التمرين 01:

1. $(u_n)_{n\in N}$ متتالية حسابية متناقصة حدها الأول u_0 و أساسها r .

أ- عين u_2 و r علما أن

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=24 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=210 \end{cases}$$

ب- استنتج u_n بدلالة n ثم احسب المجموع :

$$s_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$$

2. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي :

$$v_n=e^{14-3n}$$

أ- بين أن $(v_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

ب- احسب المجمـــــــــــــــوع

$$T_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$$

و الجداء $P_n=v_0.v_1.v_2.\dots.v_n$

ج - احسب $\lim_{n\to+\infty} T_n$ و $\lim_{n\to+\infty} P_n$

التمرين 02:

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي :

$$u_0=\frac{5}{2} \quad \text{و} \quad u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$$

1. أ- ارسم في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحني (d) الممثل للدالة f المعرفة على R ب :

$$f(x)=\frac{2}{3}x+2$$

ب- باستعمال الرسم السابق مثل على حامل محور الفواصل الحدود : u_0،u_1،u_2،u_3 و u_4

ج- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

2. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le 6$

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة

ج- هل (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n=u_n-6$$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 03:

(u_n) متتالية عددية معرفة ب

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n} \end{cases}$$

1. احسب الحدود : u_1 ، u_2 و u_3 و ضع تخمينا حول اتجاه التغير (u_n)

2. أثبت أنه لكل عدد طبيعي n فإن : $u_n<1$

3. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . بين أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها .

4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ :

$$v_n=\frac{1}{1-u_n}$$

أ- احسب الحدود : v_0 ، v_1 و v_2

ب-برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها .

ج- أحسب v_n ثم u_n بدلالة n ، استنتج من جديد نهاية المتتالية (u_n)

5.احسب المجموع

$$s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

و الجداء : $\pi_n = u_0 . u_1 \ldots . u_n$

التمرين 04:

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة

كما يلي : $n \in N$ $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n+1}{u_n+4} \end{cases}$

1. أ- احسب u_1 و u_2

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_n > 1$$

ج- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in N}$

ثم استنتج أنها متقاربة

2. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة لكل عدد طبيعي n ب: $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ-برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- احسب v_n بدلالة n

ج – استنتج أن : $u_n = \frac{5^{n+1}+3^{n+1}}{5^{n+1}-3^{n+1}}$

ثم احسب $\lim u_n$

1. احسب بدلالة n كلا من

$$s_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_n^2$$

والجداء $P_n = v_0 . v_1 . v_2 . \ldots . v_n$

التمرين 05:

1. $(u_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية حدودها موجبة حيث :

$$\ln u_1 + \ln u_5 = -12$$

$$\ln u_2 - \ln u_4 = 4$$

- عين أساس هذه المتتالية الهندسية وحدها u_0 أحسب u_n بدلالة n

- احسب المجموع

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

ثم $\lim_{n\to+\infty} s_n$

2. $(v_n)_{n\in N}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي

$$v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$$

- بين أن $(v_n)_{n\in N}$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

- نسمي T_n المجموع :

$T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. عين العدد الطبيعي n حتى يكون : $T_n^2 = 2^{30}$

التمرين 06:

I) المتتالية (v_n) معرفة على N ب :

$$v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$$

1.بين أن(v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد اساسها وحدها الاول

2. احسب $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

II) المتتالية (u_n) المعرفة ب $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$

1. برهن بالتراجع من اجل كل عدد طبيعي n : $1 \le u_n \le 6$.

2. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3. أ. برهن من اجل كل عدد طبيعي n :

$$6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$$

ب. بين انه من اجل كل عدد طبيعي n :

$$0 \leq 6 - u_n \leq v_n$$

استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 07:

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1,2]$ بالعبارة

$$f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$$

أ-بين أن الدالة f متزايدة تماما على I

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2. (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على N كما يأتي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، u_n ينتمي إلى I

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة

3. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}$

ب- عين النهاية : $\lim_{n\to+\infty} u_n$

التمرين 08:

لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n :
$w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$

1. أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
2. أحسب w_n بدلالة n ما هي نهاية (w_n) ؟
3. أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n)؟
4. أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان .
5. استنتج نهاية u_n و نهاية v_n

التمرين 09:

I) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N بحدها العام : $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

1. بين أن (u_n)متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول.
2. احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$، وماذا تستنتج ؟
3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n)$.

1. عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (v_n).

2. أ- احسب بدلالة n العدد p_n حيث :

$$p_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$$

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n بحيث : $p_n + 4n > 0$.

التمرين 10:

(u_n) متتالية معرفة على N بـ

$$u_0 = e^3 \text{ و } u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$$

(v_n) متتالية معرفة على N بـ

$$v_n = \ln(u_n) - 2$$

1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، عين أساسها و حدها الأول .
2. استنتج v_n ثم $\ln(u_n)$ بدلالة n .
3. أ- ما هي نهاية المتتالية (v_n)

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو e^2

التمرين 11:

/) لتكن (v_n) متتالية معرفة كما يلي

$$\begin{cases} v_0 = \alpha \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{9}{4} \end{cases}$$

-عين α حتى تكون (v_n) ثابتة

//) نضع $\alpha = 4$

1. احسب v_1 ، v_2 و v_3

2. نعرف (u_n) كمايلي : $u_n = v_n - 3$

أ- أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب- اكتب u_n و v_n بدلالة n

ج- احسب المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة n

د- احسب المجموع $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ بدلالة n

ه- احسب المجموع $Q_n = u_0 + 4u_1 + 4^2u_2 + 4^3u_3 + \dots + 4^n u_n$ بدلالة n

و- احسب الجداء $P_n = u_0 . u_1 . u_2 \dots . u_n$ بدلالة n

التمرين 12:

لتكن (u_n)متتالية معرفة كما يلي :

$$u_0 = 1 \text{ و } u_1 = 2$$

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة كمايلي :

