chute_libre

September 8, 2020

1 Chute libre

Dans ce notebook, nous calculons la solution approchée du problème de la chute libre par la méthode d'Euler explicite et nous étudions sa qualité.

[1]:
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
%config InlineBackend.figure_format = 'retina'

g = 9.80665  # constante gravitationnelle sur Terre
h0 = 4.      # hauteur initiale
T = 1.       # temps final pour la simulation
```

1.1 Calcul et tracé des solutions exactes et approchées

Question

- Complétez la fonction `solution_exacte` qui prend en argument deux doubles `h0` et `t` et qui retourne la solution exacte à l'instant `t` lorsque la donnée initiale vaut `h0`.
- Modifiez cette fonction (ou pas si elle répond déjà à la question !) afin que la variable `t` puisse être à la fois un double et un ndarray. Dans le cas où `t` est un ndarray, la fonction devra retourner un ndarray correspondant à toutes les valeurs de la solution à chaque instant.
- Modifiez encore la fonction pour empécher la solution d'être négative (ce qui correspondrait à continuer à tomber après avoir touché le sol). Vous pourrez utiliser la fonction `np.maximum`.

Remarquez la présence de la description de la fonction juste en dessous de sa déclaration à l'aide des """. C'est une excellente habitude que vous devrez scrupuleusement respecter dans tous vos codes python.

[15]:
```
def solution_exacte(h0, t):
    """
    solution exacte de la chute libre

    Parameters
```

```
    ----------

    h0: double
        hauteur initiale
    t: double ou ndarray
        instants où la solution doit être retournée

    Returns
    -------

    double ou ndarray
    """
    return 0.
```

[16]:
```
help(solution_exacte)
```

```
Help on function solution_exacte in module __main__:

solution_exacte(h0, t)
    solution exacte de la chute libre

    Parameters
    ----------

    h0: double
        hauteur initiale
    t: double ou ndarray
        instants où la solution doit être retournée

    Returns
    -------

    double ou ndarray
```

Question

> Vérifiez que la solution exacte lorsque $h_0 = 4$ vaut bien 2.7741687500000003 à $t = 0.5$ et 0 à $t = 1$.

Remarquez l'utilisation des fstring comme argument de la fonction `print`. Cette nouveauté est bien pratique pour afficher des valeurs de variables dans un calcul.

[17]:
```
for t in [0, 0.5, 1]:
    print(f'h({t:3.1f}) = {solution_exacte(h0, t):18.16f}')
```

```
h(0.0) = 0.0000000000000000
h(0.5) = 0.0000000000000000
```

```
h(1.0) = 0.0000000000000000
```

Question

- Complétez la fonction `solution_ee` qui prend trois doubles en argument `h0`, `t` et `dt` et qui retourne un double pour la valeur de la solution approchée par la méthode d'Euler explicite à l'instant `t`. Vous construirez pour cela les trois suites (t_k), (v_k) et (w_k) par les formules suivantes :
- $t_0 = 0$, $v_0 = h_0$ et $w_0 = 0$,
- pour $k \geq 0$, on pose $s = \min(dt, t - t_k)$ puis

$$\begin{cases} t_{k+1} = t_k + s, \\ v_{k+1} = v_k + w_k \, s, \\ w_{k+1} = w_k - g \, s. \end{cases}$$

- Modifiez votre fonction afin qu'elle accepte que la variable `t` soit un ndarray et qui retourne la solution approchée pour toutes les valeurs du vecteur `t`. Vous pourrez supposer (ou imposer) que `t` soit un objet de dimension 1, que les valeurs de `t` soient rangées dans l'ordre croissant. Puis vous pourrez laisser à l'utilisateur plus de liberté…

[18]:
```
def solution_ee(h0, t, dt):
    """
    solution approchée de la chute libre
    par la méthode d'Euler explicite

    Parameters
    ----------

    h0: double
        hauteur initiale
    t: double ou ndarray
        instants où la solution doit être retournée
    dt: double
        pas de temps pour la méthode numérique

    Returns
    -------

    double ou ndarray
    """
    return 0.
```

Question

Vérifiez à l'aide de la cellule suivante que le résultat de votre fonction est correct. Vous devez trouver

