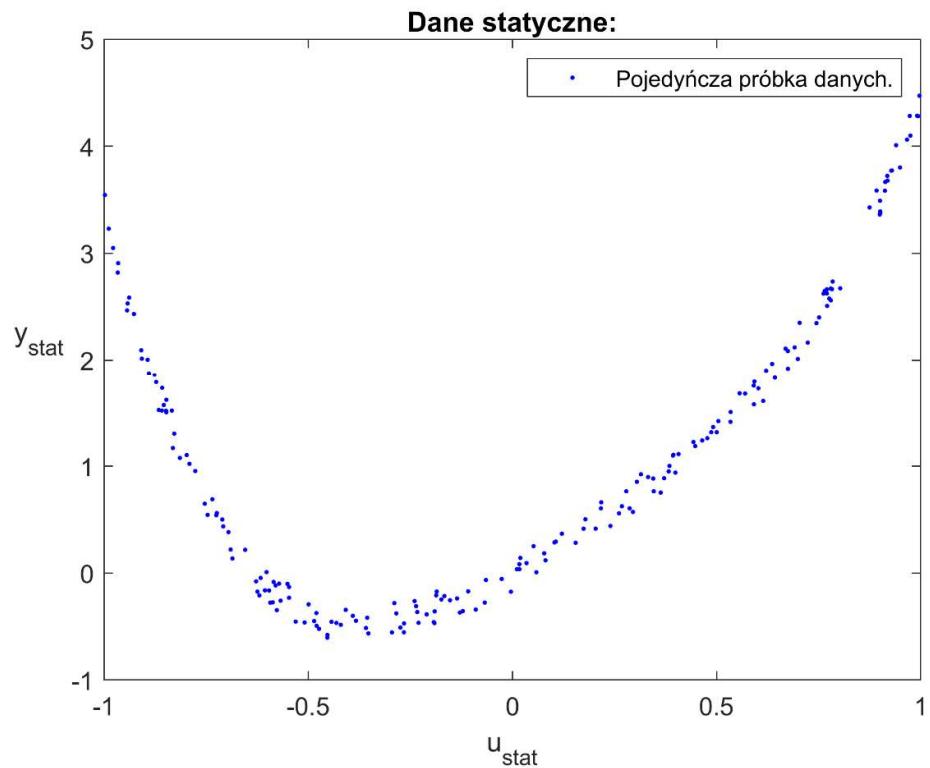


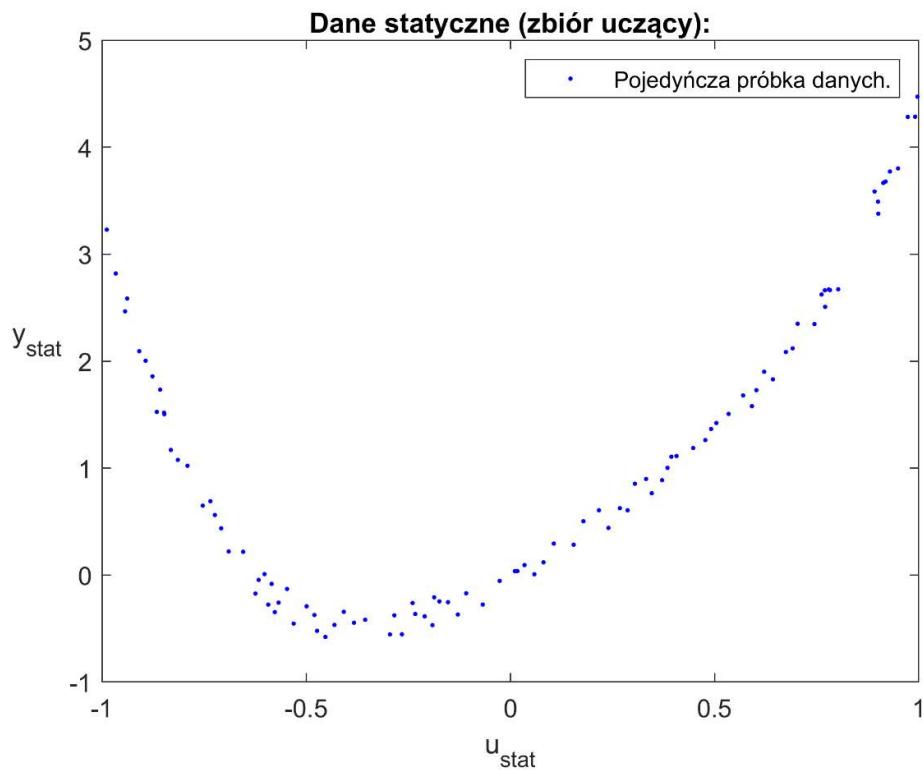
## MODI – Projekt 2, zadanie 41

**Zadanie 1a:**

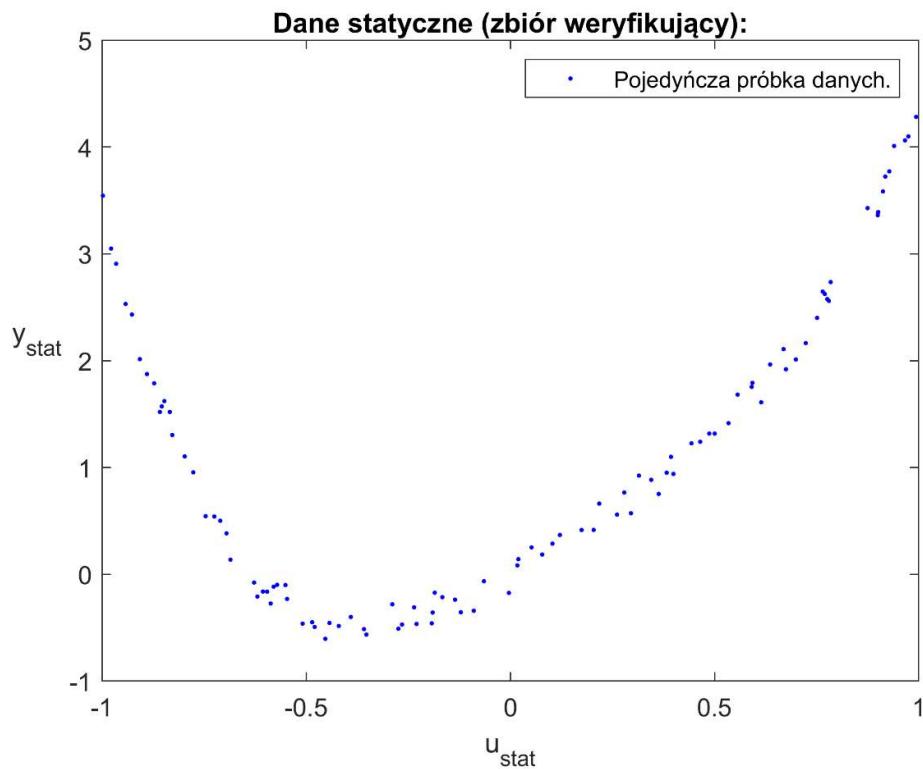


Rys 1: Wykres przedstawiający wszystkie dane statyczne.

Zbiór danych statycznych na zbiór uczący i weryfikujący podzielono przyjmując, że co druga próbka danych będzie należeć do zbioru weryfikującego.



Rys 2: Wykres przedstawiający zbiór uczący dla danych statycznych.



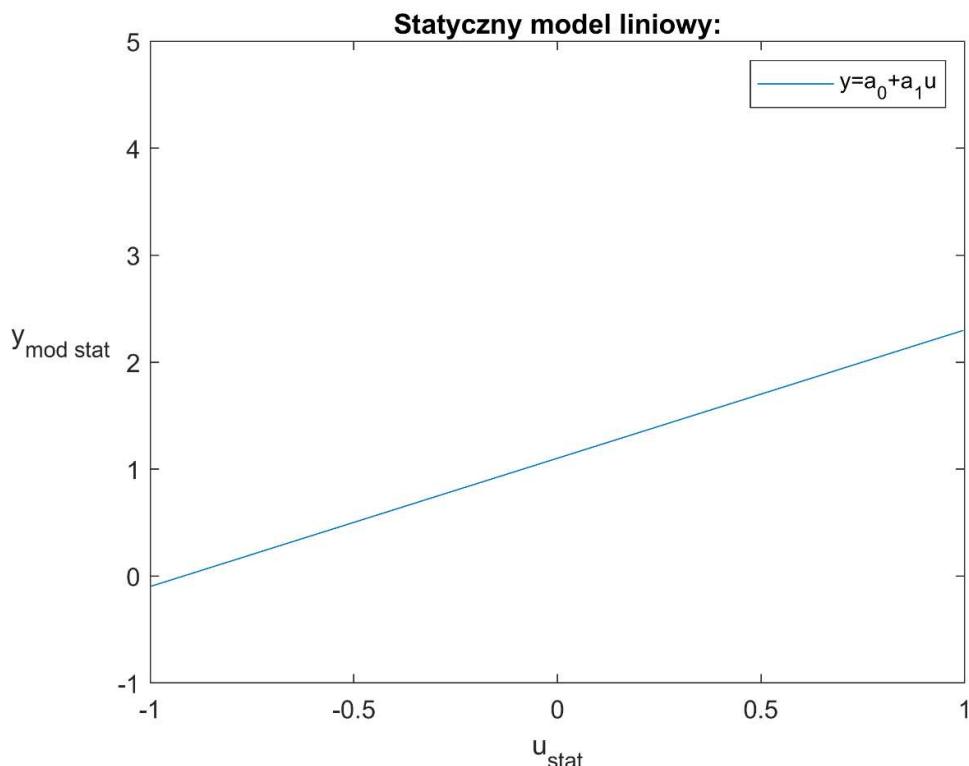
Rys 3: Wykres przedstawiający zbiór weryfikujący dla danych statycznych.

**Zadanie 1b:**

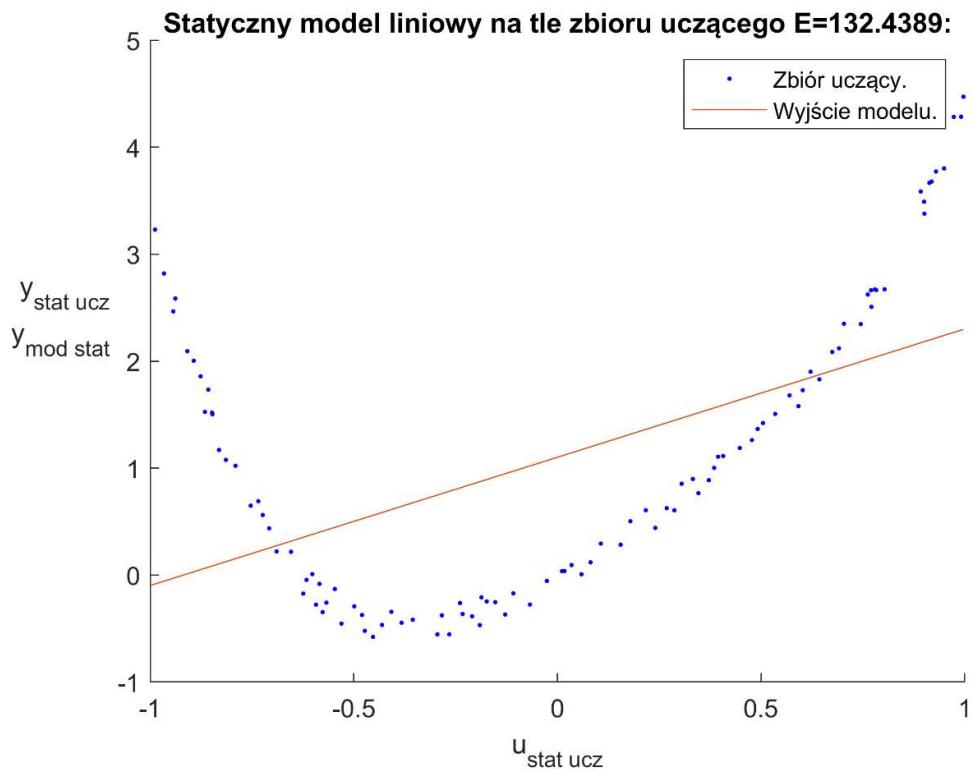
Aby wyznaczyć statyczny model liniowy metodą najmniejszych kwadratów posłużymy się następującym wzorem zapisanym w składni Matlabowej:  $\mathbf{w} = \mathbf{M} \setminus \mathbf{Y}$ . Wynika on z przekształcenia równania zapisanego w następującej postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u(1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix},$$

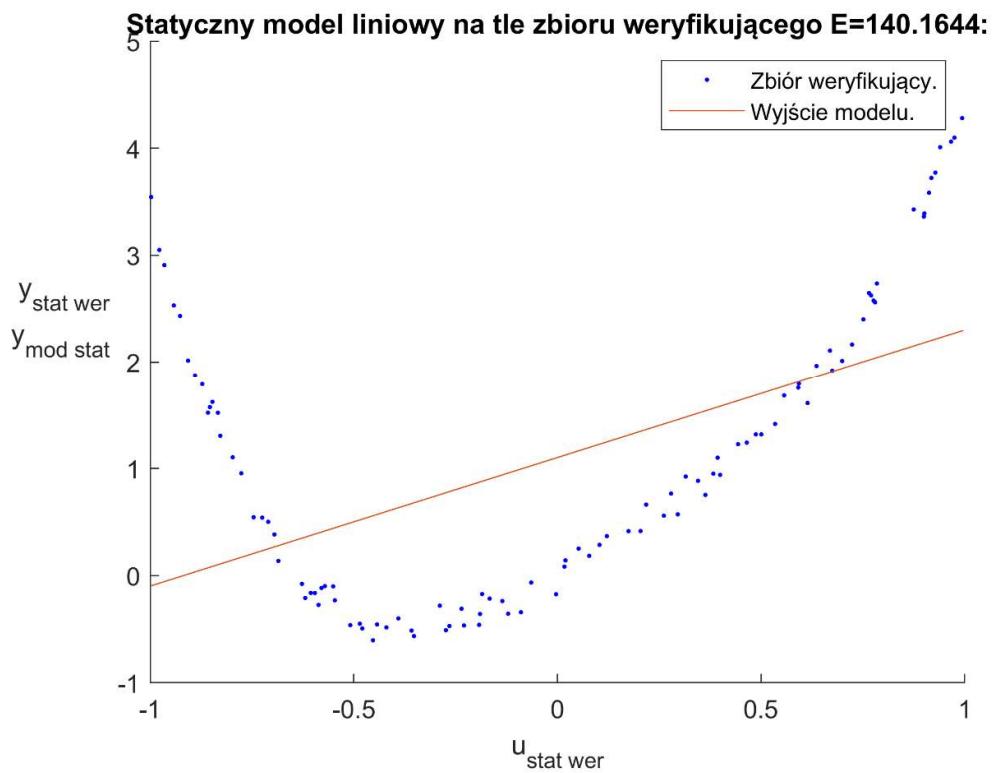
gdzie:  $p$  - liczba próbek;  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & u(1) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u(p) \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(p) \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$ .



Rys 4: Statyczny model liniowy.



Rys 5: Statyczny model liniowy na tle zbioru uczącego.



Rys 6: Statyczny model liniowy na tle zbioru weryfikującego.

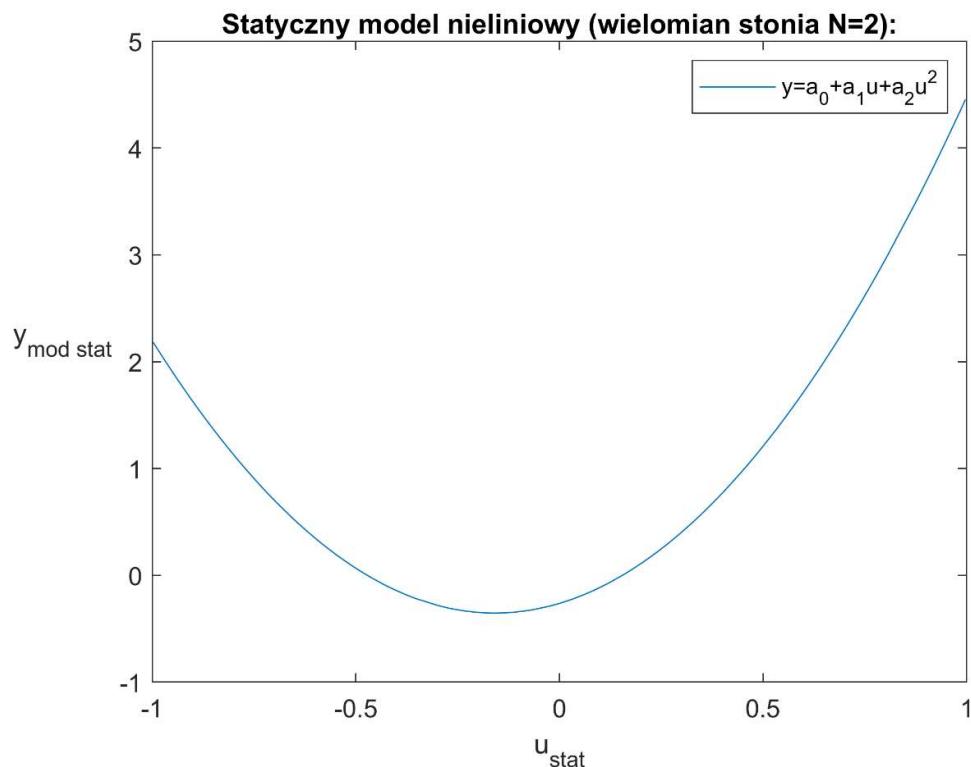
$n$ – stopień wielomianu	$E_{ucz}$	$E_{wer}$
--------------------------	-----------	-----------

1	132,4389	140,1644
---	----------	----------

Model liniowy nie odzwierciedla dobrze zarówno danych uczących jak i weryfikujących (model jest niedokładny). Bardziej dokładny model uzyskamy stosując wielomian wyższego stopnia.