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

-برهن أن(v_n) متتالية هندسية عين أساسها و حدها الأول

2. استنتج v_n بدلالة n
3. برهن أنه من أجل كل n

$$u_n = u_0 + (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1})$$

4. استنتج u_n بدلالة n

تمرين 01

(u_n) م حسابية متناقصة

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=24 & (1) \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=210 & (2) \end{cases}$$

1) عين u_2 والأساس r

لدينا الوسط الحسابي:

$$u_1+u_3=2u_2$$

نعوض في (1)

$$u_1+u_3+u_2=24$$

$$2u_2+u_2=24$$

بالتالي

$$3u_2=24$$

$$\boxed{u_2=8}$$

الأساس r:

لدينا:

$$u_3=u_2+(3-2)r=8+r$$

$$u_1=u_2+(1-2)r=8-r$$

نعوض في المعادلة (2)

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2=210$$

$$(8-r)^2+8^2+(8+r)^2=210$$

$$64+r^2-16r+64+64+r^2+16r=210$$

$$2r^2+192=210$$

$$2r^2=18$$

$$r^2=9$$

إذن $\begin{cases} r=3 & \text{مرفوض} \\ r=-3 & \text{مقبول} \end{cases}$

لأنها متناقصة

لدينا:

$$u_0=u_2+(0-2)r$$

$$=8-2(-3)=14$$

ب) u_n بدلالة n

$$u_n=u_0+nr=14-3n$$

المجموع:

$$S_n=u_0+u_1+\dots u_n$$

$$=\frac{n+1}{2}(u_0+u_n)$$

$$=\frac{n+1}{2}(14+14-3n)$$

$$S_n=\frac{n+1}{2}(28-3n)$$

2) نعتبر:

$$v_n=e^{14-3n}$$

أ) بين (v_n) م هندسية

ها وليك القانون

$$\boxed{v_{n+1}=q\,v_n}$$

لدينا :

$$v_n = e^{14-3n}$$

$$v_{n+1} = e^{14-3(n+1)} = e^{14-3n-3}$$

$$= e^{-3} . e^{14-3n}$$

$$v_{n+1} = e^{-3} . v_n$$

اذا هندسية اساسها e^{-3}

$$v_0 = e^{14-3(0)} = e^{14}$$

ب) حساب المجموع :

$$T_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

$$= v_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = e^{14} \frac{(e^{-3})^{n+1}-1}{e^{-3}-1}$$

$$= e^{14} \frac{e^{-3n-3}-1}{e^{-3}-1}$$

الجداء :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \cdots\cdots v_n$$

$$= e^{14} \times e^{11} \times e^{8} \times \cdots\cdots e^{14-3n}$$

$$= e^{\underbrace{14+11+8+\cdots(14-3n)}}$$

عبارة على مجموع متتالية حسابية

اساسها -3

وحدها الاول 14

والاخير هو $14-3n$

$$P_n = e^{\frac{n+1}{2}(14+14-3n)}$$

$$P_n = e^{\frac{n+1}{2}(28-3n)}$$

2) حساب :

$$\lim_{n \to +\infty} T_n = \lim_{n \to +\infty} \left[e^{14} \frac{\overset{0}{e^{-3n-3}}-1}{e^{-3}-1} \right]$$

$$= \frac{-e^{14}}{e^{-3}-1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} P_n = \lim_{n \to +\infty} e^{\overset{+\infty}{\frac{n+1}{2}}\overset{-\infty}{(28-3n)}} = 0$$

التمرين 02 :

$$\begin{cases} U_{n+1} = \frac{2}{3} U_n + 2 \\ U_0 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

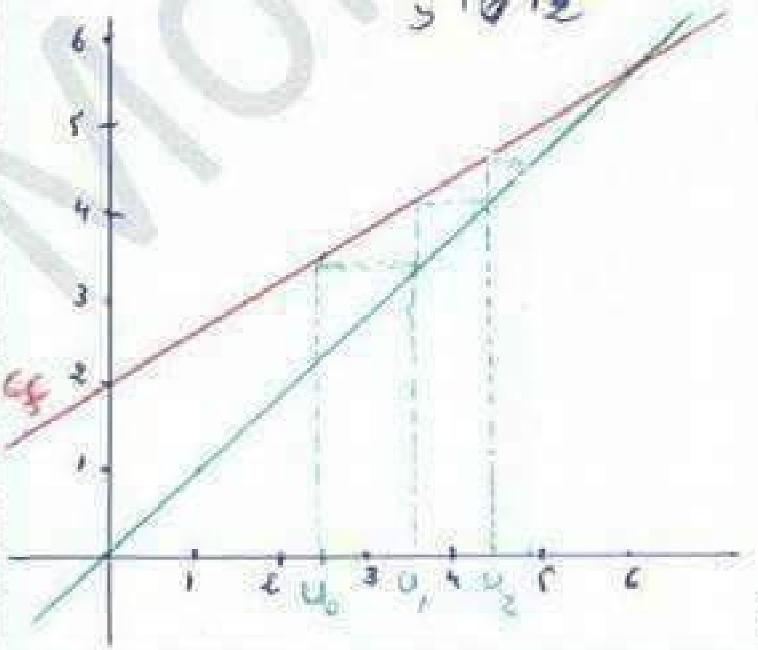
1) 1) ارسم (Δ) و تمثيل الحدود U_0, U_1, U_2

$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$

x	0	6
f	2	6

$y = x$

x	0	2
y	0	2



18 تمرين:

بما أن: $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$

فإن (u_n) متزايدة

وبما أنها تؤول إلى نهاية

محدودة فهي متقاربة نحو 6.

