

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica

Taller 01 Sem II - 2024 Modelación Matemática

MODELOS BASADOS EN ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Nombre estudiante	Código	Grupo

Puntos importantes:

Para el presente taller es importante que se sigan las siguientes indicaciones:

- En todos los casos de estudio su grupo deberá presentar coherente y claramente los diferentes pasos del proceso de modelación, así como una clara argumentación de las simplificaciones o suposiciones usadas para la construcción y/o estudio de los diferentes casos y modelos.
- Debe **siempre** indicarse de forma explícita en el texto los **principios de conservación usados**
- Cada caso debe incluir un adecuado número de referencias bibliográficas que deberán haber sido usadas para contextualizar el caso, o para realizar el proceso de validación.

ATENCIÓN:

La calidad de la presentación de los informes escritos será especialmente considerada en la calificación. Esto incluye: calidad y resolución de gráficos, inclusión de referencias especializadas, y nivel de análisis de resultados y conclusiones que se extraigan de ellos.

Los casos de estudio del presente taller, y sus respectivas ponderaciones de calificación son:

Caso de estudio	Ponderación
Sección Caso 1	50 %
Sección Caso 2	50 %

Fecha límite de entrega SIN PENALIZACIÓN: Lunes 25 de Noviembre de 2024 23:59:59

Fecha límite de entrega CON PENALIZACIÓN: Martes 26 de Noviembre de 2024 12:00:00

Entrega debe incluir:

- Carga en la plataforma virtual del informe final **EN FORMATO PDF**. El archivo PDF deberá ser cargado en el aula virtual por todos y cada uno de los estudiantes del grupo.
- Envío por correo electrónico de un (1) solo archivo comprimido, **EN FORMATO ZIP**, que incluya: (1) Documento de Informe Final (PDF); (2) Códigos de Implementaciones Computacionales; y (3) Cualquier otro anexo que se considere pertinente.
- El nombre del archivo **ZIP** deberá seguir el siguiente formato:
<Apellido01>_<Apellido02>_<Apellido03>_<Apellido04>_Taller01-2024S02.zip.
con los apellidos de los integrantes del grupo en orden alfabético y sin espacios en blanco.

Por ejemplo, un grupo de tres estudiantes con apellidos Suarez, Muñoz, Zuluaga y Becerra, deberá nombrar el archivo zip como: Becerra_Muñoz_Suarez_Zuluaga_Taller01-2024S02.zip
- Solo deberá enviarse un (1) archivo comprimido por grupo. Envíos adicionales simplemente NO se tendrán en cuenta y serán ignorados. (Es decir solo un estudiante del grupo deberá hacer el envío electrónico). Posteriormente se indicará el sitio de envío del archivo **ZIP**.

Caso 1. Sistema de tanques interconectados - 50 %

Arreglos de tanques interconectados son constantemente encontrados en aplicaciones de ingeniería, particularmente en plantas piloto químicas, así como en aplicaciones industriales de mezclado. Diferentes tipos de industrias recurren a arreglos de tanques para el control de flujos o de concentraciones de mezclado, así como para procesos de dosificación.

Uno de tales arreglos es mostrado en la Figura 1. Este sistema de tanques se está evaluando como sistema de mezclado variable de un solvente (por ejemplo, agua), con un reactivo x . En este sistema de tanques el denominado Tanque T_0 suministra un flujo variable de solvente al tanque T_1 , cuyo contenido está totalmente limpio (es decir con concentración nula), mientras que en los tanques T_1 , T_2 y T_4 se adiciona el reactivo x , con concentraciones c_3 , c_5 , y c_6 , respectivamente. Un flujo Q_D de solvente puro es es ingresado al sistema y distribuido entre los tanques T_2 , T_3 y T_4 , como se indica en la figura. La mezcla de reactivo es finalmente entregada por el sistema a través de Q_7

