	Universidad Nacional de Colombia **Facultad de Ingeniería** Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica **Taller 02** **Sem II - 2024** **Modelación Matemática**

TALLER 02 - Modelación con EDP's

Nombre estudiante	Código	Grupo

Puntos importantes:

Para el presente taller es importante que se sigan las siguientes indicaciones:

- En todos los casos de estudio su grupo deberá presentar coherente y claramente los diferentes pasos del proceso de modelación, así como una clara argumentación de las simplificaciones o suposiciones usadas para la construcción y/o estudio de los diferentes casos y modelos.
- Debe **siempre** indicarse de forma explícita en el texto los **principios de conservación usados**
- Cada caso debe incluir un adecuado número de referencias bibliográficas que deberán haber sido usadas para contextualizar el caso, o para realizar el proceso de validación.
- Deben incluirse los códigos fuente de cualquier modelo computacional elaborado

ATENCIÓN:

La calidad de la presentación de los informes escritos será especialmente considerada en la calificación. Esto incluye: calidad y resolución de gráficos, inclusión de referencias especializadas, y nivel de análisis de resultados y conclusiones que se extraigan de ellos.

Los casos de estudio del presente taller, y sus respectivas ponderaciones de calificación son:

Caso de estudio	Ponderación
Sección Caso 1	50 %
Sección Caso 2	50 %

Fecha límite de entrega virtual: Lunes 13 de Enero de 2025 (Límite recepción virtual: 11:59:00-14/01/2025)

Entrega debe incluir:

- Carga en la plataforma virtual del informe final **EN FORMATO PDF**. El archivo PDF deberá ser cargado en el aula virtual por todos y cada uno de los estudiantes del grupo.
- Envío por correo electrónico de un (1) solo archivo comprimido, **EN FORMATO ZIP**, que incluya: (1) Documento de Informe Final (PDF); (2) Códigos de Implementaciones Computacionales; y (3) Cualquier otro anexo que se considere pertinente.
- El nombre del archivo **ZIP** deberá seguir el siguiente formato:
  `<Apellido01>_<Apellido02>_<Apellido03>_Taller02-2024S02.zip`.
  con los apellidos de los integrantes del grupo en orden alfabético y sin espacios en blanco.

  Por ejemplo, un grupo de tres estudiantes con apellidos `Suarez`, `Muñoz`, y `Becerra`, deberá nombrar el archivo zip como: `Becerra_Muñoz_Suarez_Taller01-2024S02.zip`
- Solo deberá enviarse un (1) archivo comprimido por grupo. Envíos adicionales simplemente NO se tendrán en cuenta y serán ignorados. (Es decir solo un estudiante del grupo deberá hacer el envío electrónico). Posteriormente se indicará el sitio de envío del archivo **ZIP**.

Caso 1. Ecuación de Transporte Advectivo (50 %)

La ecuación unidimensional de transporte advectivo es comunmente usada para simular situaciones en las que el transporte advectivo (o convectivo) es la característica dominante del fenómeno físico considerado, y hay ausencia de fenómenos difusivos. Esta ecuación simplificada se puede escribir como,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

en donde se supone que el flujo (de la cantidad transportada) es cu, y la velocidad de transporte es c. Sin embargo, en esta ocasion se quiere resolver un caso donde se tiene un sistema de ecuaciones acopladas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \gamma\,(u - v) \tag{3}$$