2) 1) برهن بالتراجع:

$$u_n \leq 6$$

نثبت صحة الشرط الابتدائي

$u_0 = \frac{5}{2}$ و $\frac{5}{2} \leq 6$

محقق

نفرض $u_n \leq 6$ صحيحة

ونبرهن صحة u_{n+1}

لدينا:

$$u_n \leq 6$$

$$\frac{2}{3}u_n \leq 6 \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}u_n \leq 4$$

$$\frac{2}{3}u_n + 2 \leq 6$$

$$u_{n+1} \leq 6$$

صحيحة ومنه $u_n \leq 6$

صحيحة

ب) تحقق متزايدة:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n$$

$$= -\frac{1}{3}u_n + 2$$

لدينا: $u_n \leq 6$

$$-\frac{1}{3}u_n \geq -\frac{1}{3}(6)$$

$$-\frac{1}{3}u_n + 2 \geq -2 + 2$$

أي:

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

ومنه (u_n) متزايدة

2) هل متقاربة:

نعم متقاربة.

بما أنها متزايدة ومحدودة

من الأعلى فهي متقاربة نحو 6

3) نضع:

$$v_n = u_n - 6$$

1) إثبات (v_n) م هندسية

فانون: $v_{n+1} = q v_n$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6$$

$$= \frac{2}{3}u_n + 2 - 6$$

$$= \frac{2}{3}u_n - 4$$

$$= \frac{2}{3}\left[u_n - \frac{4}{\frac{2}{3}}\right]$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}[u_n - 6] = \frac{2}{3}v_n$$

هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

الحل الاول :

$$v_0 = u_0 - 6 = \frac{5}{2} - 6 = -\frac{7}{2}$$

ب) u_n بدلالة n

اولا نكتب v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 q^n = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

اذا

$$u_n = v_n + 6$$

$$u_n = -\frac{7}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + 6$$

استنتاج النهاية

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\Big[-\frac{7}{2}\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0} + 6\Big]$$

$$= 6$$

ومنه متقاربة نحو 6

التمرين 03 :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \end{cases}$$

1) حساب الحدود :

$$u_1 = \frac{1}{2-u_0} = \frac{1}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$u_2 = \frac{1}{2-u_1} = \frac{1}{2-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{2-u_2} = \frac{1}{2-\frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$$

تخمين : نلاحظ $u_0 < u_1 < u_2$

فان (u_n) متزايدة

2) برهان :

$$u_n < 1$$

نثبت صحة الشرط الابتدائي

$u_0 = \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} < 1$

محقق

نفرض $u_n < 1$ صحيحة

ونبرهن صحة u_{n+1}

لدينا :

$$u_n < 1$$

$$-u_n > -1$$

$$2 - u_n > 2 - 1$$

$$2 - u_n > 1$$

نقلب :

$$\frac{1}{2-u_n} < 1$$

اذا

$$u_{n+1} < 1$$

صحيحة ومنه $u_n < 1$ صحيحة

3) اتجاه التغير :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2-u_n} - u_n$$

$$= \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2-u_n} = \frac{(u_n-1)^2}{2-u_n}$$

لدينا :

$u_n < 1$

البسط

$u_n - 1 < 0$

موجب $(u_n - 1)^2 < 0$

والمقام

$u_n < 1$

بما ان

$-u_n > -1$

فان

$2 - u_n > 1$

موجب

ومنه :

$u_{n+1} - u_n > 0$

متزايدة

- نبين متقاربة :

بما أن (u_n) متزايدة و محدودة من الاعلى فهي متقاربة نحو 1

- النهاية ℓ .

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

لدينا :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$$

يكافئ

$$\ell = \frac{1}{2-\ell}$$

يكافئ

$$-\ell^2 + 2\ell = 1$$

$$\ell^2 - 2\ell + 1 = 0$$

$$(\ell - 1)^2 = 0$$

$\ell - 1 = 0$ يكافئ $\boxed{\ell = 1}$

اذا

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

4) نعتبر :

$$v_n = \frac{1}{1-u_n}$$

1) الحدود :

$$v_0 = \frac{1}{1-u_0} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$v_2 = \frac{1}{1-u_1} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$$

$$v_2 = \frac{1}{1-u_2} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$$

2) برهن (v_n) م حسابية

هذا القانون $\boxed{v_{n+1} - v_n = r}$

لدينا $v_n = \frac{1}{1-u_n}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2-u_n}} - \frac{1}{1-u_n}$$

$$= \frac{1}{\frac{1-u_n}{2-u_n}} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{2-u_n}{1-u_n} - \frac{1}{1-u_n}$$

$$= \frac{2-u_n-1}{1-u_n} = \frac{1-u_n}{1-u_n} = 1$$

حسابية اساسها 1

تمرين 04:

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n+1}{U_n+4} \end{cases}$$

1) أ) حساب الحدود:

$$U_1 = \frac{4U_0+1}{U_0+4} = \frac{4\times4+1}{4+4} = \frac{17}{8}$$

$$U_2 = \frac{4.U_1+1}{U_1+4} = \frac{4.\frac{17}{8}+1}{\frac{17}{8}+4} = \frac{\frac{17}{2}+1}{\frac{49}{8}}$$

$$= \frac{19}{2}\times\frac{8}{49} = \frac{76}{49}$$

ب) برهن بالتراجع:

$$U_n > 1$$

نغير شكل المتتالية:

$$U_{n+1} = a + \frac{b}{U_n+4} = \frac{aU_n+4a+b}{U_n+4}$$

بالمطابقة

$a = 4$

$4a+b = 1$ ومنه $b = 1-16 = -15$

$$U_{n+1} = 4 - \frac{15}{U_n+1}$$

- نثبت صحة الشرط الابتدائي

$U_0 = 4$ و $4 > 1$ محقق

- نفرض صحة $U_n > 1$ صحيحة

ونبرهن صحة U_{n+1}

ج) حساب V_n بدلالة n

$$V_n = V_0 + nr = 2 + n(1)$$

$$\boxed{V_n = 2+n}$$

U_n بدلالة n

لدينا:

$$V_n = \frac{1}{1-U_n}$$

$$1-U_n = \frac{1}{V_n}$$

$$-U_n = \frac{1}{V_n} - 1$$

$$U_n = 1 - \frac{1}{V_n} = \frac{V_n-1}{V_n}$$

$$U_n = \frac{2+n-1}{2+n} = \frac{n+1}{n+2}$$

النهاية من جديد:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = 1$$

5) المجموع والجداء:

$$S_n = V_0 + V_1 + \cdots V_n = \frac{n+1}{2}(V_0+V_n)$$

$$= \frac{n+1}{2}(2+2+n) = \frac{n+1}{2}(4+n)$$

$$\Pi_n = U_0\times U_1\times U_2\times \cdots U_n$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\cdots\frac{n+1}{2+n}$$

$$\Pi = \frac{1}{2+n}$$

لدينا: $U_n > 1$

$U_n + 4 > 5$

تقابليا:

$$\frac{1}{U_n+4} < \frac{1}{5}$$

نضرب في -15:

$$\frac{-15}{U_n+4} > \frac{-15}{5}$$

نضيف 4

$$4 - \frac{15}{U_n+4} > -3+4$$

$$U_{n+1} > 1$$

صحيحة ومنه $U_n > 1$ محققة

ج) الثانية:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n+1}{U_n+4} - U_n$$

$$= \frac{4U_n+1-U_n^2-4U_n}{U_n+4} = \frac{-U_n^2+1}{U_n+4}$$

$$= \frac{(1-U_n)(1+U_n)}{U_n+4}$$

ندرس الإشارة

لدينا: $U_n > 1$

$1+U_n > 2$ موجب

$U_n+4 > 5$ موجب

و: $-U_n < -1$

$1-U_n < 0$ سالب

إذاً $U_{n+1} - U_n < 0$ متناقصة

استنتاج التقارب:

(U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو 1

2) نعتبر:

$$v_n = \frac{U_n-1}{U_n+1}$$

1) برهن (v_n) م هندسية:

$$v_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+1} = \frac{\frac{4U_n+1}{U_n+4}-1}{\frac{4U_n+1}{U_n+4}+1}$$

$$= \frac{\frac{3U_n-3}{U_n+4}}{\frac{5U_n+5}{U_n+4}} = \frac{3U_n-3}{5U_n+5}$$

$$= \frac{3}{5}\,\frac{U_n-1}{U_n+1} = \frac{3}{5} v_n$$

هندسية أساسها $\frac{3}{5}$

$$v_0 = \frac{U_0-1}{U_0+1} = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$$

ب) v_n بدلالة n

$$v_n = v_0 \cdot q^n = \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$$

ج) استنتاج U_n:

لدينا:

$$v_n = \frac{U_n-1}{U_n+1}$$

تكافئ:

$$v_n U_n + v_n = U_n - 1$$

$$v_n U_n - U_n = -v_n - 1$$

(v_n) متتالية هندسية

$v_0 = \frac{3}{5}$ يعني $v_0^2 = \frac{9}{25}$

$q = \frac{3}{5}$ يعني $q^2 = \frac{9}{25}$

اذن

$$S_n = v_0^2 \frac{(q^2)^{n+1} - 1}{q^2 - 1}$$

$$= \frac{9}{25} \frac{\left(\frac{9}{25}\right)^{n+1} - 1}{\frac{9}{25} - 1} = \frac{9}{25} \frac{\left(\frac{9}{25}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{16}{25}}$$

$$= -\frac{9}{16}\left[\left(\frac{9}{25}\right)^{n+1} - 1\right]$$

$$= \frac{9}{16}\left[1 - \left(\frac{9}{25}\right)^{n+1}\right]$$

الجداء

$$P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \cdots v_n$$

$$P_n = \left(\frac{3}{5}\right)^1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \cdots \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)^{1+2+3+\cdots(n+1)}$$

مجموع متتالية حسابية

حدها الاول 1 والاخير $n+1$

$$P_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{n+1}{2}(1+1+n)}$$

$$P_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{n+1}{2}(2+n)}$$

$$U_n(v_n - 1) = -v_n - 1$$

$$U_n = \frac{-v_n - 1}{v_n - 1} = -\frac{v_n + 1}{v_n - 1}$$

$$= -\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} - 1} = -\frac{\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} + 1}{\frac{3^{n+1}}{5^{n+1}} - 1}$$

$$= -\frac{\frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{5^{n+1}}}{\frac{3^{n+1} - 5^{n+1}}{5^{n+1}}} = -\frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{3^{n+1} - 5^{n+1}}$$

$$U_n = \frac{5^{n+1} + 3^{n+1}}{5^{n+1} - 3^{n+1}}$$ وهو المطلوب.

حساب النهاية

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty}\left[-\frac{v_n + 1}{v_n - 1}\right]$$

لدينا

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = 0$$

اذن

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty}\left[-\frac{\overset{0}{v_n} + 1}{\underset{0}{v_n} - 1}\right] = 1$$

4) حساب بدلالة n

$$S_n = v_0^2 + v_1^2 + \cdots v_n^2$$

لدينا

ت 05 :

(U_n) م هندسية حدودها موجبة

$$\begin{cases} \ln U_2 - \ln U_4 = 4 & \text{—} ① \\ \ln U_1 + \ln U_5 = -12 & \text{—} ② \end{cases}$$

- تعيين الأساس q :

