# chute_libre

September 8, 2020

## 1 Chute libre

Dans ce notebook, nous calculons la solution approchée du problème de la chute libre par la méthode d'Euler explicite et nous étudions sa qualité.

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
%config InlineBackend.figure_format = 'retina'

g = 9.80665  # constante gravitationnelle sur Terre
h0 = 4.      # hauteur initiale
T = 1.       # temps final pour la simulation
```

### 1.1 Calcul et tracé des solutions exactes et approchées

**Question**

- Complétez la fonction `solution_exacte` qui prend en argument deux doubles `h0` et `t` et qui retourne la solution exacte à l'instant `t` lorsque la donnée initiale vaut `h0`.
- Modifiez cette fonction (ou pas si elle répond déjà à la question !) afin que la variable `t` puisse être à la fois un double et un ndarray. Dans le cas où `t` est un ndarray, la fonction devra retourner un ndarray correspondant à toutes les valeurs de la solution à chaque instant.
- Modifiez encore la fonction pour empécher la solution d'être négative (ce qui correspondrait à continuer à tomber après avoir touché le sol). Vous pourrez utiliser la fonction `np.maximum`.

*Remarquez la présence de la description de la fonction juste en dessous de sa déclaration à l'aide des """. C'est une excellente habitude que vous devrez scrupuleusement respecter dans tous vos codes python.*

[2]:
```
def solution_exacte(h0, t):
    """
    solution exacte de la chute libre

    Parameters
```

```
    ----------

    h0: double
        hauteur initiale
    t: double ou ndarray
        instants où la solution doit être retournée

    Returns
    -------

    double ou ndarray
    """
    return np.maximum(h0 - .5*g*t**2, 0)
```

[3]:
```
help(solution_exacte)
```

```
Help on function solution_exacte in module __main__:

solution_exacte(h0, t)
    solution exacte de la chute libre

    Parameters
    ----------

    h0: double
        hauteur initiale
    t: double ou ndarray
        instants où la solution doit être retournée

    Returns
    -------

    double ou ndarray
```

**Question**

> Vérifiez que la solution exacte lorsque $h_0 = 4$ vaut bien 2.7741687500000003 à $t = 0.5$ et 0 à $t = 1$.

*Remarquez l'utilisation des fstring comme argument de la fonction* `print`. *Cette nouveauté est bien pratique pour afficher des valeurs de variables dans un calcul.*

[4]:
```
for t in [0, 0.5, 1]:
    print(f'h({t:3.1f}) = {solution_exacte(h0, t):18.16f}')
```

```
h(0.0) = 4.0000000000000000
h(0.5) = 2.7741687500000003
```

```
h(1.0) = 0.0000000000000000
```

**Question**

- Complétez la fonction `solution_ee` qui prend trois doubles en argument `h0`, `t` et `dt` et qui retourne un double pour la valeur de la solution approchée par la méthode d'Euler explicite à l'instant `t`. Vous construirez pour cela les trois suites $(t_k)$, $(v_k)$ et $(w_k)$ par les formules suivantes :
- $t_0 = 0$, $v_0 = h_0$ et $w_0 = 0$,
- pour $k \geq 0$, on pose $s = \min(dt, t - t_k)$ puis

$$\begin{cases} t_{k+1} = t_k + s, \\ v_{k+1} = v_k + w_k\, s, \\ w_{k+1} = w_k - g\, s. \end{cases}$$

- Modifiez votre fonction afin qu'elle accepte que la variable `t` soit un ndarray et qui retourne la solution approchée pour toutes les valeurs du vecteur `t`. Vous pourrez supposer (ou imposer) que `t` soit un objet de dimension 1, que les valeurs de `t` soient rangées dans l'ordre croissant. Puis vous pourrez laisser à l'utilisateur plus de liberté…

[5]:
```python
def solution_ee(h0, t, dt):
    """
    solution approchée de la chute libre
    par la méthode d'Euler explicite

    Parameters
    ----------

    h0: double
        hauteur initiale
    t: double ou ndarray
        instants où la solution doit être retournée
    dt: double
        pas de temps pour la méthode numérique