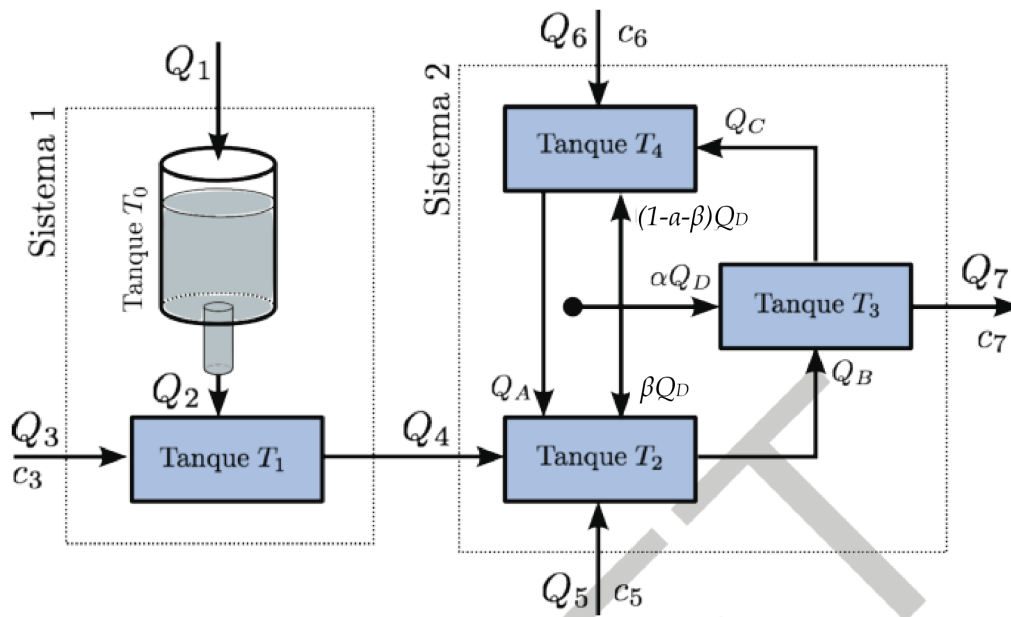


Figura 1: Esquema de un sistema de dosificación y mezclado

¿Qué se debe entregar?

Dadas las consideraciones anteriores su grupo debe:

- Construir los modelos matemáticos para simular los flujos volumétricos (Caudales) y la evolución de la concentración de x en cada uno de los tanques y a la descarga del sistema (c_7). El modelo del tanque T_0 debe incluir consideraciones de movimiento de la superficie libre.
- Parametrizar el modelo de manera que permita diseñar el Tanque T_0 , esto es: Debe permitir evaluar condiciones de desempeño del tanque (rebasamiento, vaciado total, etc), de acuerdo con dimensiones de la sección transversal del tanque y el agujero de descarga.
- Hacer la implementación computacional de los modelos anteriores, y realizar validación. El modelo computacional debe servir como herramienta de diseño del sistema completo.
- Usar su implementación computacional para sugerir diseños y sacar conclusiones acerca de la respuesta dinámica del dispositivo en cuestión.
- Hacer el análisis completo de la operación de tal dispositivo (realizar simulaciones, variación de parámetros, etc), usando las consideraciones de operación dadas, y los coeficientes indicados. En caso de requerirlo, su grupo puede adoptar decisiones respecto al valor de alguna variable, siempre y cuando sean justificadas.
- Presentar curvas de operación del sistema, bien sea del tipo de perfil temporal, o del tipo retrato de fase.

Cualquier suposición adicional que su grupo considere necesaria debe ser claramente justificada y soportada en el documento final. Se sugiere usar como material de apoyo la información presentada en Libii, 2003; Libii y Faseyitan, 1997, o cualquier otra bibliografía especializada.

Caso 2. Modelo de transmisión de sonido en oído humano (50 %)

El oído medio humano es una pequeña estructura mecánica compuesta por la membrana timpánica, tres huesecillos (martillo, yunque y estribo), los ligamentos del oído medio, tendones de los músculos y la cavidad del oído medio. Varios experimentos en el estudio de la función de transmisión de sonido del oído medio se han llevado a cabo en los huesos temporales humanos y de animales. Asimismo, en los últimos años se han desarrollado investigaciones sobre la posibilidad de generar modelos matemáticos que permitan obtener una mejor comprensión del mecanismo de transmisión de sonido en el oído humano. Como resultado, varios modelos del oído medio han sido propuestos. Uno de ellos consiste en un modelo paramétrico agrupado para la transmisión de sonido en el oído humano, el cual consiste de seis masas suspendidas con seis resortes y diez amortiguadores, tal como se muestra en la figura 2.

