MODI – Projekt 1, zadanie 18

Dane:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(t) + x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u^2(t) + \alpha_3 u^3(t) + \alpha_4 u^4(t))$$

$$y(t) = x_1(t)$$

gdzie: $K = 3, T_1 = 12, T_2 = 5,\ \alpha_1 = 0{,}6,\ \alpha_2 = 1{,}35,\ \alpha_3 = -0{,}57,\ \alpha_4 = 0{,}53, -1 \leq u \leq 1.$

Po wstawieniu danych do równań otrzymujemy:

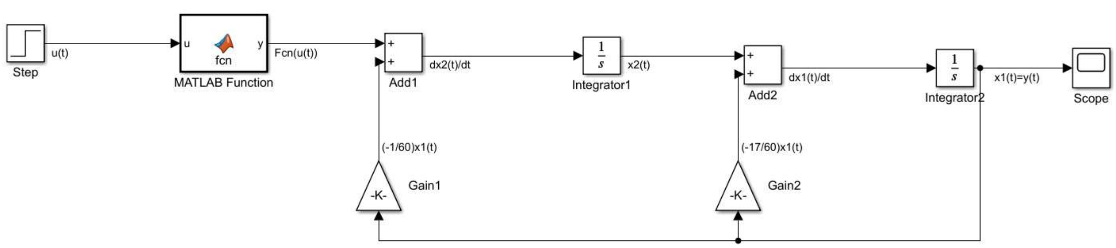
$$\dot{x_1}(t) = -\frac{17}{60} x_1(t) + x_2(t)$$

$$\dot{x_2}(t) = -\frac{1}{60} x_1(t) + \frac{1}{20} (0{,}6u(t) + 1{,}35u^2(t) - 0{,}57u^3(t) + 0{,}53u^4(t))$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Punkt 1:

Reprezentacja graficzna modelu dynamicznego ciągłego:



W bloku *„fcn”* realizowana jest funkcja: $\frac{K}{T_1 T_2} (\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u^2(t) + \alpha_3 u^3(t) + \alpha_4 u^4(t))$, natomiast w blokach *„Gain1”* i *„Gain2”* wpisano odpowiednio $-\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$ oraz $-\frac{1}{T_1 T_2}$.

Punkt 2:

Wyznaczenie charakterystyki statycznej:

Charakterystykę statyczną $y(u)$ wyznaczamy przyrównując $\frac{dx_1(t)}{dt}$ oraz $\frac{dx_2(t)}{dt}$ do zera. Usuwamy również indeks *„(t)”* występujący w równaniach, a następnie rozwiązujemy dany układ równań.

$$0 = -\frac{17}{60}x_1 + x_2$$

$$0 = -\frac{1}{60}x_1 + \frac{1}{20}(0{,}6u + 1{,}35u^2 - 0{,}57u^3 + 0{,}53u^4)$$

$$y = x_1$$

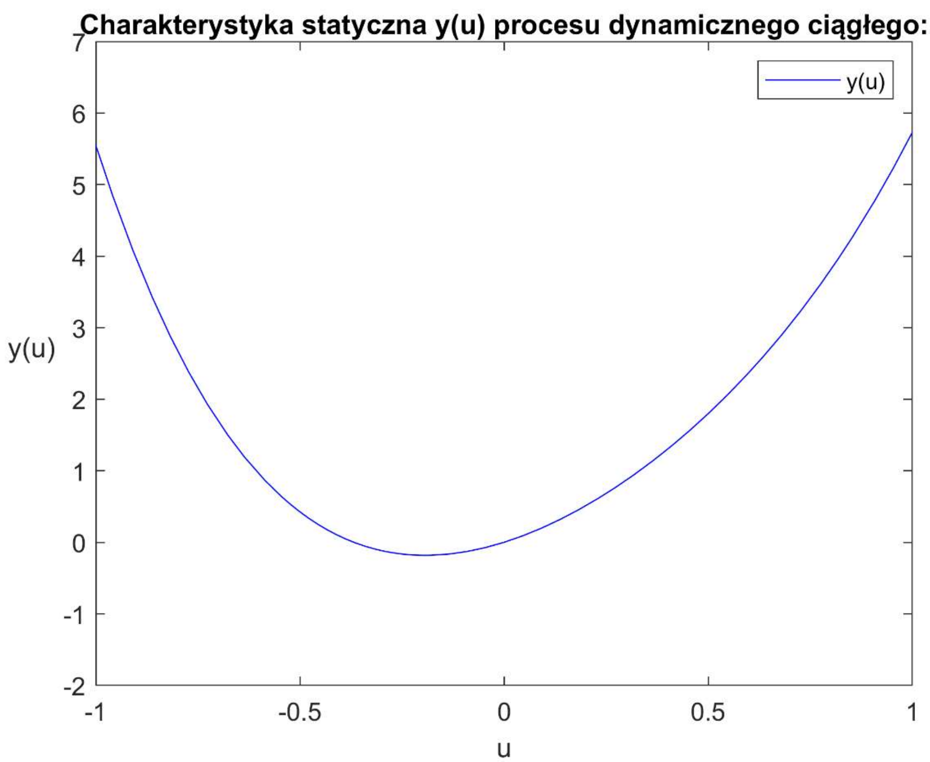
Z drugiego równania wyznaczamy x_1 i postawiamy do równania $y = x_1$.

$$0 = -\frac{1}{60}x_1 + \frac{1}{20}(0{,}6u + 1{,}35u^2 - 0{,}57u^3 + 0{,}53u^4) \quad /*\,60$$

$$0 = -x_1 + 3(0{,}6u + 1{,}35u^2 - 0{,}57u^3 + 0{,}53u^4)$$

$$y = x_1 = y(u) = 1{,}8u + 4{,}05u^2 - 1{,}71u^3 + 1{,}59u^4$$

Przebieg charakterystyki statycznej $y(u)$***:***



Punkt 3:

Analityczne wyznaczenie charakterystyki statycznej zlinearyzowanej w dowolnym punkcie $\bar{u}$***:***

$\bar{u}$ – punkt linearyzacji

Aby wyznaczyć zlinearyzowaną charakterystykę statyczną rozwijamy funkcję $y(u)$ w szereg Taylora wzorem:

$$y(u) = y(\bar{u}) + \frac{d}{dt}\big(y(u)\big)|_{u=\bar{u}} \cdot (u - \bar{u})$$

Stąd:

$$y(u) \approx [1{,}8\bar{u} + 4{,}05\bar{u}^2 - 1{,}71\bar{u}^3 + 1{,}59\bar{u}^4] + \frac{d}{dt}[1{,}8u + 4{,}05u^2 - 1{,}71u^3 + 1{,}59u^4]\,|_{u=\bar{u}} \cdot (u - \bar{u})$$

$$y(u) \approx [1{,}8\bar{u} + 4{,}05\bar{u}^2 - 1{,}71\bar{u}^3 + 1{,}59\bar{u}^4] + [1{,}8 + 8{,}1u - 5{,}13u^2 + 6{,}36u^3]\,|_{u=\bar{u}} \cdot (u - \bar{u})$$

$$y(u) \approx [1{,}8\bar{u} + 4{,}05\bar{u}^2 - 1{,}71\bar{u}^3 + 1{,}59\bar{u}^4] + [1{,}8 + 8{,}1\bar{u} - 5{,}13\bar{u}^2 + 6{,}36\bar{u}^3] \cdot (u - \bar{u})$$