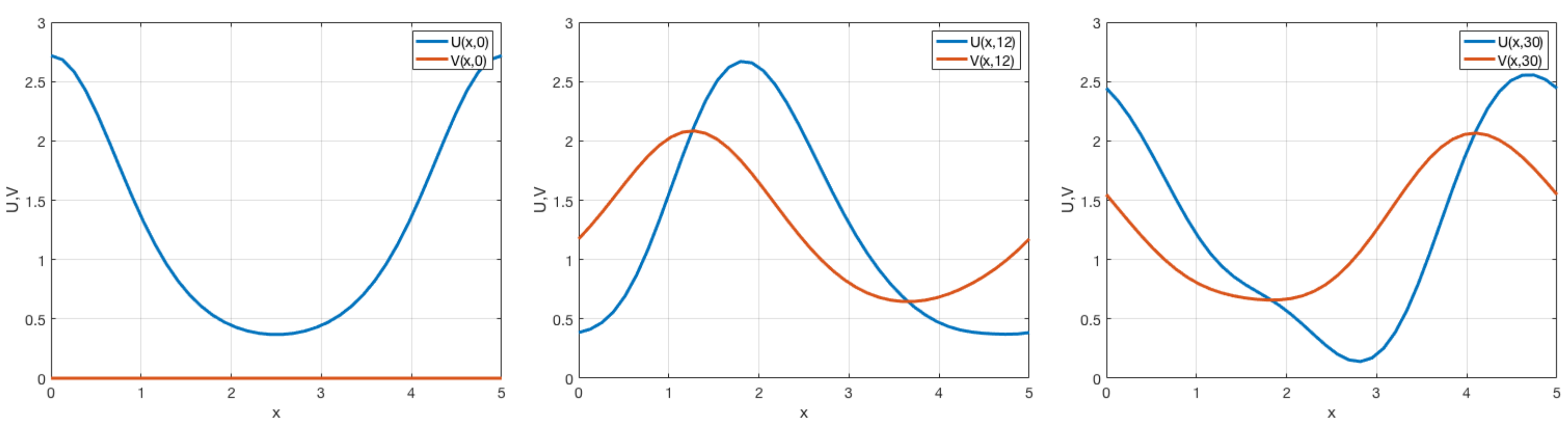
las cuales se usarán para modelar el transporte unidimensional de dos variables u y v. Para resolver este sistema de ecuaciones numericamente, considere un esquema de diferencias finitas centradas para los terminos espaciales, y un esquema de Runge-Kutta para los terminos en tiempo. Considere, además, que el problema está definido para un dominio espacial $x \in [0, L]$, y definido por las siguientes conditiones iniciales:

$$u(x,0) = \exp\left(\cos\left[\frac{2\pi x}{L}\right]\right), \qquad v(x,0) = 0 \tag{4}$$

Adicionalmente, se considerará el dominio espacial periódico, por lo que las conditiones de frontera se podrán definir como:

$$u(L,t) = u(0,t), \qquad v(L,t) = v(0,t) \tag{5}$$

Con el fin de facilitar el proceso de verificación de la calidad de su código y resultados, a continuación se muestra el resultado esperado (Valores de u y v vs. posición), para las condiciones dadas anteriormente, en diferentes instantes (Figura 1).



(a) Perfiles de u y v vs x para $t = 0\,s$ (b) Perfiles de u y v vs x para $t = 12\,s$ (c) Perfiles de u y v vs x para $t = 30\,s$

Figura 1: Perfiles espaciales de u, y v para diferentes instantes de tiempo. Resultados obtenidos usando $L = 5.0\,m, c = 1.0\,m/s$, $\gamma = 1.0\,s^{-1}$, $\Delta x = 0.125\,m$, y $\Delta t = 10^{-4}\,s$

¿Qué se debe realizar?

Dadas las consideraciones anteriores, su grupo debe:

1. Usar un esquema de Diferencias Finitas Centradas y un esquema de integración temporal Runge-Kutta, para resolver el sistema de ecuaciones ecuaciones (2) y (3) sujetos a las condiciones iniciales y de frontera ecuaciones (4) y (5)
2. Presentar de forma clara la formulación general para un $i-$ésimo nodo interno, así como para los nodos de frontera.
3. Realizar experimentos numéricos con diferentes resoluciones de malla espacial y diferentes niveles de refinamiento temporal.
4. Discutir:
   - Efecto del tamaño de malla
   - Efecto de la relación $c\Delta t/\Delta x$ en la solución
   - Presencia de posibles inestabilidades numéricas para relaciones de $\Delta x/\Delta t$