    Returns
    -------

    double ou ndarray
    """
    vt = np.array([t]) if np.isscalar(t) else t
    shape = vt.shape
    n = np.prod(shape)
    vt = vt.reshape((n,))
    vu = np.zeros((n, 2))
    ind = np.argsort(vt)
    u = np.array([h0, 0], dtype='float')
```

```python
    s = 0

    def func(t, u):
        return np.array(
            [u[1], -g]
        )

    for k in range(n):
        indk = ind[k]
        while s < vt[indk]:
            ds = min(dt, vt[indk]-s)
            u += ds * func(s, u)
            s += ds
        vu[indk] = u
    vh = np.maximum(vu[:, 0].reshape(shape), 0)
    return vh[0] if np.isscalar(t) else vh
```

#### Question

Vérifiez à l'aide de la cellule suivante que le résultat de votre fonction est correct. Vous devez trouver

```
h(0.0) = 4.0000000000000000 ~ 4.0000000000000000
h(0.5) = 2.7741687500000003 ~ 2.7986853750000011
h(1.0) = 0.0000000000000000 ~ 0.0000000000000000
```

aux erreurs d'arrondi près...

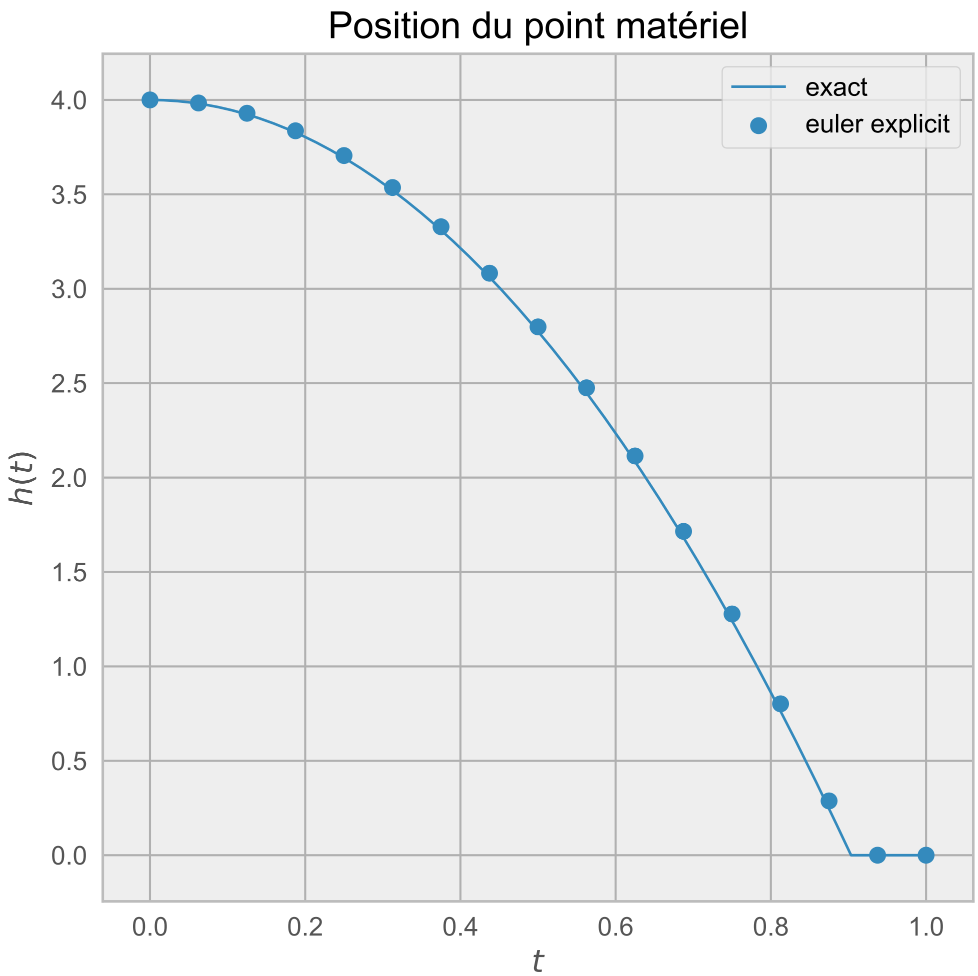
[6]:
```python
dt = 1.e-2
for t in [0, 0.5, 1]:
    print(f'h({t:3.1f}) = {solution_exacte(h0, t):18.16f} ~ {solution_ee(h0, t,␣
 ↪dt):18.16f}')
```

