



Modelación CON EDP's

Informe Taller 02

Modelación Matemática

Coordinacion curso:

Principal: Ing. Carlos Alberto Duque-Daza

Práctica: Ing. Juan Sebastian Hincapie

Estudiantes/Autores

Olaya Castaño, Santiago <solayac@unal.edu.co> <1073252791>

Infante Ruiz, Yuli Tatiana <yinfante@unal.edu.co> <1000468869>

Hurtado Martin, Edgar Mauricio <ehurtado@unal.edu.co> <1000020482>

Caita Tapia, Alvaro Danilo <adcaitat@unal.edu.co> <1015455488>

DECLARACIÓN DE APORTES Y CONTRIBUCIONES

Los autores del presente informe declaramos que TODOS hemos aportado de manera significativa a la elaboración del presente informe, y que por tanto cualquiera de nosotros está en capacidad de presentar sustentación de forma individual del contenido del presente documento.

En cualquier caso, las contribuciones específicas de cada uno de los autores al presente documento se detallan en la siguiente tabla, pero manifestamos que esta distribución de responsabilidades se hizo solamente para fines de producción final del informe, y aceptamos que la componente de calificación asociada a una posible sustentación puede recaer en cualquiera de nosotros de forma individual.

Nombre de Autor1:

Nombre de Autor2:

Nombre de Autor3:

Nombre de Autor4:

1. Caso 01: Ecuación de Transporte Advectivo

La ecuación unidimensional de transporte advectivo es comúnmente usada para simular situaciones en las que el transporte advectivo (o convectivo) es la característica dominante del fenómeno físico considerado, y hay ausencia de fenómenos difusivos. Esta ecuación simplificada se puede escribir como,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

en donde se supone que el flujo (de la cantidad transportada) es cu , y la velocidad de transporte es c . Sin embargo, en esta ocasión se quiere resolver un caso donde se tiene un sistema de ecuaciones acopladas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \gamma(u - v) \quad (3)$$

las cuales se usarán para modelar el transporte unidimensional de dos variables u y v . Para resolver este sistema de ecuaciones numéricamente, considere un esquema de diferencias finitas centradas para los términos espaciales, y un esquema de Runge-Kutta para los términos en tiempo. Considere, además, que el problema está definido para un dominio espacial $x \in [0, L]$, y definido por las siguientes condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = \exp\left(\cos\left[\frac{2\pi x}{L}\right]\right), \quad v(x, 0) = 0 \quad (4)$$

Adicionalmente, se considerará el dominio espacial periódico, por lo que las condiciones de frontera se podrán definir como:

$$u(L, t) = u(0, t), \quad v(L, t) = v(0, t) \quad (5)$$

1.1. Análisis Preliminar: Elementos del Modelo.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

1.2. Modelo Matemático

En esta sección se deberán presentar las diferentes expresiones matemáticas construidas, seleccionadas y/o adoptadas para el modelamiento del caso en discusión. También será conveniente realizar un proceso de análisis dimensional del modelo matemático y presentar potenciales relaciones adimensionales resultantes del proceso de análisis dimensional.

Deberán usarse referencias a tablas, figuras, ecuaciones, y cualquier otro entorno que implique numeración. Este simple ejemplo muestra como hacer referencias cruzadas a ecuaciones en el texto, como se muestra en ecuación (16) y en ecuaciones (7) y (8).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (7)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (8)$$

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Las ecuaciones deben ser referenciadas en el documento antes de que aparezcan las ecuaciones mismas, en la medida de lo posible, como en el presente ejemplo ecuaciones (9) y (10)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \text{for } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{for } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (10)$$

1.3. Implementación Computacional

En esta sección pueden presentarse de manera sucinta los códigos implementados para el análisis del caso. En cualquier caso, deberá hacerse una discusión corta acerca de los métodos numéricos usados para la solución del caso, así como cualquier consideración digna de mención respecto a la estructura algorítmica usada en los códigos presentados.

