النهـايــات

I- النهايــات(عموميات)

1) النهاية المنتهية.

1.1 النهاية عند الصفر

نشاط تمهيدي : مثل مبيانيا الدوال : $f(x)=x$; $g(x)=x^2$; $h(x)=x^3$

نلاحظ بالنسبة للدوال f و g و h أنه كلما اقتربت x من **0** فإن $f(x)$ و $g(x)$ و $h(x)$ تقترب من **0** .

وبصيغة أخرى : نلاحظ أنه لكل ε من $\mathbb{R}_+^*$ يوجد α من $\mathbb{R}_+^*$ بحيث $|f(x)| \prec \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 0 \prec |x| \prec \alpha$

وفي هذه الحالة نقول أن $f(x)$ تؤول إلى **0** عندما تؤول x إلى **0** .

ونكتب $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

خاصيـات : 1)

* $\lim_{x\to 0} x=0$
* $\lim_{x\to 0} x^2=0$
* $\lim_{x\to 0} x^n=0 \qquad n\in\mathbb{N}^*$

2) إذا كان على مجال منقط مركزه x_0 : $|f(x)| \prec u(x)$

و $\lim_{x\to 0} u(x)=0$

فإن $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

تطبيقـات : أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to 0} |x\cos x|$ و $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2+1}$

2.1 النهاية l عندما تؤول x إلى x_0

لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال منقط مركزه x_0 و $l\in\mathbb{R}$.

نقول أن $f(x)$ تؤول إلى l عندما تؤول x إلى x_0.

أي تؤول $(f(x)-l)$ إلى **0** عندما تؤول $(x-x_0)$ إلى **0** .

نضع $x-x_0=h$

إذن عندما تؤول x إلى x_0 فإن h تؤول إلى **0**

ومنه $f(x_0+h)-l$ تؤول إلى **0** .

تعريف : لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

نقول أن نهاية $f(x)$ هي l عند x_0.

إذا وفقط إذا كانت نهاية $(h \to f(x_0+h)-l)$ هي **0** عندما تؤول h إلى **0** .

مثـال : $f(x)=\dfrac{x+1}{x+3}$

نلاحظ أنه عندما تقترب x من **1** فإن $f(x)$ تقترب من $\dfrac{1}{2}$

لنبين ذلك

لدينا $\left|f(1+h)-\dfrac{1}{2}\right| = ... = \left|\dfrac{h}{2(h+4)}\right| \prec \dfrac{1}{2}|h|$

وبما أن $\lim_{h \to 0} |h| = 0$

فإن $\lim_{h \to 0} f(1+h) - \frac{1}{2} = 0$

أي $\lim_{h \to 0} f(1+h) = \frac{1}{2}$

يعني $\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$

لاحظ أنه من الممكن تعويض x ب 1 من البداية.

خاصية : ليكن I مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

إذا كان لكل x من I : $|f(x) - l| \le u(x)$ و $\lim_{x \to x_0} u(x) = 0$

فإن $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

تطبيق : $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} + 2$

لدينا $|f(x) - 2| \le x^2$

إذن $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$

خاصية : إذا كانت $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

فإن $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |l|$

ملاحظة : إذا كانت النهاية l موجودة فإنها وحيدة.

3.1 النهاية على اليمين – النهاية على اليسار

تمهيد : لتكن $f(x) = \sqrt{x}$ $D_f = [0, +\infty[$

على العموم : إذا قلنا بأن x تقترب من x_0 فهذا يعني أن x تقترب إلى x_0 من اليمين ومن اليسار.

أما بالنسبة للدالة f فهي غير معرفة على يسار 0

إذن النهاية الممكن حسابها هي النهاية على يمين 0 لـ $f(x)$.

وهي 0 ونكتب $\lim_{\substack{x \to 0 \\ 0 \prec x}} f(x) = 0$

تعريف-1- لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح $]x_0, x_0 + \alpha[$ حيث $0 \prec \alpha$

نقول أن $f(x)$ تقبل النهاية l في x_0 على اليمين إذا وفقط إذا كان :

لكل $0 \prec \varepsilon$ يوجد $0 \prec \alpha$ بحيث :

$$x_0 \prec x \prec x_0 + \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| \prec \varepsilon$$

ونكتب $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x_0 \prec x}} f(x) = l$

أو $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$

تعريف-2- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$

خاصية : تكون للدالة f نهاية l عند x_0 إذا وفقط إذا كان :

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l$$

مل مثال: $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0$

2) النهاية المنتهية عند $+\infty$

تمهيد : مثل مبيانيا الدوال : $f(x)=\dfrac{1}{x}$ و $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$ و $h(x)=\dfrac{1}{x^2}$

من المنحنيات نستنتج أن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

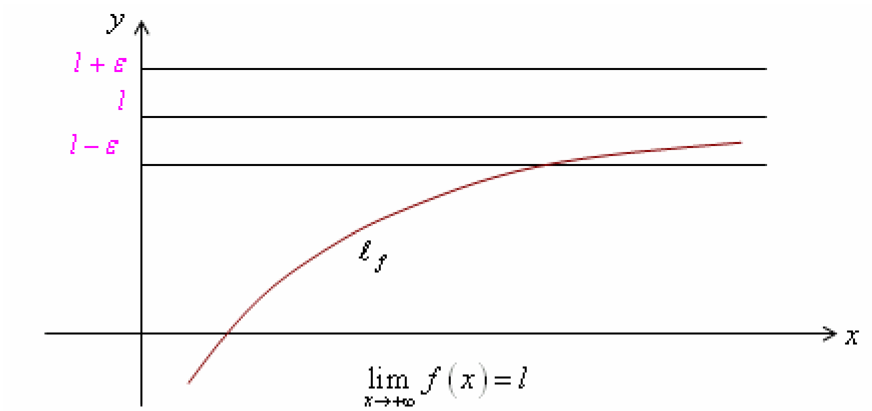
و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$