```
h(0.0) = 4.0000000000000000 ~ 4.0000000000000000
h(0.5) = 2.7741687500000003 ~ 2.7986853750000011
h(1.0) = 0.0000000000000000 ~ 0.0000000000000000
```

#### Question

Complétez la fonction `plot_position` qui prend en argument un double `dt` et qui trace la solution exacte ainsi que la solution approchée par la méthode d'Euler explicite de pas $\Delta t = dt$ entre les instants $t = 0$ et $t = T$.

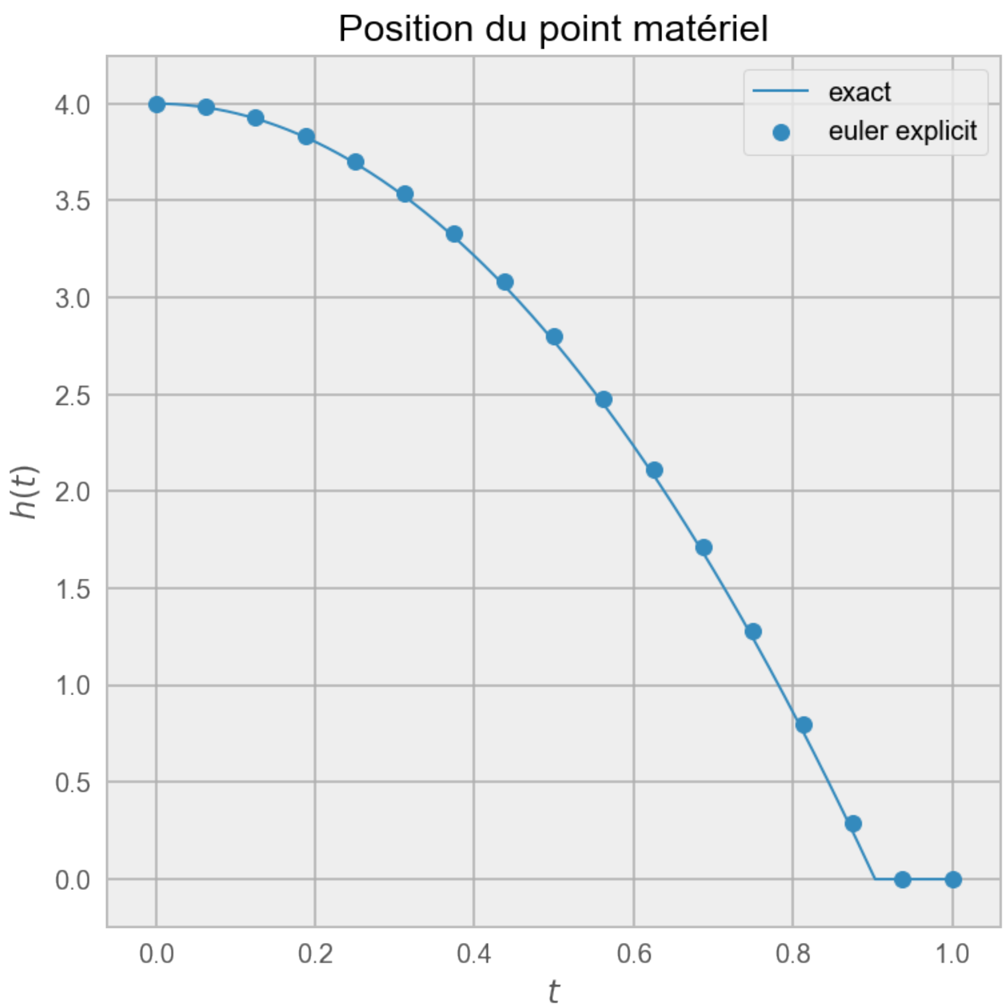
*Vous pourrez essayer d'obtenir une courbe qui ressemble à celle-ci en ajoutant un titre, des labels aux axes, une légende...*




[7]:
```
def plot_position(dt):
    """ trace la position en fonction du temps """
    vt_e = np.linspace(0, T, 1025)
    vh_e = solution_exacte(h0, vt_e)

    vt_a = np.linspace(0, T, 17)
    vh_a = solution_ee(h0, vt_a, dt)

    fig = plt.figure(figsize=(6, 6))
    ax = fig.add_subplot(111)
    ax.plot(vt_e, vh_e, label='exact')
    ax.scatter(vt_a, vh_a, label='euler explicit')
    ax.set_title('Position du point matériel')
    ax.set_xlabel(f'$t$')
    ax.set_ylabel(f'$h(t)$')
```