Códigos cortos pueden ser incluidos por completo en el documento con un entorno tipo *listing*, como se muestra a continuación en listado 1:

```

1  #!/usr/bin/env python3
2  # -*- coding: utf-8 -*-
3  """
4  Created on Sat Sep  2 06:41:22 2023
5
6  @author: carlosduquedaza
7  """
8  import math
9  import numpy as np
10
11
12  secuencia3 = [1, 2, 4, 6, 9]
13  var1 = 0.0
14
15  for item in secuencia3:
16      print(item)
17
18  print("\n")
19  for i in range(len(secuencia3)):
20      var1 = float(secuencia3[i])**2 + math.pi
21      print(f"La variable var1 es: {var1:.3f}")
22
23  print("\n")
24  for i in range(len(secuencia3)):
25      var1 = np.sqrt(float(secuencia3[i])*0.3097)
26      print(f"Ahora var1 = {var1:7.4e}")

```

Listing 1: Ejemplo de inclusión de código corto

Inclusión de porciones específicas de códigos más extensos se puede hacer como se indica a continuación (ver listado 2):

```
\lstinputlisting[language=Python,firstline=4,lastline=25,label=lst:code02,
caption= Ejemplo de inclusi'on de ... ]{./codes/getGradingFactor.py}
```

```
1 #Import modules
2 import sys
3 import json
4 import numpy as np
5 from scipy.optimize import brentq
6 from argparse import ArgumentParser
7
8 precision = np.float64(1.0e-8);
9 maxloop   = np.int64(1000);
10
11 def func1(r1,L,dxs,n):
12     return np.float64(L)*(1.0-np.float64(r1))-np.float64(dxs)*(1.0-np.float64(r1)**n)
13
14 def func2(r1,L,dxe,n):
15     return np.float64(L)*(np.float64(r1)**(n-1))*(1.0-np.float64(r1))-np.float64(dxe)
16     *(1.0-np.float64(r1)**n)
17
18 def globalFromLocal(r1,n):
19     return np.float64(np.power(r1,(n-1)));
20
21 def localFromGlobal(rg,n):
22     return np.float64(np.power(rg,(1.0/np.float64(n-1))));
```

Listing 2: Ejemplo de inclusión de porción de código largo

1.4. Resultados

Se sugiere tener una sección dedicada exclusivamente a la presentación de los resultados obtenidos, así como a la discusión de tendencias observadas(a partir de los resultados), o a la observación de comportamientos que puedan ser considerados anómalos o contrarios a las observaciones documentadas por la bibliografía. Igualmente, es indispensable que todas las gráficas y curvas incluidas en el informe tengan una resolución adecuada, y las etiquetas e indicadores de escalas, así como títulos de gráficos, tengan un tamaño adecuado para una fácil lectura, como se muestra en el ejemplo de la Figura 1

1.5. Conclusiones

Cada uno de los casos deberá tener una sección de conclusiones donde se discutan las principales observaciones y hallazgos obtenidos mediante el uso de modelo matemático-computacional, o del modelo matemático-analítico (si ese fuese el caso). Las conclusiones podrán incluir apreciaciones acerca de dificultades en la construcción del modelo, o en la implementación computacional que se haya hecho. En cualquier caso, se dará más importancia a la presentación de discusiones asociadas al comportamiento del sistema, fenómeno, o proceso explorado en el caso en cuestión. Se evaluará de manera MUY negativa cualquier tipo de discusión que carezca de fundamentación o de apoyo en los resultados presentados en el informe.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla.