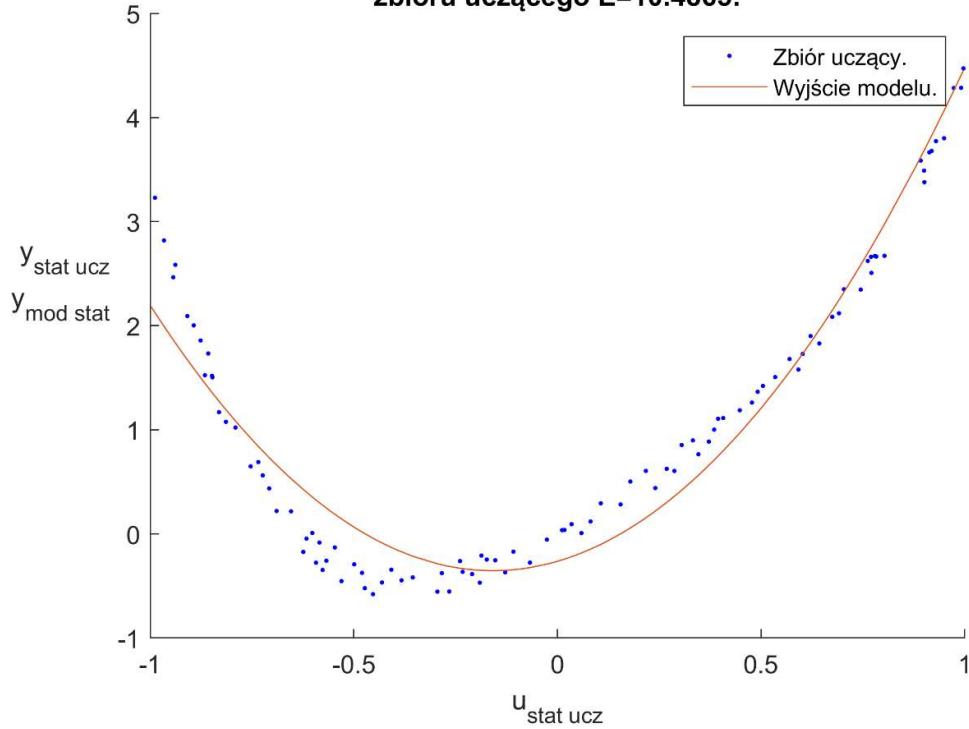
**Zadanie 1c:**

Wielomian stopnia N=2:



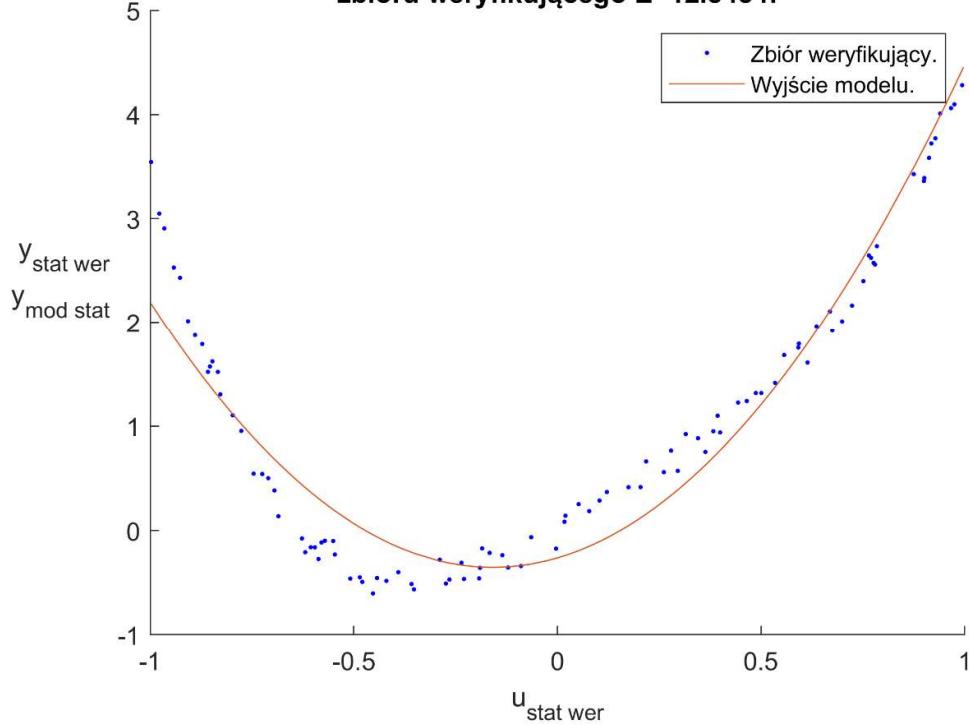
Rys 7: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=2).

**Statyczny model nieliniowy (wielomian N=2) na tle  
zbioru uczącego E=10.4865:**



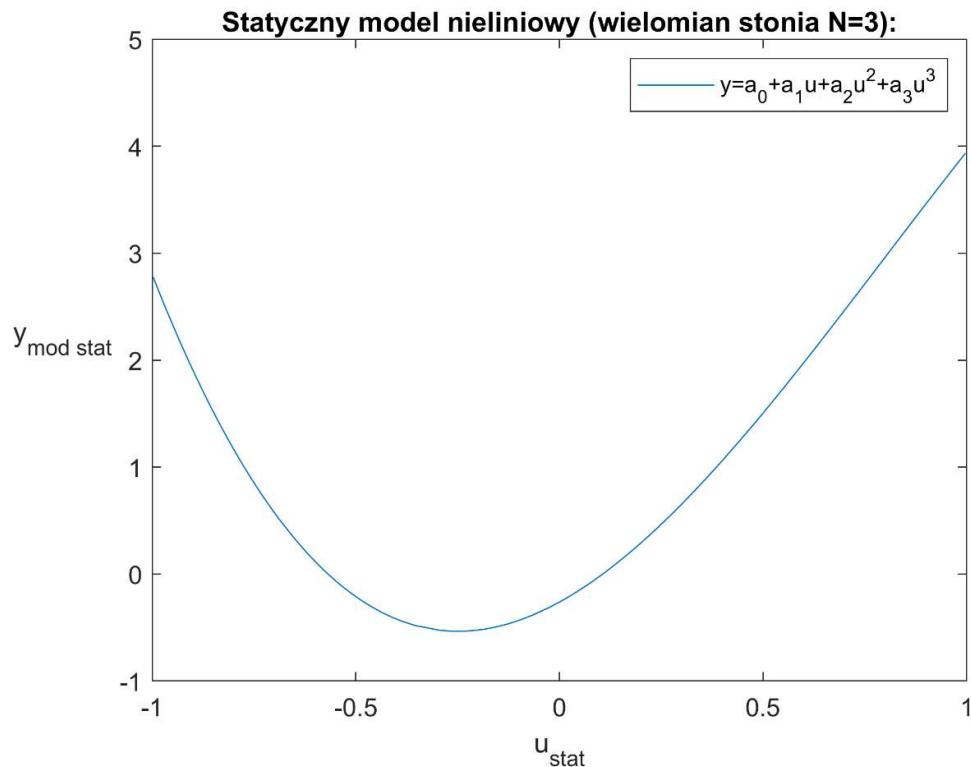
Rys 8: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=2) na tle zbioru uczącego.

**Statyczny model nieliniowy (wielomian N=2) na tle  
zbioru weryfikującego E=12.8484:**

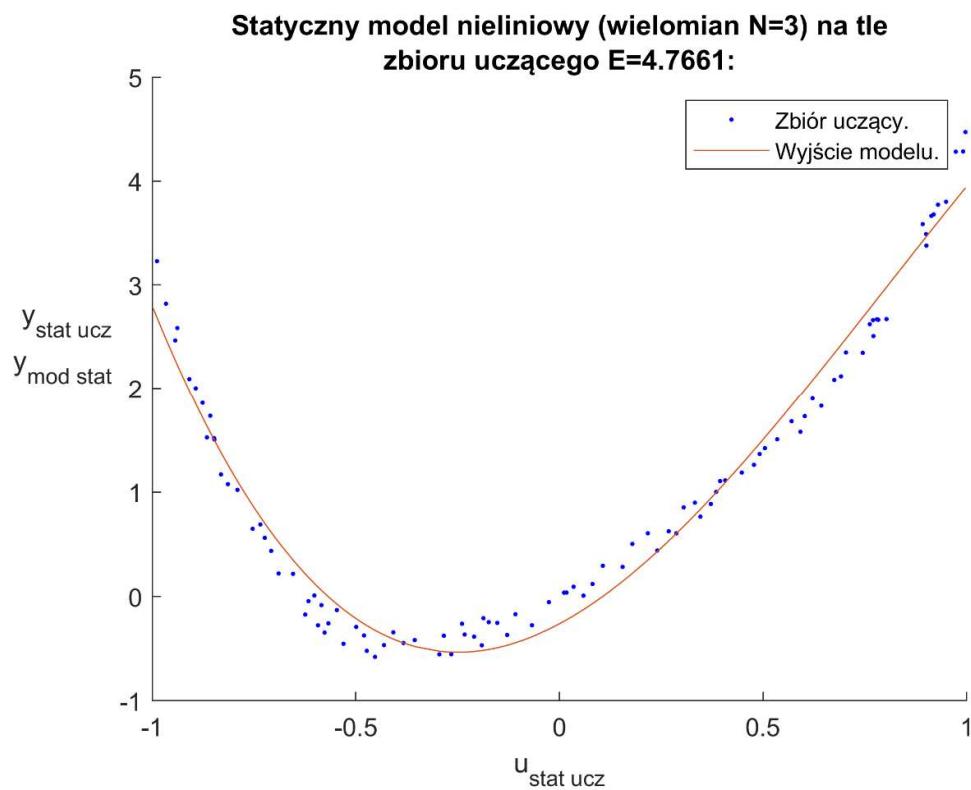


Rys 9: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=2) na tle zbioru weryfikującego.

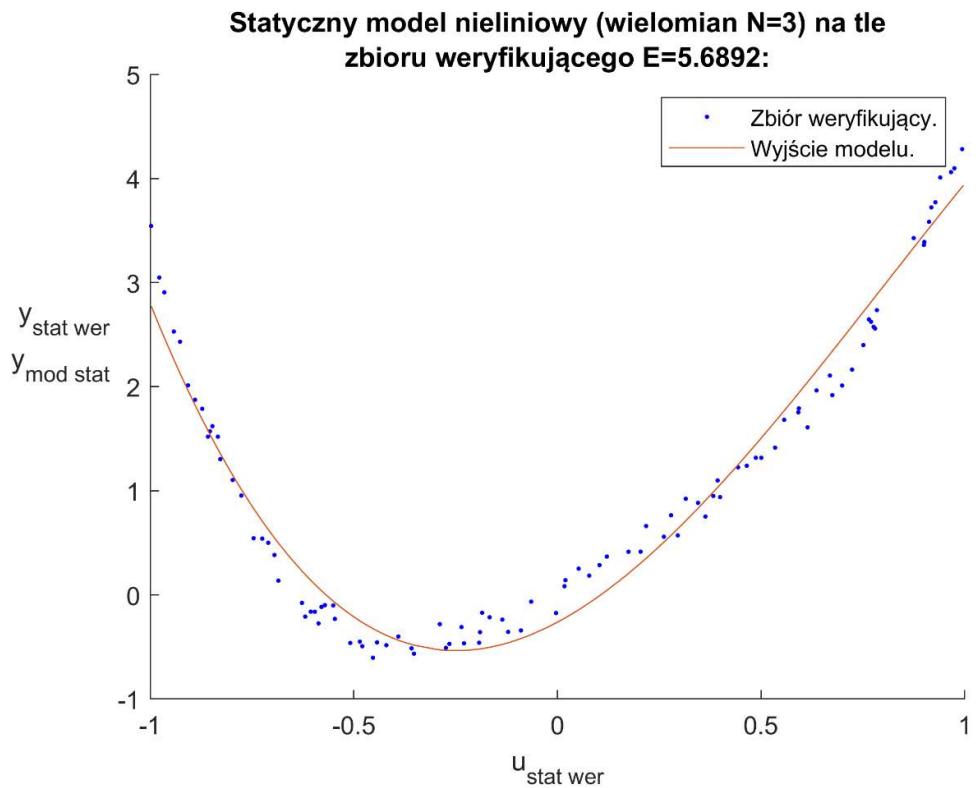
Wielomian stopnia N=3:



Rys 10: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=3).

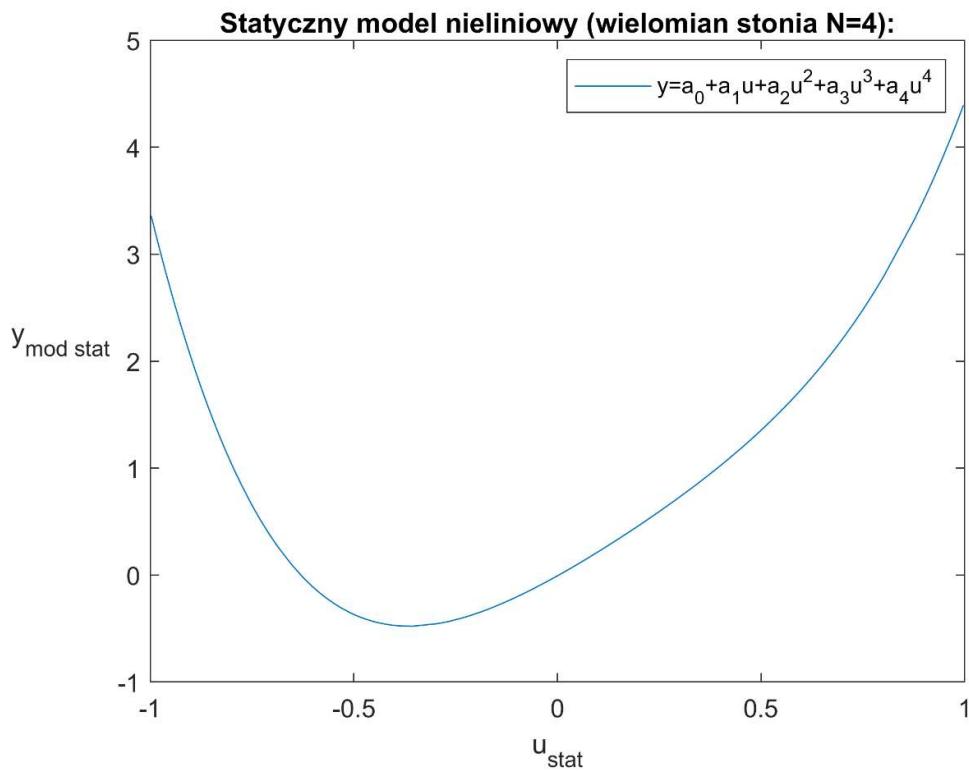


Rys 11: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=3) na tle zbioru uczącego.

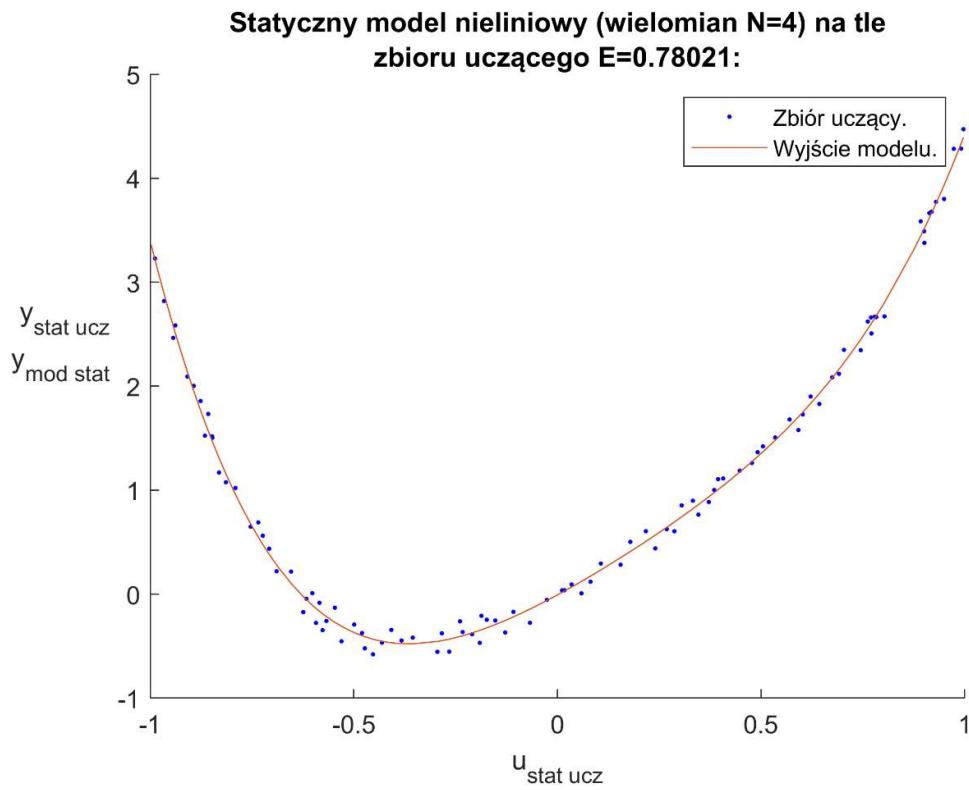


Rys 12: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=3) na tle zbioru weryfikującego.

Wielomian stopnia N=4:

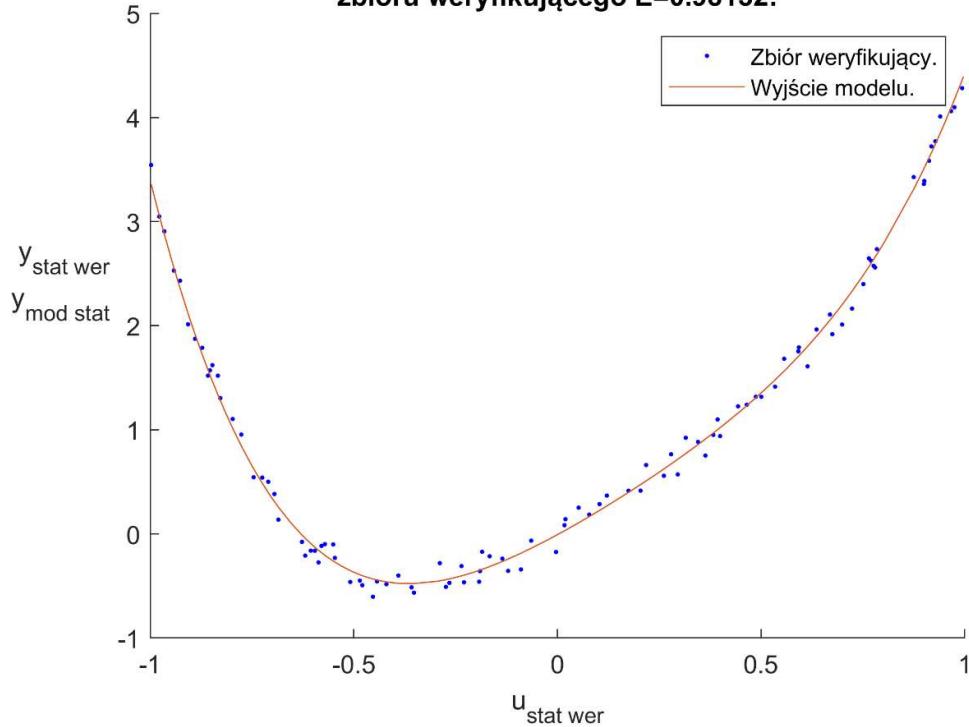


Rys 13: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=4).



