Feuille 5

Épidémiologie – Le modèle SIR

William Ogilvy Kermack (26 avril 1898 - 20 juillet 1970) était un biochimiste écossais . Il a fait des études de mathématiques sur la propagation des épidémies et établi des liens entre les facteurs environnementaux et certaines maladies.

Le Lieutenant Colonel Anderson Gray McKendrick (8 septembre 1876 - 30 mai 1943) était un médecin militaire et épidémiologiste écossais qui fut un pionnier dans l'utilisation des méthodes mathématiques en épidémiologie .

Leur collaboration a donné la théorie Kermack-McKendrick des maladies infectieuses. L'article historique est disponible en ligne gratuitement à cette adresse `https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1927.0118`.

William Ogilvy Kermack

Anderson Gray McKendrick

A l'heure actuelle le paludisme, maladie transmise via un type particulier de moustiques, tue encore un enfant toutes les 30 secondes en Afrique et entre 1 et 3 millions de personnes par an, selon les estimations de l'OMS. Deux milliards d'individus, soit pas moins de 40% de la population mondiale, sont exposés à cette maladie. La lèpre et la peste autrefois, la grippe aviaire récemment, le VIH ou le COVID sont autant d'exemples supplémentaires de maladies contagieuses qui ont inquiété ou inquiètent encore la société, car pour de telles maladies le nombre de cas peut soudainement augmenter dans une région donnée à un moment donné, et ce de façon potentiellement incontrôlable. On parle alors d'épidémie. L'épidémiologie est l'étude des épidémies. Etudier, comprendre, analyser le développement d'une épidémie est une tâche difficile, mais indispensable pour prédire ce développement, et agir pour le freiner voire l'empêcher. Ces études permettent aussi de prévoir les conséquences pour la population d'actions que la vaccination, la mise en quarantaine ou la distribution de tests de dépistage. Les mathématiques sont au coeur de ces études épidémiologiques. L'objectif de cette feuille est de comprendre quelques mécanismes de propagation d'une maladie contagieuse en étudiant un modèle classique en épidémiologie : le modèle « SIR ».

1 Le modèle SIR

Le modèle SIR a été présenté pour la première fois par Kermack et McKendrick à Londres et à Cambridge en 1927 pour expliquer *a posteriori* l'évolution de l'épidémie de peste à Bombay en 1905-1906.

A chaque instant la population est divisée en trois catégories que l'on appelle *compartiments* en épidémiologie :

- les individus « Sains » : ceux qui n'ont jamais eu la maladie et qui peuvent la contracter ;
- les individus « Infectés » : ceux qui sont malades et contagieux (c'est une hypothèse de ce modèle) ;
- les individus « Rétablis » : ceux qui ont déjà eu la maladie et qui ne la transmettent plus. On inclut dans ce groupe les personnes décédées par soucis pratique...

On note $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ les **proportions** d'individus de chacune de ces trois catégories à l'instant t. Notre objectif est de déterminer l'évolution des quantités au cours du temps.

Pour le modèle SIR, les règles retenues sont les suivantes :

(R1) La maladie est une maladie assez brève : on néglige les phénomènes démographiques (naissance, décès dus à l'âge, mouvement de popoulation). La taille de la population est donc considérée comme fixe.

(R2) La seule façon pour qu'un individu quitte le groupe des sains est en devenant infecté. Il est raisonnable de penser que le nombre de nouveaux cas sur une durée donnée est proportionnel au nombre de contacts sur cette durée entre les individus susceptibles et les individus infectés. On note ce coefficient de proportionnalité β appelé *taux de transmission*.

(R3) Les personnes malades sont toutes infectieuses : elles peuvent transmettre la maladie.

(R4) Chaque personne qui a guéri de cette maladie est immunisée pour toujours contre cette maladie : la personne ne peut plus retomber malade.

(R5) Toutes les personnes malades finissent par guérir (ou mourir, selon la maladie, mais on ne fera pas la différence ici). Ainsi, une propotion γ des individus infectés passe dans le groupe des individus rétablis tous unités de temps. Par exemple, si la durée moyenne d'infection est de $\lambda = 4 jours$, en moyenne chaque $jour$ $\gamma = 1/4$ de la population infectée se rétablit. Les paramètres $\gamma = 1/\lambda$ sont appelés *taux de guérison* et *durée moyenne d'infection*.