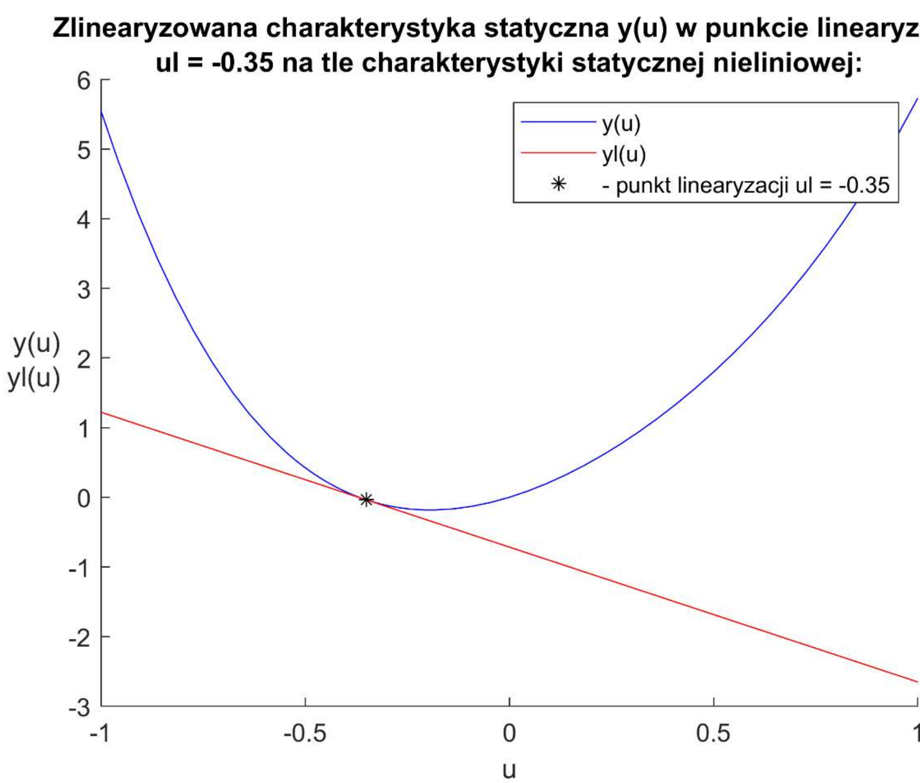
$$y(u) \approx 1{,}8\bar{u} + 4{,}05\bar{u}^2 - 1{,}71\bar{u}^3 + 1{,}59\bar{u}^4 + 1{,}8u + 8{,}1\bar{u}u - 5{,}13\bar{u}^2u + 6{,}36\bar{u}^3u - 1{,}8\bar{u} - 8{,}1\bar{u}^2 + 5{,}13\bar{u}^3 - 6{,}36\bar{u}^4$$

Zlinearyzowana charakterystyka statyczna dynamicznego modelu ciągłego:

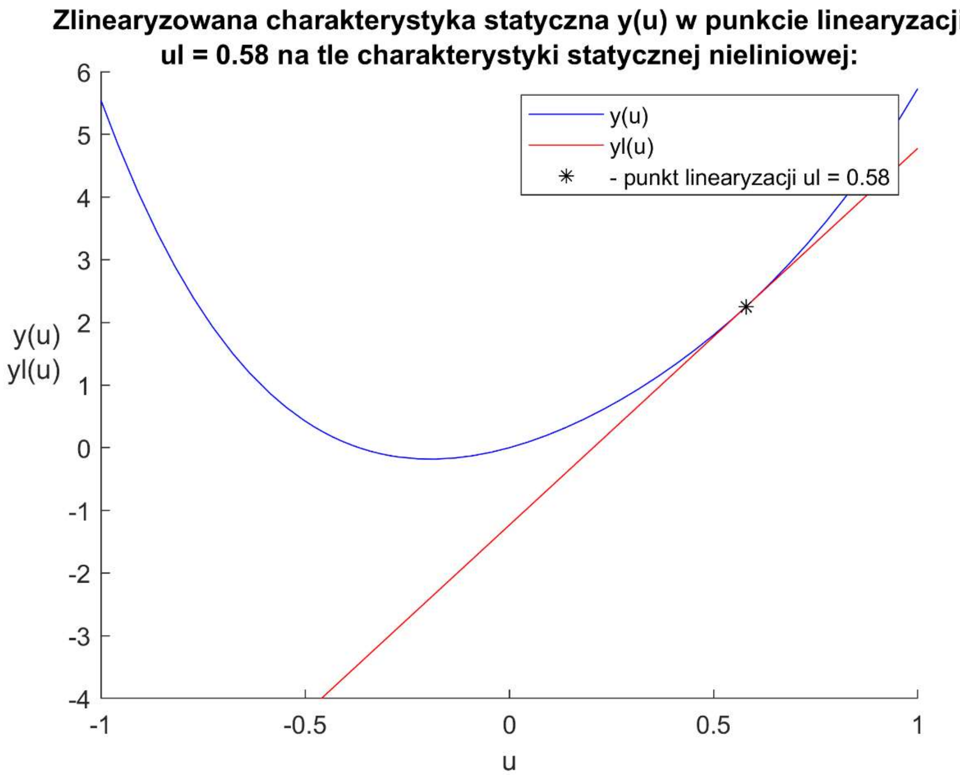
$$y(u) \approx [1{,}8 + 8{,}1\bar{u} - 5{,}13\bar{u}^2 + 6{,}36\bar{u}^3]u - 4{,}05\bar{u}^2 + 3{,}42\bar{u}^3 - 4{,}77\bar{u}^4$$

Punkt 4:

Zlinearyzowana charakterystyka statyczna y(u) w punkcie linearyzacji', 'ul = -0.35 na tle charakterystyki statycznej nieliniowej:



Zlinearyzowana charakterystyka statyczna y(u) w punkcie linearyzacji', 'ul = 0.58 na tle charakterystyki statycznej nieliniowej:



Punkt 5:

Wyznaczenie równań dynamicznego modelu dyskretnego:

Aby wyznaczyć równania dynamicznego modelu dyskretnego, należy przybliżyć pochodne metodą Eulera „do przodu", a indeks „(t)" zamienić na „(k)", gdzie T to czas próbkowania.

$$\frac{x_1(k+1)-x_1(k)}{T} = -\frac{17}{60}x_1(k) + x_2(k)$$

$$\frac{x_2(k+1)-x_2(k)}{T} = -\frac{1}{60}x_1(k) + \frac{1}{20}(0{,}6u(k) + 1{,}35u^2(k) - 0{,}57u^3(k) + 0{,}53u^4(k))$$

$$y(k) = x_1(k)$$

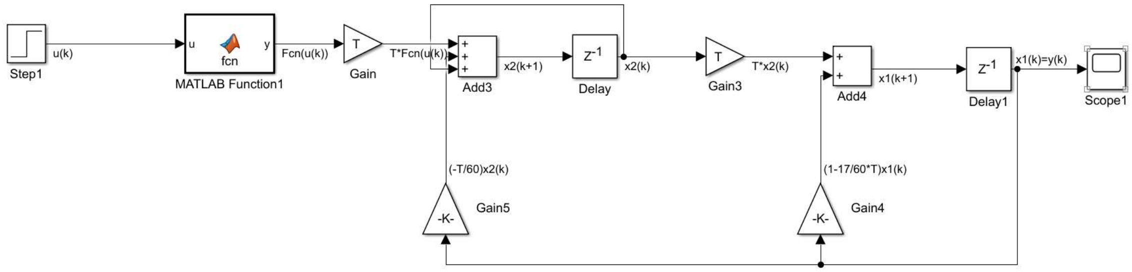
Po przekształceniach otrzymujemy równania o ostatecznej postaci:

$$x_1(k+1) = (1-\frac{17}{60}T)x_1(k) + Tx_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -\frac{T}{60}x_1(k) + x_2(k) + \frac{T}{20}(0{,}6u(k) + 1{,}35u^2(k) - 0{,}57u^3(k) + 0{,}53u^4(k))$$