من المعادلة ① نجد

$$\ln U_2 - \ln U_4 = 4$$

لدينا :

$$U_4 = U_2\, q^2$$

نعوض في :

$$\ln U_2 - \ln(U_2 \cdot q^2) = 4$$

$$\ln U_2 - (\ln U_2 + \ln q^2) = 4$$

$$-2 \ln q = 4$$

$$\ln q = -2$$

$$\boxed{q = e^{-2}}$$

تعيين U_0 :

$$U_5 = U_0\, q^5 = U_0 (e^{-2})^5 = U_0\, e^{-10}$$

$$U_1 = U_0\, q^1 = U_0\, e^{-2}$$

نعوض في ②

$$\ln U_1 + \ln U_5 = -12$$

$$\ln U_0 e^{-2} + \ln U_0 e^{-10} = -12$$

$$\ln U_0 + \ln e^{-2} + \ln U_0 + \ln e^{-10} = -12$$

$$2 \ln U_0 - 2 \ln e - 10 \ln e = -12$$

$$2 \ln U_0 - 2 - 10 = -12$$

$$2 \ln U_0 = 0$$

$$\ln U_0 = 0$$

$$U_0 = e^0 = 1$$

$$\boxed{U_0 = 1}$$

U_n بدلالة n

$$U_n = U_0\, q^n = 1(e^{-2})^n$$

$$U_n = e^{-2n}$$

حساب S_n بدلالة n

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots U_n$$

$$= U_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = 1 \frac{(e^{-2})^{n+1}-1}{e^{-2}-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\cancelto{0}{e^{-2n-2}} - 1}{e^{-2}-1}\right]$$

$$= -\frac{1}{e^{-2}-1}$$

2) نعتبر :

$$V_n = \ln U_n + \ln U_{n+1}$$

- بين أن (V_n) م حسابية

لدينا :

عيين قيمة n :

$$T_n^2 = 2^{30}$$

$$[-2(n+1)^2]^2 = 2^{30}$$

$$4(n+1)^4 = 2^{30}$$

$$2^2(n+1)^4 = 2^{30}$$

$$(n+1)^4 = \frac{2^{30}}{2^2} = 2^{28}$$

$$n+1 = 2^7$$

$$n = 2^7 - 1$$

$$n = 128-1 = 127$$

تمرين 06 :

1) برهان (v_n) م هندسية

$$v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$$

$$v_{n+1} = \frac{5^{n+1+1}}{6^{n+1}} = \frac{5\times 5^{n+1}}{6\times 5^n} = \frac{5}{6} v_n$$

هندسية اساسها $\frac{5}{6}$

الحد الاول :

$$v_0 = \frac{5^{0+1}}{6^0} = \frac{5}{1} = 5$$

ب) النهاية :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} 5\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$$

$$v_{n+1} - v_n = [\ln U_{n+1} + \ln U_{n+2}] - [\ln U_n + \ln U_{n+1}]$$

$$= \ln U_{n+2} - \ln U_n$$

$$= \ln e^{-2(n+2)} - \ln e^{-2n}$$

$$= -2(n+2) + 2n = -4$$

حسابية اساسها -4

المجموع T_n :

$$v_0 = \ln U_0 + \ln U_1$$

$$= \ln e^0 + \ln e^{-2}$$

$$= 0 - 2 = -2$$

اذن

$$v_n = v_0 + nr = -2 - 4n$$

المجموع :

$$T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$= \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$$

$$= \frac{n+1}{2}(-2-2-4n)$$

$$= \frac{n+1}{2}(-4-4n)$$

$$= -2(n+1)(n+1)$$

$$T_n = -2(n+1)^2$$

(II)

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{5u_n+6} \end{cases}$$

1) نبرهن بالتراجع:

$$1 \leq u_n \leq 6$$

نثبت صحة الشرط الابتدائي:

$u_0 = 1$ و $1 \leq 1 \leq 6$

نفرض ان $1 \leq u_n \leq 6$ صحيحة

و نبرهن صحة u_{n+1}

لدينا

$$1 \leq u_n \leq 6$$

نضرب في 5

$$5 \leq 5u_n \leq 30$$

نضيف 6

$$11 \leq 5u_n+6 \leq 36$$

$$\sqrt{11} \leq \sqrt{5u_n+6} \leq 6$$

$$\sqrt{11} \leq u_{n+1} \leq 6$$

صحيحة لأن $1 \leq u_{n+1} \leq 6$

ومنه $1 \leq u_n \leq 6$ صحيحة

2) اتجاه التغير:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{5u_n+6} - u_n$$

$$= \frac{(\sqrt{5u_n+6} - u_n)(\sqrt{5u_n+6} + u_n)}{\sqrt{5u_n+6} + u_n}$$

$$= \frac{5u_n+6 - u_n^2}{\sqrt{5u_n+6} + u_n}$$

$$= \frac{-(u_n^2 - 5u_n - 6)}{\sqrt{5u_n+6} + u_n}$$

$$= \frac{-(u_n+1)(u_n-6)}{\sqrt{5u_n+6} + u_n}$$

لدينا:

$$1 \leq u_n \leq 6$$

$-5 \leq u_n - 6 \leq 0$ سالب

و $2 \leq u_n+1 \leq 7$

$-7 \leq -(u_n+1) \leq -2$ سالب

و المقام موجب اذا

$u_{n+1} - u_n > 0$ متزايدة

3) أ) نبرهن: سنبرهن بالتراجع

$$6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$$

نثبت صحة الشرط الابتدائي

$$6 - u_1 \leq \frac{5}{6}(6 - u_0)$$

$$6 - \sqrt{11} \leq \frac{5}{6}(6-1)$$

$$6 - \sqrt{11} \leq \frac{25}{6}$$

صحيحة.