```
h(0.0) = 4.0000000000000000 ~ 4.0000000000000000
h(0.5) = 2.7741687500000003 ~ 2.7986853750000011
h(1.0) = 0.0000000000000000 ~ 0.0000000000000000
```

aux erreurs d'arrondi près…

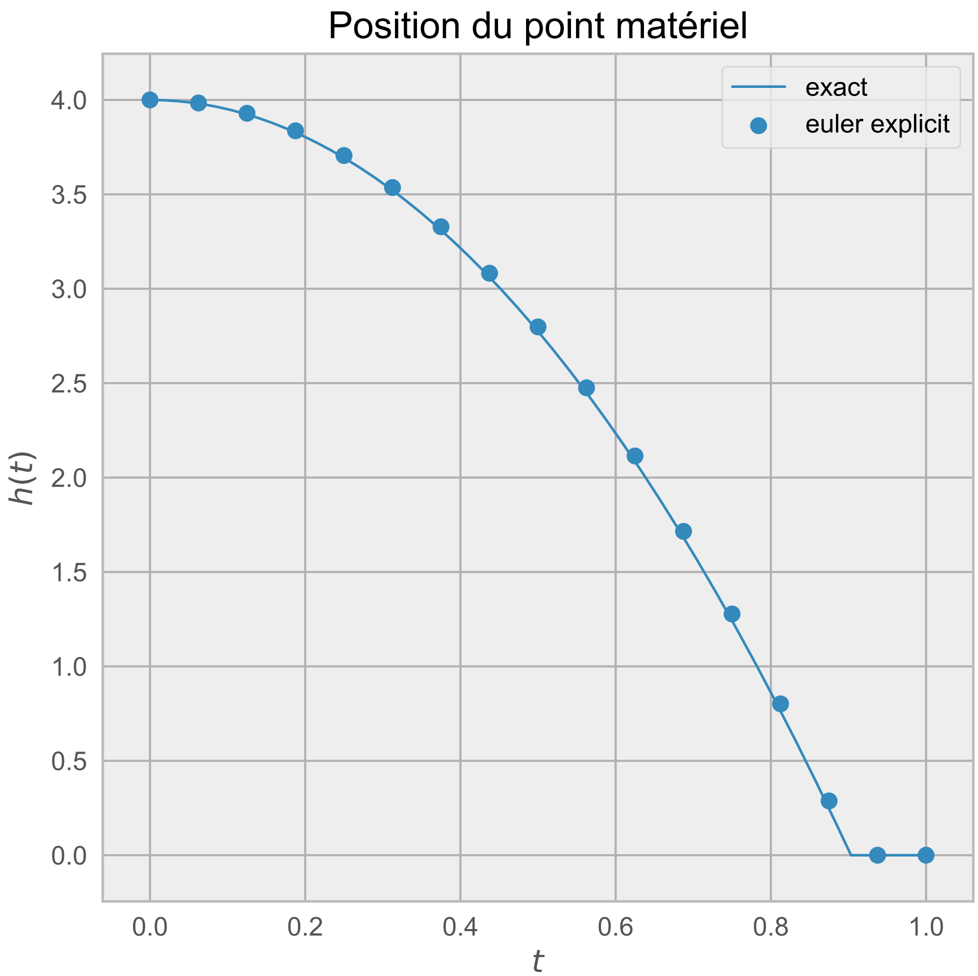
[19]:
```
dt = 1.e-2
for t in [0, 0.5, 1]:
    print(f'h({t:3.1f}) = {solution_exacte(h0, t):18.16f} ~ {solution_ee(h0, t,␣
 ↪dt):18.16f}')
```