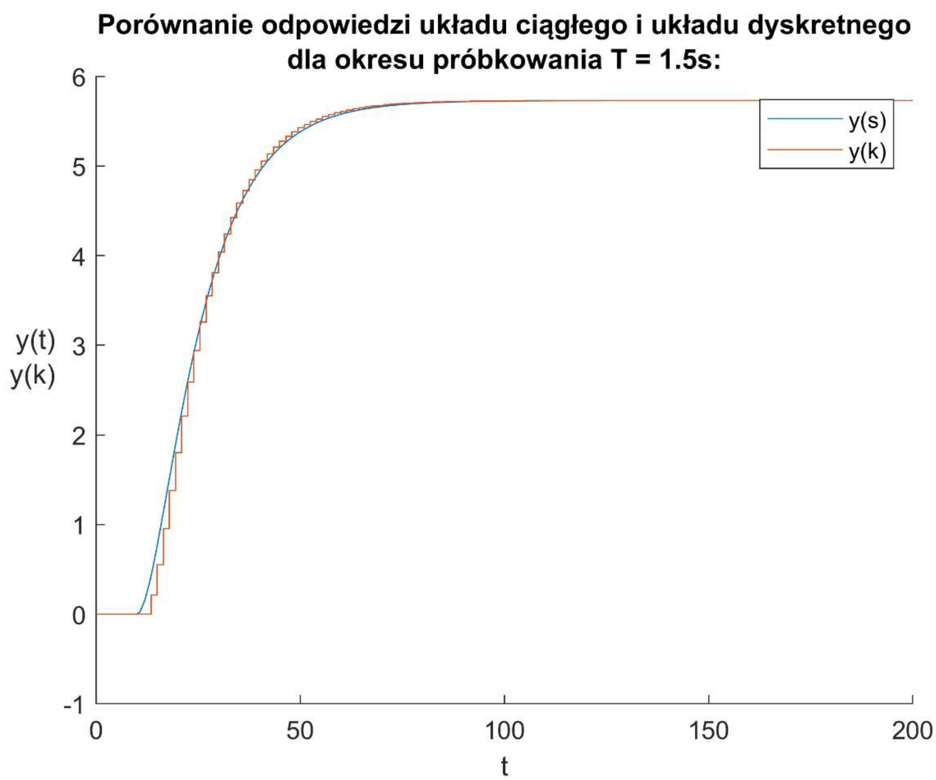
$$y(k) = x_1(k)$$

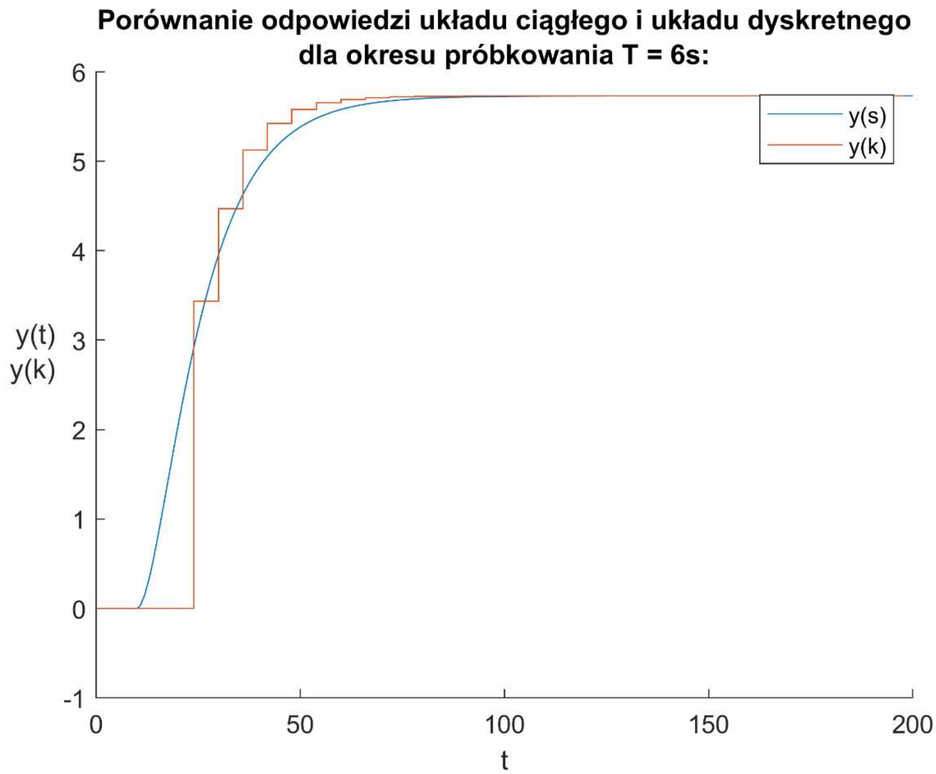
Reprezentacja graficzna modelu dynamicznego dyskretnego:



W bloku *„fcn”* realizowana jest funkcja: $\frac{K}{T_1T_2}(\alpha_1 u(k) + \alpha_2 u^2(k) + \alpha_3 u^3(k) + \alpha_4 u^4(k))$, natomiast w blokach *„Gain4”* i *„Gain5”* wpisano odpowiednio $1 - \frac{T_1+T_2}{T_1T_2}T$ oraz $-\frac{T}{T_1T_2}$.

Punkt 6:





Patrząc na powyższe wykresy możemy zauważyć, że im mniejszy czas próbkowania tym odpowiedź układu dyskretnego bardziej przypomina odpowiedź układu ciągłego.

Punkt 7:

Analityczne wyznaczenie dynamicznego modelu dyskretnego zlinearyzowanego w dowolnym punkcie $\bar{u}$:

$\bar{u}$ – punkt linearyzacji

Aby wyznaczyć zlinearyzowaną charakterystykę statyczną rozwijamy funkcję $f\big(u(k)\big) = 0{,}6u(k) + 1{,}35u^2(k) - 0{,}57u^3(k) + 0{,}53u^4(k)$ w szereg Taylora poniższym wzorem, a następnie wstawiamy postać zlinearyzowaną do drugiego równania.

Linearyzacja funkcji $f\big(u(k)\big)$:

$$f(u(k)) = f(\bar{u}) + \frac{d}{dt}\big(f(u(k))\big)|_{u(k)=\bar{u}} \cdot (u(k) - \bar{u})$$

$$f(u(k)) \approx [0{,}6\bar{u} + 1{,}35\bar{u}^2 - 0{,}57\bar{u}^3 + 0{,}53\bar{u}^4] + [0{,}6 + 2{,}7u(k) - 1{,}71u^2(k) + 2{,}12u^3(k)]|_{u(k)=\bar{u}} \cdot (u(k) - \bar{u})$$

$$f(u(k)) \approx 0{,}6\bar{u} + 1{,}35\bar{u}^2 - 0{,}57\bar{u}^3 + 0{,}53\bar{u}^4 + [0{,}6 + 2{,}7\bar{u} - 1{,}71\bar{u}^2 + 2{,}12\bar{u}^3]|_{u(k)=\bar{u}} \cdot (u(k) - \bar{u})$$

$$f(u(k)) \approx 0{,}6\bar{u} + 1{,}35\bar{u}^2 - 0{,}57\bar{u}^3 + 0{,}53\bar{u}^4 + 0{,}6u(k) + 2{,}7\bar{u}u(k) - 1{,}71\bar{u}^2u(k) + 2{,}12\bar{u}^3u(k) - 0{,}6\bar{u} - 2{,}7\bar{u}^2 + 1{,}71\bar{u}^3 - 2{,}12\bar{u}^4$$

$$f(u(k)) \approx -1{,}35\bar{u}^2 + 1{,}14\bar{u}^3 - 1{,}59\bar{u}^4 + u(k)[0{,}6 + 2{,}7\bar{u} - 1{,}71\bar{u}^2 + 2{,}12\bar{u}^3]$$

Ostatecznie otrzymujemy następujące równania:

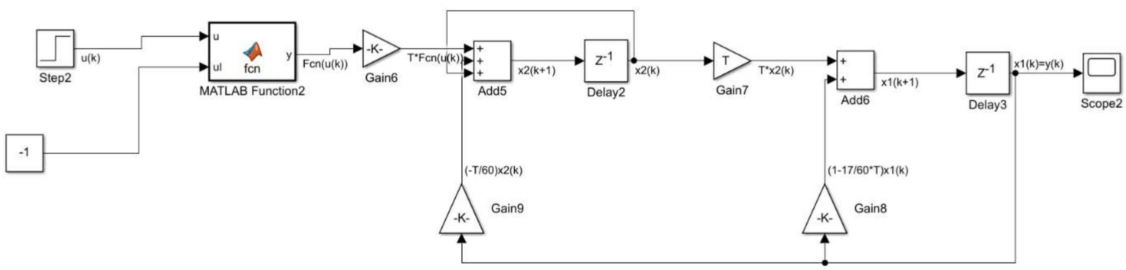
$$x_1(k+1) = (1 - \frac{17}{60}T)x_1(k) + Tx_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -\frac{T}{60}x_1(k) + x_2(k) + \frac{T}{20}[u(k)(0{,}6 + 2{,}7\bar{u} - 1{,}71\bar{u}^2 + 2{,}12\bar{u}^3) - 1{,}35\bar{u}^2 + 1{,}14\bar{u}^3 - 1{,}59\bar{u}^4]$$

$$y(k) = x_1(k)$$

Punkt 8:

Reprezentacja graficzna zlinearyzowanego modelu dynamicznego dyskretnego:

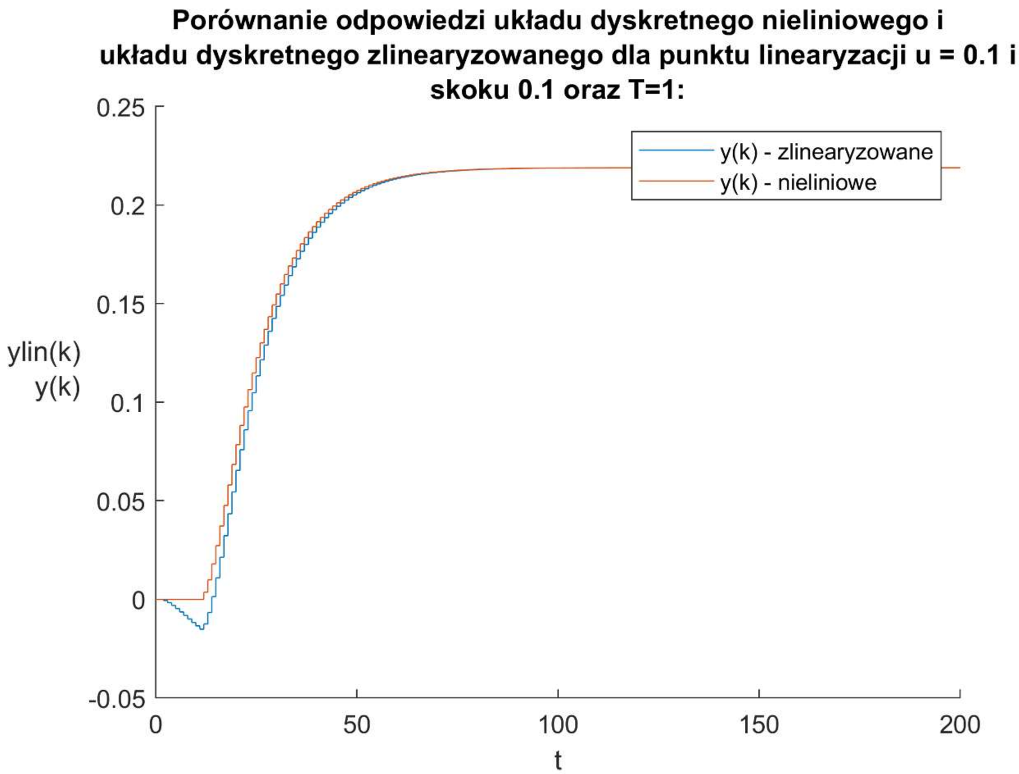


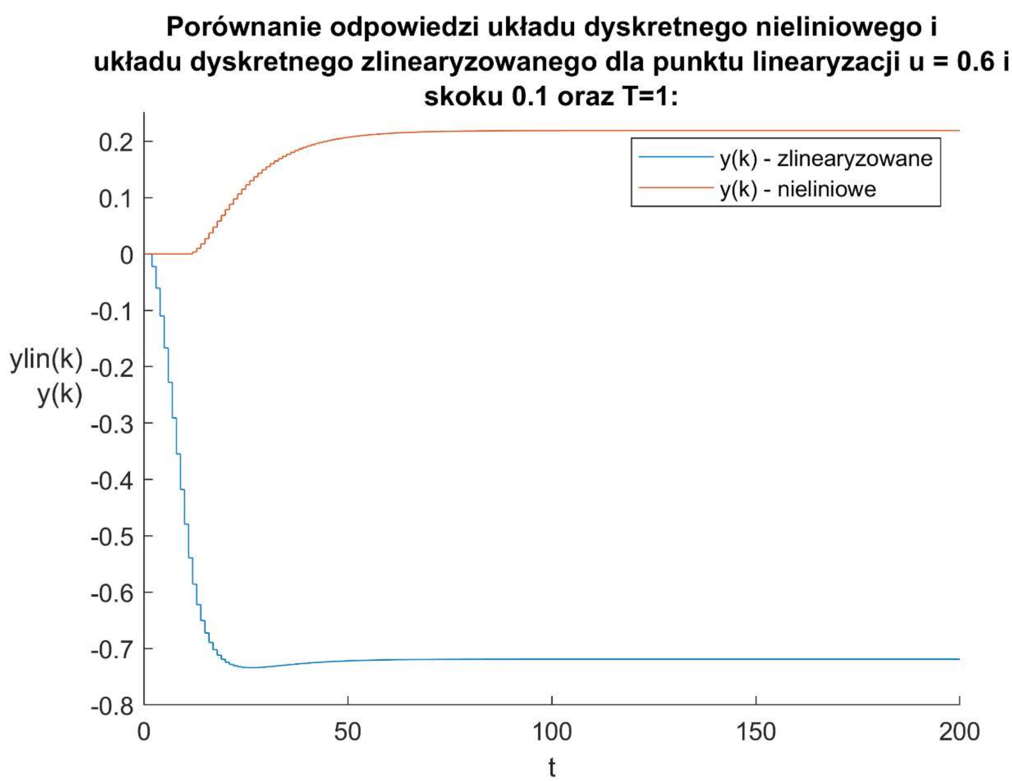
Zmienna ul w bloku *„fcn"* oznacza punkt linearyzacji. W blok *„fcn"* wpisano: $[u(k)(0{,}6 + 2{,}7\bar{u} - 1{,}71\bar{u}^2 + 2{,}12\bar{u}^3) - 1{,}35\bar{u}^2 + 1{,}14\bar{u}^3 - 1{,}59\bar{u}^4]$.

Punkt 9:

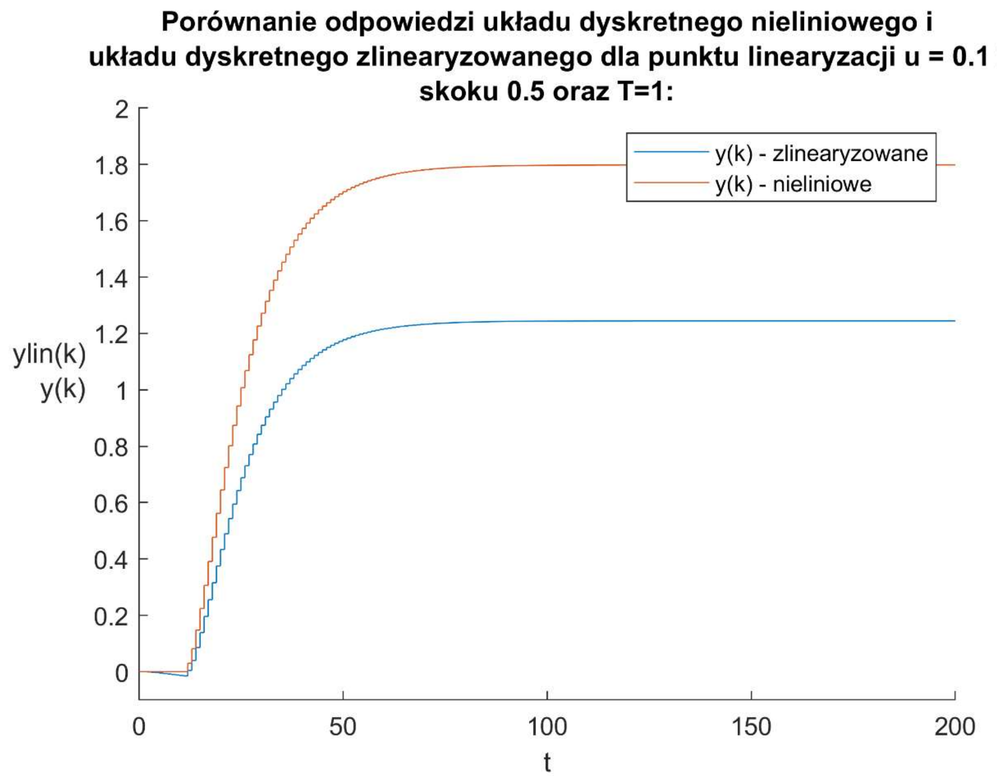
Symulacja układów dyskretnych (zlinearyzowanego i nieliniowego) oraz badanie ich odpowiedzi dla „małego" (u = 0.1), „średniego" (u = 0.5) i „dużego" (u = 1) sygnału sterującego:

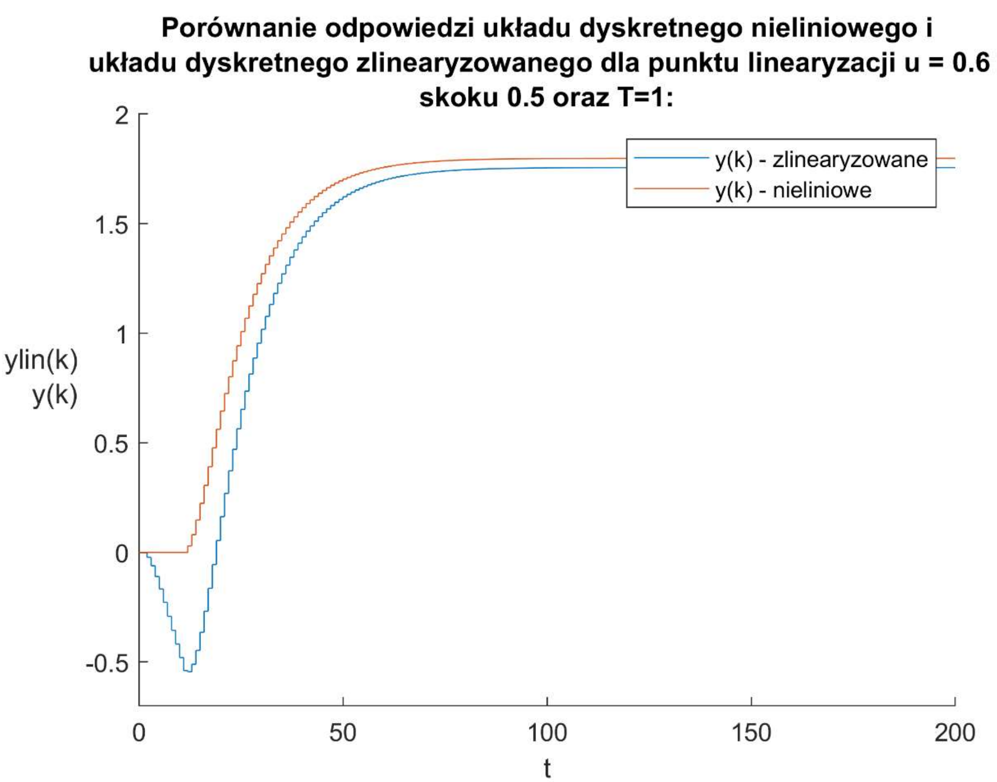
„Mały" sygnał sterujący:


Porównanie odpowiedzi układu dyskretnego nieliniowego i układu dyskretnego zlinearyzowanego dla punktu linearyzacji u = 0.1 i skoku 0.1 oraz T=1:
y(k) - zlinearyzowane
y(k) - nieliniowe
ylin(k)
y(k)
t
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
0
50
100
150
200

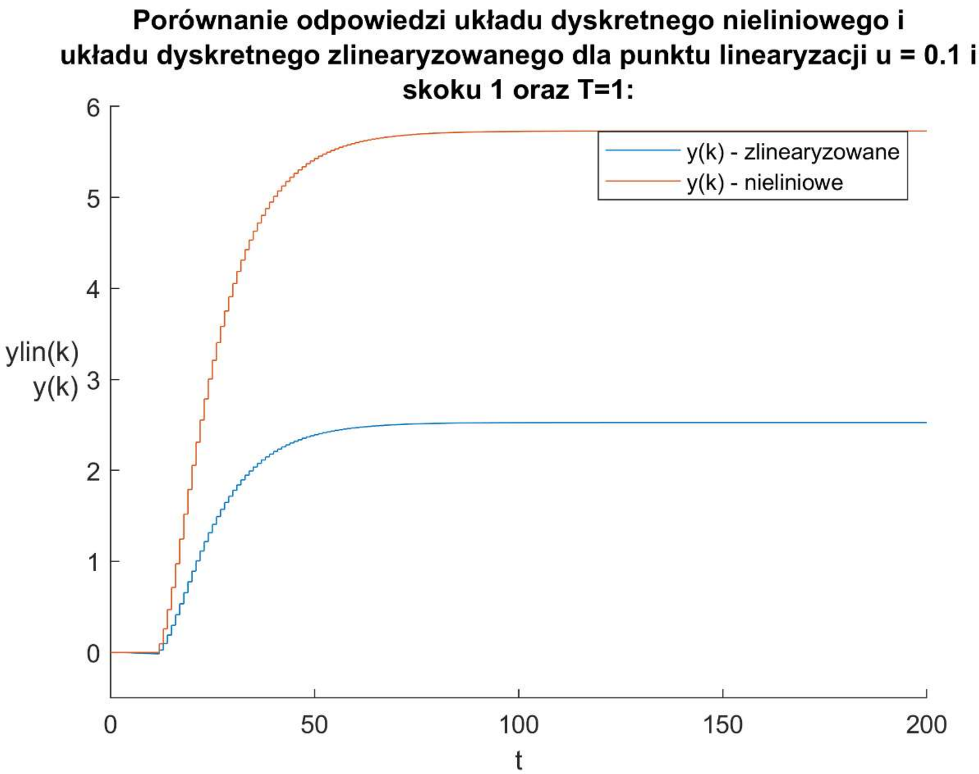

Porównanie odpowiedzi układu dyskretnego nieliniowego i układu dyskretnego zlinearyzowanego dla punktu linearyzacji u = 0.6 i skoku 0.1 oraz T=1:
y(k) - zlinearyzowane
y(k) - nieliniowe
ylin(k)
y(k)
t
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
-0.8
0
50
100
150
200

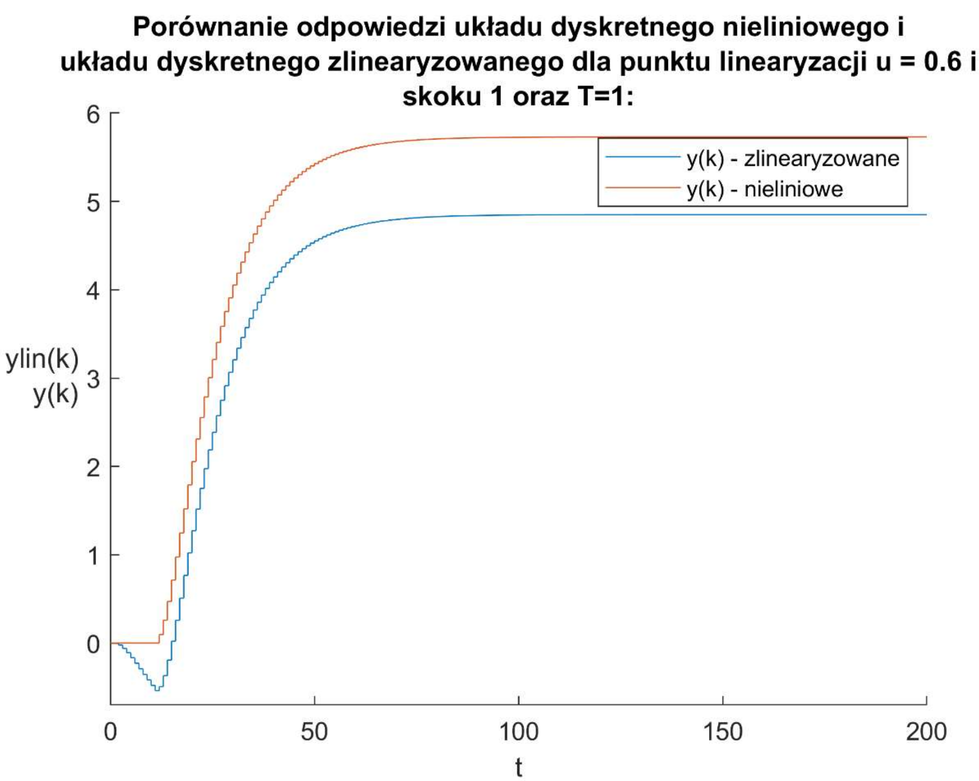
„Średni" sygnał sterujący:





„Duży" sygnał sterujący:





Analizując zamieszczone wykresy możemy zauważyć, że im większy sygnał sterujący tym większa odpowiedź zarówno układu nieliniowego jak i zlinearyzowanego. Gdy zwiększamy punk linearyzacji powiększa się dołek występujący na początku przebiegu wyjścia układu zlinearyzowanego w odpowiedzi na skok sygnału sterującego. Warto również zauważyć, że gdy punkt linearyzacji jest większy znacznie większy od skoku to wyjście w modelu dynamicznym dyskretnym zlinearyzowanym przyjmuje wartości ujemne.

Punkt 10:

Wyznaczenie transmitancji dla zlinearyzowanego modelu dynamicznego:

Na podstawie poniższych równań odczytujemy macierze A, B, C, D potrzebne do obliczenie transmitancji.

$$x_1(k+1) = (1 - \frac{17}{60}T)x_1(k) + Tx_2(k)$$

$$x_2(k+1) = -\frac{T}{60}x_1(k) + x_2(k) + \frac{T}{20}[u(k)(0{,}6 + 2{,}7\bar{u} - 1{,}71\bar{u}^2 + 2{,}12\bar{u}^3) - 1{,}35\bar{u}^2 + 1{,}02\bar{u}^3 - 1{,}59\bar{u}^4]$$

$$y(k) = x_1(k)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{17}{60}T & T \\ -\frac{T}{60} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T}{20}[0{,}6 + 2{,}7\bar{u} - 1{,}71\bar{u}^2 + 2{,}12\bar{u}^3] \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0]$$

$$D = 0$$

Następnie korzystamy ze wzoru na transmitancję:

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

$$G(z) = [1 \quad 0]\left(z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 - \frac{17}{60}T & T \\ -\frac{T}{60} & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{T}{20}[0{,}6 + 2{,}7\bar{u} - 1{,}71\bar{u}^2 + 2{,}12\bar{u}^3] \end{bmatrix} + 0$$

Do wyznaczenia transmitancji użyto MatLaba i następującego polecenia:
G = [1 0] *[(z*[1 0; 0 1] - [1-17/60*T T; -T/60 1])^(-1)]*[0; T/20*(0.6+2.7*ul-1.71*ul^2+2.12*ul^3)]+0. Aby ta komenda zadziałała należy przed jej zastosowanie wpisać następujące polecenia: ***syms z***, ***syms ul*** oraz ***syms T***.

W rezultacie otrzymano następujący wynik:

$$G(z) = \frac{3T^2(0{,}6 + 2{,}7\bar{u} - 1{,}71\bar{u}^2 + 2{,}12\bar{u}^3)}{60z^2 + (17T - 120)z + T^2 - 17T + 60}$$

T – czas próbkowania, $\bar{u}$ – punkt linearyzacji

Punkt 11:

Wyznaczenie wzmocnienia statycznego transmitancji w zależności od punktu linearyzacji:

Aby wyznaczyć wzmocnienie statyczne stosujemy następujący wzór:

$$K_{stat} = \lim_{z \to 1} G(z)$$

$$K_{stat} = \lim_{z \to 1} \frac{3T^2(0{,}6 + 2{,}7\bar{u} - 1{,}71\bar{u}^2 + 2{,}12\bar{u}^3)}{60z^2 + (17T - 120)z + T^2 - 17T + 60}$$

$$K_{stat} = \frac{3T^2(0{,}6 + 2{,}7\bar{u} - 1{,}71\bar{u}^2 + 2{,}12\bar{u}^3)}{60 + (17T - 120) + T^2 - 17T + 60}$$

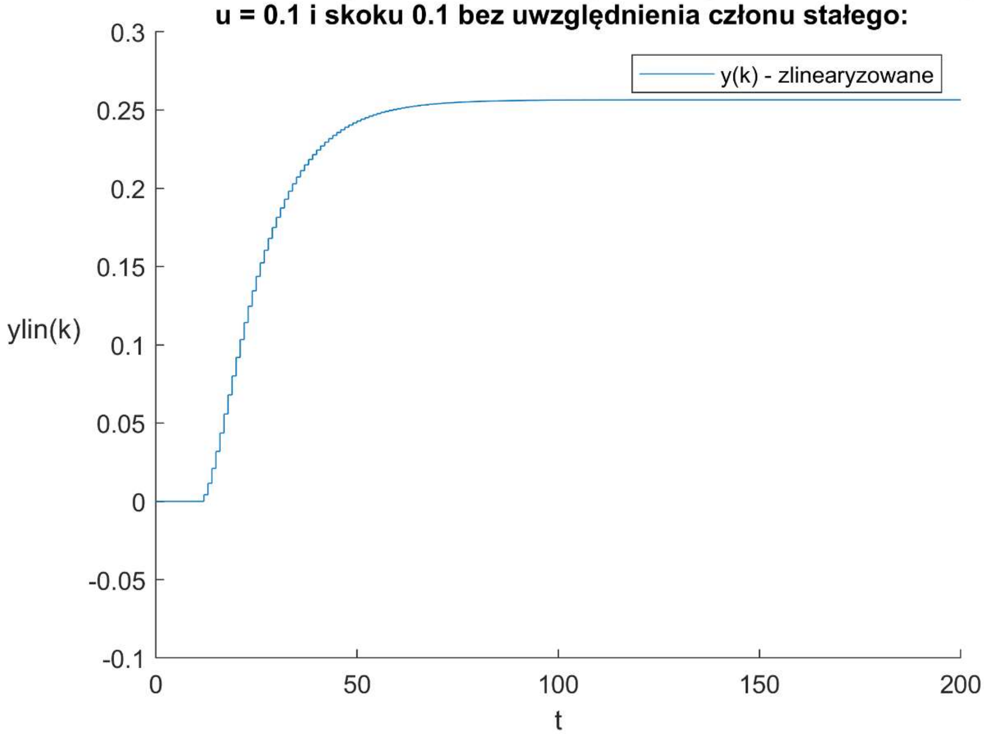
$$K_{stat} = \frac{3T^2(0{,}6 + 2{,}7\bar{u} - 1{,}71\bar{u}^2 + 2{,}12\bar{u}^3)}{60 + (17T - 120) + T^2 - 17T + 60}$$