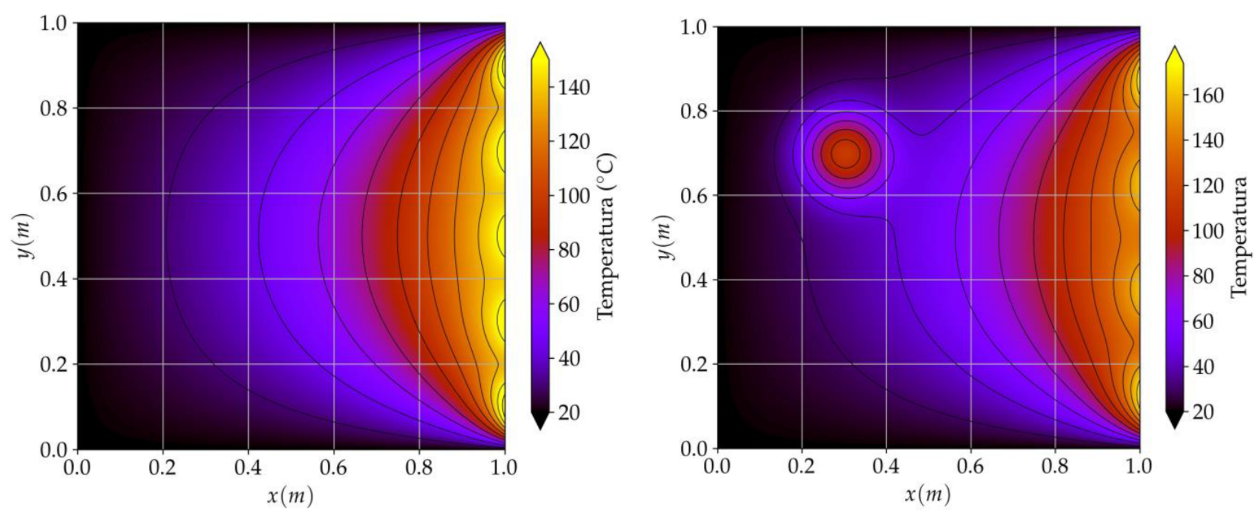
Caso 2. Conducción de calor en una placa plana rectangular (50 %)

El presente caso está dividido en dos partes o metodologías de análisis. A continuación, se presentan los detalles de cada metodología a considerar, pero los requerimientos y actividades se indican al final del enunciado del presente caso. En cualquier caso, se presenta primero un breve contexto del caso en estado estacionario.

Conducción de Calor 2D - Estado estacionario

Considere un caso de conducción de calor en una placa plana rectangular que es calentada en uno de sus bordes (como se indica en la Figura Figura 2**a**). Es estado estacionario, dicha situación se puede modelar mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\nabla^2 T = 0 \qquad sobre \qquad \Omega = (0,1)\times(0,1) \tag{6}$$



(a) Perfil de temperatura esperado para parte 1.

(b) Perfil de temperatura "aproximado" para parte 3

Figura 2: Esquema de una placa plana sometida a diferentes condiciones de conducción de calor. **a.**: distribución inducida por fuente de calor estacionaria. **b.**: Caso en el que se prescribe una fuente interna de calor

El caso estacionario presentado a manera de ilustración en la Figura 2**a** ha sido modelado usando condiciones de frontera Dirichlet dadas por las siguientes expresiones:

$$T(0,y) = 20°C \qquad para \qquad 0 \leq y \leq b \tag{7}$$

$$T(a,y) = 150°C \qquad para \qquad 0 \leq y \leq b \tag{8}$$

$$T(x,0) = T(x,b) = 20°C \qquad para \qquad 0 \leq x \leq a \tag{9}$$

Para el modelo dado por la ecuación (6), con condiciones de frontera Dirichlet como las indicadas en las ecuaciones (7) a (9), es posible encontrar una solución analítica general mediante la técnica de separación de variables. Una de tales soluciones se puede escribir como:

$$T(x,y) = (T_2 - T_1)H(x,y) + T_1 \tag{10}$$

donde para el caso a analizar se puede definir $T_1 = 20°C$, $T_2 = 150°C$, y la función $H(x,y)$ puede ser construida a través de la serie:

$$H(x,y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} \frac{2}{n} \frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \sin(\frac{n\pi y}{b}) \tag{11}$$