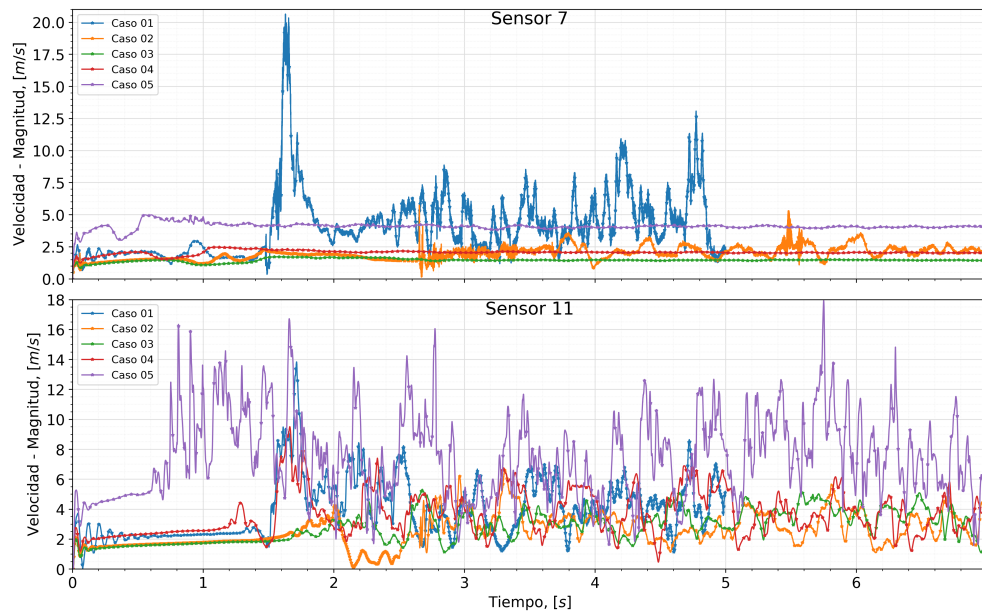


Figura 1: La leyenda de cada figura debe ser un texto corto pero lo suficientemente descriptivo de la información presentada en la figura.

Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

2. Caso 02: Conducción de calor en una placa plana rectangular

El presente caso está dividido en dos partes o metodologías de análisis. A continuación, se presentan los detalles de cada metodología a considerar, pero los requerimientos y actividades se indican al final del enunciado del presente caso. En cualquier caso, se presenta primero un breve contexto del caso en estado estacionario. **Conducción de Calor 2D - Estado estacionario** Considere un caso de conducción de calor en una placa plana rectangular que es calentada en uno de sus bordes (como se indica en la Figura 2a). En estado estacionario, dicha situación se puede modelar mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{sobre } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \quad (11)$$

El caso estacionario presentado a manera de ilustración en la Figura 2a ha sido modelado usando condiciones de frontera Dirichlet dadas por las siguientes expresiones:

$$T(0, y) = 20^\circ\text{C} \quad \text{para } 0 \leq y \leq b \quad (12)$$

$$T(a, y) = 150^\circ\text{C} \quad \text{para } 0 \leq y \leq b \quad (13)$$

$$T(x, 0) = T(x, b) = 20^\circ\text{C} \quad \text{para } 0 \leq x \leq a \quad (14)$$

Para el modelo dado por la ecuación (6), con condiciones de frontera Dirichlet como las indicadas en las ecuaciones (7) a (9), es posible encontrar una solución analítica general mediante la técnica de separación de variables. Una de tales soluciones se puede escribir como:

$$T(x, y) = (T_2 - T_1)H(x, y) + T_1 \quad (15)$$

donde para el caso a analizar se puede definir $T_1 = 20^\circ\text{C}$, $T_2 = 150^\circ\text{C}$, y la función $H(x, y)$ puede ser construida a través de la serie:

$$H(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{2 \sinh(n\pi x/b)}{n \sinh(n\pi a/b)} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (16)$$

2.1. Estado transitorio

En esta versión del problema a analizar se quiere considerar una condición de borde transitoria. Las nuevas condiciones de frontera, una de ellas incluyendo variaciones temporales, están ahora definidas así:

$$\nabla_x T(0, y) = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq y \leq b \quad (17)$$

$$T(a, y) = 50^\circ\text{C} \sin(\omega t) + 130^\circ\text{C} \quad \text{para} \quad 0 \leq y \leq b \quad \text{y} \quad 0 \leq t \leq \frac{4\pi}{\omega} \quad (18)$$

$$\nabla_y T(x, 0) = \nabla_y T(x, b) = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq a \quad (19)$$

Donde los valores de temperatura se consideran medidos en $^\circ\text{C}$, y el valor de la frecuencia temporal (ω) de la fuente en $x = a$ deberá ajustarse de manera que la temperatura promedio de ninguna de las otras fronteras sea mayor a 40°C , ni menor a 20°C .