```
    ax.legend()
```

[8]:
```
plot_position(1.e-2)
plt.savefig('chute_libre_position.pdf')
```



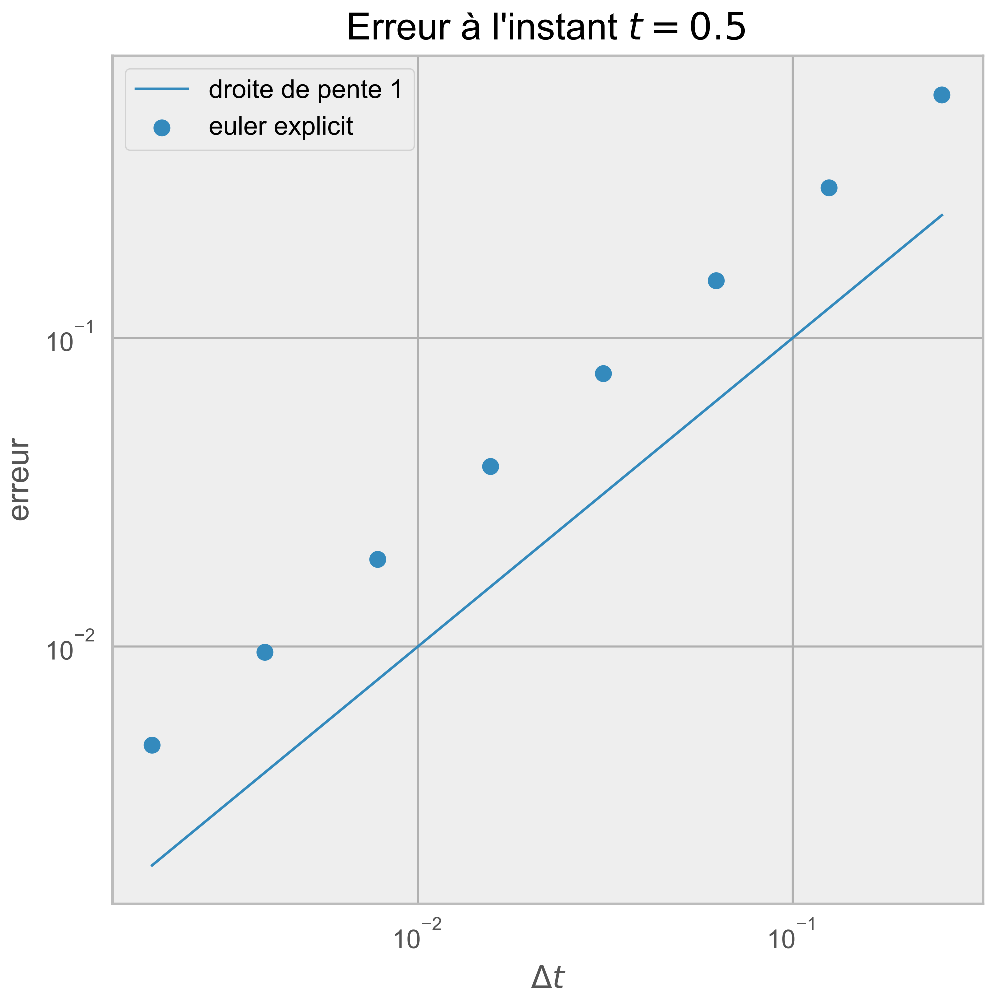

## 1.2 Evaluation de l'erreur

Dans cette partie, nous cherchons à évaluer l'erreur commise par le schéma d'Euler explicite lorsque le pas de temps $\Delta t$ tend vers 0. Nous essayons en particulier de visualiser la propriété de convergence obtenue dans le TD.

**Question**

Complétez la fonction `plot_erreur` qui trace l'erreur en échelle logarithmique entre la solution