Feuille 3

Equation de transport — méthode des caractéristiques

L'advection est le transport d'une quantité (scalaire ou vectorielle) d'un élément donné (tel que la chaleur, l'énergie interne, un élément chimique, des charges électriques) par le mouvement (et donc la vitesse) du milieu environnant.

C'est une notion courante en mécanique des fluides car toutes les caractéristiques d'une particule fluide sont advectées lors de son déplacement au sein de l'écoulement. Dans l'équation de Navier-Stokes, l'advection du vecteur vitesse apparaît dans le terme d'inertie, qui correspond à l'advection de la quantité de mouvement.

En météorologie et en océanographie, l'advection se réfère surtout au transport horizontal de certaines propriétés par les fluides considérés, dont le transport par le vent ou les courants : advection de vapeur d'eau, de chaleur, de salinité, etc.

Mur de brume (Cornouailles)

Le phénomène d'advection est entièrement codé dans l'équation de conservation.

La méthode des caractéristiques est une méthode de résolution des équations aux dérivées partielles scalaires qui consiste à suivre la solution le long des courbes caractéristiques de l'équation. Elle permet en particulier de chercher des solutions régulières des équations hyperboliques.

Consignes : en cours présentiel, nous ferons le `notebook` et la démonstration du théorème 1. A la maison, je vous demande de bien comprendre la notion de caractéristique pour l'advection. Faites en particulier l'exercice pour vous en assurer.

---

1 Pour l'advection

Nous nous intéressons à l'équation de l'advection muni d'une condition initiale.

$$\begin{cases} \partial_t u + a(t,x)\partial_x u = 0, & \text{dans } \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u^0(x), & \text{dans } \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où u^0 est une condition initiale donnée et a la vitesse de transport donnée.

Lorsque a est constante, une solution évidente est donnée par $u(t,x) = u^0(x - at)$. Ceci signifie en particulier que la solution u est constante sur les courbes $x = x^0 + at$ du plan (t,x) de $\mathbb{R}^2$ (Voir Fig. 1). Cela permet de comprendre les termes “transport” et “vitesse”. La méthode des caractéristiques est une généralisation de cette remarque dans le cas où a n'est pas constante.

Le principe de la méthode des caractéristiques repose sur la recherche (et la découverte) de courbe $x = X(t)$ du plan (t,x) sur lesquelles la solution u reste constante [1].

1. Ces courbes sont appelées courbes caractéristiques, ou encore caractéristiques

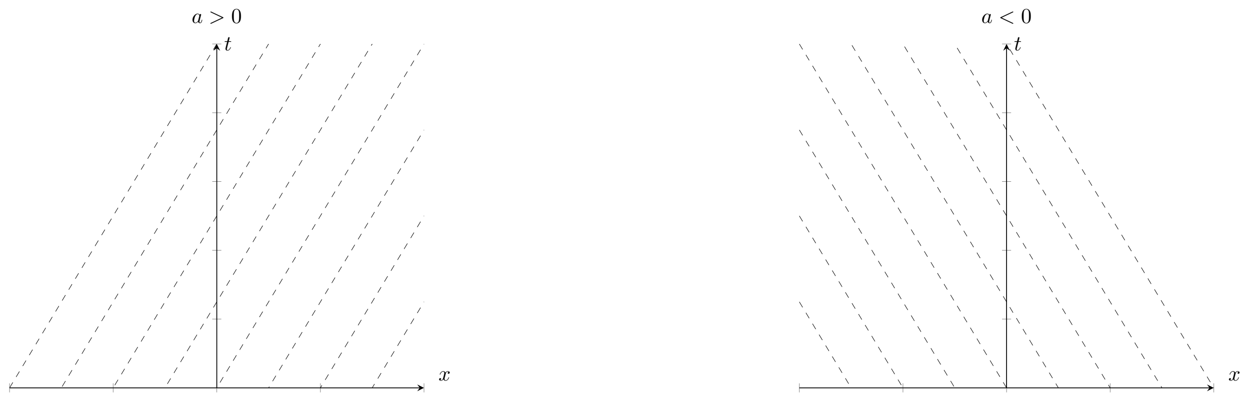

FIGURE 1 – Caractéristiques dans le cas d'une vitesse constante

On suppose que la fonction $u(t,x)$ est une solution de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ du problème (1). Soit $X(t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Posons $\tilde{u}(t) = u(t, X(t))$ pour $t \in \mathbb{R}$. Le but est de trouver X telle que $\tilde{u}'(t) = 0$. Pour cela, on remarque que, sous les hypothèses de régularité faites sur u et X