```
h(0.0) = 0.0000000000000000 ~ 0.0000000000000000
h(0.5) = 0.0000000000000000 ~ 0.0000000000000000
h(1.0) = 0.0000000000000000 ~ 0.0000000000000000
```

Question

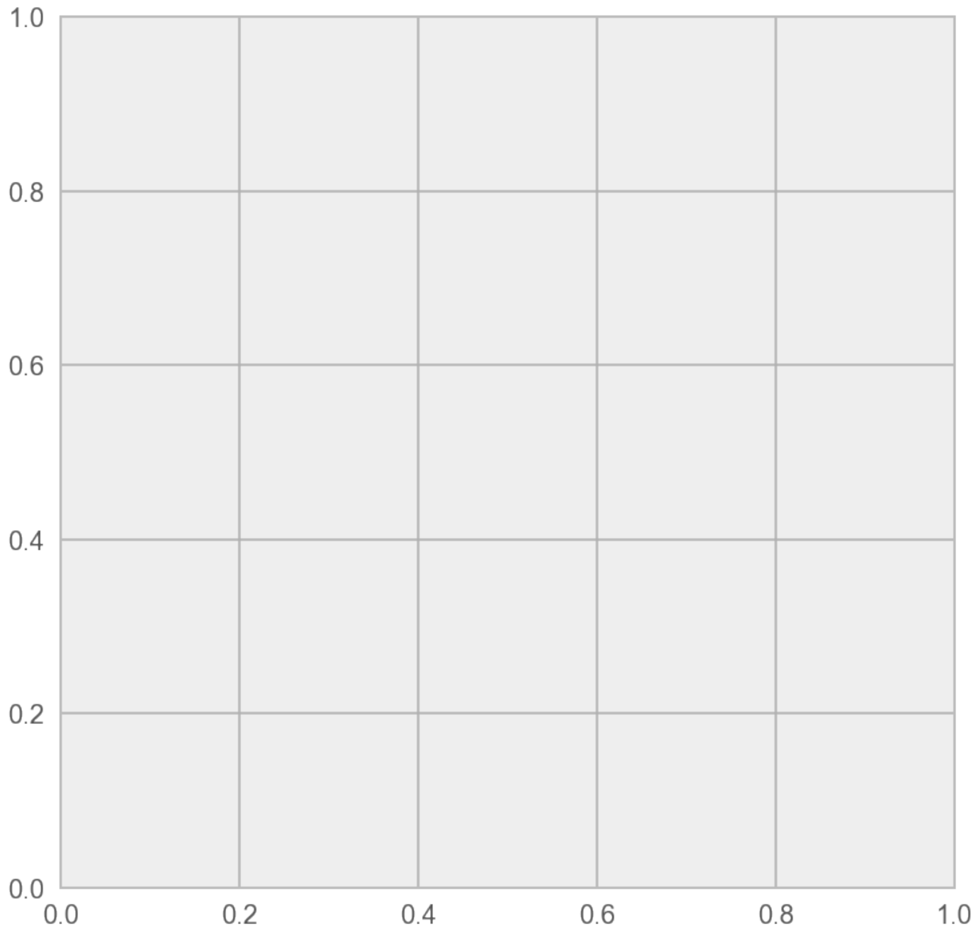
> Complétez la fonction `plot_position` qui prend en argument un double `dt` et qui trace la solution exacte ainsi que la solution approchée par la méthode d'Euler explicite de pas $\Delta t = dt$ entre les instants $t = 0$ et $t = T$.

Vous pourrez essayer d'obtenir une courbe qui ressemble à celle-ci en ajoutant un titre, des labels aux axes, une légende…



[20]:
```
def plot_position(dt):
    """ trace la position en fonction du temps """
    vt_e = np.linspace(0, T, 1025)
    vh_e = solution_exacte(h0, vt_e)

    vt_a = np.linspace(0, T, 17)
    vh_a = solution_ee(h0, vt_a, dt)