2.1.1. Tipos de Nodos

A continuación se identifican los tipos de nodos que se presentan en la malla:

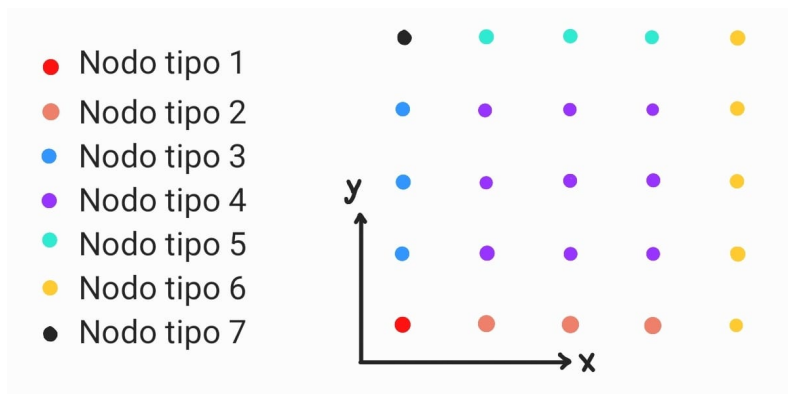


Figura 2: Clasificación de nodos en la placa plana para estado transitorio.

212. Discretización por diferencias finitas

Debido a las condiciones de frontera establecidas anteriores, que se identifican como condiciones de tipo Neuman debido a que la frontera de las placas están dadas por ecuaciones derivadas parciales de la temperatura, por lo que su comportamiento se puede modelar como:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (20)$$

La cual al discretizarla se obtiene:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (21)$$

Ahora empleando las diferencias finitas centradas para el modelo matemático anteriormente planteado:

$$\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (22)$$

Ahora se despeja $\frac{\partial T}{\partial t}$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \right) \quad (23)$$

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \right) \quad (24)$$

$$T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}\} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} \{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}\} \quad (25)$$

Se observa que los términos $\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ y $\frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2}$ se pueden reemplazar por Fo_x y Fo_y respectivamente:

$$T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n = Fo_x \{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}\} + Fo_y \{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}\} \quad (26)$$

Ahora empleando el método de **Crank-Nicolson** para la resolución de ecuaciones de derivadas parciales o también llamado *esquema de avance temporal*:

$$T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n = \xi \{Fo_x (T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})^{n+1} + Fo_y (T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1})^{n+1}\} \\ - (1 - \xi) \{Fo_x (T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})^n + Fo_y (T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1})^n\} \quad (27)$$

Reorganizamos términos y los agrupamos como se observa a continuación:

$$T_{i,j}^{n+1} - \xi \{Fo_x (T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})^{n+1} + Fo_y (T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1})^{n+1}\} = \\ T_{i,j}^n - (1 - \xi) \{Fo_x (T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})^n + Fo_y (T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1})^n\} \quad (28)$$

$$- \xi Fo_x (T_{i-1,j} + T_{i+1,j})^{n+1} + [2\xi (Fo_x + Fo_y) + 1] T_{i,j}^{n+1} - \xi Fo_y (T_{i,j-1} + T_{i,j+1})^{n+1} \\ = (1 - \xi) Fo_x (T_{i-1,j} + T_{i+1,j})^n + [1 - 2(1 - \xi)(Fo_x + Fo_y)] T_{i,j}^n + (1 - \xi) Fo_y (T_{i,j-1} + T_{i,j+1})^n \quad (29)$$