Les trois quantités $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$ vérifient le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t), \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ R'(t) = \gamma I(t). \end{cases} \tag{1}$$

2 Premiers résultats théoriques

Afin de pouvoir résoudre le système (1), nous lui ajoutons des données initiales pour obtenir un problème de Cauchy. Nous nous donnons ainsi des valeurs (S_0, I_0, R_0) telles que

$$S_0 > 0, \quad I_0 > 0, \quad R_0 = 0 \quad \text{avec} \quad S_0 + I_0 + R_0 = 1. \tag{2}$$

Proposition 1

Le système (1) muni des conditions initiales (2) possède une unique solution maximale qui est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t > 0$, nous avons

$$S(t) > 0, \quad I(t) > 0, \quad R(t) > 0, \quad S(t) + I(t) + R(t) = 1.$$

Démonstration. La preuve de cette proposition repose sur le théorème de Cauchy-Lipschitz et en particulier sur l'unicité. En effet, si S (ou I c'est pareil) s'annule alors elle est nulle en tout temps, et donc aussi en $t = 0$, ce qui est impossible. On a alors que R' est strictement positif, donc R aussi puisque $R_0 = 0$. Enfin, la somme des trois termes vaut toujours 1 car c'est vrai en $t = 0$ et un calcul rapide montre que $(S + I + R)'(t) = 0$. □

Nous donnons une définition du paramètre r_0 très important en épidémiologie.

Définition 2 (taux de reproduction de base)

Le paramètre $r_0 = \beta\lambda = \beta/\gamma$ est appelé le *taux de reproduction de base*. Le paramètre r_0 peut être interprété comme le nombre moyen de nouveaux cas d'infection engendrés par un individu infecté moyen durant toute la durée de son infection.

t	0	t_0	$+\infty$
$S(t)$	S_0 $\searrow$	$\frac{1}{r_0}$ $\searrow$	S_∞
$I(t)$	I_0 $\nearrow$	$I(t_0)$ $\searrow$	0
$R(t)$	R_0 $\nearrow$		$1-S_\infty$

t	0	$+\infty$
$S(t)$	S_0 $\searrow$	S_∞
$I(t)$	I_0 $\searrow$	0
$R(t)$	R_0 $\nearrow$	$1-S_\infty$

TABLE 1 – Tableaux de variation ($S_0 \geqslant \gamma/\beta$ à gauche et $S_0 < \gamma/\beta$ à droite)

COROLLAIRE 3

Les fonctions S, I et R vérifient les propriétés suivantes.

- La fonction S est décroissante et tend vers S_∞ lorsque $t \to \infty$ où S_∞ est solution de

$$S_\infty = S_0 \exp\bigl(-r_0(1 - S_\infty)\bigr).$$

- La fonction I est croissante pour $t \in [0, t_0]$ puis décroissante pour $t \in [t_0, +\infty]$ et tend vers 0 lorsque $t \to \infty$. L'instant t_0 est tel que $S(t_0) = 1/r_0$.
- La fonction R est croissante et tend vers $1 - S_\infty$ lorsque $t \to \infty$.

Les fonctions S, I et R vérifient donc les tableaux de variations donnés dans le tableau 1 selon la valeur de $S_0\beta/\gamma$ comparé à 1.

Considérons que, à l'instant initial, la population est presque complètement dans le compartiment sain : $S_0 \lesssim 1$, $I_0 \gtrsim 0$. Les tableaux de variation nous permettent de dire que, si $\beta\lambda > 1$, alors l'épidémie aura lieu (augmentation du nombre d'infectieux) et dans le cas contraire, l'épidémie est impossible.

Démonstration. Nous nous contentons de prouver l'expression de S_∞, le reste étant trivial. Comme la fonction S est strictement décroissante, elle peut être utilisée pour reparamétrer le problème. C'est-à-dire que la fonction $S^{-1} : S(t) \to t$ est bien une fonction. Nous définissons la fonction $\tilde{I} : s \to I(S^{-1}(s))$. Nous avons, en notant $t = S^{-1}(s)$,

$$\tilde{I}'(s) = \frac{I'(t)}{S'(t)} = \frac{\beta S(t)I(t) - \gamma I(t)}{-\beta S(t)I(t)} = -1 + \frac{1}{r_0 s}.$$

On intègre directement cette équation pour obtenir

$$\tilde{I}(s) = I_0 + S_0 - s + \frac{1}{r_0} \ln\Bigl(\frac{s}{S_0}\Bigr).$$

En écrivant l'équation $\tilde{I}(S_\infty) = 0$, nous obtenons exactement ce qu'il faut, car $I_0 + S_0 = 1$ par hypothèse.

Lorsque t tend vers l'infini, $S(t)$ tend vers une valeur limite S_∞ car c'est une fonction décroissante minorée par 0. Comme nécessairement on a S_∞ solution de $\tilde{I}(S_\infty) = 0$, il y a besoin de connaitre toutes les solutions de ce problème. Un tableau de variations permet de montrer qu'il n'y a qu'un seul 0. Donc S_∞ est bien défini de manière unique par la relation.

s	0		S_∞		$\frac{1}{r_0}$		1
$\tilde{I}'(s)$			$+$		0	$-$	
$\tilde{I}(s)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$I(t_0)$	$\searrow$	$\frac{1}{r_0}\ln\frac{1}{S_0} > 0$

Enfin, on peut remarquer que $\tilde{I}(S_0) = I_0 > 0$, donc $S_\infty < S_0$.