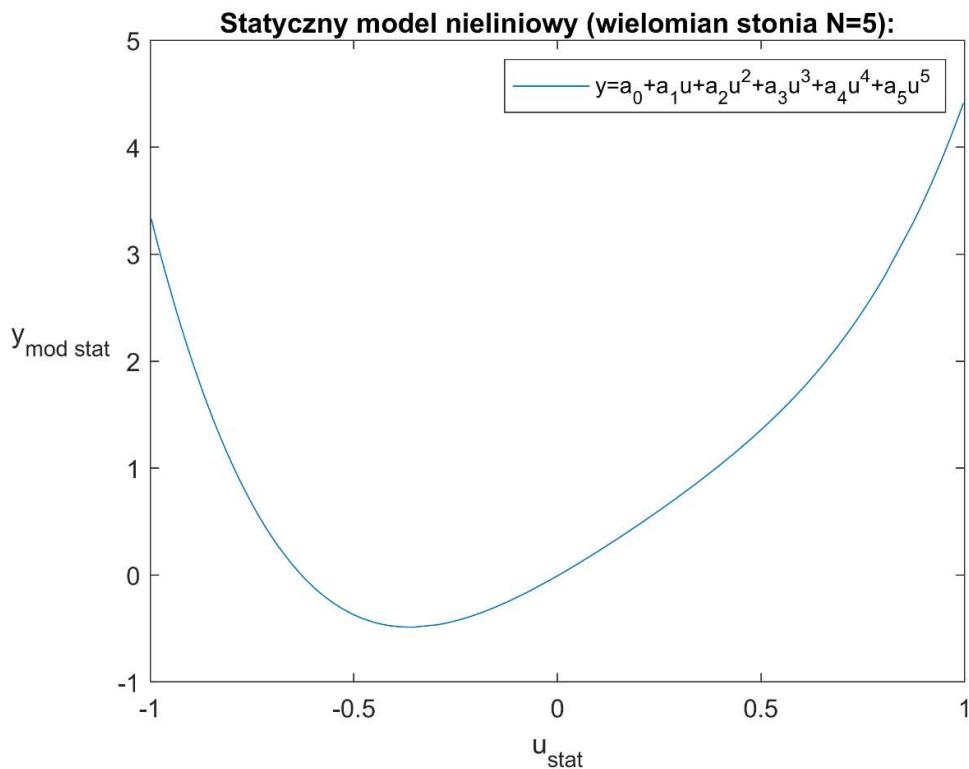
Rys 14: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=4) na tle zbioru uczącego.

**Statyczny model nieliniowy (wielomian N=4) na tle  
zbioru weryfikującego E=0.98132:**

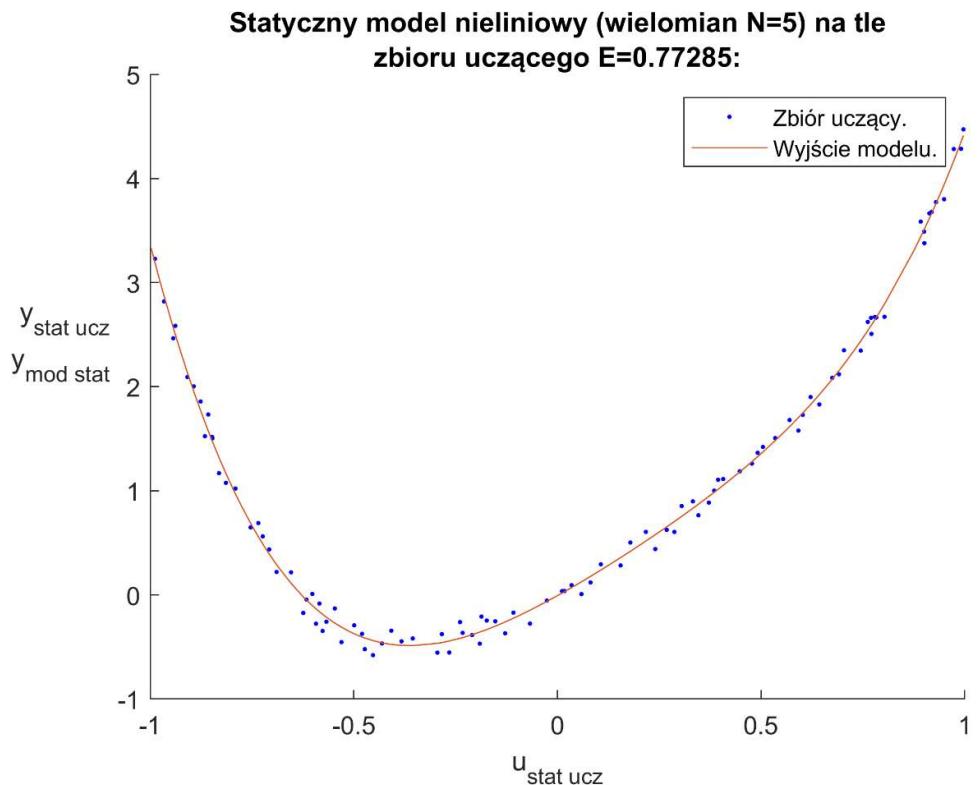


Rys 15: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=4) na tle zbioru weryfikującego.

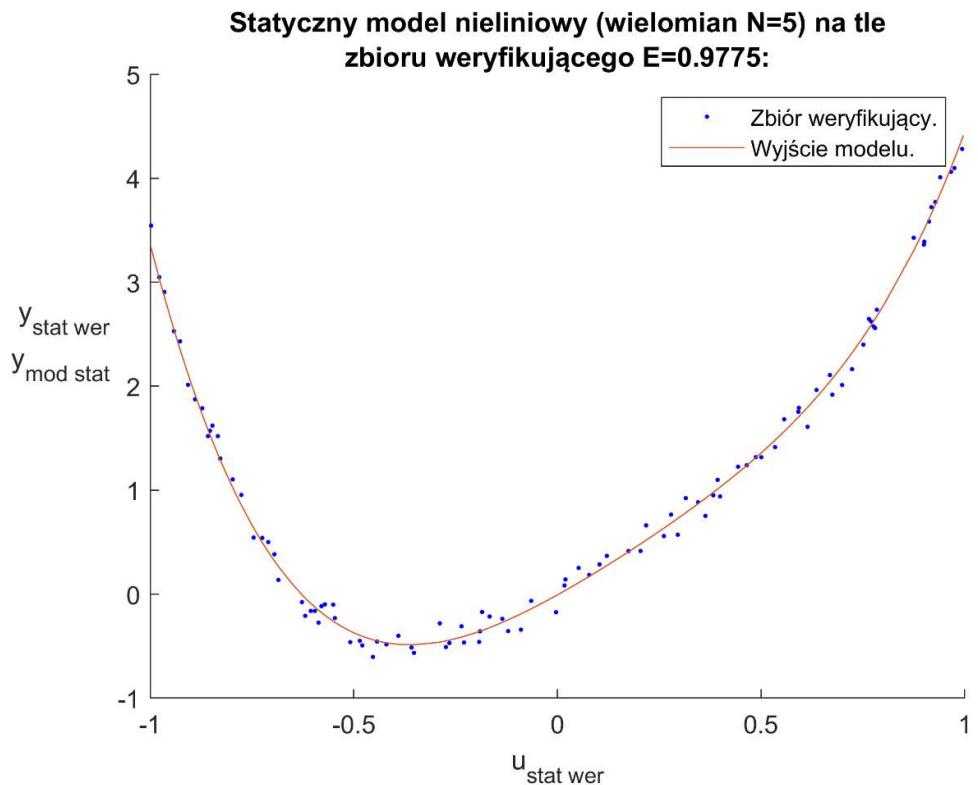
Wielomian stopnia N=5:



Rys 16: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=5).

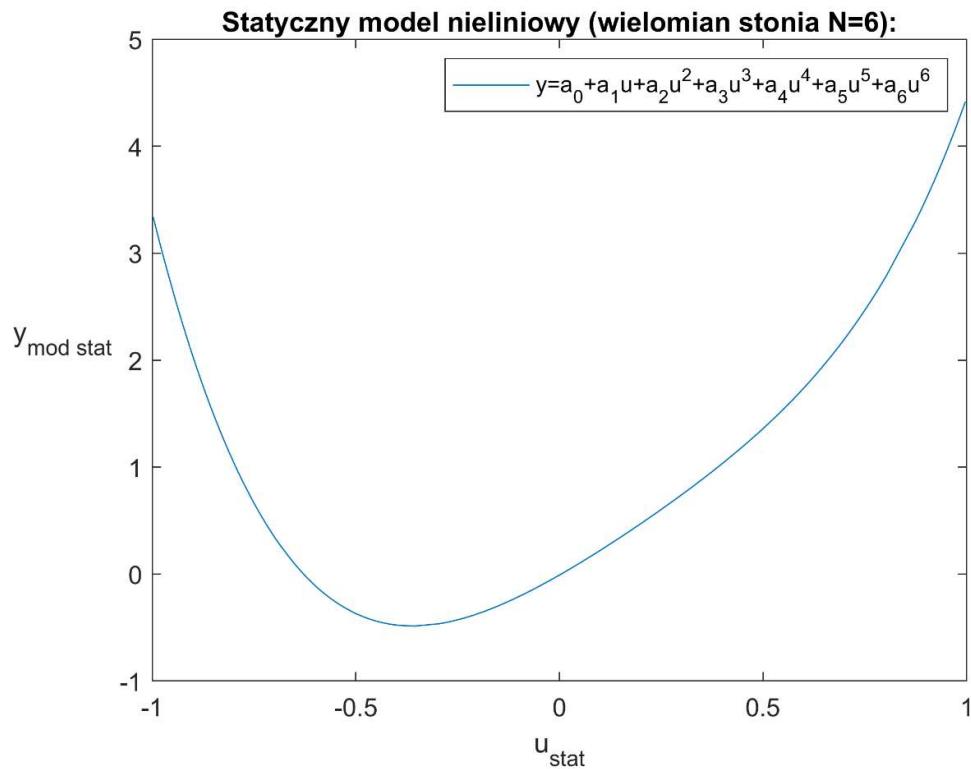


Rys 17: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=5) na tle zbioru uczącego.



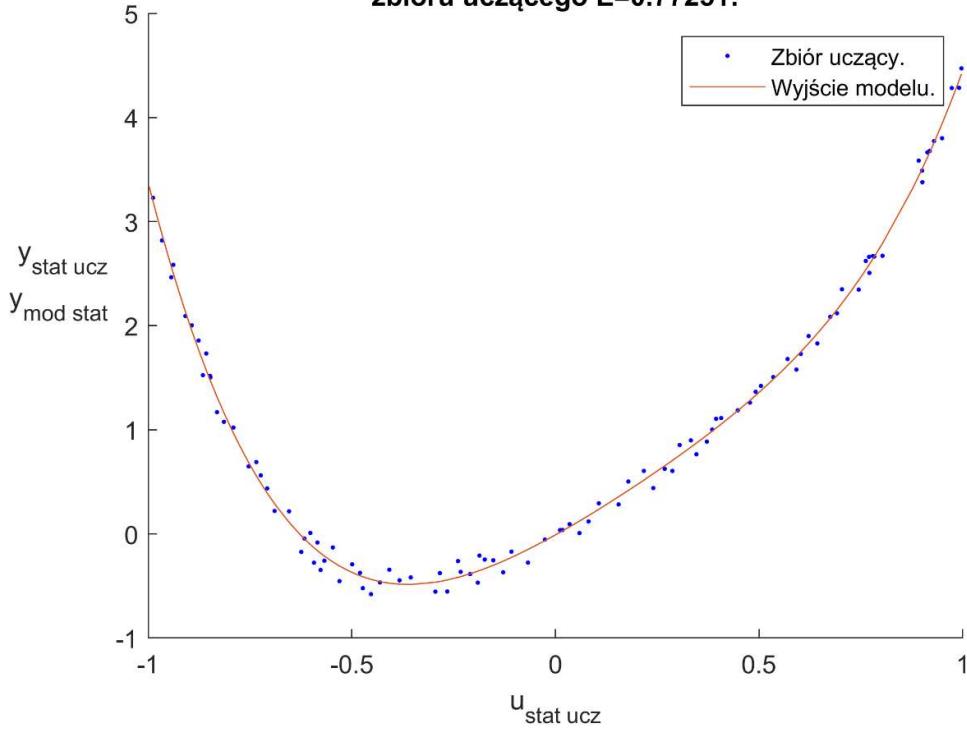
Rys 18: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=5) na tle zbioru weryfujqcego.

Wielomian stopnia N=6:



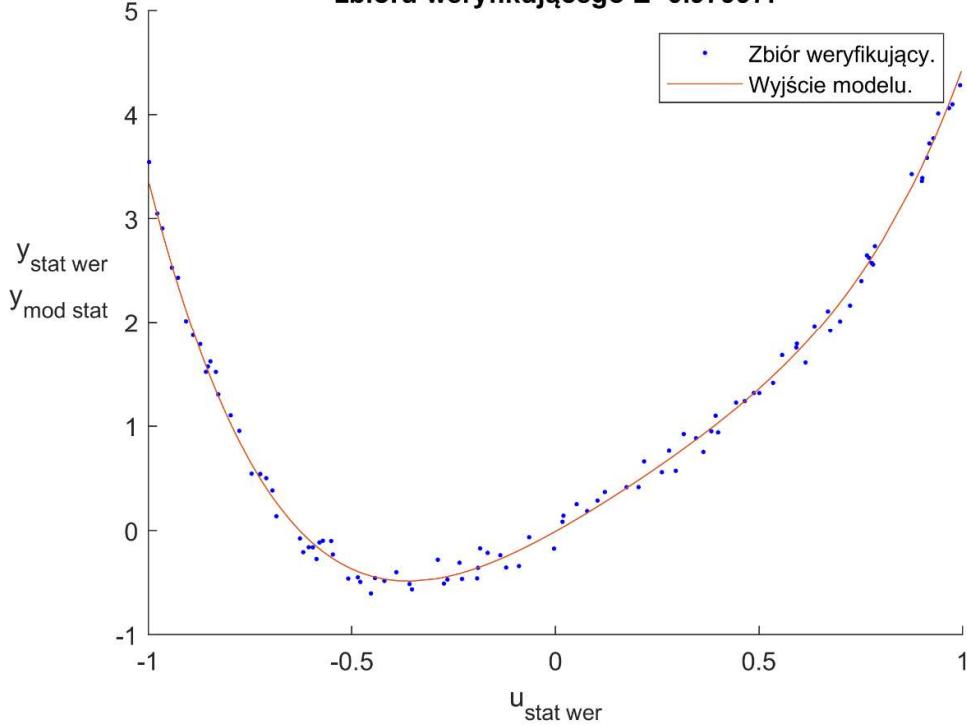
Rys 19: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=6).

**Statyczny model nieliniowy (wielomian N=6) na tle  
zbioru uczącego E=0.77251:**



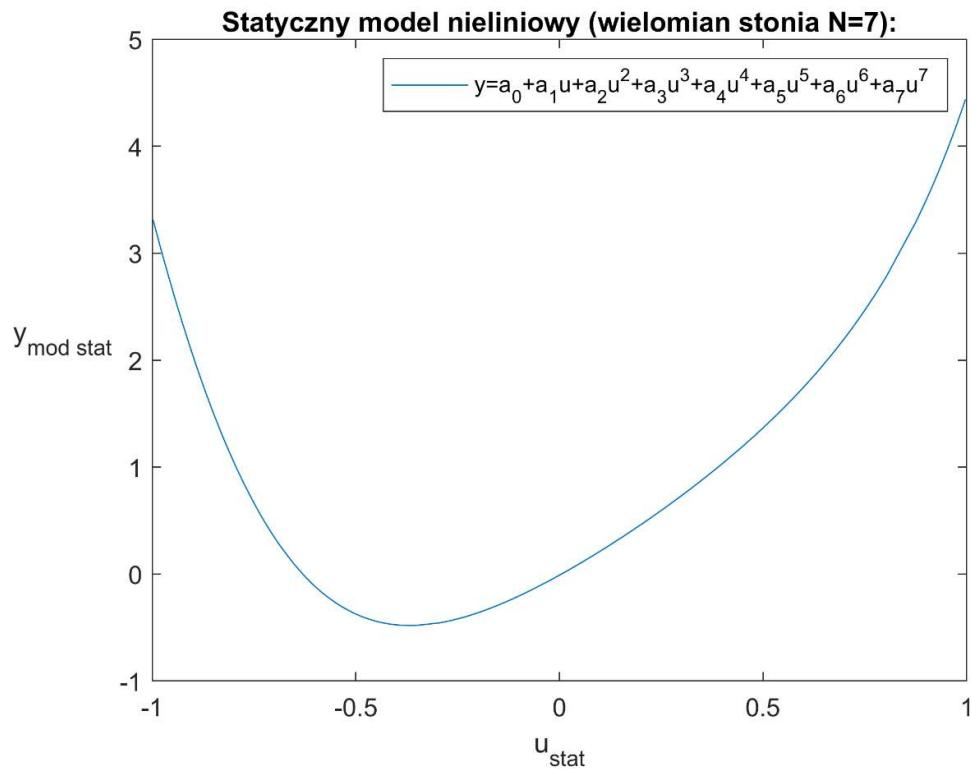
Rys 20: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=6) na tle zbioru uczącego.