$$\tilde{u}'(t) = \partial_t u(t, X(t)) + X'(t)\partial_x u(t, X(t)).$$

Puisque u est solution du problème,

$$\tilde{u}'(t) = (X'(t) - a(t, X(t)))\partial_x u(t, X(t)).$$

La nullité de $\tilde{u}'(t)$ est assurée si (c'est seulement une condition suffisante) $X'(t) - a(t, X(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si la fonction X vérifie cette équation différentielle, on a alors

$$u(t, X(t)) = u^0(X(0)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Nous sommes donc amenés à considérer l'ensemble des problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} X_\xi'(t) = a(t, X_\xi(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ X_\xi(0) = \xi. \end{cases} \tag{2}$$

Le point ξ est appelé pied de la caractéristique et la valeur de la donnée initiale en ce point est conservée le long de la courbe caractéristique $t \mapsto X_\xi(t)$. L'intérêt de cette méthode est d'avoir transformé la résolution d'une équation aux dérivées partielles en la résolution d'un ensemble d'équations différentielles.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitiz, étant donné $\xi \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy (2) admet une unique solution maximale si la vitesse a est continue sur $\mathbb{R}^2$ et localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, uniformément par rapport à sa première. Si de plus a est globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, l'unique solution maximale est globale (c'est une conséquence du théorème des bouts).

L'unicité assurée par le théorème de Cauchy-Lipschitz nous permet également de montrer que deux caractéristiques (issues de deux pieds ξ_1 et ξ_2) ne peuvent pas se couper tant que les solutions maximales sont bien définies.

Dans le cas de l'existence globale des caractéristiques, nous définissons $X(t, t^0, X^0)$ définie sur $\mathbb{R}^3$ comme l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X'(t, t^0, X^0) = a(t, X(t, t^0, X^0)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ X(t^0, t^0, X^0) = X^0. \end{cases}$$

Théorème .1 (existence et unicité pour le transport)

On suppose que $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et que $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ est globalement lipschitzienne par rapport à seconde variable, c'est-à-dire que

$$\exists K \in \mathbb{R} : \ \forall (t,x,y) \in \mathbb{R}^3 \quad |a(t,x) - a(t,y)| \leqslant K|x-y|.$$

Alors le problème (1) admet une unique solution de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$: la fonction u définie par $u(t,x) = u^0(X(0,t,x))$.

Démonstration. Pour l'existence, il suffit de vérifier que la formule proposée donne bien une solution de (1). Pour la donnée initiale, nous avons

$$u(0,x) = u^0(X(0,0,x)) = u^0(x).$$

Il reste maintenant à calculer les dérivées de u :

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) &= u^{0\prime}(X(0,t,x))\ \partial_2 X(0,t,x),\\ \partial_x u(t,x) &= u^{0\prime}(X(0,t,x))\ \partial_3 X(0,t,x).\end{aligned}$$

Evaluons à présent $\partial_2 X(0,t,x)$. Posons $g(t,x) = X(t,t,x)$. Puisque $X(t,t,x) = x$, on a $\partial_1 g(t,x) = 0$. Or

$$g(t,x) = x = X(t,t,x) = X(t,0,X(0,t,x)), \qquad \text{(faire un dessin)},$$

donc

$$\partial_1 g(t,x) = \partial_1 X(t,0,X(0,t,x)) + \partial_3 X(t,0,X(0,t,x))\partial_2 X(0,t,x)$$