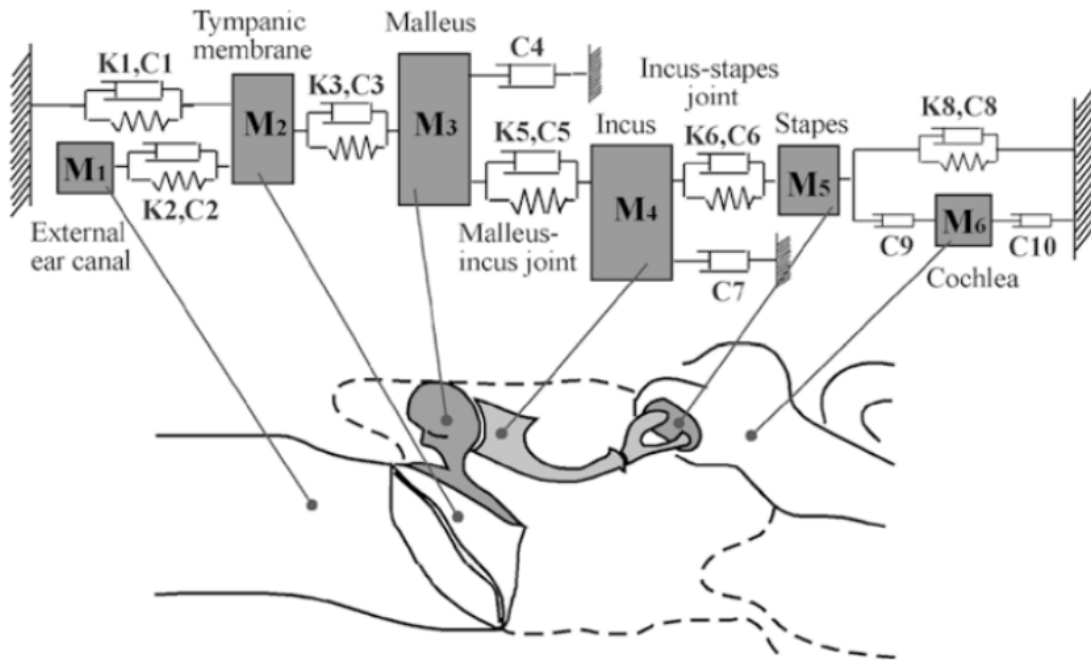


Figura 2: Representación esquemática del oído humano.

Para caracterizar el modelo, los valores de las seis masas ($M_1 - M_6$) y los efectos viscosos del fluido coclear (C_9 y C_{10}) se obtienen de datos anatómicos del oído humano publicados previamente. Los demás valores se obtienen mediante un proceso de optimización. Los valores de los diferentes parámetros son:

c_1 :	0,00007	K_1 :	1.175
c_2 :	0,5	K_2 :	20.001
c_3 :	1,74	K_3 :	94.740
c_4 :	0,122	K_5 :	1.000.017
c_5 :	0,359	K_6 :	167
c_6 :	0,00028	K_8 :	623
c_7 :	0,02		
c_8 :	0,00004		

Tabla 1: Los coeficientes de elasticidad de los resortes se expresan en N/m y los coeficientes de amortiguamiento en Ns/m

Lo que su grupo debe hacer:

- Construya un modelo numérico que sea capaz de predecir la posición de las diferentes masas, así como la velocidad de cada una de ellas en función del tiempo. Identifique claramente las ecuaciones constitutivas, variables y parámetros del modelo.
- Evalúe la influencia que tienen los parámetros k_1 , k_6 , k_8 , c_4 y c_7 en la respuesta de las masas M_2 y M_5 . Para este punto realice cambios de 0,1 a 10 veces el valor mostrado en la Tabla 1. Es recomendable construir gráficos de desplazamiento en función de la frecuencia de entrada al sistema.

Puntos importantes para la construcción del modelo:

- El modelo debe ser construido para señales de entrada sonoras con frecuencias entre 300 Hz y 5000 Hz.
- Los valores de las masas son $M_1 = 1,55 \text{ mg}$, $M_2 = 2,7 \text{ mg}$, $M_3 = 4 \text{ mg}$, $M_4 = 4 \text{ mg}$, $M_5 = 1,78 \text{ mg}$ y $M_6 = 25,5 \text{ mg}$.
- Este caso está basado en el estudio hecho y presentado por Feng y Gan, 2004.

Referencias

- Feng, B., & Gan, R. Z. (2004). Lumped parametric model of the human ear for sound transmission. *Biomechanics and modeling in mechanobiology*, 3(1), 33-47.
- Libii, J. N. (2003). Mechanics of the slow draining of a large tank under gravity. *American Journal of Physics*, 71(11), 1204-1207.
- Libii, J. N., & Faseyitan, S. O. (1997). 'Data acquisition systems in the fluid mechanics laboratory: Draining of a tank. *Proceedings of the National Conference and Exposition of the American Society for Engineering Education (ASEE)*.