Enfin, la paramétrisation de I par S permet de calculer le maximum de la fonction I (qui ne sera atteint pour $T_0 > 0$ seulement si $S_0 > 1/r_0$) :

$$I(t_0) = \tilde{I}\Big(\frac{1}{r_0}\Big) = 1 - \frac{1}{r_0}\Big(1 - \ln\Big(\frac{1}{r_0 S_0}\Big)\Big).$$

□

3 Mise à l'échelle et conclusion

À la vue des résultats théoriques de la partie précédente, nous nous rendons compte que la solution du système (1) ne dépend essentiellement que du paramètre r_0. Il est en effet possible d'adimensionner le système.

Nous définissons de nouvelles fonctions après une mise à l'échelle du temps

$$\sigma : t \mapsto S(t/\beta), \qquad \iota : t \mapsto I(t/\beta), \qquad \rho : t \mapsto R(t/\beta).$$

Ces fonctions sont alors solution du système adimensionné

$$\begin{cases} \sigma'(t) = -\sigma(t)\iota(t), \\ \iota'(t) = \sigma(t)\iota(t) - \dfrac{1}{r_0}\iota(t), \\ \rho'(t) = \dfrac{1}{r_0}\iota(t), \end{cases} \tag{3}$$

muni des conditions initiales $\sigma(0) = \sigma_0$, $\iota(0) = 1 - \sigma_0$, $\rho(0) = 0$, où r_0 est le seul paramètre restant.

Nous pouvons donc prévoir deux comportements possibles :

- dans le cas où $\sigma_0 r_0 \leqslant 1$, la fonction ι est strictement décroissante (il n'y a pas d'épidémie possible) avec un maximum qui vaut $\iota(0) = 1 - \sigma_0$;
- dans le cas où $\sigma_0 r_0 > 1$, la fonction ι est croissante puis décroissante avec un maximum qui vaut
$$1 - \frac{1}{r_0}\Big(1 - \ln\Big(\frac{1}{r_0\sigma_0}\Big)\Big).$$

Nous pouvons donc définir la fonction $\bar{\iota}$ qui vaut le maximum de ι selon les paramètres r_0 et σ_0 par

$$\bar{\iota}(r_0, \sigma_0) = \begin{cases} 1 - \sigma_0 & \text{si } \sigma_0 r_0 \leqslant 1, \\ 1 - \dfrac{1}{r_0}\Big(1 - \ln\Big(\dfrac{1}{r_0\sigma_0}\Big)\Big) & \text{si } \sigma_0 r_0 > 1. \end{cases}$$

La fonction $\bar{\iota}$ est continue, croissante par rapport à r_0 et décroissante par rapport à σ_0. Une visualisation de cette fonction se trouve à la figure 1.

Dans le cas limite où $\sigma_0 \to 0$, c'est-à-dire un nombre très réduit de personnes dans la population qui sont atteintes, l'épidémie a lieu pour $r_0 > 1$ et le nombre maximum de personnes malades en même temps croit comme $\bar{\iota}(r_0, 1)$.

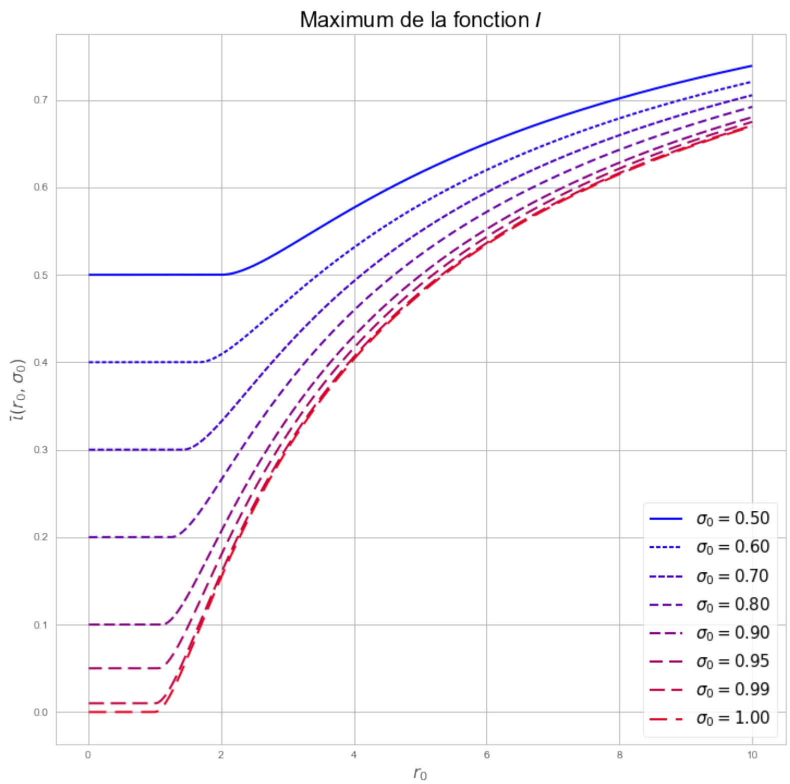

FIGURE 1 – Représentation de la fonction $r_0 \mapsto \bar{\imath}(r_0, \sigma_0)$ pour différentes valeurs de σ_0.