Parte 1. Estado transitorio - condición de borde variable

En esta versión del problema a analizar se quiere considerar una condición de borde transitoria. Las nuevas condiciones de frontera, una de ellas incluyendo variaciones temporales, están ahora definidas así:

$$\nabla_x T(0,y) = 0 \qquad para \qquad 0 \leq y \leq b \tag{12}$$

$$T(a,y) = 50°C \sin(\omega t) + 130°C \qquad para \qquad 0 \leq y \leq b \qquad y \qquad 0 \leq t \leq \frac{4\pi}{\omega} \tag{13}$$

$$\nabla_y T(x,0) = \nabla_y T(x,b) = 0 \qquad para \qquad 0 \leq x \leq a \tag{14}$$

Donde los valores de temperatura se consideran medidos en $°C$, y el valor de la frecuencia temporal (ω) de de la fuente en $x = a$ deberá ajustarse de manera que la temperatura promedio de ninguna de las otras fronteras sea mayor a $40°C$, ni menor a $20°C$.

Parte 2. Estado transitorio - término fuente interna

Finalmente, se debe considerar una situación similar a la indicada anteriormente pero con una fuente interna adicional. Las condiciones de frontera son estacionarias nuevamente, pero el termino fuente varía en el tiempo. Una representación aproximada del perfil de temperaturas para este caso, en un instante arbitrario, se presenta en la Figura **??b**. El modelo matemático para este caso se presenta a continuación:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + G(x,y,t) \qquad sobre \qquad \Omega = (0,1) \times (0,1) \tag{15}$$

En donde el término fuente está dado por la siguiente expresión:

$$G(x,y,t) = G_0 \left[\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + 2\sigma}{2\pi\sigma^6} \right] \exp\left(\frac{-((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)}{2\sigma^2} \right) \sin(\omega t) \tag{16}$$

En esta tercera parte del caso se debe analizar el proceso de transferencia de calor con fuente interna, modelado de acuerdo con la ecuación (15), y con los siguientes parámetros y cndiciones de frontera:

$$0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega} \tag{17}$$

$$T(0,y) = 35°C \qquad para \qquad 0 \leq y \leq b \tag{18}$$

$$T(a,y) = 160°C \qquad para \qquad 0 \leq y \leq b \tag{19}$$

$$T(x,0) = T(x,b) = 20°C \qquad para \qquad 0 \le x \le a \tag{20}$$

$$\sigma = 0.07 \qquad G_0 = 2.5 \qquad x_0 = 0.3 \qquad y_0 = 0.7 \tag{21}$$

Cualquier consideración adicional no incluida en el presente documento puede ser consultada con los docentes de la asignatura, o determinada por el grupo de trabajo mediante consulta de referencias bibliográficas y literatura especializada.

Qué se debe realizar?

Dado el problema expuesto, y para cada caso particular, su grupo debe:

- Plantear esquemas de diferencias finitas centradas para discretizar los modelos matemáticos presentados para este caso de estudio, en cada una de las situaciones planteadas.
- Implementar el uso de malla uniforme, pero con la posibilidad de usar diferentes tamaños de malla diferente en cada dirección (en x y en y).
- Usar un esquema semi-implícito temporal (Crank-Nicolson) para resolver la evolución en el tiempo de los perfiles de temperatura y determinar estados transitorio y pseudo-estacionario.
- Escribir un código en `python` para poder obtener numéricamente el campo $T(x, y, t)$.
- Realizar experimentos numéricos para discutir efecto del tamaño de malla.
- Producir curvas de evolución temporal de los perfiles de temperatura para "sensores" predefinidos.
- Producir curvas de error entre soluciones a diferentes resoluciones espacio-temprales.
- Producir curvas de error con respecto a la solucion estacionaria (Solamente Parte 1).

Nota: Para el cálculo del error se recomienda omitir la región más cercana a las discontinuidades (esquinas superior e inferior derecha

Recomencaciones y orientación

Se suministrarán códigos de apoyo que ustedes podrán utilizar para la realización de este punto.