et ainsi

$$\partial_3 X(t,0,X(0,t,x))\partial_2 X(0,t,x) = -\partial_1 X(t,0,X(0,t,x)).$$

Par ailleurs, par définition de la courbe caractéristique

$$\partial_1 X(t,0,X(0,t,x)) = a(t, X(t,0,X(0,t,x))) = a(t,x),$$

ce qui implique

$$\partial_3 X(t,0,X(0,t,x))\partial_2 X(0,t,x) = -a(t,x).$$

De la même façon, évaluons $\partial_3 X(0,t,x)$. On a $\partial_2 g = 1$ et

$$\partial_2 g(t,x) = \partial_3 X(t,0,X(0,t,x))\partial_3 X(0,t,x)$$

et ainsi

$$\partial_3 X(t,0,X(0,t,x))\partial_3 X(0,t,x) = 1.$$

Ainsi, en sommant les deux égalités, on obtient

$$\partial_3 X(t,0,X(0,t,x))(\partial_2 X(0,t,x) + a(t,x)\partial_3 X(0,t,x)) = 0.$$

Enfin, $\partial_3 X(t,0,X(0,t,x))$ n'est pas nul puisque $\partial_3 X(t,0,X(0,t,x))\partial_3 X(0,t,x) = 1$. Ainsi, la fonction u ainsi définie est bien solution du système de transport.

L'unicité de la solution (régulière) résulte du fait que toute solution régulière est constante le long des caractéristiques. Donc nécessairement $u(t,x) = u^0(X(0,t,x))$. $\square$

Nous proposons un exercice afin d'illustrer le résultat d'existence des solutions régulières par la méthode des caractéristiques.

<u>Exercice 1</u> : *calcul de caractéristiques*

On veut résoudre le problème

$$\begin{cases} \partial_t u + (x^p - 1)\partial_x u = 0, & x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$ est un paramètre. Calculez la solution de ce problème lorsque $p = 1$, puis lorsque $p = 2$.

<u>Solution de l'exercice 1</u> : *calcul de caractéristiques*

Nous commençons par prendre $p = 1$. L'équation caractéristique s'écrit

$$X'_\xi(t) = X_\xi(t) - 1, \qquad X_\xi(0) = \xi,$$

dont la solution est définie sur $\mathbb{R}$ et s'écrit

$$X_\xi(t) = 1 + (\xi - 1)e^t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto X_\xi(t)$ est inversible. Ainsi, pour $t, x \in \mathbb{R}$ fixés, on peut trouver un $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $X_\xi(t) = x$, il suffit de prendre $\xi = 1 + (x-1)e^{-t}$. La solution s'écrit donc

$$u(t,x) = u^0(1 + (x-1)e^{-t}), \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

Nous prenons ensuite $p = 2$. L'équation caractéristique s'écrit

$$X'_\xi(t) = X_\xi(t)^2 - 1, \qquad X_\xi(0) = \xi,$$

dont la solution est définie sur $[0, T[$ par

$$X_\xi(t) = \frac{(\xi+1)e^{-t} + (\xi-1)e^t}{(\xi+1)e^{-t} - (\xi-1)e^t},$$

pour $t \in [0, T[$ avec $T = +\infty$ si $\xi \leqslant 1$ et $T = \ln((\xi+1)/(\xi-1))/2$ si $\xi > 1$.

Ainsi, la solution (lorsqu'elle est régulière) est définie par

$$u(t,x) = u^0\left(\frac{(x+1)e^t + (x-1)e^{-t}}{(x+1)e^t - (x-1)e^{-t}}\right),$$
$$\text{pour} \quad (t,x) \in \Big\{\Big(x \geqslant -1 \text{ et } t \in \mathbb{R}\Big) \text{ ou } \Big(x < -1 \text{ et } t < \ln((x-1)/(x+1))/2\Big)\Big\}.$$

Nous remarquons donc que, dans le cas $p = 2$, la solution n'est pas définie en tout point à tout instant. La zone au dessus de la courbe bleue de la figure 2 (partie droite) ne peut pas être atteinte par une solution régulière. Concrètement, la donnée initiale ne peut pas se propager jusqu'à cette zone et il est possible d'y faire vivre une autre solution qui ne verra jamais celle que nous avons fabriquer à partir de la donnée initiale à $t = 0$. Cela n'était pas le cas avec $p = 1$.