$$K_{stat} = 3(0{,}6 + 2{,}7\bar{u} - 1{,}71\bar{u}^2 + 2{,}12\bar{u}^3)$$

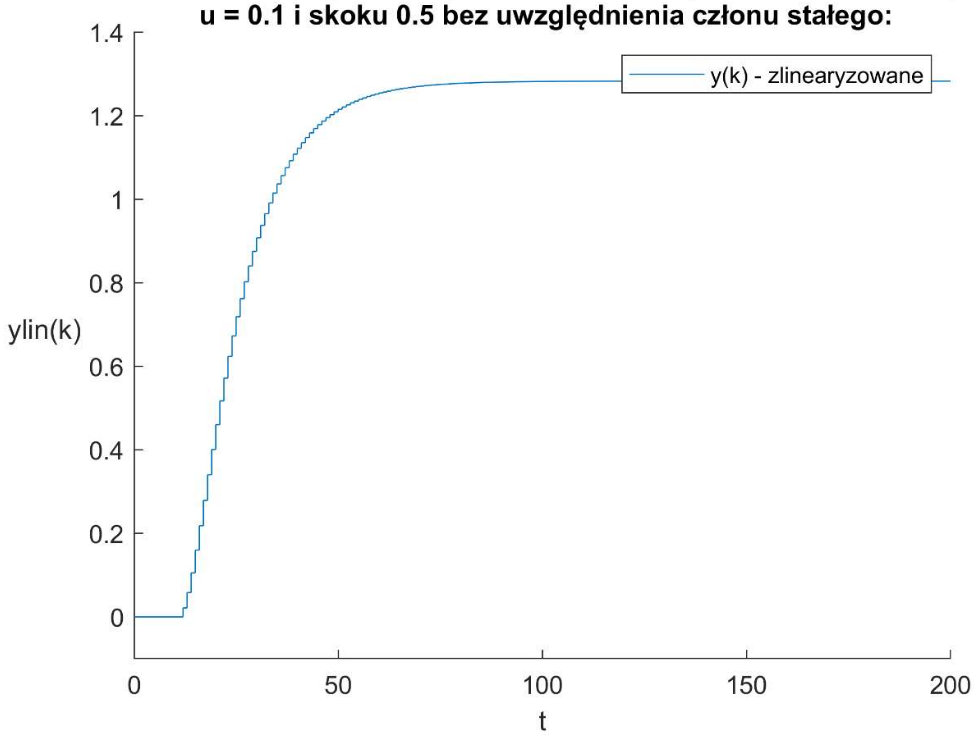
Obliczenie wartości wzmocnienia dla punktów linearyzacji rozważanych w zadaniu 9:

Dla $\bar{u} = 0.1$: $K_{stat} \approx 2{,}57$:

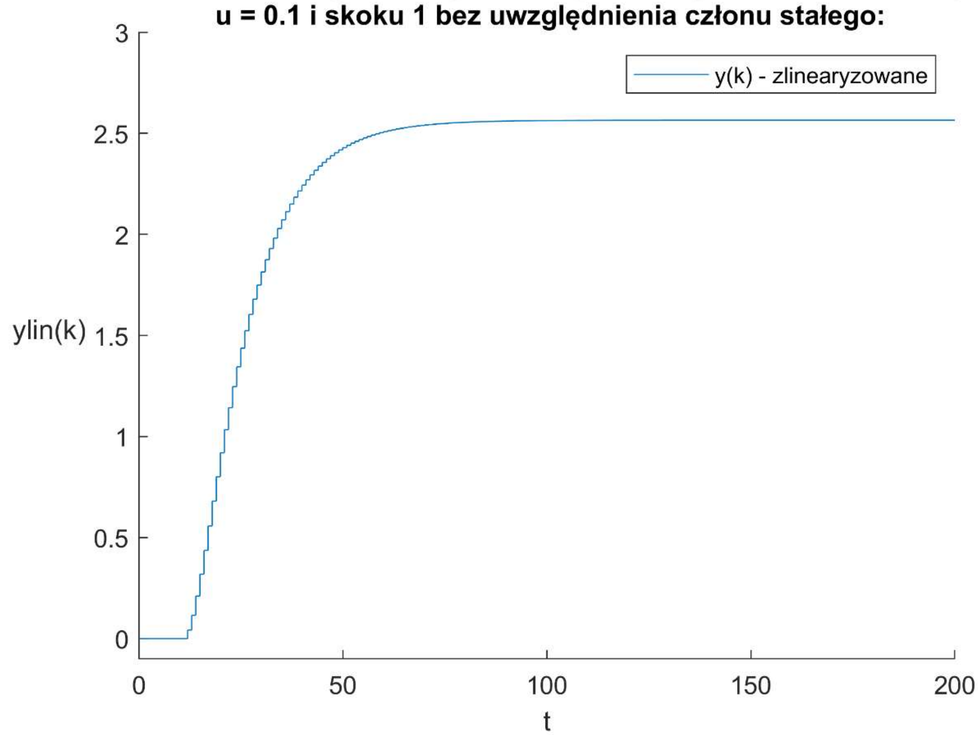
Odpowiedź układu dyskretnego zlinearyzowanego dla punktu linearyzacji u = 0.1 i skoku 0.1 bez uwzględnienia członu stałego:



Odpowiedź układu dyskretnego zlinearyzowanego dla punktu linearyzacji u = 0.1 i skoku 0.5 bez uwzględnienia członu stałego:



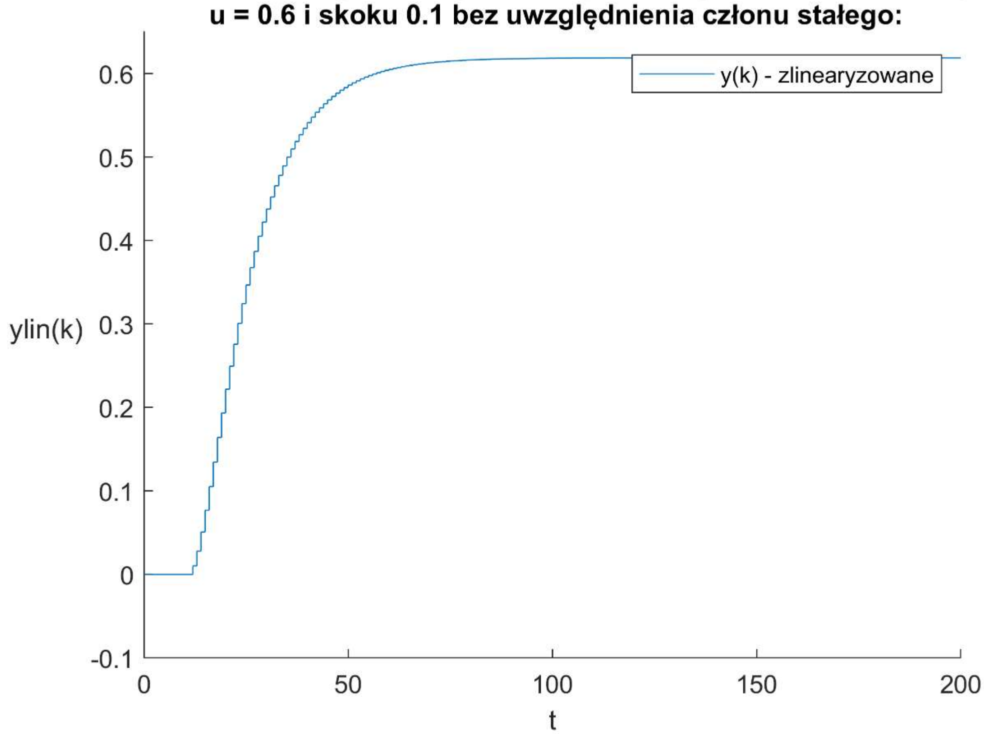
Odpowiedź układu dyskretnego zlinearyzowanego dla punktu linearyzacji u = 0.1 i skoku 1 bez uwzględnienia członu stałego:

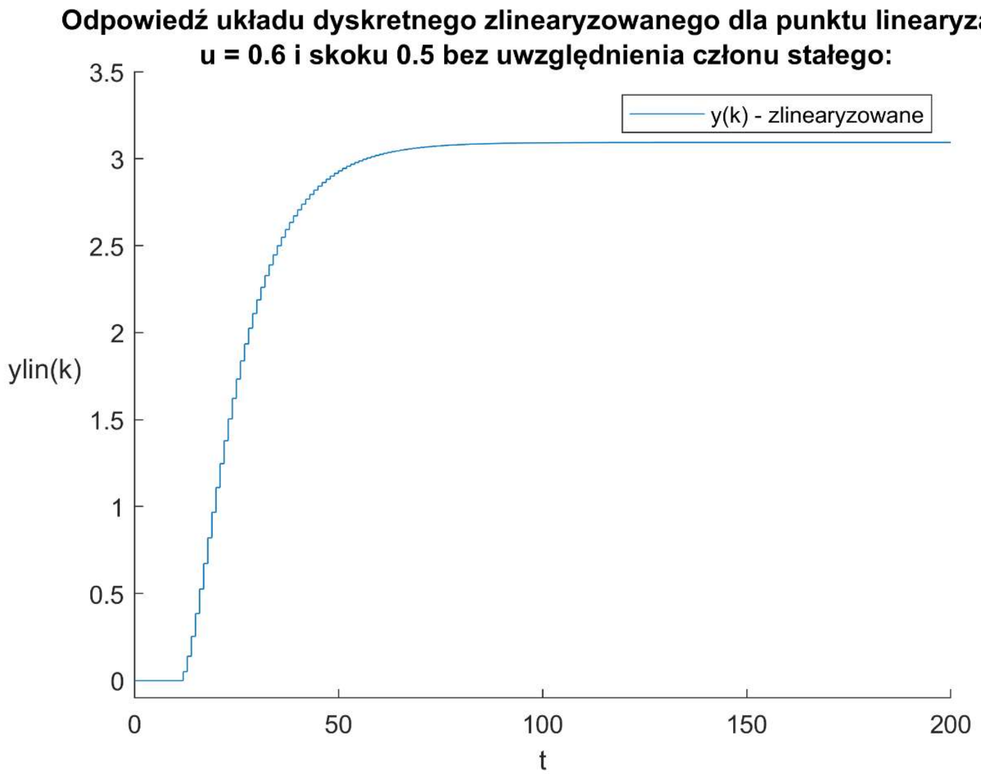


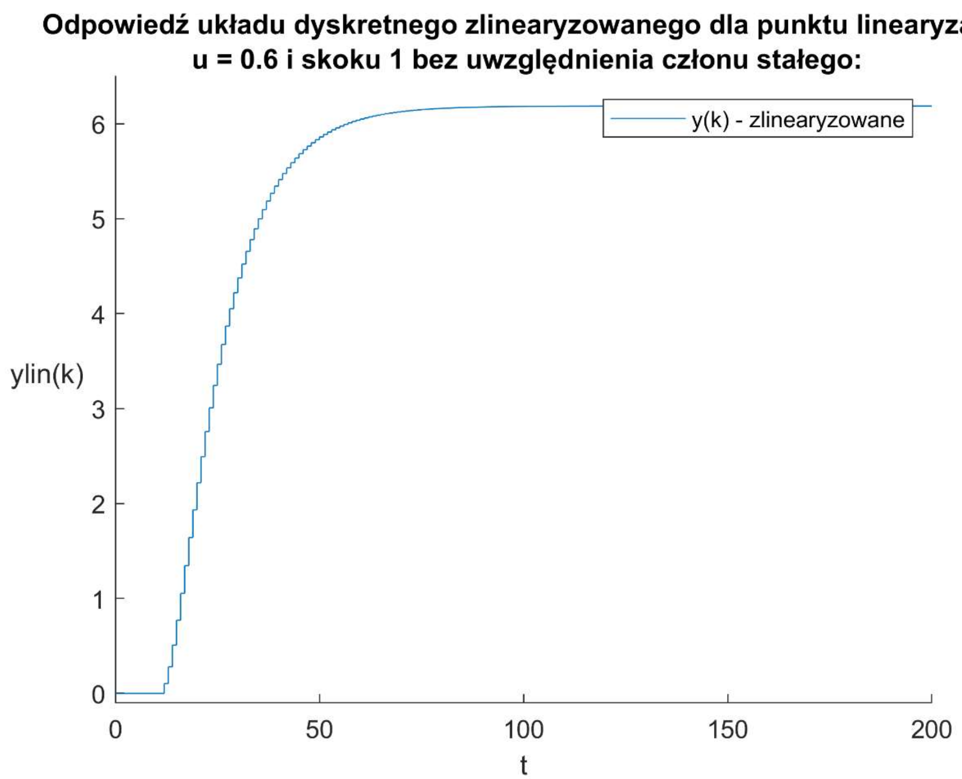
$$\frac{y_{ust}}{u} = \frac{0,257}{0,1} = \frac{1,283}{0,5} = \frac{2,565}{1} \approx 2,57 = K_{stat,\overline{u}=0.1}$$

Dla $\overline{u} = 0.6$: $K_{stat} \approx 6,19$:

Odpowiedź układu dyskretnego zlinearyzowanego dla punktu linearyzacji u = 0.6 i skoku 0.1 bez uwzględnienia członu stałego:





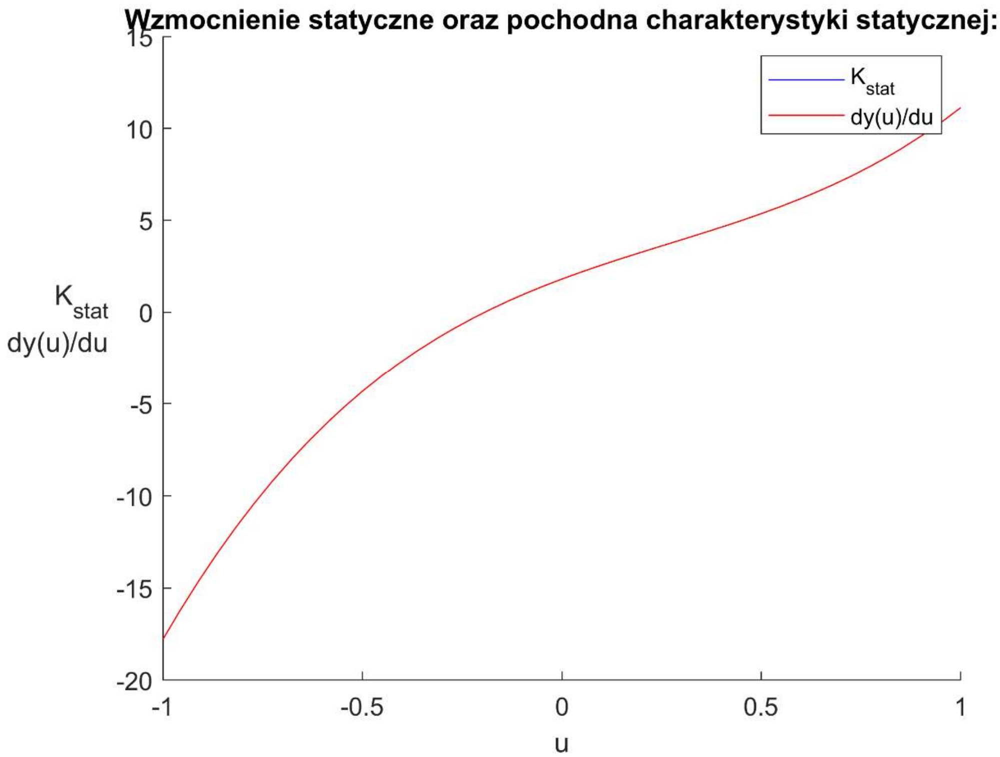


$$\frac{y_{ust}}{u} = \frac{0,619}{0,1} = \frac{3,093}{0,5} = \frac{6,187}{1} \approx 6,19 = K_{stat,\bar{u}=0.6}$$

Pochodna charakterystyki statycznej oraz wzmocnienie statyczne:

$$\frac{dy(u)}{du} = \frac{d(1{,}8u + 4{,}05u^2 - 1{,}71u^3 + 1{,}59u^4)}{du} = 1{,}8 + 8{,}1u - 5{,}13u^2 + 6{,}36u^3$$

$$K_{stat} = 3(0{,}6 + 2{,}7\bar{u} - 1{,}71\bar{u}^2 + 2{,}12\bar{u}^3)$$



Patrząc na powyższe rysunki oraz na rysunki z punktu 9 możemy dojść do wniosku, że wzmocnienie statyczne to stosunek $\frac{dY}{dU}$ (przyrostu wartości wyjściowej w stanie ustalonym do przyrostu wartości skoku) bez uwzględnienia członu stałego lub mówiąc prościej – pochodna charakterystyki statycznej. W przypadku układu nieliniowego jest to nachylenie stycznej w punkcie linearyzacji. W punkcie 9 wartość wzmocnienia statycznego była mniejsza ze względu na występowanie w równaniach modelu wyrażenia stałego: $\frac{T}{20}(-1{,}35\bar{u}^2 + 1{,}02\bar{u}^3 - 1{,}59\bar{u}^4)$. Dzieje się tak, gdyż transmitancja nie uwzględnia tzw. offsetu, czyli wyrażenia stałego.