213. Análisis de nodos

1. Nodos tipo 1 y 7:

Su condición está dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

Se realiza el esquema de diferencias finitas y se obtiene:

$$\frac{T_{i-1,j} - T_{i+1,j}}{2\Delta x} = 0$$

$$T_{i-1,j} = T_{i+1,j} \quad (30)$$

$$\frac{T_{i,j-1} - T_{i,j+1}}{2\Delta y} = 0$$

$$T_{i,j-1} = T_{i,j+1} \quad (31)$$

Se reemplazan las ecuaciones anteriores en la ecuación 29 como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} & -2\xi Fo_x (T_{i-1,j})^{n+1} + [2\xi (Fo_x + Fo_y) + 1] T_{i,j}^{n+1} - 2\xi Fo_y T_{i,j-1}^{n+1} \\ & = 2(1 - \xi) Fo_x (T_{i-1,j})^n + [1 - 2(1 - \xi)(Fo_x + Fo_y)] T_{i,j}^n + 2(1 - \xi) Fo_y (T_{i,j-1})^n \end{aligned} \quad (32)$$

2. Nodos tipo 2 y 5:

Su condición está dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

Se realiza el esquema de diferencias finitas y se obtiene:

$$\frac{T_{i,j-1} - T_{i,j+1}}{2\Delta y} = 0$$

$$T_{i,j-1} = T_{i,j+1} \quad (33)$$

Reemplazando en la ecuación 29 se tiene:

$$\begin{aligned} & -\xi Fo_x (T_{i-1,j} + T_{i+1,j})^{n+1} + [2\xi (Fo_x + Fo_y) + 1] T_{i,j}^{n+1} - 2\xi Fo_y (T_{i,j-1})^{n+1} \\ & = (1 - \xi) Fo_x (T_{i-1,j} + T_{i+1,j})^n + [1 - 2(1 - \xi)(Fo_x + Fo_y)] T_{i,j}^n + 2(1 - \xi) Fo_y (T_{i,j-1})^n \end{aligned} \quad (34)$$

3. Nodo tipo 3:

Su condición está dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Se realiza el esquema de diferencias finitas y se obtiene:

$$\frac{T_{i-1,j} - T_{i+1,j}}{2\Delta x} = 0$$

$$T_{i-1,j} = T_{i+1,j} \quad (35)$$

Reemplazando en la ecuación 29 se tiene:

$$\begin{aligned} & -2\xi Fo_x (T_{i-1,j})^{n+1} + [2\xi (Fo_x + Fo_y) + 1] T_{i,j}^{n+1} - \xi Fo_y (T_{i,j-1} + T_{i,j+1})^{n+1} \\ & = 2(1 - \xi) Fo_x (T_{i-1,j})^n + [1 - 2(1 - \xi)(Fo_x + Fo_y)] T_{i,j}^n + (1 - \xi) Fo_y (T_{i,j-1} + T_{i,j+1})^n \end{aligned} \quad (36)$$

4. Nodo tipo 4:

Su condición está dada por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Por lo que se emplea la ecuación 29:

$$\begin{aligned} & -\xi Fo_x (T_{i-1,j} + T_{i+1,j})^{n+1} + [2\xi (Fo_x + Fo_y) + 1] T_{i,j}^{n+1} - \xi Fo_y (T_{i,j-1} + T_{i,j+1})^{n+1} \\ & = (1 - \xi) Fo_x (T_{i-1,j} + T_{i+1,j})^n + [1 - 2(1 - \xi)(Fo_x + Fo_y)] T_{i,j}^n + (1 - \xi) Fo_y (T_{i,j-1} + T_{i,j+1})^n \end{aligned} \quad (37)$$