2 Pour les équations scalaires conservatives

Nous nous intéressons à présent à l'équation scalaire conservative (non linéaire a priori)

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x F(u)(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, suffisamment régulière. Cette équation est appelée conservative car si u est une solution (bornée), pour tout intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b u(t,x)\ \mathrm{d}x = F(u(t,a)) - F(u(t,b)).$$

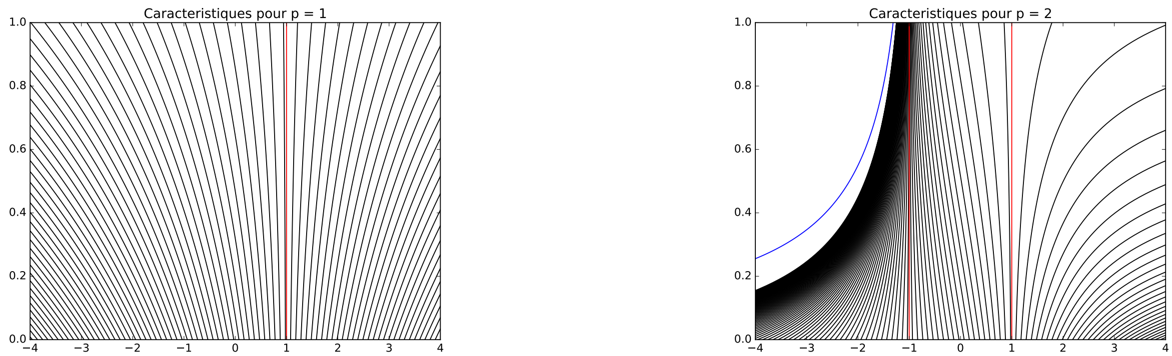

Figure 2 – Courbes caractéristiques

Et si u est intégrable et tend vers 0 en $\pm\infty$ (et est suffisamment régulière), on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}} u(t,x)\ \mathrm{d}x = 0.$$

L'intégrale de u est donc conservée au cours du temps. Sur un segment $[a, b]$, la variation de l'intégrale de u est égal au flux entrant $F(u(t, a))$ moins le flux sortant $F(u(t, b))$. Pour cette raison, la fonction F est appelée fonction flux.

Nous allons essayer de résoudre cette équation par la méthode des caractéristiques mais nous verrons que cette tentative va échouer (au moins en ce qui concerne les solutions globales en temps). Il faudra alors définir des solutions moins régulières (solution d'une formulation faible de l'EDP (3)), ce que nous ne pourrons pas faire cette année...

Commençons par montrer que les solutions régulières de (3) ont en général un temps de vie fini.

Théorème .2 (existence et unicité pour une équation conservative)

Considérons l'équation (3) avec une fonction flux $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et une donnée initiale $u(0,\cdot) = u^0(\cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathsf{L}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $u^{0\prime} \in \mathsf{L}^\infty(\mathbb{R})$. Alors

- si $F''(u^0(x))u^{0\prime}(x) \geqslant 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le problème admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty)\times\mathbb{R})$;
- sinon le problème admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^1\left(\left[0, \frac{-1}{\inf_{x\in\mathbb{R}} F''(u^0(x))u^{0\prime}(x)}\right)\times\mathbb{R}\right)$ qui ne peut pas être prolongée pour des temps supérieurs.

Dans les deux cas, la solution vérifie $u(t, x + tF'(u^0(x))) = u^0(x)$.

Démonstration. Si u est une solution $\mathcal{C}^1$, elle vérifie

$$\partial_t u(t,x) + F'(u(t,x))\ \partial_x u(t,x) = 0.$$

Soit $X(t, x)$ la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t X(t,x) = F'(u(t, X(t,x))), \\ X(0,x) = x. \end{cases}$$

L'existence d'une telle solution maximale (quelque soit $x \in \mathbb{R}$) est assurée par le théorème de Cauchy-Lipschitz dès que u et F' sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Posons $\tilde{u}(t,x) = u(t, X(t,x))$. Nous avons déjà fait le calcul suivant