exacte et la solution approchée pour différentes valeurs du pas de temps $\Delta t$. Vous prendrez $\Delta t = 2^{-k}$ pour $k \in \{2, \dots, 9\}$ et vous calculerez l'erreur à l'instant $t = 0.5$.

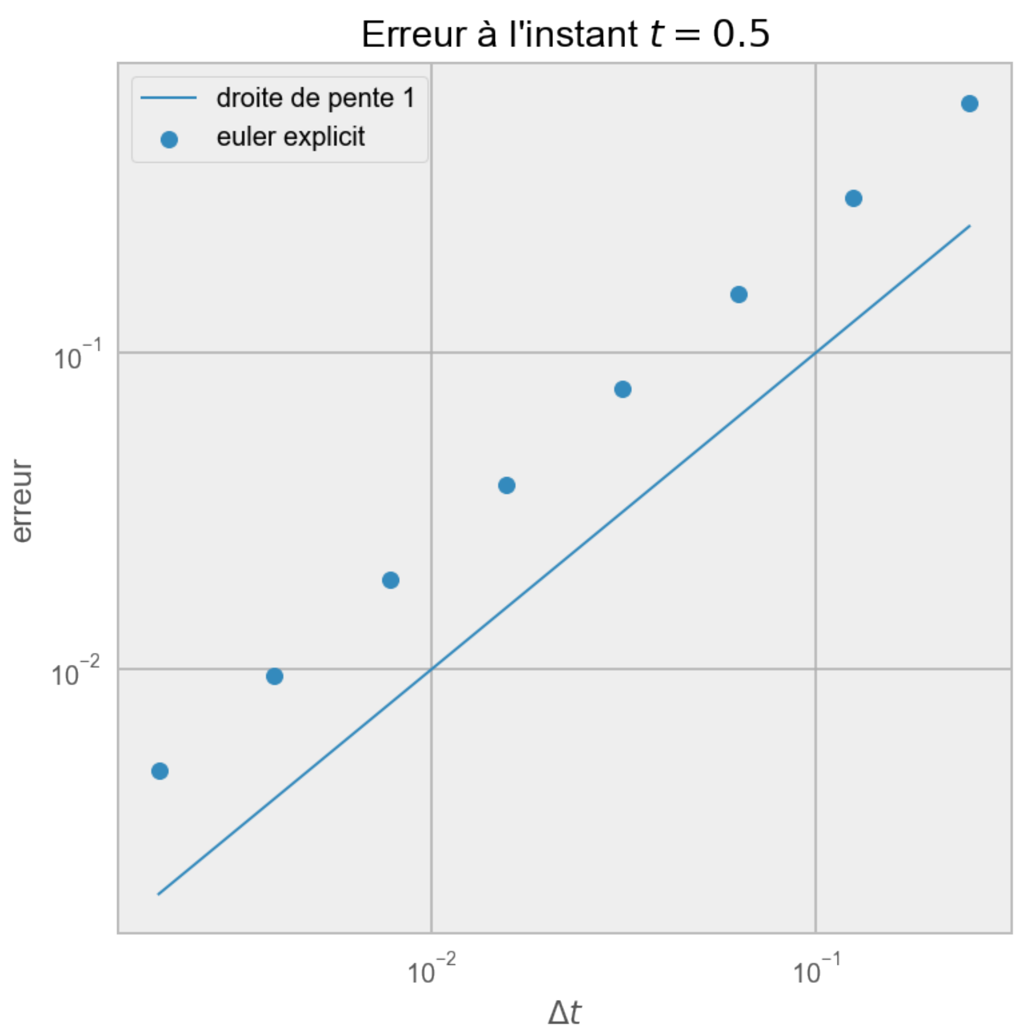
*Vous pourrez essayer d'obtenir une courbe qui ressemble à celle-ci en ajoutant un titre, des labels aux axes, une légende...*




[9]:
```
def plot_erreur():
    """ trace l'erreur à l'instant t=0.5 en fonction du pas de temps """
    Tf = 0.5
    he = solution_exacte(h0, Tf)