5. Nodo tipo 6:

Su condición está dada por:

$$T(a, y) = 50^\circ C \sin(\omega t) + 130^\circ C = 0$$

Se realiza el esquema de diferencias finitas y se obtiene:

$$T(i, j)^n = 50^\circ C \sin(\omega t) + 130^\circ C \quad (38)$$

214. Implementación computacional

Una vez definidas las condiciones de frontera, se define el tamaño de la matriz de nodos, teniendo en cuenta que el tamaño de una matriz se define como $n \times m$ siendo $n = n_i$ y $m = n_j$, además se debe establecer el paso Δx y Δy de la siguiente manera:

$$\Delta x = \frac{a}{n-1} \quad (39)$$

$$\Delta y = \frac{b}{m-1} \quad (40)$$

En las anteriores ecuaciones se tiene que a es la longitud en x de la placa y b la longitud en y . Finalmente se implementa el siguiente código:

215. Resultados Transitorio**2.2. Estado transitorio - término fuente interna**

Se considera una situación similar a la indicada anteriormente pero con una fuente interna adicional. Las condiciones de frontera son estacionarias nuevamente, pero el termino fuente varía en el tiempo. El modelo matemático para este caso se presenta a continuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + G(x, y, t) \quad \text{sobre} \quad \omega = (0, 1) \times (0, 1) \quad (41)$$

En donde el término fuente está dado por la siguiente expresión:

$$G(x, y, t) = G_0 \left[\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + 2\sigma}{2\pi\sigma^6} \right] \exp \left(-\frac{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)}{2\sigma^2} \right) \sin(\omega t) \quad (42)$$

Para este caso se tienen las siguientes condiciones de frontera:

$$0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega} \quad (43)$$

$$T(0, y) = 35^\circ C \quad \text{para} \quad 0 \leq y \leq b \quad (44)$$

$$T(a, y) = 160^\circ C \quad \text{para} \quad 0 \leq y \leq b \quad (45)$$

$$T(x, 0) = T(x, b) = 20^\circ C \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq a \quad (46)$$

$$\sigma = 0.07 \quad G_0 = 2.5 \quad x_0 = 0.3 \quad y_0 = 0.7 \quad (47)$$

221. Clasificación de nodos

Iniciamos planteando el esquema de malla de nodos clasificandolos como se observa en la siguiente imagen:

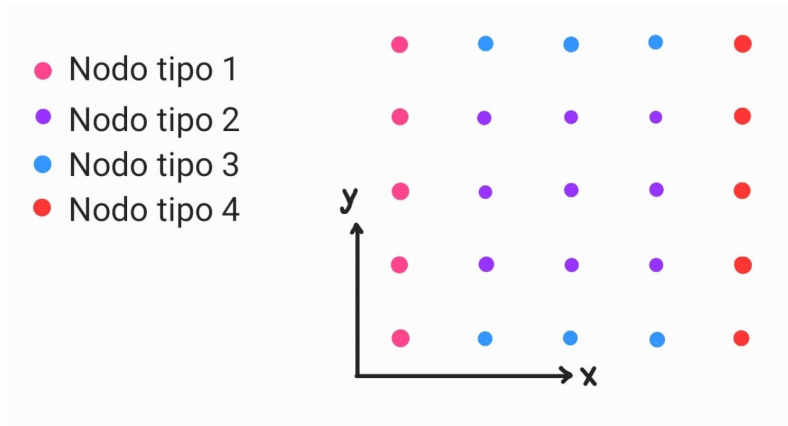


Figura 3: Clasificación de nodos en la placa plana para estado transitorio con fuente de generación.