نفرض ان $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6-u_n)$ صحيحة

و نبرهن صحة P_{n+1}

اي نبرهن صحة

$$6-U_{n+2} \leqslant \frac{5}{6}(6-U_{n+1})$$

لدينا :

$$6-U_{n+2} = 6-\sqrt{5U_{n+1}+6}$$

$$= \frac{(6-\sqrt{5U_{n+1}+6})(6+\sqrt{5U_{n+1}+6})}{6+\sqrt{5U_{n+1}+6}}$$

$$= \frac{36-(5U_{n+1}+6)}{6+\sqrt{5U_{n+1}+6}} = \frac{30-5U_{n+1}}{6+\sqrt{5U_{n+1}+6}}$$

$$= \frac{5(6-U_{n+1})}{6+\sqrt{5U_{n+1}+6}}$$

شوف معايا واش نعملوا :

لدينا :

$$1 \leqslant U_{n+1} \leqslant 6$$

$$5 \leqslant 5U_{n+1} \leqslant 30$$

$$11 \leqslant 5U_{n+1}+6 \leqslant 36$$

$$\sqrt{11} \leqslant \sqrt{5U_{n+1}+6} \leqslant 6$$

$$6 \leqslant 6+\sqrt{11} \leqslant 6+\sqrt{5U_{n+1}+6} \leqslant 12$$

نقلب :

$$\frac{1}{6+\sqrt{5U_{n+1}+6}} \leqslant \frac{1}{6+\sqrt{11}} \leqslant \frac{1}{6}$$

نهزو :

$$\frac{1}{6+\sqrt{5U_{n+1}+6}} \leqslant \frac{1}{6}$$

بضرب الطرفين في العدد الموجب
$5(6-U_{n+1})$

فتصبح :

$$\frac{5(6-U_{n+1})}{6+\sqrt{5U_{n+1}+6}} \leqslant \frac{5}{6}(6-U_{n+1})$$

اذا

$$6-U_{n+2} \leqslant \frac{5}{6}(6-U_{n+1})$$

صحيحة ومنه

$6-U_{n+1} \leqslant \frac{5}{6}(6-U_n)$ صحيحة

ب) بين أن :

$$0 \leqslant 6-U_n \leqslant v_n$$

لدينا :

$$6-U_{n+1} \leqslant \frac{5}{6}(6-U_n)$$

$$6-U_1 \leqslant \frac{5}{6}(6-U_0)$$

$$6-U_2 \leqslant \frac{5}{6}(6-U_1)$$

$$6-U_3 \leqslant \frac{5}{6}(6-U_2)$$

$$\vdots$$

بالجداء

$$6-U_n \leqslant \frac{5}{6}(6-U_{n-1})$$

$$6-U_n \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n (6-U_0)$$

$$6-U_n \leqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n (6-1)$$

$$6-U_n \leqslant 5\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$0 \leqslant 6-U_n \leqslant v_n$$

النهاية :

$$\lim_{n\to+\infty}(6-U_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$

$$6-\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 6$$

تمرين 07:

$I = [1, 2]$

(1
$$f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$$

أ) تبيين f متزايدة:

$$f'(x) = \frac{1(-x+4)-(-1)(x+2)}{(-x+4)^2}$$

$$= \frac{-x+4+x+2}{(-x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6}{(-x+4)^2}$$

بما أن $6>0$ و $(-x+4)^2>0$

إذاً $f'(x)>0$ ومنه

f متزايدة على I

ب) تبيين f(x) تنتمي إلى I

لدينا:

$1 \leq x \leq 2$

$3 \leq x+2 \leq 4$ — ①

ولدينا:

$-2 \leq -x \leq -1$

$2 \leq -x+4 \leq 3$

فقلب:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{-x+4} \leq \frac{1}{2} \quad — ②$$

نضرب ① × ②

$$\frac{3}{3} \leq \frac{x+2}{-x+4} \leq \frac{4}{2}$$

$1 \leq f(x) \leq 2$

ومنه f تنتمي إلى I

2) (U_n) متتالية:

$U_{n+1} = f(U_n)$ $\quad u_0 = \frac{3}{2}$

$$U_{n+1} = \frac{U_n+2}{-U_n+4}$$

أ) برهن بالتراجع:

$1 \leq U_n \leq 2$

نثبت صحة الشرط الابتدائي

$u_0 = \frac{3}{2}$ و $1 \leq \frac{3}{2} \leq 2$

محقق

نفرض $1 \leq U_n \leq 2$ صحيحة

ونبرهن صحة U_{n+1}

$1 \leq U_n \leq 2$

وبما أن f متزايدة على I

فإن

$f(1) \leq f(U_n) \leq f(2)$

ولدينا:

$f(U_n) = U_{n+1}$

$$f(1) = \frac{1+2}{-1+4} = 1$$

$$f(2) = \frac{2+2}{-2+4} = 2$$

إذاً

$1 \leq U_{n+1} \leq 2$

صحيحة ومنه $1 \leq U_n \leq 2$ صحيحة

ب) اتجاه تغير (U_n)

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n+2}{-U_n+4}-U_n$$

$$=\frac{U_n+2+U_n^2-4U_n}{-U_n+4}$$ فان

$$=\frac{U_n^2-3U_n+2}{-U_n+4}$$ فان

$$=\frac{(U_n^2-3U_n+2)}{-U_n+4}$$ ومنه

$$=\frac{(U_n-2)(U_n-1)}{-U_n+4}$$

لدينا:

$1\leq U_n\leq 2$

$0\leq U_n-1\leq 1$ موجب

$-1\leq U_n-2\leq 0$ سالب

$2\leq -U_n+4\leq 3$ و موجب

وعليه:

$U_{n+1}-U_n<0$

متناقصة

- استنتاج التقارب:

بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو 1

3) البرهان بالتراجع:

$$U_n=1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^n+1}$$

نثبت صحة الشرط الابتدائي

$$U_0=1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^0+1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$U_0=\frac{3}{2}$ محقق

نفرض U_n صحيحة ونبرهن صحة U_{n+1} أي:

$$U_{n+1}=1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^{n+1}+1} \quad (1)$$