    vdt = np.array([1./2**k for k in range(2, 10)])
    ver = np.array([abs(solution_ee(h0, Tf, dt) - he) for dt in vdt])
```

```
    fig = plt.figure(figsize=(6, 6))
    ax = fig.add_subplot(111)
    ax.plot(vdt, vdt, label="droite de pente 1")
    ax.scatter(vdt, ver, label='euler explicit')
    ax.set_xscale('log')
    ax.set_yscale('log')
    ax.set_title(f"Erreur à l'instant $t={Tf}$")
    ax.set_xlabel(f'$\Delta t$')
    ax.set_ylabel(f'erreur')
    ax.legend()
```

[10]:
```
plot_erreur()
plt.savefig('chute_libre_erreur.pdf')
```



### 1.3 Estimation de la durée de la chute

Nous allons à présent calculer numériquement le temps de chute et comparer avec le temps exact.

#### Question

- Complétez la fonction `impact_exact` qui prend en argument un double `h0` et qui retourne le temps $t_f$ pour lequel la solution exacte vaut 0, c'est-à-dire qui calcule la durée de la chute. Ce temps est donné par la formule

$$t_f = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

- Modifiez (si c'est nécessaire) votre fonction afin que l'argument `h0` puisse être un double ou un ndarray.

[11]:
```
def impact_exact(h0):
    """
    instant de l'impact

    Parameters
    ----------

    h0: double ou ndarray
        hauteur initiale

    Returns
    -------

    double ou ndarray
    """
    return np.sqrt(2*h0/g)
```

#### Question

Complétez la fonction `impact_ee` qui prend deux doubles en argument `h0` et `dt` et qui retourne l'estimation de la durée de chute donnée par la méthode d'Euler explicite. Vous utiliserez l'algorithme suivant : * vous calculez les trois suites $(t_k)$, $(v_k)$ et $(w_k)$ par la méthode d'Euler explicite ; * vous vous arrêtez au premier indice $k$ tel que $v_k < 0$, cet indice sera noté $k$ ; * vous retournerez

$$t_f = \frac{t_{k-1}v_k - t_k v_{k-1}}{v_k - v_{k-1}},$$

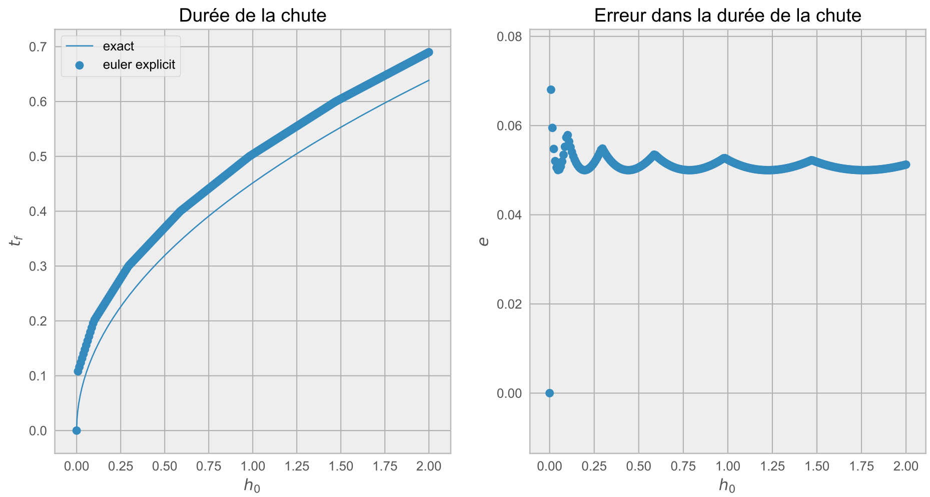
qui approche de manière linéaire la courbe de la solution numérique.

*Vous devrez faire attention à traiter de manière particulière le point correspondant à $h_0 = 0$. En effet, on s'attend à avoir dans ce cas $t_f = 0$, ce qui n'est pas forcément le cas selon l'algorithme que vous allez écrire.*

[12]:
```python
def impact_ee(h0, dt):
    """
    instant de l'impact calculé numériquement
    par la méthode d'Euler explicite

    Parameters
    ----------

    h0: double ou ndarray
        hauteur initiale
    dt: double
        pas de temps pour la méthode numérique