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{u}(t,x) &= \partial_t u(t, X(t,x)) + \partial_x u(t, X(t,x))\ \partial_t X(t,x),\\ &= \partial_t u(t, X(t,x)) + \partial_x u(t, X(t,x))\ F'(u(t, X(t,x))) = 0,\end{aligned}$$

puisque u est solution de (3). La fonction $u(t, X(t,x))$ ne dépend pas du temps : une solution régulière est constante le long des courbes caractéristiques. Le fait que la pente de la caractéristique ne dépende que de $u(t, X(t,x))$ simplifie donc encore le problème : $u(t, X(t,x)) = u(0, X(0,x)) = u^0(x)$.

L'équation définissant la courbe caractéristique de pied x se réduit donc à

$$\begin{cases}\partial_t X(t,x) = F'(u^0(x)),\\ X(0,x) = x,\end{cases}$$

qui se résout de manière exacte par la formule

$$X(t,x) = x + tF'(u^0(x)).$$

Nous obtenons alors la formule $u(t, x + tF'(u^0(x))) = u^0(x)$ vérifiée par toute solution de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour simplifier la suite, notons

$$\begin{aligned}X_t :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R},\\ & x \mapsto x + tF'(u^0(x)),\end{aligned}$$

Nous avons $X_t'(x) = 1 + F''(u^0(x))u^{0\prime}(x)t$. Posons

$$m = \inf_{x\in\mathbb{R}} F''(u^0(x))u^{0\prime}(x).$$

Nous savons que $m \in \mathbb{R}$ puisque $u^0 \in \mathsf{L}^\infty(\mathbb{R})$, $u^{0\prime} \in \mathsf{L}^\infty(\mathbb{R})$ et $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Nous définissons ensuite

$$T = \begin{cases} +\infty & \text{si } m \geqslant 0,\\ \tau = -1/m & \text{si } m < 0.\end{cases}$$

Pour tout $t \in [0, T[$, la fonction X_t est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet,

$$X_t'(x) \geqslant \begin{cases} 1 & \text{si } m \geqslant 0,\\ m(t-\tau) > 0 & \text{si } m < 0.\end{cases}$$

Ainsi, nous avons que, si u est une solution $\mathcal{C}^1$ de (3), tant que X_t est une bijection, u vérifie $u(t,x) = u^0(X_t^{-1}(x))$.

Nous allons montrer réciproquement que la fonction définie par $u(t,x) = u^0(X_t^{-1}(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1([0,T[\times\mathbb{R})$ et vérifie (3). Pour $t \in [0, T[$, la fonction X_t est une bijection sur $\mathbb{R}$ et

$$X_t^{-1\prime}(x) = \frac{1}{X_t'(X_t^{-1}(x))}.$$

Nous avons donc directement

$$\partial_x u(t,x) = \frac{u^{0\prime}(X_t^{-1}(x))}{X_t'(X_t^{-1}(x))} = \frac{u^{0\prime}(X_t^{-1}(x))}{1 + F''(u^0(X_t^{-1}(x)))u^{0\prime}(X_t^{-1}(x))t}.$$

D'autre part

$$X_t(x) = x + tF'(u^0(x)) = x + tF'(u(t, X_t(x))).$$

Donc

$$x = X_t(x) - tF'(u(t, X_t(x))) \quad\Longrightarrow\quad X_t^{-1}(x) = x - tF'(u(t,x)).$$

Ainsi, la dérivée de $X_t^{-1}(x)$, vue comme une fonction de t et de x, vaut au point (t,x) $-F'(u(t,x)) - tF''(u(t,x))\partial_t u(t,x)$. Nous en déduisons que

$$\partial_t u(t,x) = u^{0\prime}(X_t^{-1}(x))\Big(-F'(u(t,x)) - tF''(u(t,x))\partial_t u(t,x)\Big)$$

et donc que

$$\partial_t u(t,x)\Big(1 + tu^{0\prime}(X_t^{-1}(x))F''(u(t,x))\Big) = -u^{0\prime}(X_t^{-1}(x))F'(u(t,x)).$$

Et finalement

$$\partial_t u(t,x) = -\frac{u^{0\prime}(X_t^{-1}(x))F'(X_t^{-1}(x))}{1 + tu^{0\prime}(X_t^{-1}(x))F''(u^0(X_t^{-1}(x)))}$$

Nous en déduisons alors que la fonction u est bien solution de l'équation

$$\partial_t u(t,x) + F'(u(t,x))\partial_x u(t,x) = 0.$$

Et bien sûr, nous avons $u(0,x) = u^0(x)$.