**Statyczny model nieliniowy (wielomian N=6) na tle  
zbioru weryfikującego E=0.97997:**

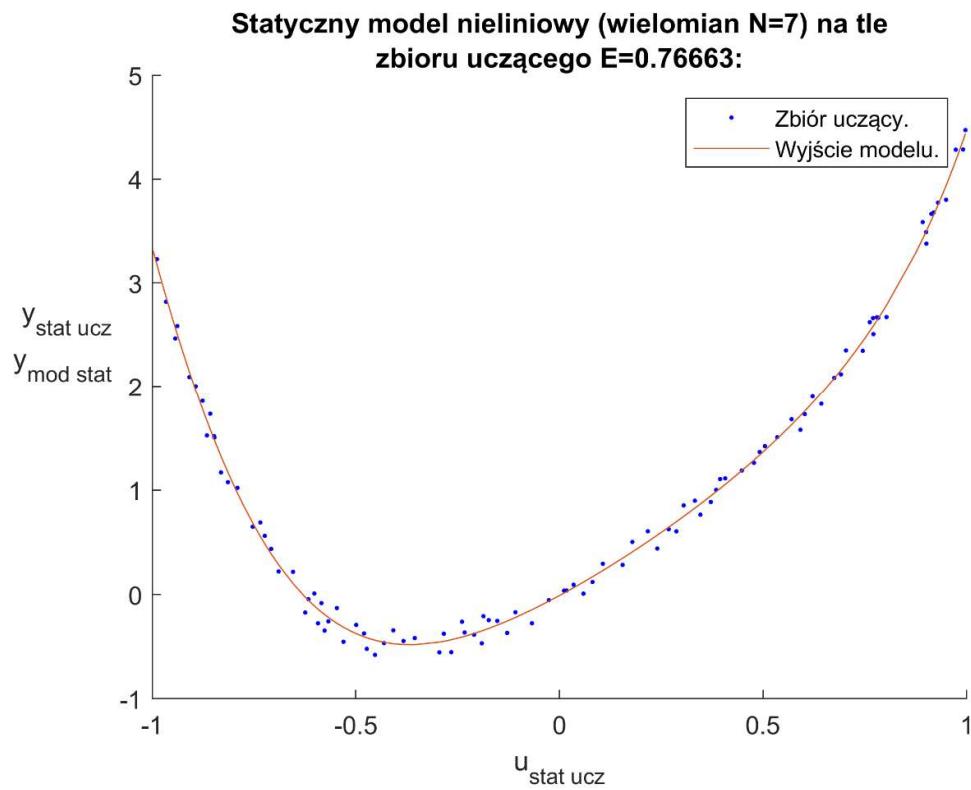


Rys 21: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=6) na tle zbioru weryfikującego.

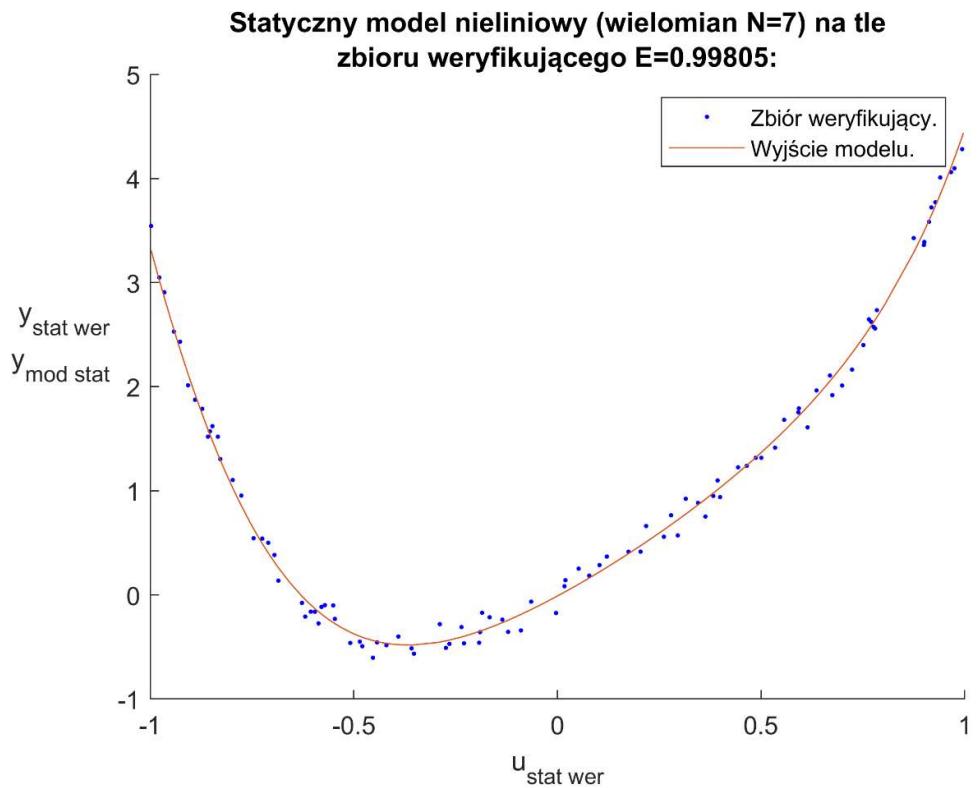
Wielomian stopnia N=7:



Rys 22: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=7).

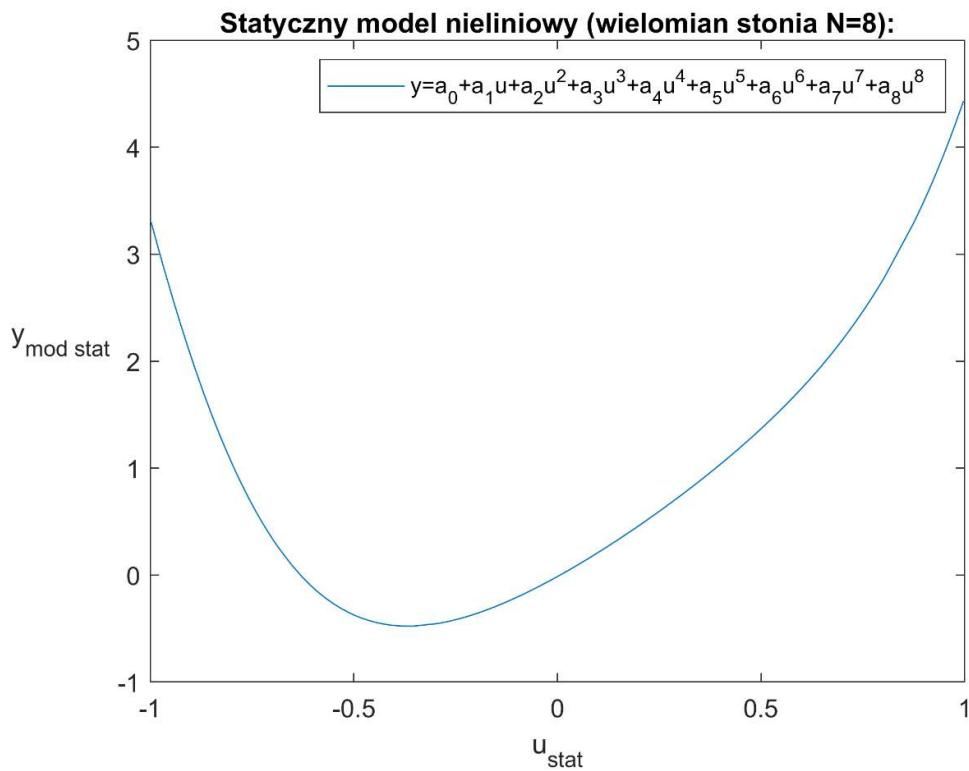


Rys 23: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=7) na tle zbioru uczącego.

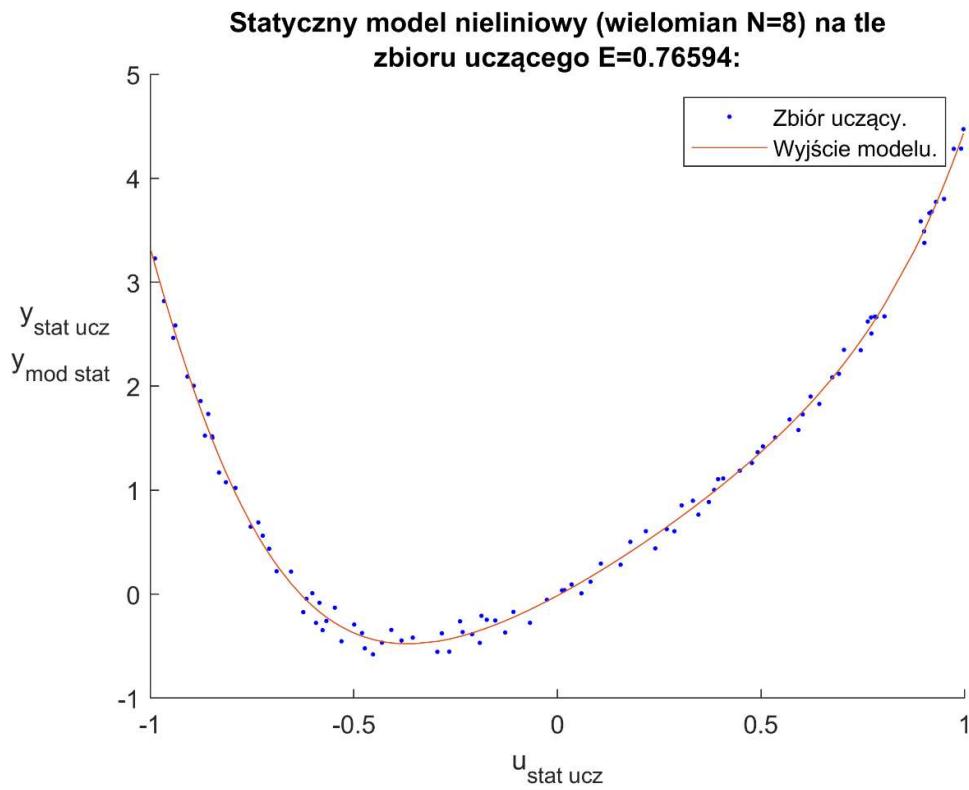


Rys 24: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=7) na tle zbioru weryfikującego.

Wielomian stopnia N=8:

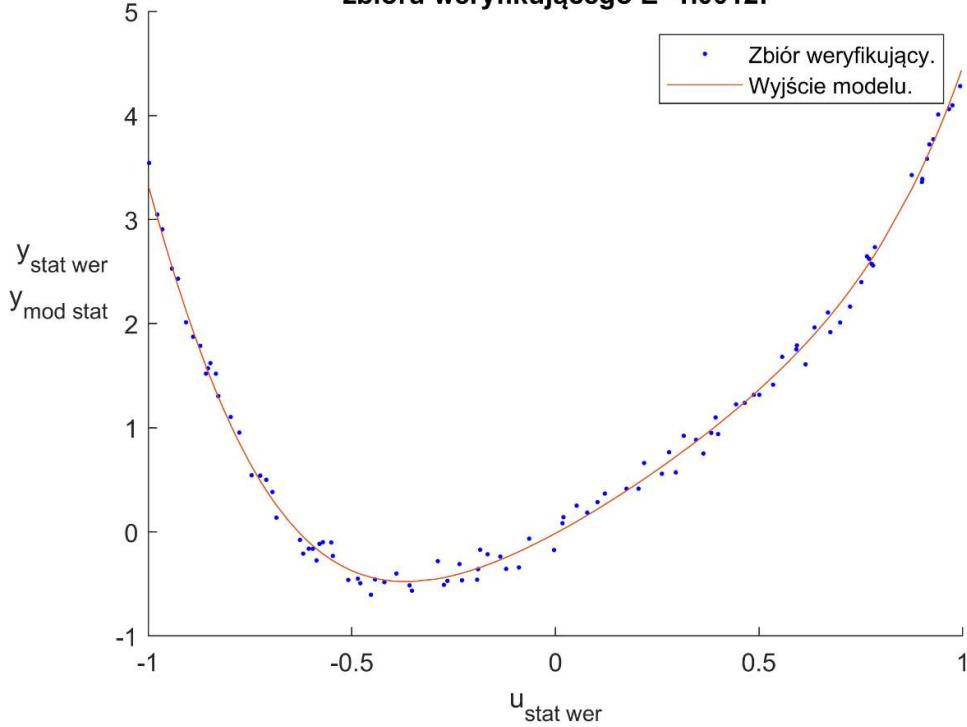


Rys 25: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=8).



Rys 26: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=7) na tle zbioru uczącego.

**Statyczny model nieliniowy (wielomian N=8) na tle  
zbioru weryfikującego E=1.0012:**



Rys 27: Statyczny model nieliniowy (wielomian N=8) na tle zbioru weryfikującego.

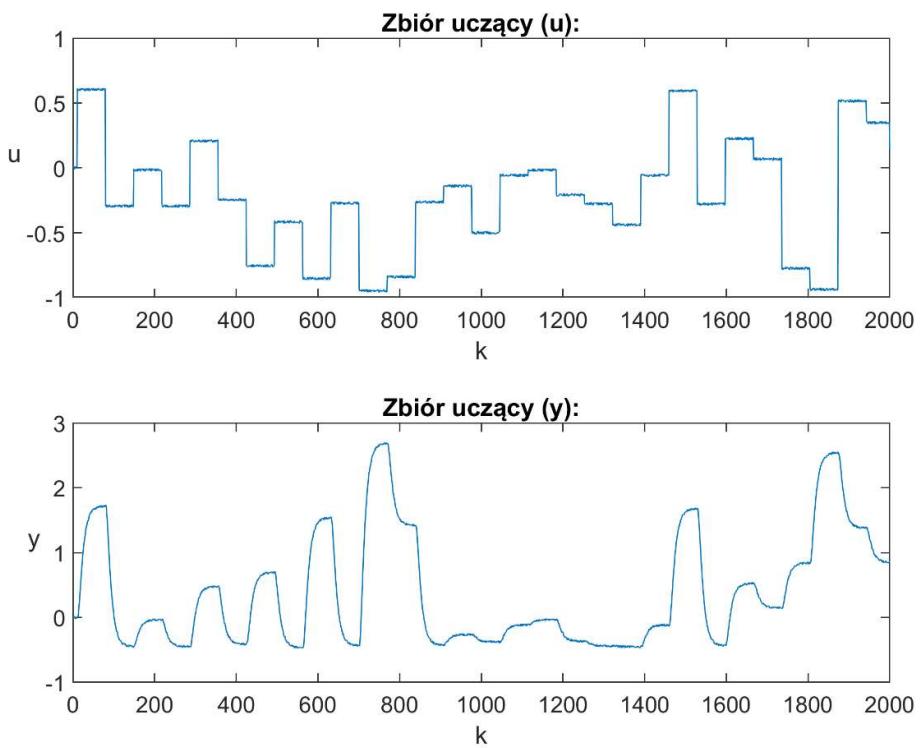
Tabela błędów:

$N$ – stopień wielomianu	$E_{ucz}$	$E_{wer}$
1	132,4389	140,1644
2	10,4865	12,8484
3	4,7661	5,6892
4	0,78021	0,98132
5	0,77285	0,9775
6	0,77251	0,97997
7	0,76663	0,99805
8	0,76594	1,0012

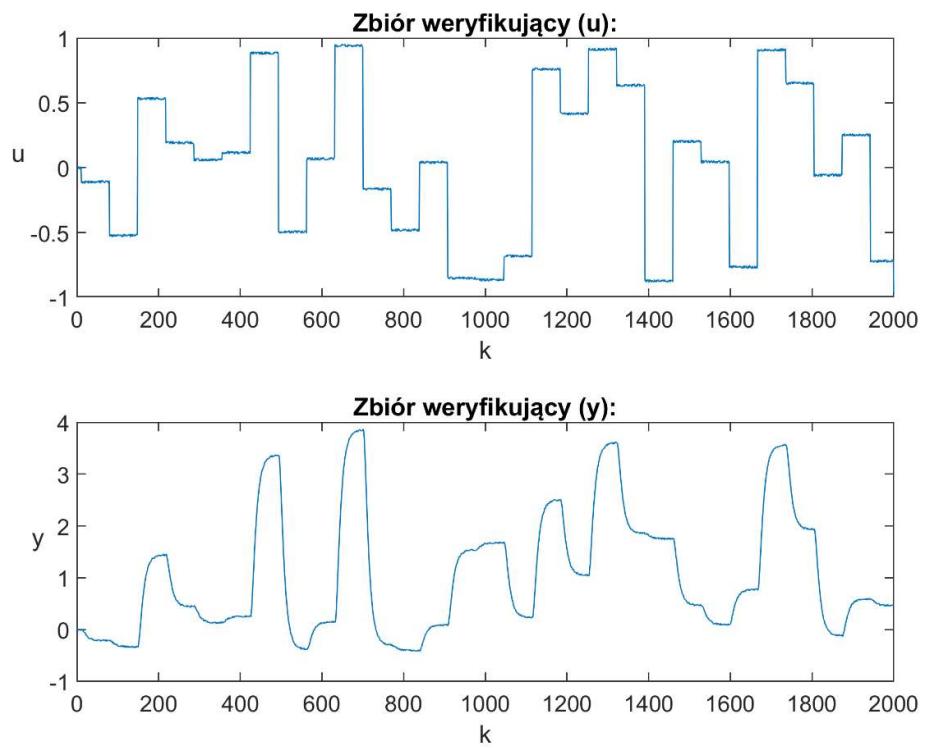
Wybieramy model z najmniejszym błędem dla zbioru weryfikującego. W naszym przypadku to wielomian piątego stopnia.

**Wybrany model statyczny: wielomian o stopniu N=5.**

**Zadanie 2a:**



Rys 28: Dane dynamiczne, zbiór uczący.