    Returns
    -------

    double ou ndarray
    """

    def func(t, u):
        return np.array(
            [u[1], -g]
        )

    u = np.array([h0, 0], dtype='float')
    t, h, hold = 0, u[0], u[0]
    if h == 0:
        return t
    while h > 0:
        hold = h
        u += dt * func(t, u)
        t += dt
        h = u[0]
    return t - dt*h/(h-hold)
```

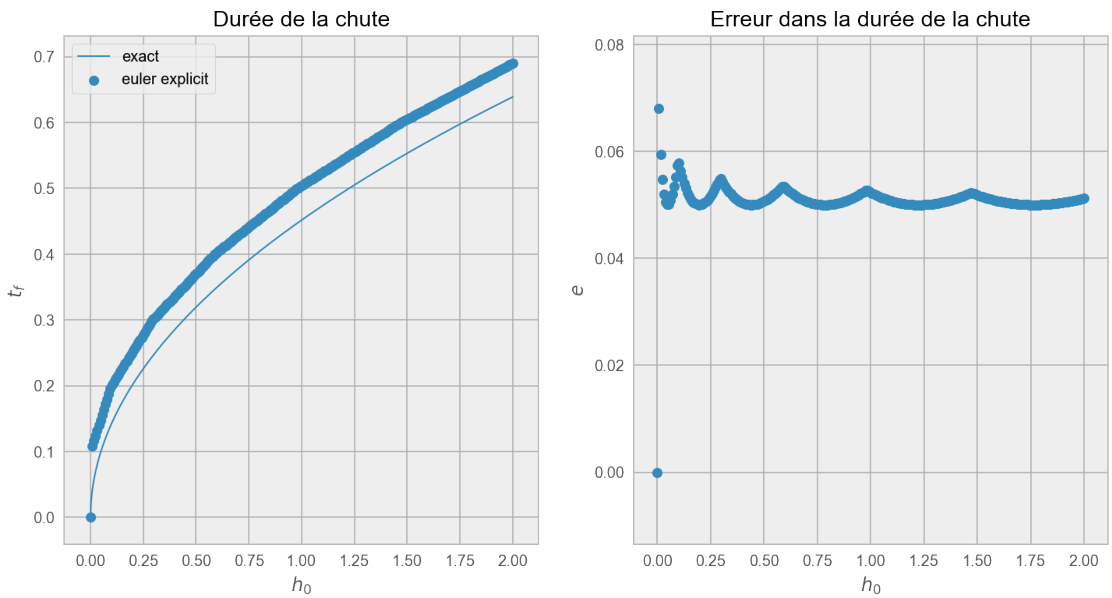
**Question**

Excécutez les deux cellules suivantes qui trace la durée de la chute (exacte et approchée) ainsi que l'erreur numérique commise. Vous devez trouver une image comme celle-ci :




[13]:
```python
def plot_dureechute(dt):
    """ trace la durée de la chute en fonction de la hauteur initiale """
    vh_e = np.linspace(0, 2, 1025)
    vtf_e = impact_exact(vh_e)

    vh_a = np.linspace(0, 2, 257)
    vtf_a = np.array([
        impact_ee(hk, dt) for hk in vh_a
    ])

    fig = plt.figure(figsize=(12, 6))

    ax1 = fig.add_subplot(121)
    ax1.plot(vh_e, vtf_e, label='exact')
    ax1.scatter(vh_a, vtf_a, label='euler explicit')
    ax1.set_title('Durée de la chute')
    ax1.set_xlabel(f'$h_0$')
    ax1.set_ylabel(f'$t_f$')
    ax1.legend()

    verr = abs(vtf_a - impact_exact(vh_a))
    ax2 = fig.add_subplot(122)
    ax2.scatter(vh_a, verr)
    ax2.set_title('Erreur dans la durée de la chute')
    ax2.set_xlabel(f'$h_0$')
    ax2.set_ylabel(f'$e$')
```

[14]:
```python
plot_dureechute(1.e-1)
plt.savefig('chute_libre_duree.pdf')
```


Durée de la chute
exact
euler explicit
$t_f$
$h_0$
Erreur dans la durée de la chute
$e$
$h_0$