    fig = plt.figure(figsize=(6, 6))
    ax = fig.add_subplot(111)
```

[21]:
```
plot_position(1.e-2)
```



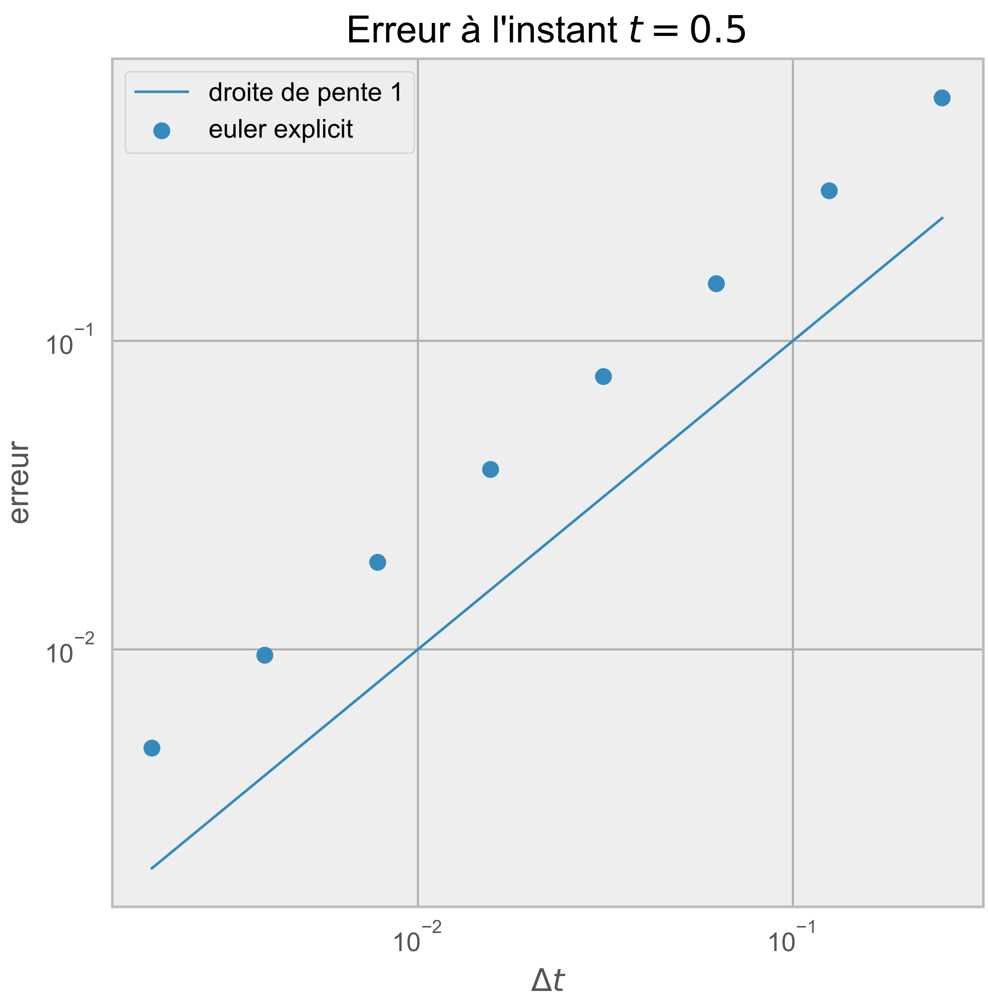
1.2 Evaluation de l'erreur

Dans cette partie, nous cherchons à évaluer l'erreur commise par le schéma d'Euler explicite lorsque le pas de temps Δt tend vers 0. Nous essayons en particulier de visualiser la propriété de convergence obtenue dans le TD.

Question

> Complétez la fonction `plot_erreur` qui trace l'erreur en échelle logarithmique entre la solution exacte et la solution approchée pour différentes valeurs du pas de temps Δt. Vous prendrez $\Delta t = 2^{-k}$ pour $k \in \{2, \ldots, 9\}$ et vous calculerez l'erreur à l'instant $t = 0.5$.

Vous pourrez essayer d'obtenir une courbe qui ressemble à celle-ci en ajoutant un titre, des labels aux axes, une légende...



[22]:
```
def plot_erreur():
    """ trace l'erreur à l'instant t=0.5 en fonction du pas de temps """
    pass
```

[23]:
```
plot_erreur()
```

1.3 Estimation de la durée de la chute

Nous allons à présent calculer numériquement le temps de chute et comparer avec le temps exact.

Question

- Complétez la fonction `impact_exact` qui prend en argument un double `h0` et qui retourne le temps t_f pour lequel la solution exacte vaut 0, c'est-à-dire qui calcule la durée de la chute. Ce temps est donné par la formule

$$t_f = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

- Modifiez (si c'est nécessaire) votre fonction afin que l'argument `h0` puisse être un double ou un ndarray.

[28]:
```python
def impact_exact(h0):
    """
    instant de l'impact

    Parameters
    ----------

    h0: double ou ndarray
        hauteur initiale

    Returns
    -------

    double ou ndarray
    """
    return 0.*h0
```

Question

Complétez la fonction `impact_ee` qui prend deux doubles en argument `h0` et `dt` et qui retourne l'estimation de la durée de chute donnée par la méthode d'Euler explicite. Vous utiliserez l'algorithme suivant : * vous calculez les trois suites (t_k), (v_k) et (w_k) par la méthode d'Euler explicite ; * vous vous arrêtez au premier indice k tel que $v_k < 0$, cet indice sera noté k ; * vous retournerez

$$t_f = \frac{t_{k-1}v_k - t_k v_{k-1}}{v_k - v_{k-1}},$$

qui approche de manière linéaire la courbe de la solution numérique.

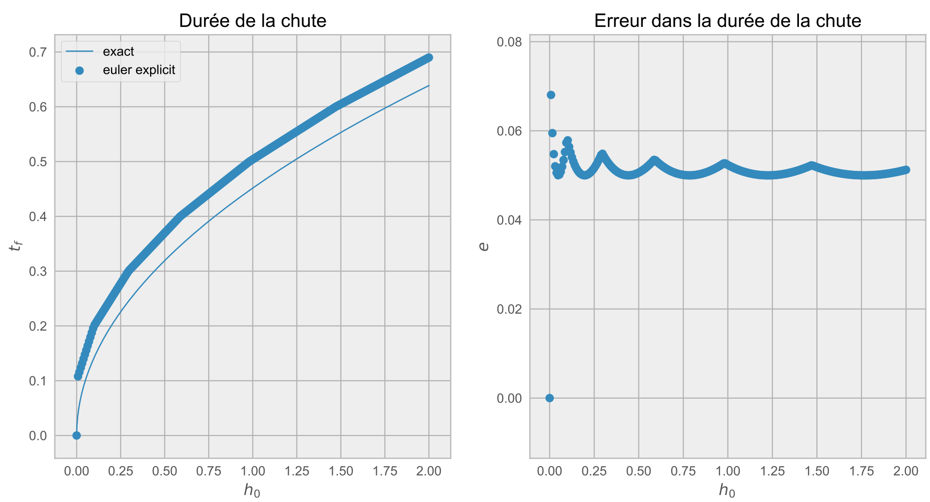
Vous devrez faire attention à traiter de manière particulière le point correspondant à $h_0 = 0$. En effet, on s'attend à avoir dans ce cas $t_f = 0$, ce qui n'est pas forcément le cas selon l'algorithme que vous allez écrire.

[29]:
```python
def impact_ee(h0, dt):
    """
    instant de l'impact calculé numériquement
    par la méthode d'Euler explicite