Supposons maintenant que $T < +\infty$, c'est-à-dire que

$$m = \inf_{x\in\mathbb{R}} F''(u^0(x))u^{0\prime}(x) < 0.$$

Nous allons montrer qu'il ne peut pas exister de solution de (3) qui soit $\mathcal{C}^1$ au delà du temps T. La seule chose à remarquer pour cela est que des caractéristiques se croisent pour des temps plus grands, et que puisque la valeur de la solution u est transportée le long de ces caractéristiques, cela conduit à une solution multi-valuée.

Soit $\tilde{t} > T$. Supposons qu'il existe une solution $u \in \mathcal{C}^1([0,\tilde{t}[\times\mathbb{R})$ associée à la donnée initiale u^0. Nous savons qu'elle vérifie $u(t,X(t,x)) = u^0(x)$ avec $X(t,x) = x + tF'(u^0(x))$.

Par continuité de la fonction $x \mapsto F''(u^0(x))u^{0\prime}(x)$, il existe $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ tel que

$$1 + \tilde{t}F''(u^0(\tilde{x}))u^{0\prime}(\tilde{x}) < 0.$$

Par continuité également,

$$\exists\epsilon > 0 : \ \forall x \in [\tilde{x}-\epsilon, \tilde{x}] \quad 1 + \tilde{t}F''(u^0(x))u^{0\prime}(x) < 0.$$

La caractéristique $X(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x, donc par le théorème des accroissements finis, il existe $y \in]\tilde{x}-\epsilon, \tilde{x}[$ tel que

$$X(\tilde{t},\tilde{x}-\epsilon) - X(\tilde{t},\tilde{x}) = -\epsilon\partial_x X(\tilde{t},y) = -\epsilon\Big(1 + \tilde{t}F''(u^0(y))u^{0\prime}(y)\Big) > 0.$$

Ainsi les caractéristiques issues de $\tilde{x}-\epsilon$ et $\tilde{x}$ se sont croisées. Par continuité, il existe $t \in]0,\tilde{t}[$ tel que $X(t,\tilde{x}-\epsilon) = X(t,\tilde{x})$. Or $u^0(\tilde{x}-\epsilon) \neq u^0(\tilde{x})$ puisque $F''(u^0(x))u^{0\prime}(x) < 0$ sur $[\tilde{x}-\epsilon,\tilde{x}]$, ce qui est contradictoire. $\square$

Nous pouvons remarquer qu'un résultat analogue est bien sûr vrai pour les temps négatifs.

Donnons à présent deux exemples.

- Pour l'équation d'advection à vitesse constante, nous avons

$$F(u) = au.$$

Donc $F'' = 0$, la condition est toujours vérifiée : la solution est globale en temps. Par ailleurs, ce résultat implique également l'unicité de la solution. La relation est facile à inverser et la solution s'écrit

$$u(t,x) = u^0(x-at).$$

- Pour l'équation de Bürgers, nous avons
$$F(u) = \frac{1}{2}u^2.$$
  Donc $F'' = 1$ et la condition se réduit à $u^{0\prime}(x) \geqslant 0$. Ainsi, si la donnée initiale est croissante au sens large, la solution est globale en temps, tandis que si elle est décroissante sur un intervalle, les caractéristiques issues de cet intervalle se croiseront en temps fini.

D'une manière générale, lorsque le flux F est une fonction strictement convexe (ce qui est très souvent le cas), la condition se réduit à $u^{0\prime}(x) \geqslant 0$. Ainsi, si la donnée initiale est croissante au sens large, la solution est globale en temps, tandis que si elle est décroissante sur un intervalle, les caractéristiques issues de cet intervalle se croiseront en temps fini.