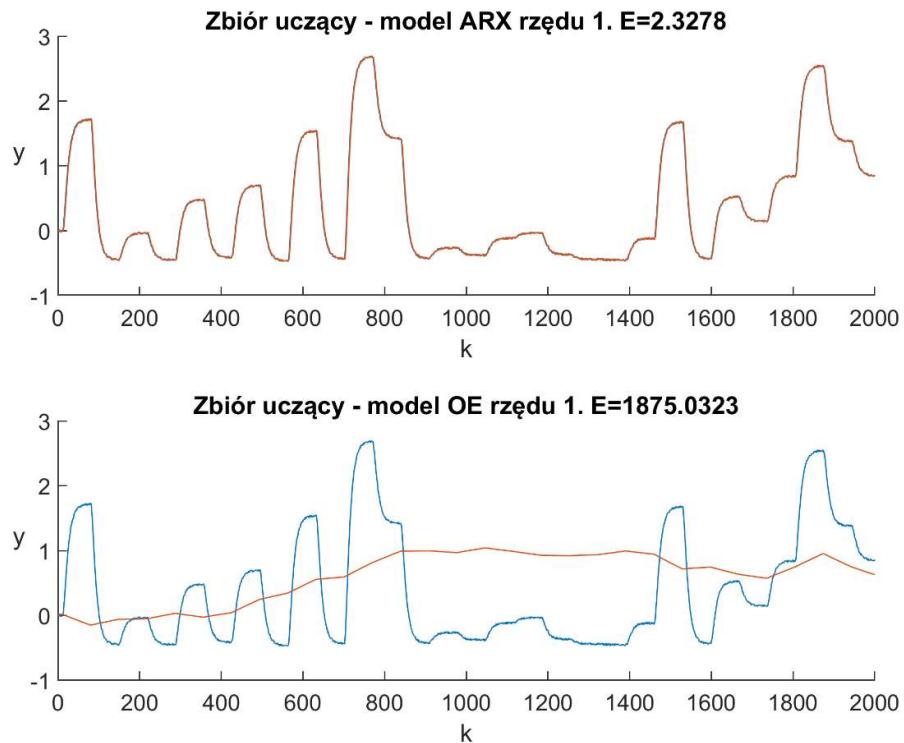


Rys 29: Dane dynamiczne, zbiór weryfikujący.

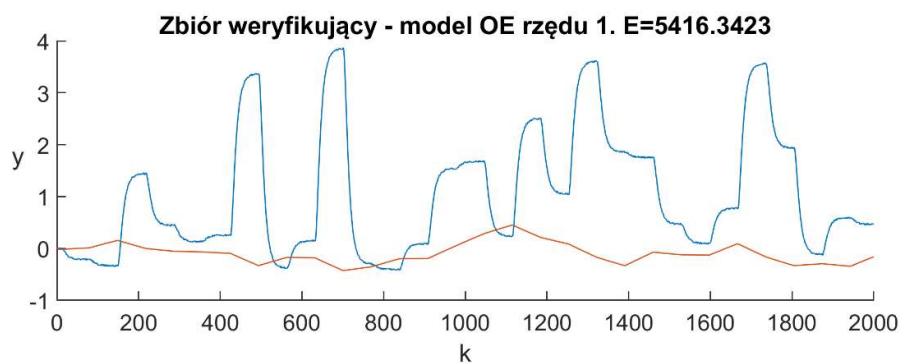
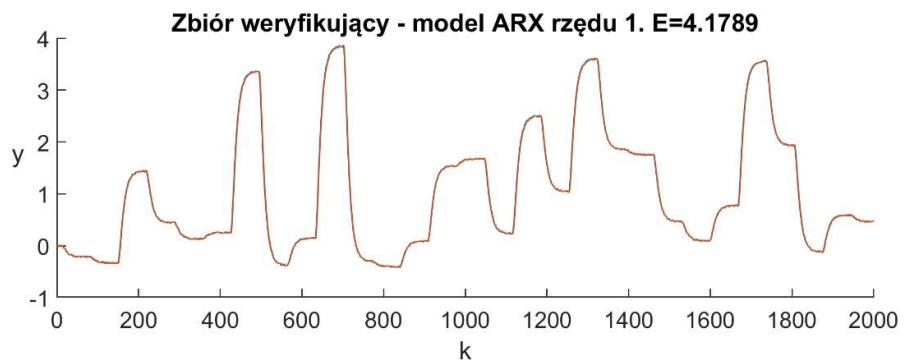
**Zadanie 2b:**

Model ARX – model bez rekurencji.

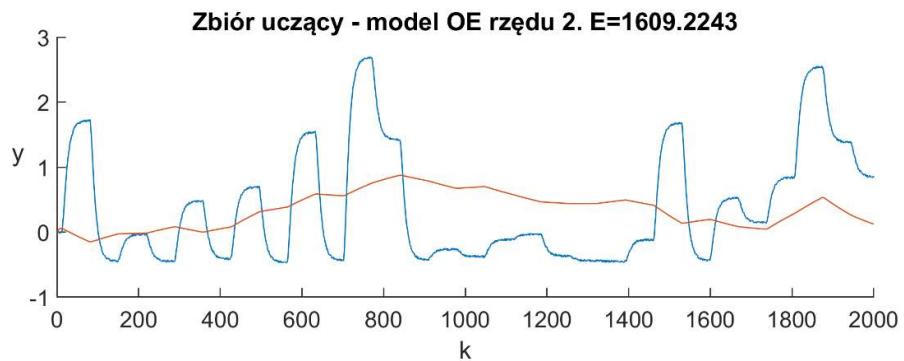
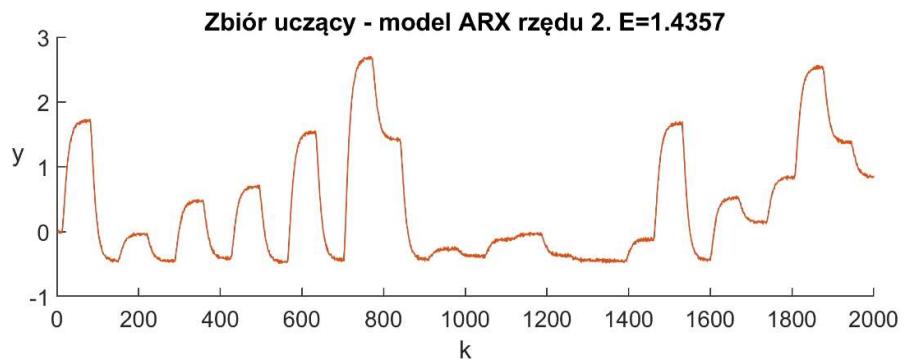
Model OE – model z rekurencją.



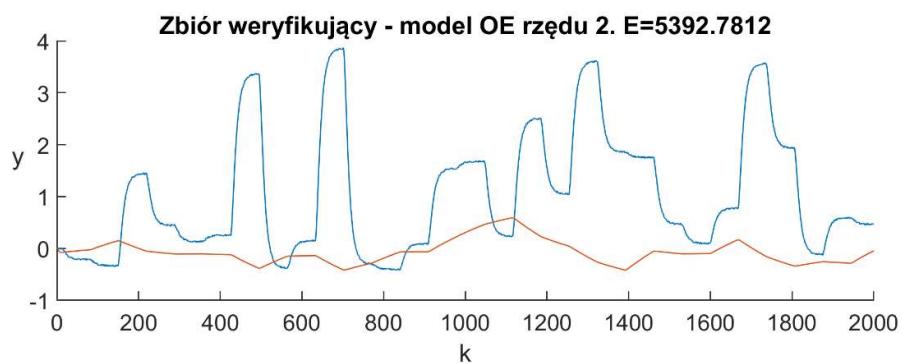
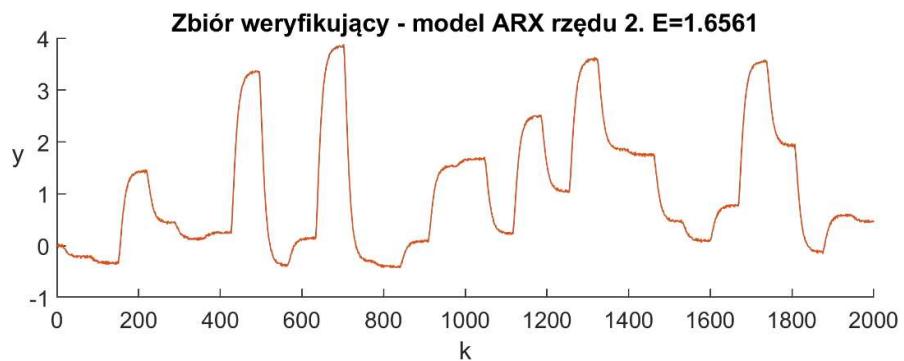
Rys 30: Model ARX i OE pierwszego rzędu – zbiór uczący.



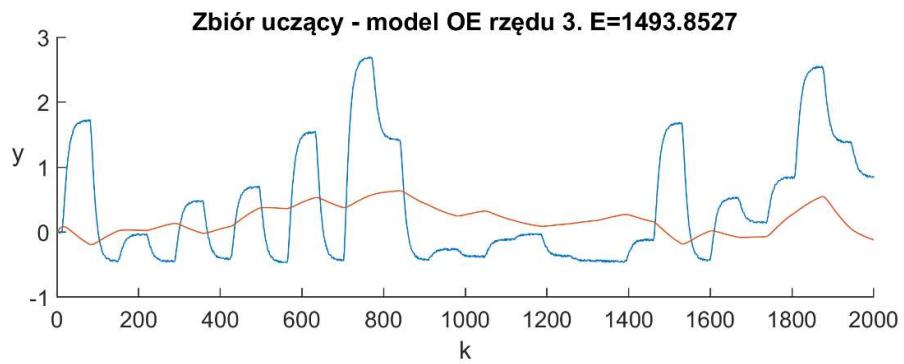
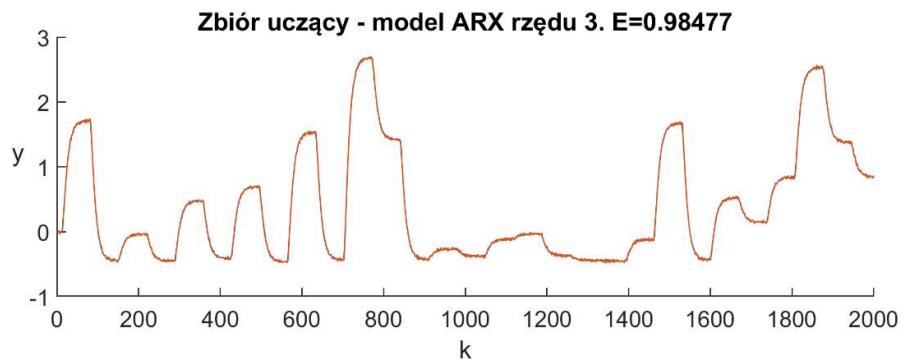
Rys 31: Model ARX i OE pierwszego rzędu – zbiór weryfikujący.



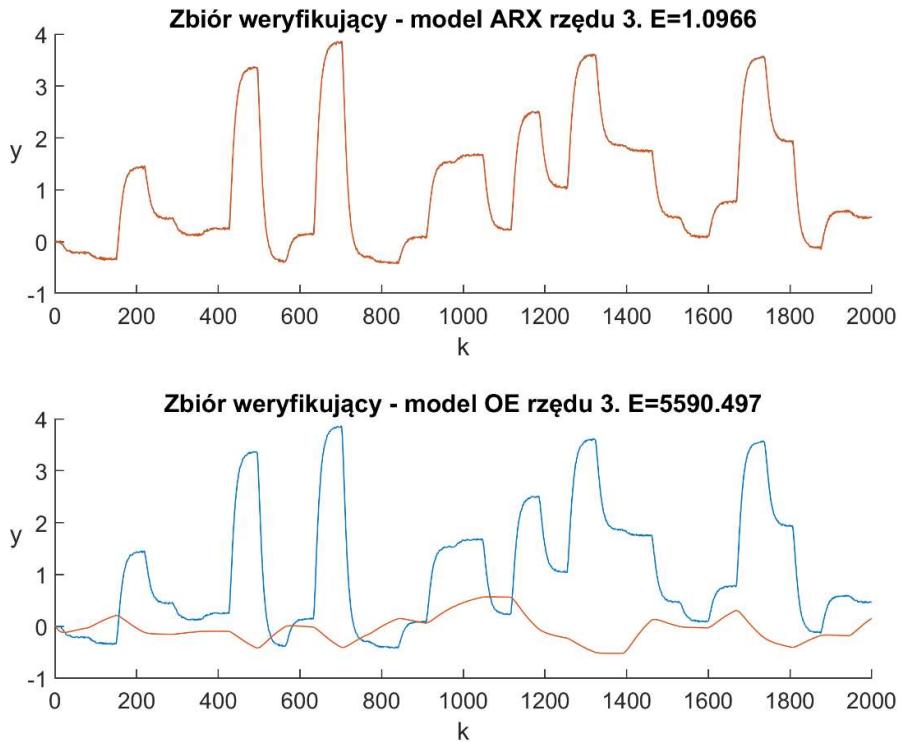
Rys 32: Model ARX i OE pierwszego rzędu – zbiór uczący.



Rys 33: Model ARX i OE pierwszego rzędu – zbiór weryfikujący.



Rys 34: Model ARX i OE pierwszego rzędu – zbiór uczący.



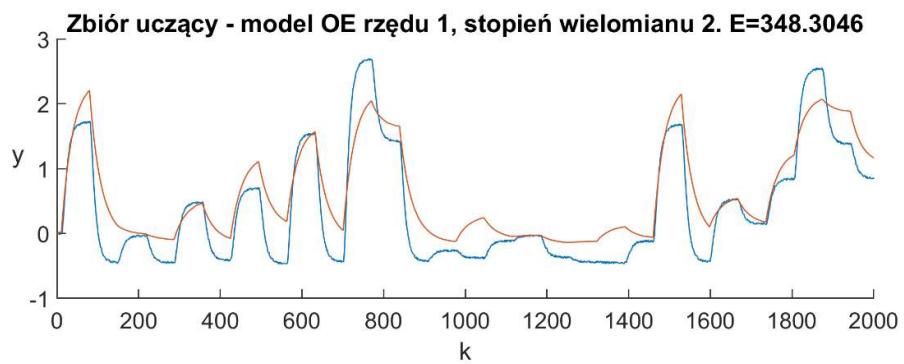
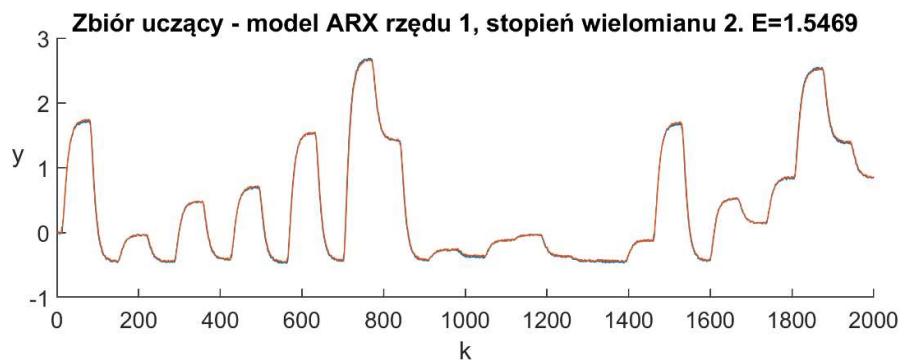
Rys 35: Model ARX i OE pierwszego rzędu – zbiór weryfikujący.

Rząd $n_a=n_b$ .	Zbiór uczący - ARX (bez rekurencji)	Zbiór weryfikający – ARX (bez rekurencji)	Zbiór uczący – OE (z rekurencją)	Zbiór weryfikujący – OE (z rekurencją)
1	2,3278	4,1789	1875,0323	5416,3423
2	1,4357	1,6561	1609,2243	5392,7812
3	0,98477	1,0966	1493,8527	5590,497

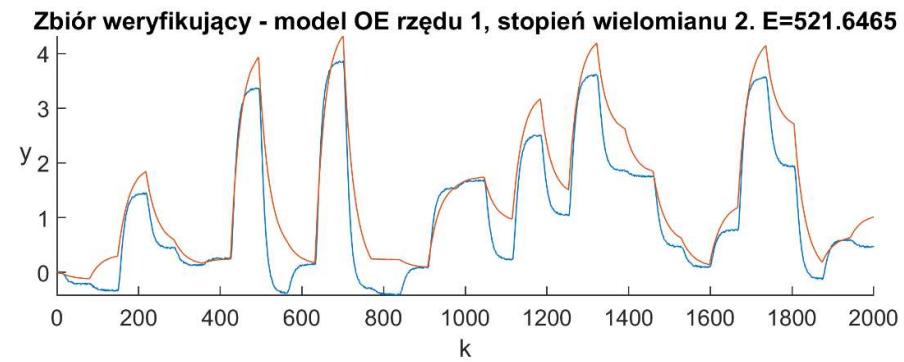
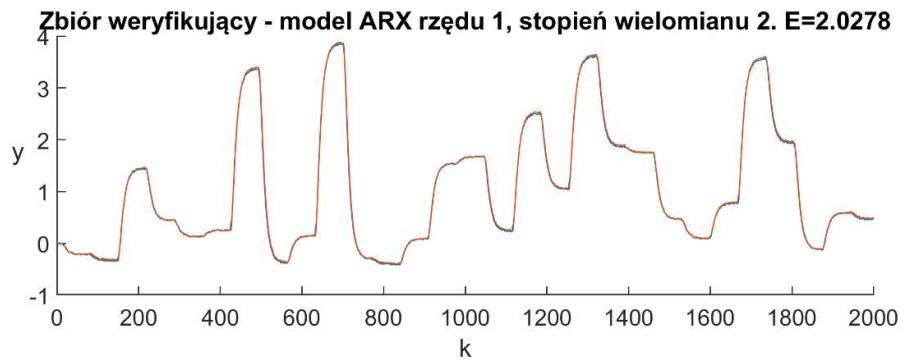
Wybieramy model, dla którego błąd dla zbioru weryfikującego jest najmniejszy. Dla trybu bez rekurencji najlepszym modelem jest ten z rzędem  $n=3$ , natomiast dla trybu z rekurencją najlepszym modelem jest ten, którego rząd wynosi  $n=2$ . Na ocenę jakości modelu lepiej pozwala tryb bez rekurencji, gdyż dokonuje obliczeń na podstawie podanych danych a nie na podstawie danych wyliczonych z modelu. W rezultacie zapewnia o wiele mniejszy błąd i odwzorowuje przebieg danych bardzo dobrze w przeciwieństwie do trybu z rekurencją, gdzie trend nie jest zachowany.