    Parameters
    ----------
```

```
    h0: double ou ndarray
        hauteur initiale
    dt: double
        pas de temps pour la méthode numérique

    Returns
    -------

    double ou ndarray
    """
    return 0.*h0
```

Question

Excécutez les deux cellules suivantes qui trace la durée de la chute (exacte et approchée) ainsi que l'erreur numérique commise. Vous devez trouver une image comme celle-ci :

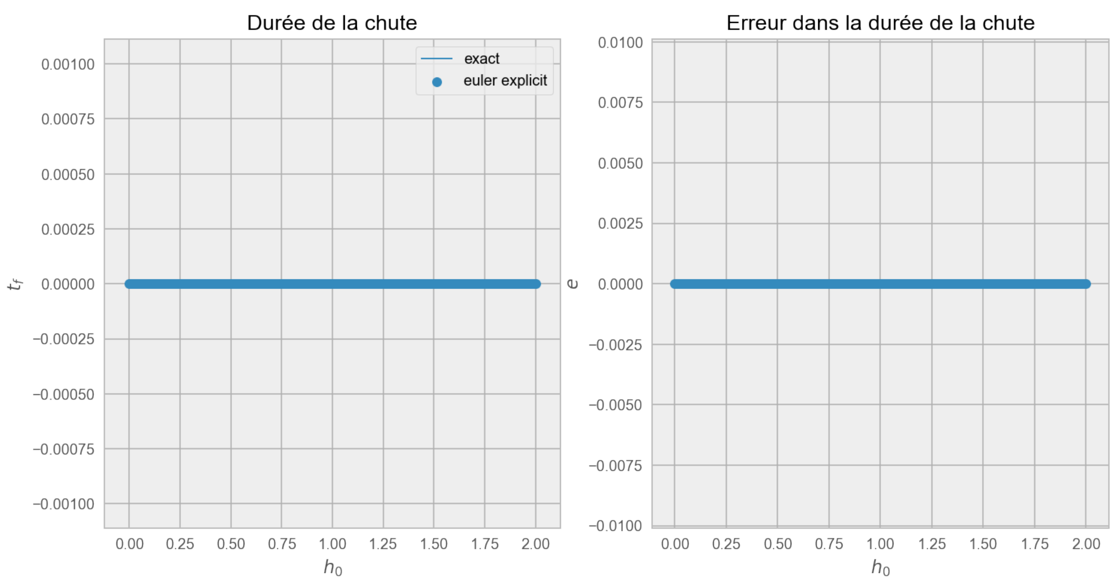


[30]:
```
def plot_dureechute(dt):
    """ trace la durée de la chute en fonction de la hauteur initiale """
    vh_e = np.linspace(0, 2, 1025)
    vtf_e = impact_exact(vh_e)

    vh_a = np.linspace(0, 2, 257)
    vtf_a = np.array([
        impact_ee(hk, dt) for hk in vh_a
    ])

    fig = plt.figure(figsize=(12, 6))
```

```
    ax1 = fig.add_subplot(121)
    ax1.plot(vh_e, vtf_e, label='exact')
    ax1.scatter(vh_a, vtf_a, label='euler explicit')
    ax1.set_title('Durée de la chute')
    ax1.set_xlabel(f'$h_0$')
    ax1.set_ylabel(f'$t_f$')
    ax1.legend()

    verr = abs(vtf_a - impact_exact(vh_a))
    ax2 = fig.add_subplot(122)
    ax2.scatter(vh_a, verr)
    ax2.set_title('Erreur dans la durée de la chute')
    ax2.set_xlabel(f'$h_0$')
    ax2.set_ylabel(f'$e$')
```

[31]:

```
plot_dureechute(1.e-1)
```



[ ]:

```

```