l'argument sous le logarithme reste strictement positif. Il faut que

$$\cos\theta > \frac{d\nu}{v_0} \iff \theta \in [0, \arccos(d\nu/v_0)[.$$

3.3 Méthode de la dichotomie

Afin de résoudre l'équation non linéaire $F(\theta) = 0$, nous allons utiliser la méthode de la dichotomie. Cette méthode consiste à calculer trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) qui vérifient

$$F(a_0)F(b_0) < 0,$$

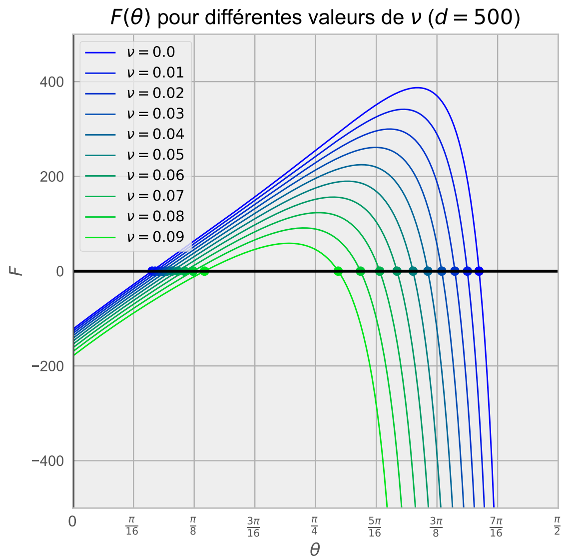


FIGURE 3 – Tracé de la fonction $\theta \mapsto F(\theta)$ pour différentes valeurs du coefficient de frottement ν

(on peut supposer que ni a_0 ni b_0 n'annule F sinon le zéro est déjà trouvé !) et

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n), \quad a_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{si } F(a_n)F(c_n) \geq 0, \\ a_n & \text{sinon,} \end{cases} \quad b_{n+1} = \begin{cases} c_n & \text{si } F(b_n)F(c_n) \geq 0, \\ b_n & \text{sinon,} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pour que cette méthode converge (et même soit correctement définie) il faut et il suffit que la fonction F soit continue.

Exercice 2 : *Convergence de la dichotomie*

Dans cet exercice, nous allons supposer que $a_0 < b_0$ pour simplifier. Le cas $a_0 > b_0$ se fait de la même manière.

Q1. Montrez que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante. Déduisez-en que les deux suites sont convergentes.

Q2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq |b_n - a_n|/2$. Déduisez-en la valeur de leur limite.

Sur la figure 3, on observe le tracé de la fonction F pour différentes valeurs du coefficient de frottement lorsque la cible d vaut 500. Sur les courbes, la fonction F s'annule 2 fois et les 2 zéros sont bien trouvés par la méthode de la dichotomie.

Vous pouvez maintenant commencer à traiter la partie sur machine avec le notebook.