#### Zadanie 2c:

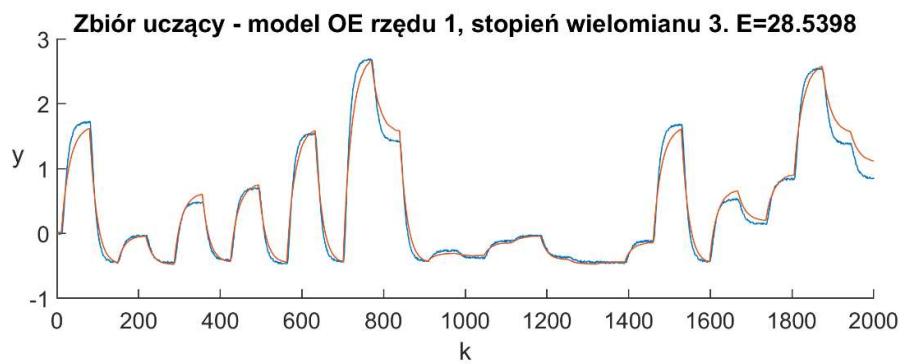
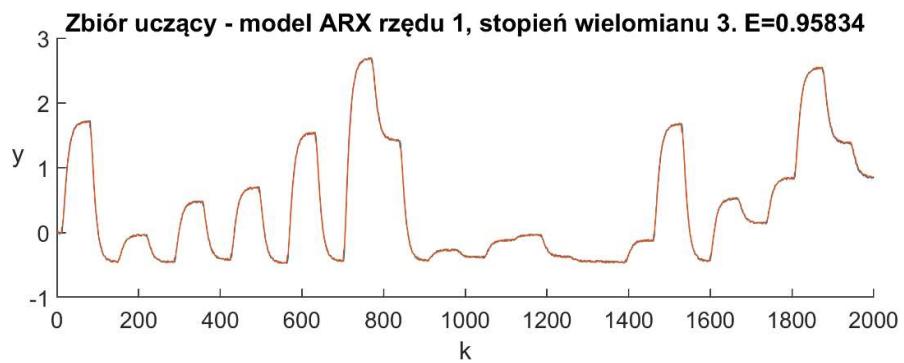
Szereg dynamicznych modeli nieliniowych o różnych stopniach wielomianu o dynamice pierwszego rzędu:



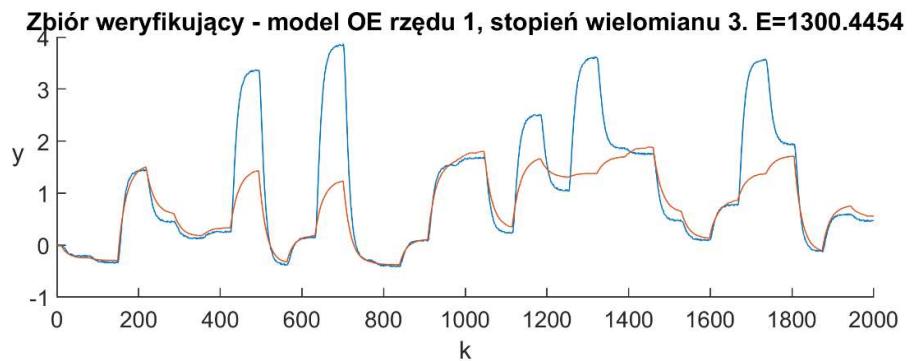
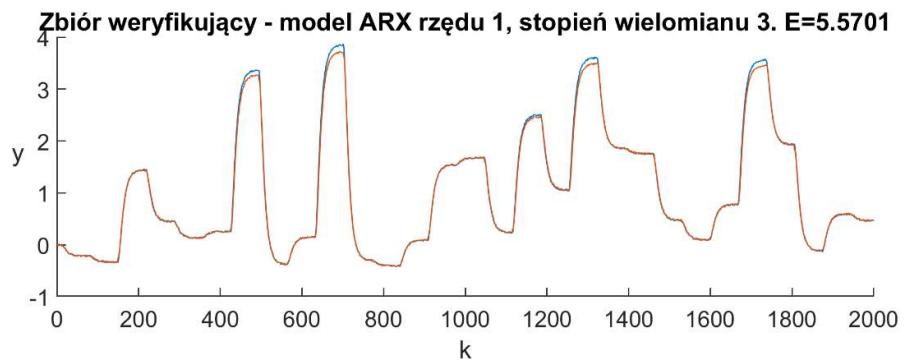
Rys 36: Model ARX i OE pierwszego rzędu o stopniu wielomianu równym 2 – zbiór uczący.



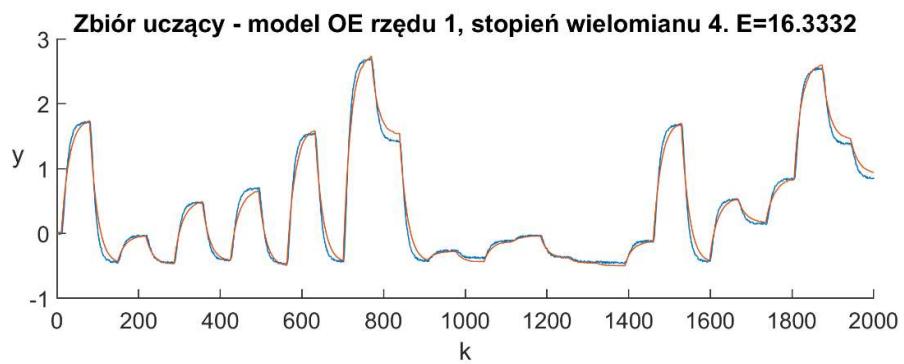
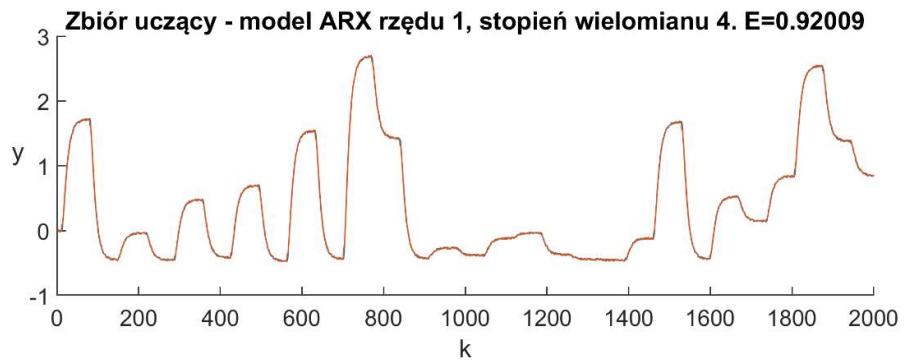
Rys 37: Model ARX i OE pierwszego rzędu o stopniu wielomianu równym 2 – zbiór weryfikujący.



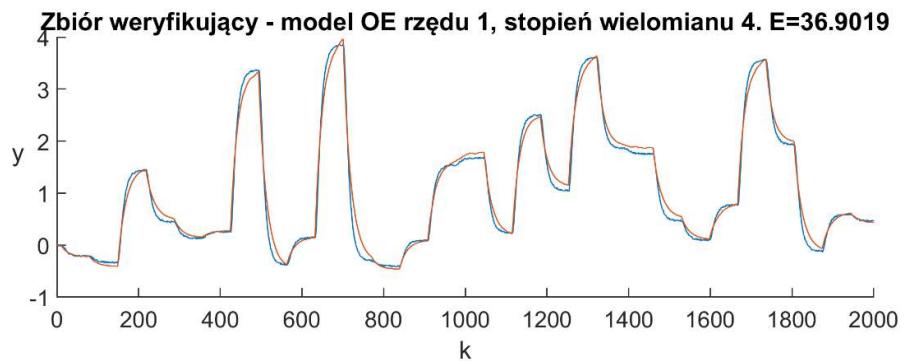
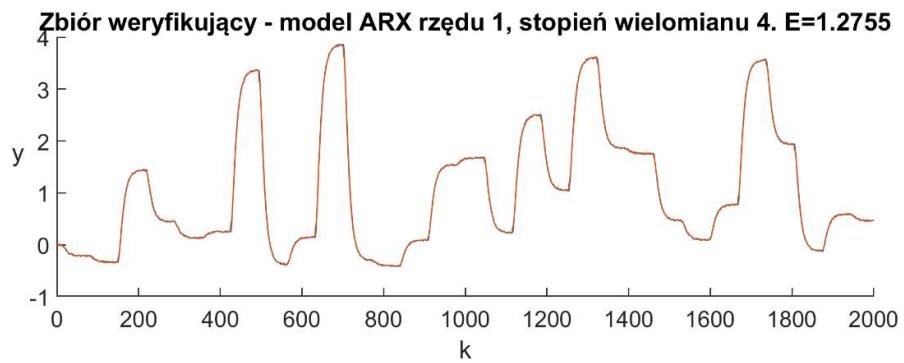
Rys 38: Model ARX i OE pierwszego rzędu o stopniu wielomianu równym 3 – zbiór uczący.



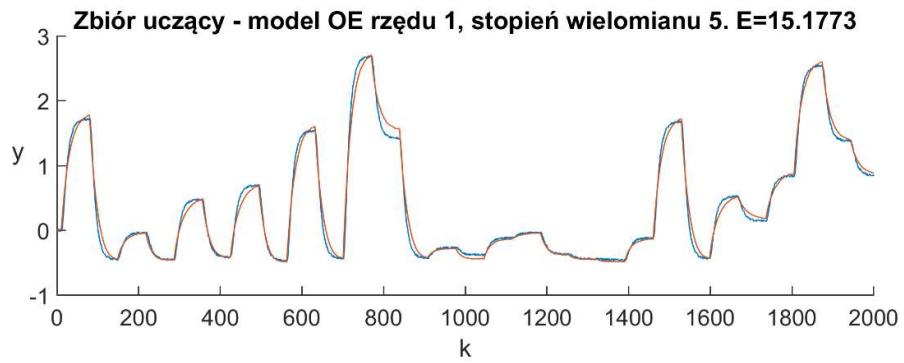
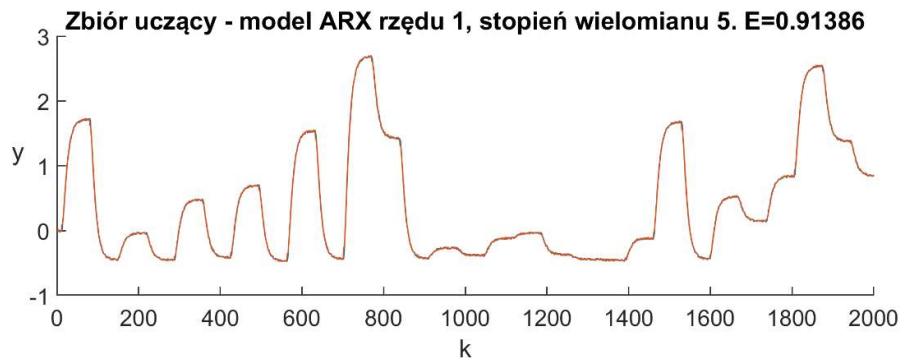
Rys 39: Model ARX i OE pierwszego rzędu o stopniu wielomianu równym 3 – zbiór weryfikujący.



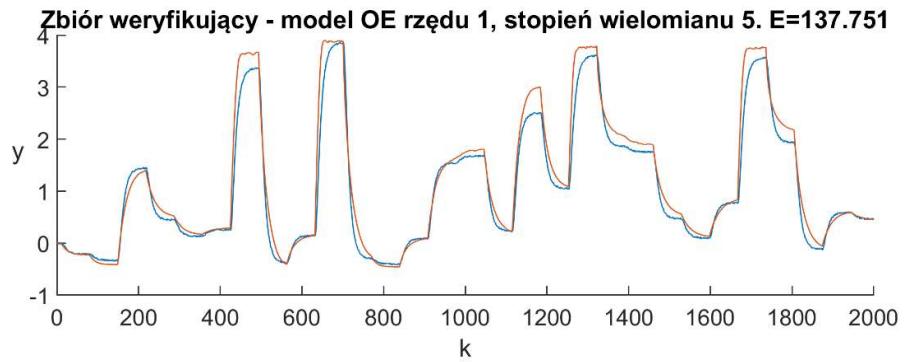
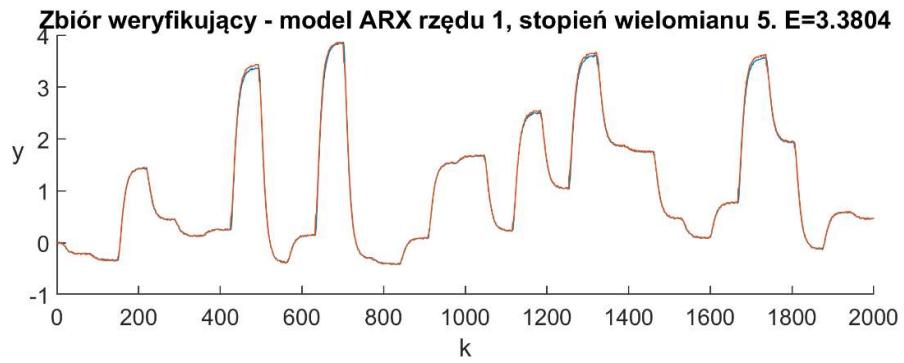
Rys 40: Model ARX i OE pierwszego rzędu o stopniu wielomianu równym 4 – zbiór uczący.



Rys 41: Model ARX i OE pierwszego rzędu o stopniu wielomianu równym 4 – zbiór weryfikujący.



Rys 42: Model ARX i OE pierwszego rzędu o stopniu wielomianu równym 5 – zbiór uczący.

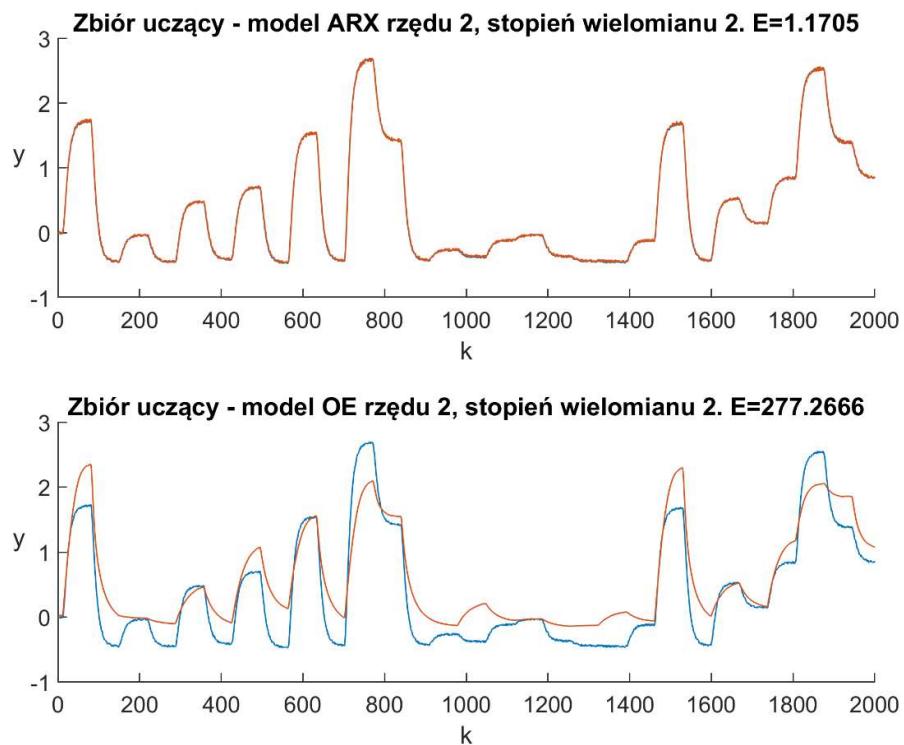


Rys 43: Model ARX i OE pierwszego rzędu o stopniu wielomianu równym 5 – zbiór weryfikujący.

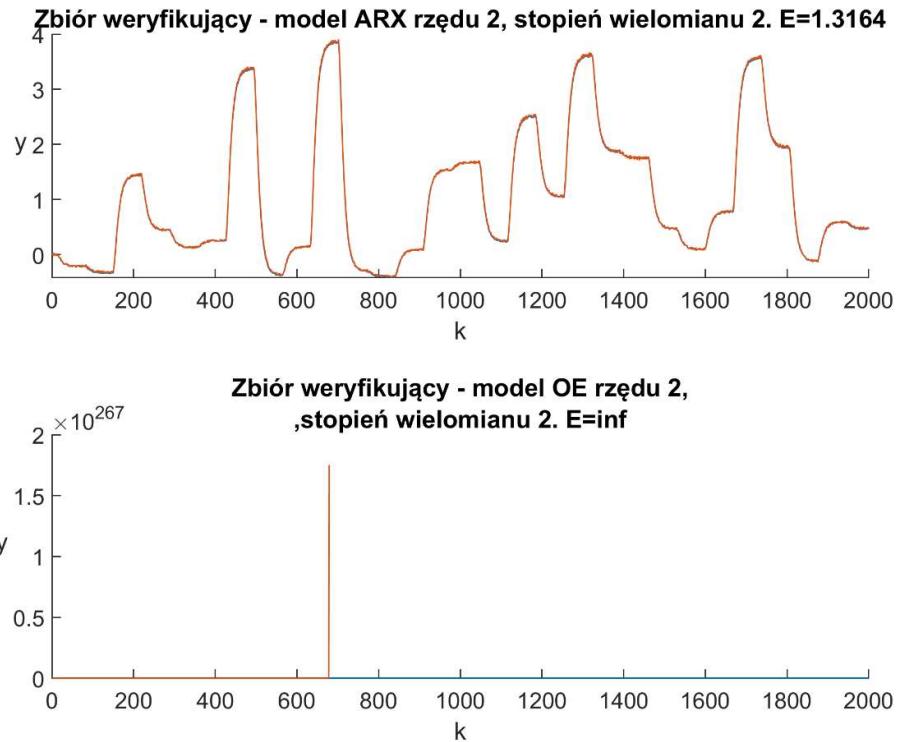
Stopień wielomianu	Zbiór uczący - ARX (bez rekurencji)	Zbiór weryfikujący – ARX (bez rekurencji)	Zbiór uczący – OE (z rekurencją)	Zbiór weryfikujący – OE (z rekurencją)
2	1,5469	2,0278	348,3046	521,6465
3	0,95834	5,5701	28,5398	1300,4454
4	0,92009	1,2755	16,3332	36,9019
5	0,91386	3,3804	15,1773	137,751

Najlepszy model zarówno dla modelu bez rekurencji jak i z rekurencją stanowi wielomian stopnia N = 4.