ونبرهن من صحة أن:

$$U_{n+1}=\frac{U_n+2}{-U_n+4}=\frac{1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^n+1}+2}{-\left[1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^n+1}\right]+4}$$

$$=\frac{3+\frac{1}{(\frac{3}{2})^n+1}}{3-\frac{1}{(\frac{3}{2})^n+1}}=\frac{\frac{3(\frac{3}{2})^n+4}{(\frac{3}{2})^n+1}}{\frac{3(\frac{3}{2})^n+2}{(\frac{3}{2})^n+1}}$$

$$=\frac{3(\frac{3}{2})^n+4}{3(\frac{3}{2})^n+2}=\frac{3(\frac{3}{2})^n+2+2}{3(\frac{3}{2})^n+2}$$

$$=1+\frac{2}{3(\frac{3}{2})^n+2}=1+\frac{2}{2\left[\frac{3}{2}(\frac{3}{2})^n+1\right]}$$

$$U_{n+1}=1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^{n+1}+1}$$

وهي نفسها العلاقة (1) إذاً صحيحة ومنه

$U_n=1+\frac{1}{(\frac{3}{2})^n+1}$ صحيحة

ب) النهاية :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{\underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^n}_{+\infty}+1}\right]$$

$$= 1 + 0 = 1$$

ت 08 :

نقول ان (v_n) و (U_n) متجاورتان اذا كان احداهما متزايدة والاخرى متناقصة ولهما نفس النهاية يعني

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n - v_n) = 0$$

اولا : تبع معطيات التمرين.

$$v_{n+1} = \frac{U_n+3v_n}{4} \qquad v_0 = 1$$

$$U_{n+1} = \frac{U_n+2v_n}{3} \qquad U_0 = 12$$

$$W_n = U_n - v_n$$

1) اثبت أن (W_n) هندسية

$$W_{n+1} = U_{n+1} - v_{n+1}$$

$$= \frac{U_n+2v_n}{3} - \frac{U_n+3v_n}{4}$$

$$= \frac{4U_n+8v_n-3U_n-9v_n}{12}$$

$$= \frac{U_n-v_n}{12} = \frac{1}{12}W_n$$

هندسية اساسها $\frac{1}{12}$

$$W_0 = U_0 - v_0 = 12-1 = 11$$

2) W_n بدلالة n

$$W_n = W_0\, q^n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

نهاية :

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} 11\left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$$

لان $0 < \frac{1}{12} < 1$ فهمت !

3) اثبت (t_n) ثابتة :

يكفي نثبت ان $t_{n+1} = t_n$

لدينا : $t_n = 3U_n + 8v_n$

$$t_{n+1} = 3U_{n+1} + 8v_{n+1}$$

$$= 3\frac{U_n+2v_n}{3} + 8\frac{U_n+3v_n}{4}$$

$$= U_n + 2v_n + 2(U_n+3v_n)$$

$$= 3U_n + 8v_n = t_n$$

ومنه (t_n) ثابتة

نهاية (t_n)

$$t_0 = 3U_0 + 8v_0 = 3(12)+8(1) = 44$$

$$\lim_{n\to+\infty} t_n = 44$$

4) اثبات أن (V_n) و (U_n) متجاورتان

ندرس اتجاه التغير:

$$U_{n+1}-U_n = \frac{U_n+2V_n}{3} - U_n$$

$$= \frac{U_n+2V_n-3U_n}{3} = \frac{2V_n-2U_n}{3}$$

$$= \frac{-2(U_n-V_n)}{3} = -\frac{2}{3}W_n < 0$$

لأن $W_n > 0$ و $-\frac{2}{3} < 0$

ومنه (U_n) متناقصة

$$V_{n+1}-V_n = \frac{U_n+3V_n}{4} - V_n$$

$$= \frac{U_n+3V_n-4V_n}{4} = \frac{U_n-V_n}{4}$$

$$= \frac{1}{4}W_n > 0$$

لأن $W_n > 0$ و $\frac{1}{4} > 0$

ومنه (V_n) متزايدة

$$\lim_{n\to+\infty}(U_n-V_n) = \lim_{n\to+\infty} W_n = 0$$

ومنه (U_n) و (V_n) متجاورتان

5) استنتاج النهاية:

$$\begin{cases} U_n - V_n = W_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3U_n + 8V_n = 44 \end{cases}$$

نضرب ① في 8 ونجمع

$$\begin{cases} 8U_n - 8V_n = 88\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3U_n + 8V_n = 44 \end{cases}$$

بالجمع

$$11U_n = 44 + 88\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

$$U_n = 4 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

نعوض في ③:

$$U_n - V_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

$$4 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n - V_n = 11\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

$$V_n = 4 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n$$

نحسب النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty}\left(4 - 3\underbrace{\left(\frac{1}{12}\right)^n}_{0}\right) = 4$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\left(4 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n\right) = 4$$

ط2:

$$3U_n + 8V_n = 44$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} V_n = \ell$$

$$3\ell + 8\ell = 44$$

$$11\ell = 44$$ ومنه $\boxed{\ell = 4}$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} U_n = 4$$

ت 09 08

I) $U_n = e^{\frac{1}{2}-n}$

1) نبين (U_n) هندسية:

$$U_{n+1} = e^{\frac{1}{2}-(n+1)} = e^{\frac{1}{2}-n-1}$$

$$= e^{-1}e^{\frac{1}{2}-n} = e^{-1}U_n$$

هندسية اساسها e^{-1}

شوف معايا:

$U_n = e^{an+b}$ الاساس $\longrightarrow \boxed{e^{a}}$

الحد الاول:

$$U_0 = e^{\frac{1}{2}-0} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

2) نهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = 0$$

الاستنتاج: باين نستنتج انها متقاربة نحو 0

3) المجموع:

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots U_n$$

$$= U_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \sqrt{e}\,\frac{(e^{-1})^{n+1}-1}{e^{-1}-1}$$

$$= \sqrt{e}\,\frac{e^{-n-1}-1}{e^{-1}-1}$$

II) نعتبر

$v_n = \ln(U_n)$

1) عين:

$$v_n = \ln(U_n) = \ln e^{\frac{1}{2}-n}$$

$$v_n = \frac{1}{2}-n$$

نوع المتتالية:

$$v_{n+1}-v_n = \left[\tfrac{1}{2}-(n+1)\right]-\left[\tfrac{1}{2}-n\right]$$

$$= \frac{1}{2}-n-1-\frac{1}{2}+n = -1$$

حسابية اساسها -1

2) حساب P_n:

$$P_n = \ln(U_0\times U_1\times U_2\times\cdots U_n)$$

$$= \ln U_0 + \ln U_1 + \ln U_2 + \cdots \ln U_n$$

لدينا:

$\ln U_n = v_n$

$\ln U_0 = v_0$

$\ln U_1 = v_1$

$\vdots$

$\ln U_n = v_n$ نجمع

$P_n = v_0 + v_1 + \cdots v_n$ حسابية

$$P_n = \frac{n+1}{2}(v_0+v_n)$$

$$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-n\right)$$

$$P_n = \frac{n+1}{2}(1-n)$$

ب) قيم n:

$P_n + 4n > 0$

$\frac{n+1}{2}(1-n) + 4n > 0$

$\frac{(n+1)(1-n)+8n}{2} > 0$

$-n^2+8n+1>0$

حل المعادلة

$-n^2+8n+1=0$

$\Delta = 68$

$n_1 = \frac{-8-\sqrt{68}}{-2} = 8,12$

$n_2 = \frac{-8+\sqrt{68}}{-2} = -0,12$

$-\infty$		$-0,12$		$8,12$		$+\infty$
	$-$		$+$		$-$	

فهي الاعداد الطبيعية المحصورة بين $8,12$ و $-0,12$

$n = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

ت 10 ن

$$\begin{cases} u_0 = e^3 \\ U_{n+1} = e\sqrt{U_n} \end{cases}$$

$V_n = \ln(U_n) - 2$

1) برهن (V_n) هندسية

$V_{n+1} = \ln U_{n+1} - 2 = \ln e\sqrt{U_n} - 2$

$= \ln e + \ln\sqrt{U_n} - 2$

$= 1 + \ln U_n^{\frac{1}{2}} - 2$

$= \frac{1}{2}\ln U_n - 1 = \frac{1}{2}(\ln U_n - 2)$

$V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$

هندسية اساسها $\frac{1}{2}$

$V_0 = \ln U_0 - 2 = \ln e^3 - 2$

$= 3 - 2 = 1$

2) V_n بدلالة n و $\ln U_n$ بدلالة n

$V_n = V_0\, q^n = 1\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا:

$V_n = \ln U_n - 2$

$\ln U_n = V_n + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

3) نهاية:

أ)

$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

لأن $0 < \frac{1}{2} < 1$

ب) تقارب (U_n) نحو e^2

لدينا:

$\ln U_n = V_n + 2$

$U_n = e^{V_n+2}$

$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} e^{V_n+2} = e^2$

ومنه (U_n) متقاربة نحو e^2

ت ع 11

I) $\begin{cases} v_0 = \alpha \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{9}{4} \end{cases}$

- قيمة α حتى تكون (v_n) ثابتة

نقول ثابتة:

$v_0 = v_1 = v_2 = \dots = v_n = v_{n+1}$

لدينا

$v_{n+1} = v_n = v_0 = \alpha$

نعوض

$\alpha = \frac{1}{4}\alpha + \frac{9}{4}$

$\alpha - \frac{1}{4}\alpha = \frac{9}{4}$

$\frac{3}{4}\alpha = \frac{9}{4}$

$\boxed{\alpha = 3}$ $\quad v_0 = 3$

II) نضع $\alpha = 4$ أي $v_0 = 4$

1) حساب الحدود:

$v_1 = \frac{1}{4}v_0 + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$

$v_2 = \frac{1}{4}v_1 + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{13}{4} + \frac{9}{4} = \frac{49}{16}$

2) لنكن $u_n = v_n - 3$

أ) برهن هندسية

$u_{n+1} = v_{n+1} - 3 = \frac{1}{4}v_n + \frac{9}{4} - 3$

$= \frac{1}{4}v_n - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(v_n - 3)$

$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n$

هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

$u_0 = v_0 - 3 = 4 - 3 = 1$

ب) u_n و v_n بدلالة n

$u_n = u_0 q^n = 1\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

لدينا

$u_n = v_n - 3$

$v_n = u_n + 3 = \left(\frac{1}{4}\right)^n + 3$

3)

$S_n = u_0 + u_1 + \dots u_n$

$= u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = 1\,\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{4}-1}$

$= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1\right)$

ب)

$S'_n = v_0 + v_1 + \dots v_n$

لدينا

$v_n = u_n + 3$

$S'_n = S_n + 3(n+1) = -\frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1\right] + 3(n+1)$

ج) $q_n = u_0 + 4u_1 + 4^2 u_2 + \dots 4^n u_n$

لدينا:

$u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}$

$u_0 = 1$ و $u_1 = \frac{1}{4}$ و $u_2 = \frac{1}{4^2}$

نعوض

$q_n = 1 + 4^1 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4^2} + \dots 4^n \times \frac{1}{4^n}$

$= 1 + 1 + 1 + \dots 1 = 1(n+1)$

د) الجداء

$P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots u_n$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \dots \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^{0+1+2+\dots n}$

حسابية حدها الأول 0 والأخير n

$P_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}(0+n)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n^2+n}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2+n}$

ت 12

$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ $\quad u_0 = 1$, $u_1 = 2$

$v_n = u_{n+1} - u_n$

1) برهن (v_n) هندسية

$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n - u_{n+1}$

$= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n)$

$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$

هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

$v_0 = u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$

2) v_n بدلالة n

$v_n = v_0 q^n = 1\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) برهن أن

لدينا

$v_n = u_{n+1} - u_n$

$v_0 = u_1 - u_0$

$v_1 = u_2 - u_1$

$v_2 = u_3 - u_2$

$\vdots$

$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$

بالجمع

$v_0 + v_1 + \dots v_{n-1} = u_n - u_0$

$u_n = u_0 + (v_0 + v_1 + \dots v_{n-1})$

4) استنتج u_n بدلالة n

$u_n = u_0 + v_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$= 1 + 1\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}$

$u_n = 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}}$

$u_n = 1 - 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]$

$u_n = 1 + 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$