222. Discretización por diferencias finitas

Para realizar la discretización por diferencias finitas comenzamos tomando la ecuación 20 y se le añade el término de generación de calor de la misma manera que en la ecuación 41, de esta manera se observa entonces:

$$\nabla^2 T + G(x, y, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (48)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + G(x, y, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (49)$$

A partir de la anterior ecuación entonces se comienza a discretizar:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + G_{i,j} \quad (50)$$

Ahora se despeja $\frac{\partial T}{\partial t}$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + G_{i,j} \right) \quad (51)$$

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + G_{i,j} \right) \quad (52)$$

$$T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n = \alpha \Delta t \left\{ \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + G_{i,j} \right\} \quad (53)$$

$$T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \{ T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j} \} + \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} \{ T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1} \} + \alpha \Delta t G_{i,j} \quad (54)$$

Se observa que los términos $\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ y $\frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2}$ se pueden reemplazar por Fo_x y Fo_y respectivamente:

$$T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n = Fo_x \{ T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j} \} + Fo_y \{ T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1} \} + \alpha \Delta t G_{i,j} \quad (55)$$

Ahora empleando el método de **Crank-Nicolson** para la resolución de ecuaciones de derivadas parciales o también llamado *esquema de avance temporal*:

$$T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n = \xi \{ Fo_x (T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})^{n+1} + Fo_y (T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1})^{n+1} \} \alpha \Delta t G_{i,j}^{n+1} - (1 - \xi) \{ Fo_x (T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})^n + Fo_y (T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1})^n \} + \alpha \Delta t G_{i,j}^n \quad (56)$$

Reorganizamos términos y los agrupamos como se observa a continuación:

$$T_{i,j}^{n+1} - \xi \{Fo_x(T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})^{n+1} + Fo_y(T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1})^{n+1}\} + \alpha \Delta t G_{i,j}^{n+1} =$$

$$T_{i,j}^n - (1 - \xi) \{Fo_x(T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})^n + Fo_y(T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1})^n\} + \alpha \Delta t G_{i,j}^n \quad (57)$$

$$-\xi Fo_x(T_{i-1,j} + T_{i+1,j})^{n+1} + [2\xi(Fo_x + Fo_y) + 1]T_{i,j}^{n+1} - \xi Fo_y(T_{i,j-1} + T_{i,j+1})^{n+1} = (1 - \xi)Fo_x(T_{i-1,j} + T_{i+1,j})^n$$

$$- [2(1 - \xi)(Fo_x + Fo_y) - 1]T_{i,j}^n + (1 - \xi)Fo_y(T_{i,j-1} + T_{i,j+1})^n + (1 - \xi)\alpha \Delta t G_{i,j}^n + \xi \Delta t G_{i,j}^{n+1} \quad (58)$$

223. Análisis de nodos

A continuación se observan las diferencias finitas realizadas en cada nodo para su respectiva condición:

1. Nodo tipo 1:

Su condición es:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (59)$$

Por lo que al realizar diferencias finitas se obtiene que:

$$T_{i,j} = 35^\circ C \quad (60)$$

2. Nodo tipo 2:

Su condición está dada por la ecuación 48, con ella se realiza la discretización por diferencia finitas resultando la ecuación 58.

3. Nodo tipo 3:

Su condición está dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (61)$$

Por lo que su discretización por diferencias finitas resulta en:

$$T_{i,j} = 20^\circ C \quad (62)$$

4. Nodo tipo 4:

Su condición está dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (63)$$

Por lo que su discretización por diferencias finitas resulta en:

$$T_{i,j} = 150^\circ C \quad (64)$$

224. Implementación computacional

Se realiza el desarrollo de un código en python para obtener numéricamente el campo $T(x, y, t)$ y definir la malla con diferentes perfiles de temperatura.

225. Resultados estado transitorio - término fuente interna

2.3. Conclusiones

3. BIBLIOGRAFÍA

Cada informe deberá incluir una sección de bibliografía, y el número de referencias incluidas y EFECTIVAMENTE utilizadas será uno de los criterios de calificación del informe de taller.

- *Ferziger, J.H. and Peric, M.*. Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer. Tercera Edición, 2002.
- *Anderson, J.D.*. Computational Fluid Dynamics: The basics with applications. McGraw Hill. 1995.
- *Moukalled, F. et.al.*. The finite volume method in computational fluid dynamics. Springer. Vol 6. 2016
- *Hirsch, C.*. Numerical computation of internal & external flows. BH-Elsevier. Segunda Edición, 2007.