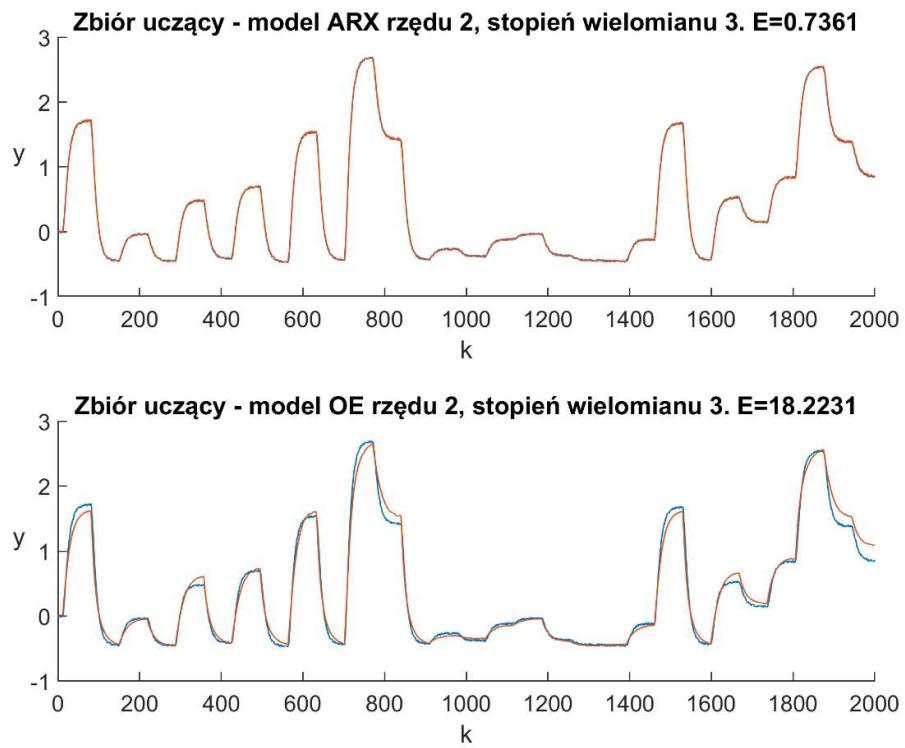
Szereg dynamicznych modeli nieliniowych o różnych stopniach wielomianu o dynamice drugiego rzędu:



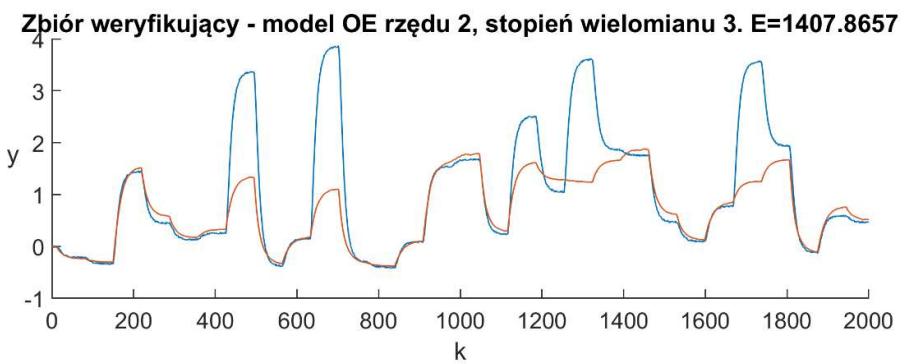
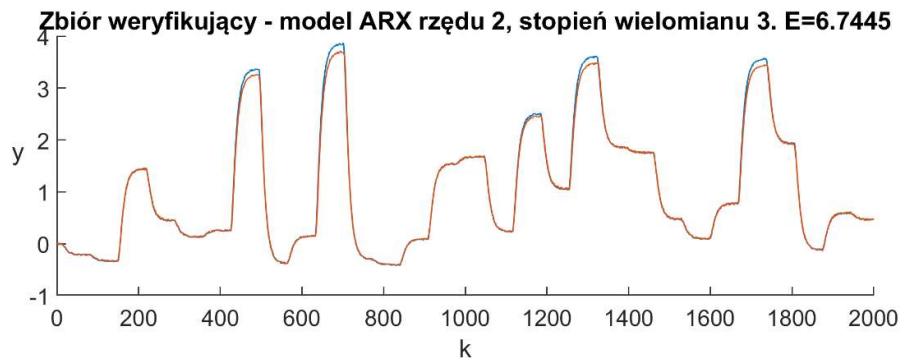
Rys 44: Model ARX i OE drugiego rzędu o stopniu wielomianu równym 2 – zbiór uczący.



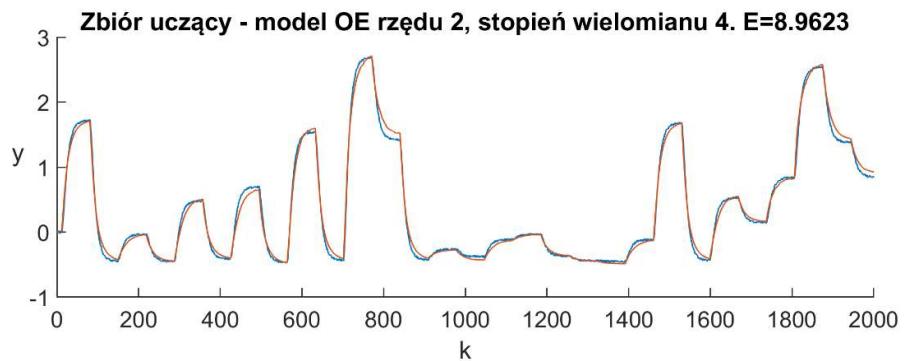
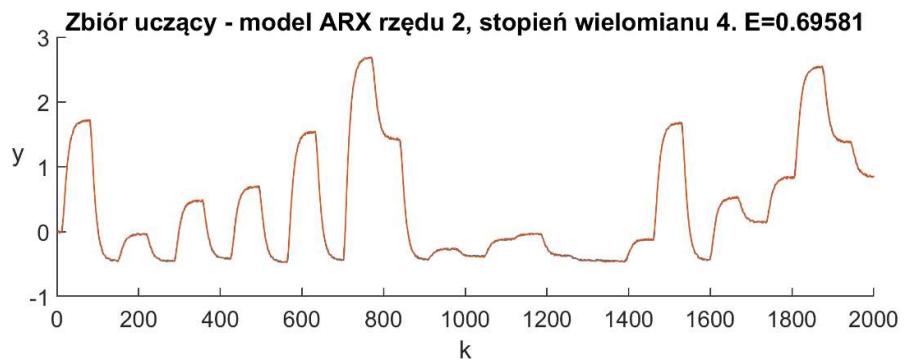
Rys 45: Model ARX i OE drugiego rzędu o stopniu wielomianu równym 2 – zbiór weryfikujący.



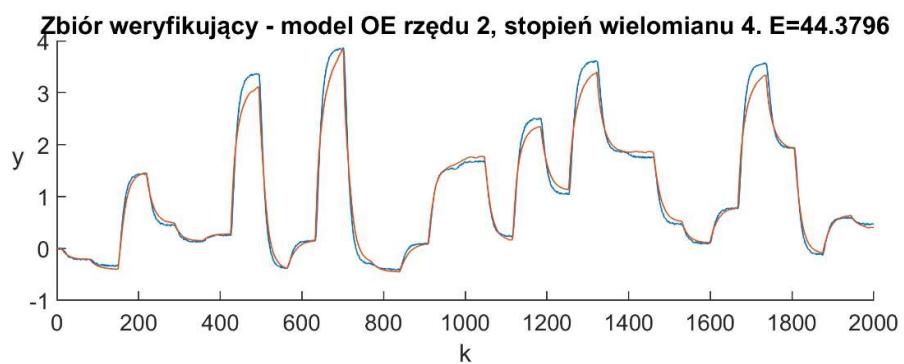
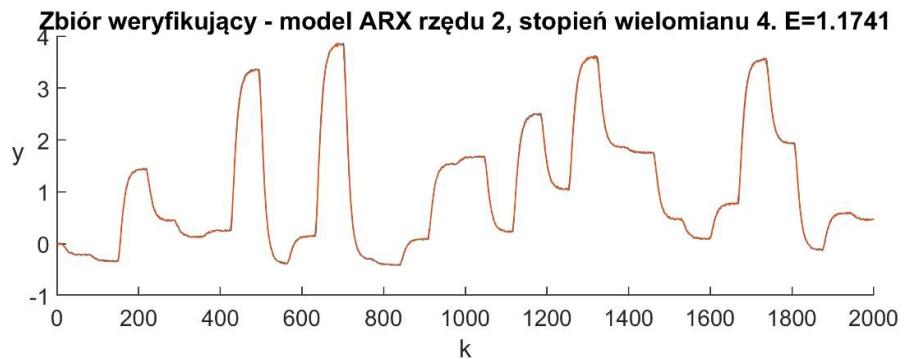
Rys 46: Model ARX i OE drugiego rzędu o stopniu wielomianu równym 3 – zbiór uczący.



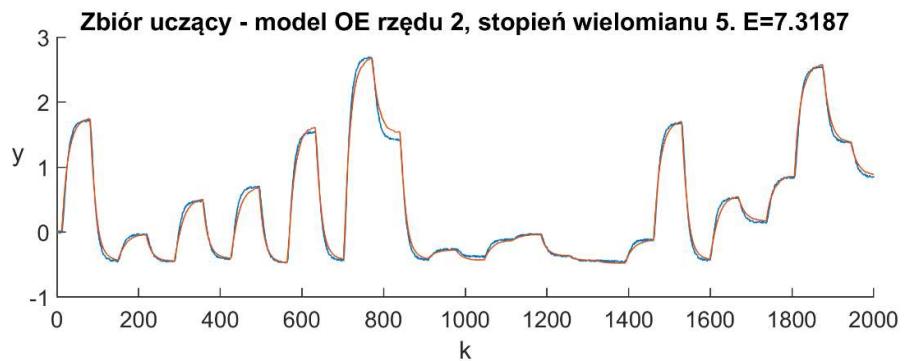
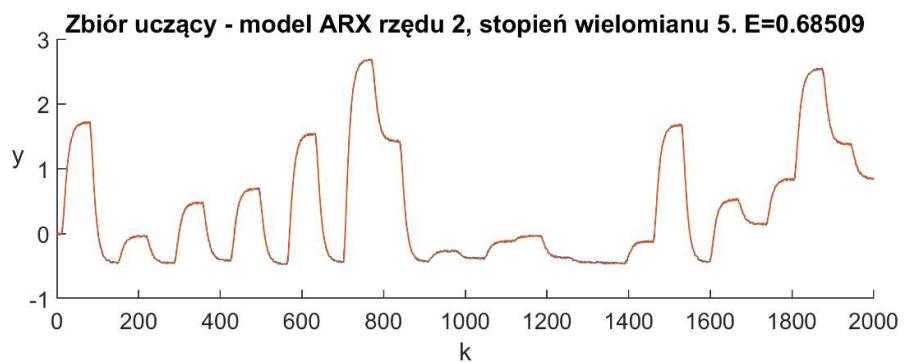
Rys 47: Model ARX i OE drugiego rzędu o stopniu wielomianu równym 3 – zbiór weryfikujący.



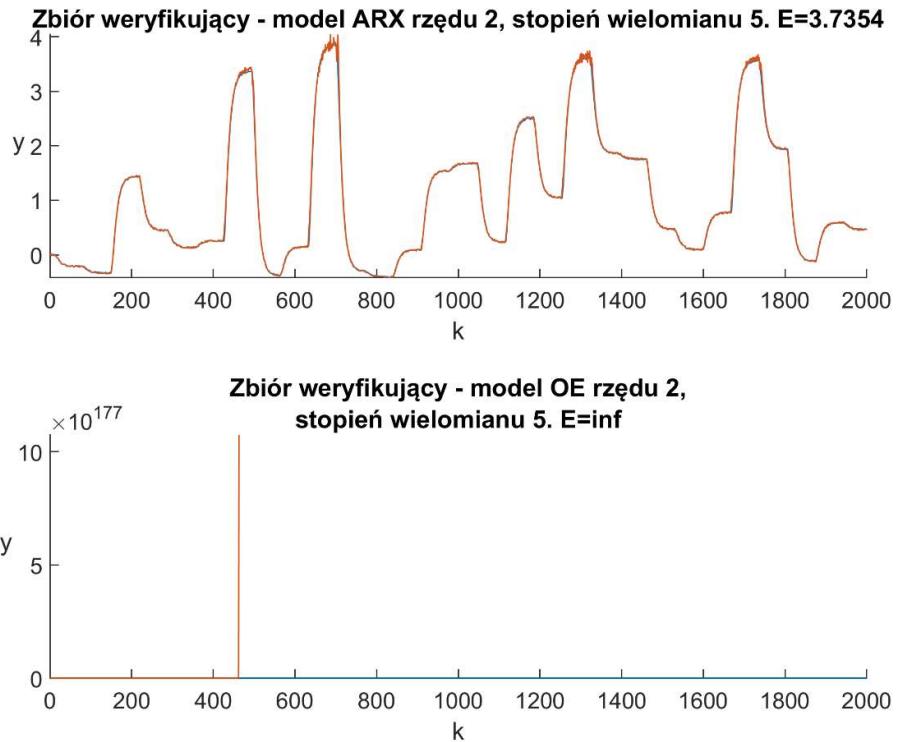
Rys 48: Model ARX i OE drugiego rzędu o stopniu wielomianu równym 4 – zbiór uczący.



Rys 49: Model ARX i OE drugiego rzędu o stopniu wielomianu równym 4 – zbiór weryfikujący.



Rys 50: Model ARX i OE drugiego rzędu o stopniu wielomianu równym 5 – zbiór uczący.

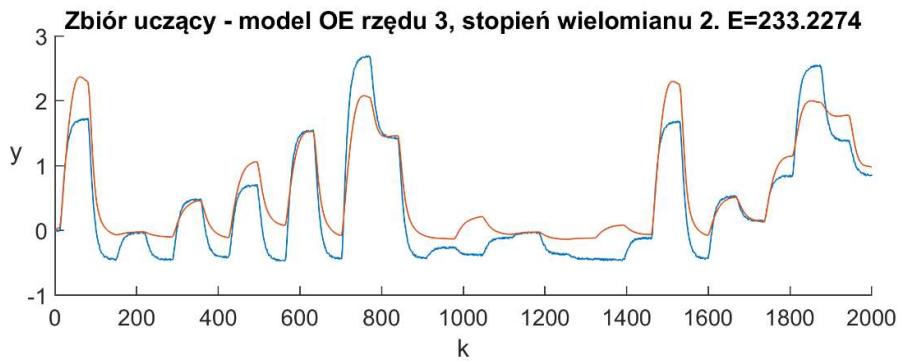
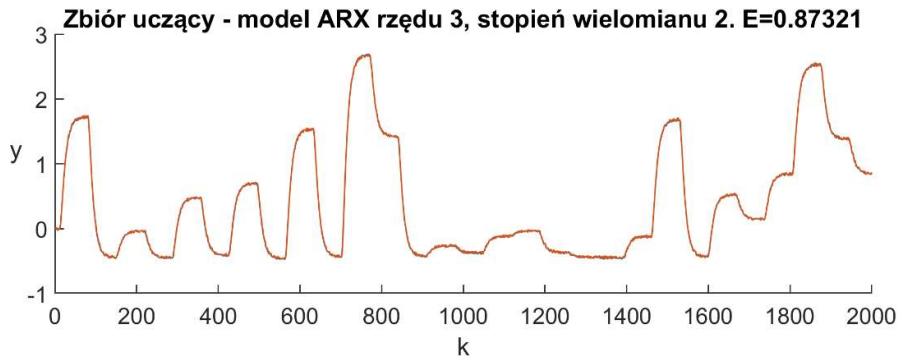


Rys 51: Model ARX i OE drugiego rzędu o stopniu wielomianu równym 5 – zbiór weryfikujący.

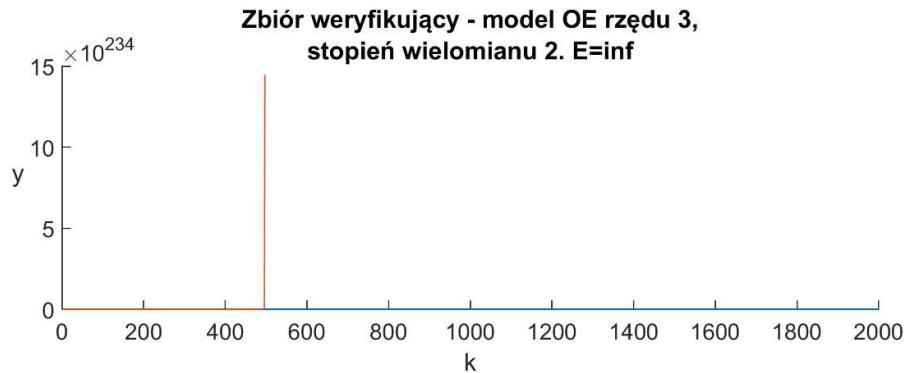
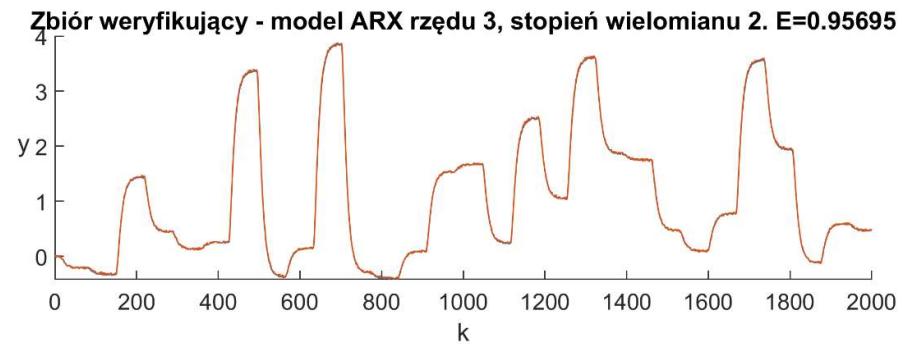
Stopień wielomianu	Zbiór uczący - ARX (bez rekurencji)	Zbiór weryfikający – ARX (bez rekurencji)	Zbiór uczący – OE (z rekurencją)	Zbiór weryfikujący – OE (z rekurencją)
2	1,1705	1,3164	277,2666	$\infty$
3	0,7361	6,7445	18,2231	1407,8657
4	0,69581	1,1741	8,9623	44,3796
5	0,68509	3,7354	7,3187	$\infty$

Najlepszy model zarówno dla modelu bez rekurencji jak i z rekurencją stanowi wielomian o stopniu N = 4.

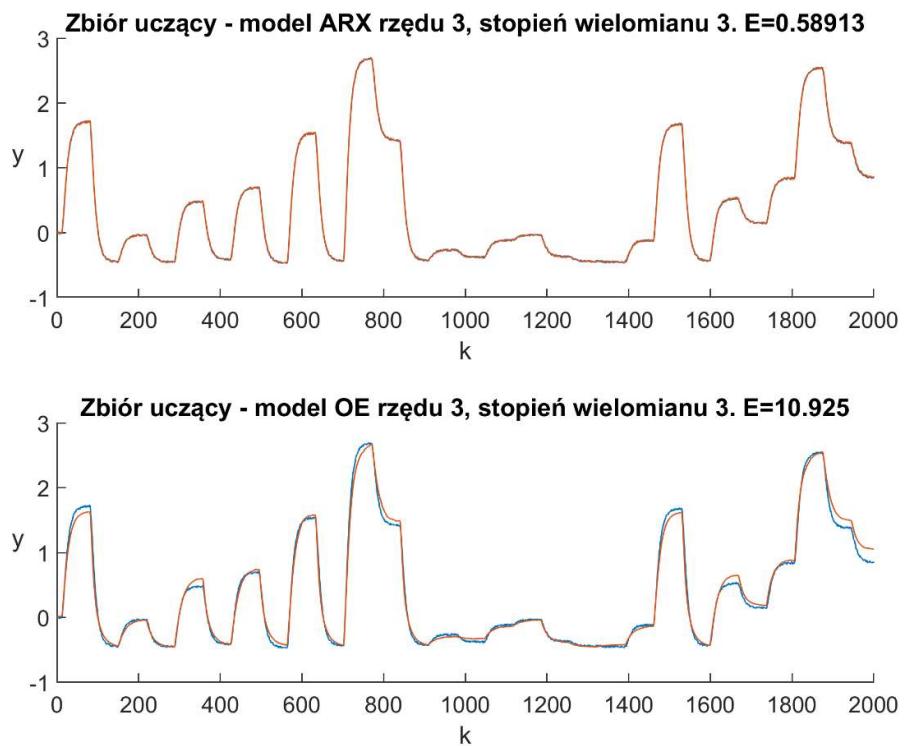
Szereg dynamicznych modeli nieliniowych o różnych stopniach wielomianu o dynamice trzeciego rzędu:



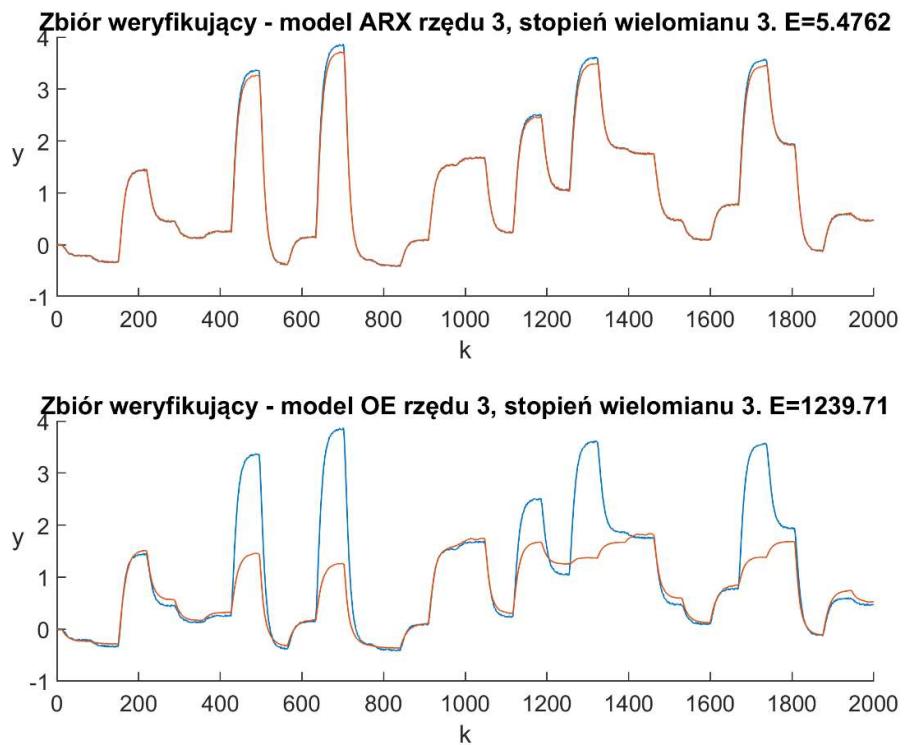
Rys 52: Model ARX i OE trzeciego rzędu o stopniu wielomianu równym 2 – zbiór uczący.



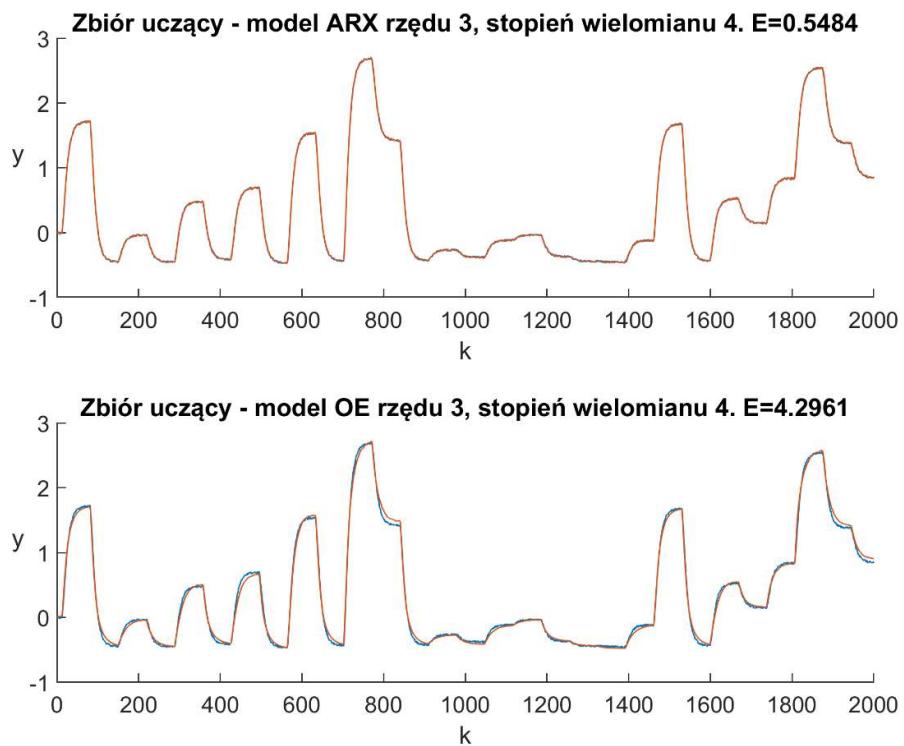
Rys 53: Model ARX i OE trzeciego rzędu o stopniu wielomianu równym 2 – zbiór weryfikujący.



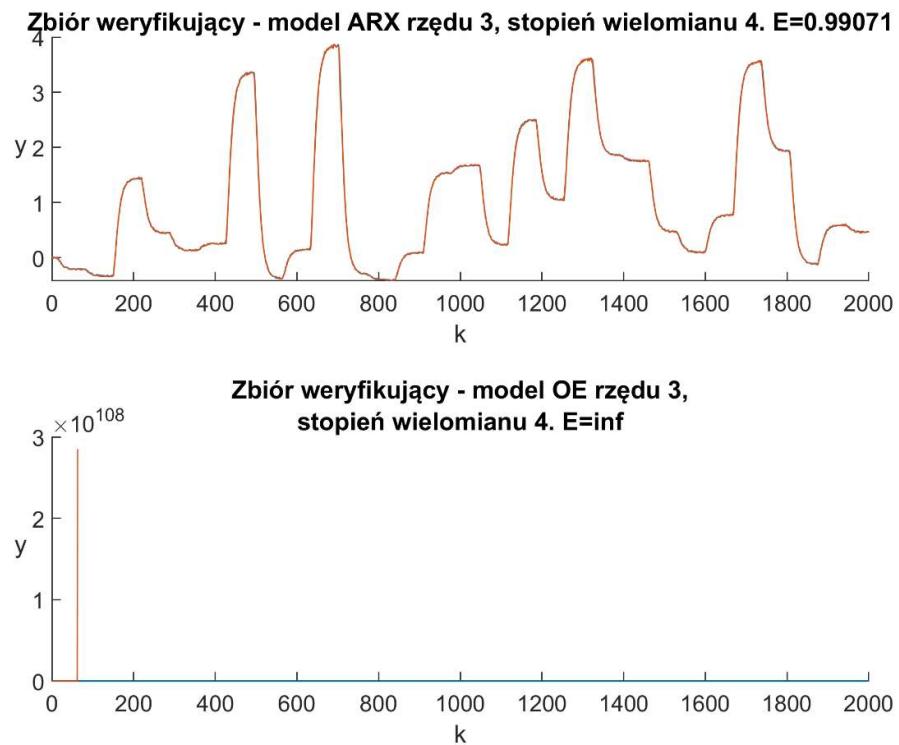
Rys 54: Model ARX i OE trzeciego rzędu o stopniu wielomianu równym 3 – zbiór uczący.



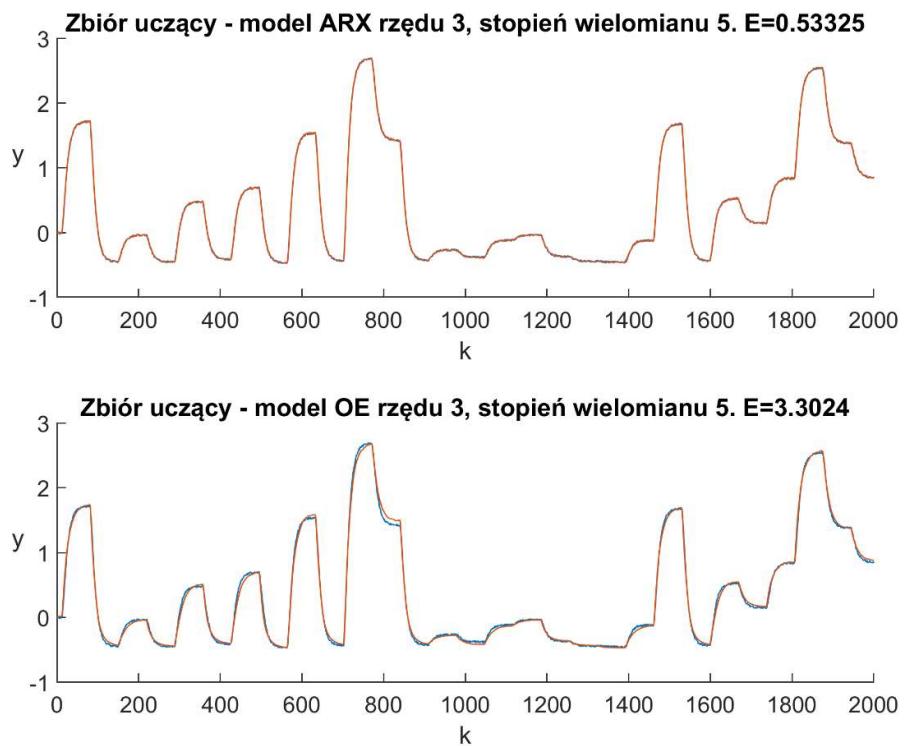
Rys 55: Model ARX i OE trzeciego rzędu o stopniu wielomianu równym 3 – zbiór weryfikujący.



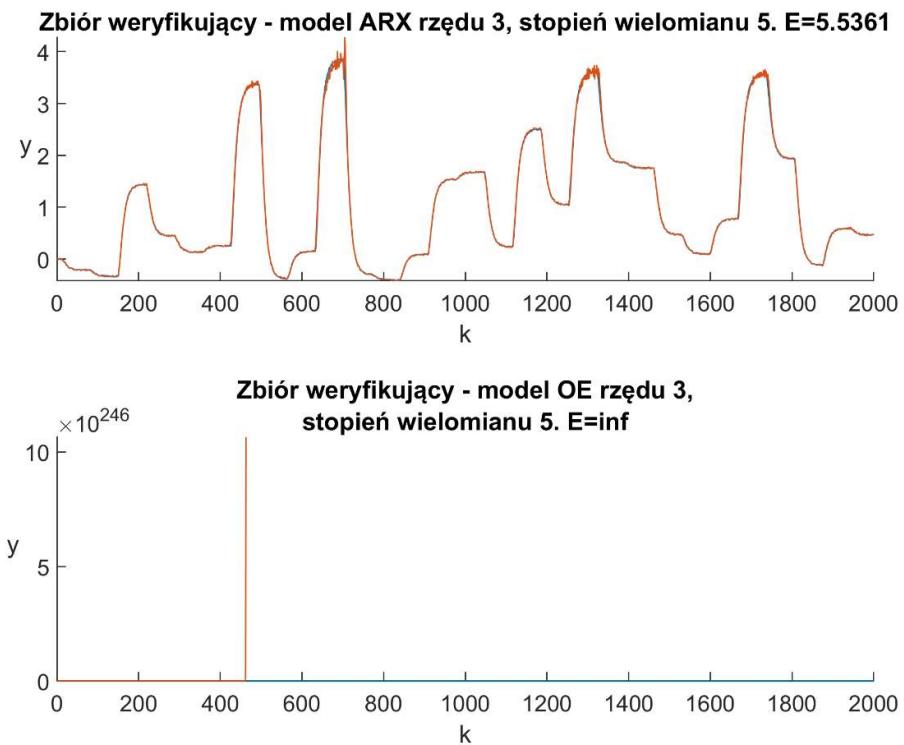
Rys 56: Model ARX i OE trzeciego rzędu o stopniu wielomianu równym 4 – zbiór uczący.



Rys 57: Model ARX i OE trzeciego rzędu o stopniu wielomianu równym 4 – zbiór weryfikujący.



Rys 58: Model ARX i OE trzeciego rzędu o stopniu wielomianu równym 5 – zbiór uczący.



Rys 59: Model ARX i OE trzeciego rzędu o stopniu wielomianu równym 5 – zbiór weryfikujący.

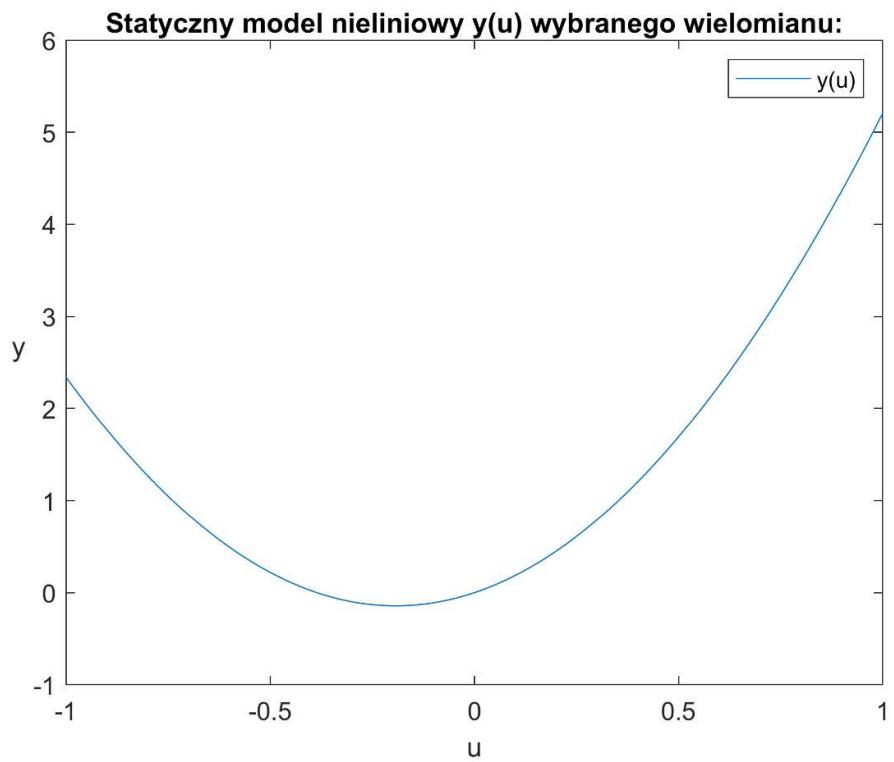
Stopień wielomianu	Zbiór uczący - ARX (bez rekurencji)	Zbiór weryfikujący – ARX (bez rekurencji)	Zbiór uczący – OE (z rekurencją)	Zbiór weryfikujący – OE (z rekurencją)
2	0,87321	0,95695	233,2274	$\infty$
3	0,58913	5,4762	10,925	1239,71
4	0,5484	0,99071	4,2961	$\infty$
5	0,53325	5,5361	3,3024	$\infty$

Najlepszy model zarówno dla modelu bez rekurencji jak i z rekurencją stanowi wielomian o stopniu N = 3.

Wybieramy model, dla którego błąd dla zbioru weryfikującego jest najmniejszy. Najlepszym modelem dynamicznym dla trybu bez rekurencji będzie model o wielomianie o stopniu N = 2 o rzędzie dynamiki równym 3. Natomiast dla trybu bez rekurencji najlepszym modelem będzie wielomian o stopniu N = 4 i rzędzie dynamiki równym 1. Na ocenę jakości modelu lepiej pozwala tryb bez rekurencji, gdyż dokonuje obliczeń na podstawie podanych danych a nie na podstawie danych wyliczonych z modelu. W rezultacie zapewnia o wiele mniejszy błąd i odwzorowuje przebieg danych bardzo dobrze w przeciwieństwie do trybu z rekurencją, gdzie trend nie jest zachowany. Na tej podstawie można wysnuć wniosek, że metoda najmniejszych kwadratów służy do wyznaczania modeli bez rekurencji, a nie z rekurencją.

Najlepszy spośród uzyskanych modeli: model ARX – wielomian stopnia 2 – rząd dynamiki równy 3.

**Zadanie 2d:**



Rys 60: Statyczny model nieliniowy (wielomian stopnia drugiego o rzędzie dynamiki równym 3 – wybranego w poprzednim punkcie) uzyskany za pomocą funkcji ***fsolve***.

Jak widzimy uzyskana funkcja przypomina kształtem rozłożenie danych statycznych.