و $\lim_{x\to+\infty} h(x)=0$

خاصية: $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0 \qquad n\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

ملاحظة :



تعريف : لتكن f دالة عددية حيز تعريفها يحتوي على مجال على شكل $[a,+\infty[$. و $l\in\mathbb{R}$ نقول أن $f(x)$ تؤول إلى l عندما تؤول x إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان :

$$\forall\varepsilon\succ 0\qquad \exists A\in\mathbb{R}^{*+}\ /\ A\prec x\qquad\Rightarrow\quad l-\varepsilon\prec f(x)\prec l+\varepsilon$$

تعريف : نقول أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$

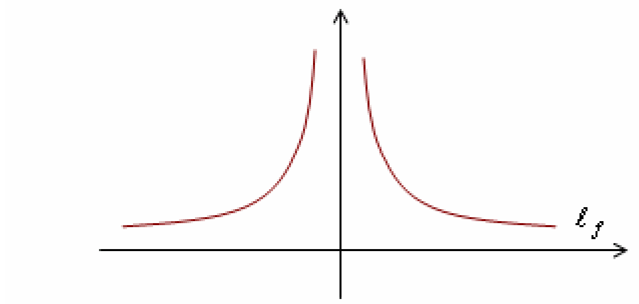
إذا وفقط إذا كانت $\lim_{x\to+\infty} f(x)-l=0$

3) النهاية المنتهية عند $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=l \Leftrightarrow ....$$

4) النهاية اللامنتهية

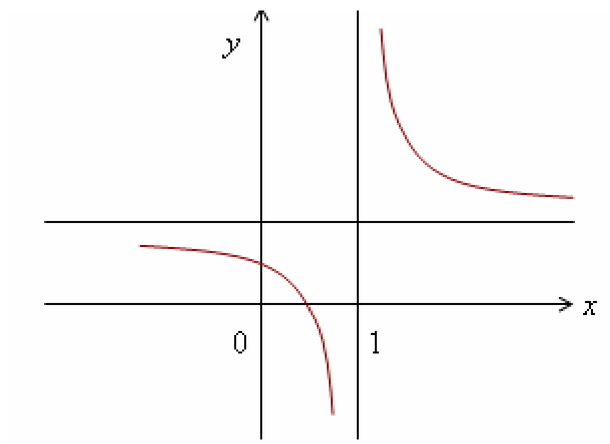
مثـال-1- $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$



$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

مثـال-2- $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$



مثـال-3- $f(x)=\dfrac{x}{2x-1}$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=l$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=l$

مثـال-4- $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

النـهايات والترتيب

ليكن I مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

خاصية-1- إذا كانت f موجبة على المجال I وتقبل نهاية في x_0 فإن نهايتها موجبة.

خاصية-2- إذا كان للدالتين f و g نهاية عند x_0 وكان :

لكل x من I $\quad f(x)\prec g(x)$

فإن $\quad \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

خاصية-3- إذا كان للدالتين f و g نفس النهاية l عند x_0

ولكل x من I $\qquad f(x)\le h(x)\le g(x)$

فإن $\qquad \lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l$

خاصية-4- إذا كان لكل x من I $\qquad u(x)\prec f(x)$ و $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=+\infty$

فإن $\qquad \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

خاصية-5- إذا كان لكل x من I $\qquad g(x)\prec f(x)$ و $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

فإن $\qquad \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$

ملاحظة : يمكن تعويض x_0 بـ $-\infty$ أو $+\infty$.

5) العمليات على النهايات

6-1. العمليات على النهايات المنتهية

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجال مفتوح منقط مركزه x_0.

و λ عدد حقيقي.

إذا كانت $\qquad \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l'$

فإن

(1 $\qquad \lim\limits_{x\to x_0} f+g(x)=l+l'$

(2 $\qquad \lim\limits_{x\to x_0} f\times g(x)=l\times l'$

(3 $\qquad \lim\limits_{x\to x_0} \lambda f(x)=\lambda l$

(4 $\qquad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{l'} \qquad l'\neq 0$

(5 $\qquad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{l}{l'} \qquad l'\neq 0$

6-2. العمليات على النهايات اللامنتهية

a- نهاية المجموع

نهاية f	نهاية g	نهاية $f+g$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

b- نهاية الجداء

نهاية f	نهاية g	نهاية $f\times g$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$l\succ 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l\succ 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l\prec 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l\prec 0$	$-\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	شكل غير محدد

c- نـهاية مقلوب دالة

نهاية f	نهاية $\frac{1}{f}$
$\pm\infty$	0
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$

d- نـهاية خارج دالتين

نهاية f	نهاية g	نهاية $\frac{f}{g}$
l	$\pm\infty$	0
$l \succ 0$	0^+	$+\infty$
$l \succ 0$	0^+	$-\infty$
$l \prec 0$	0^-	$+\infty$
$l \prec 0$	0^+	$-\infty$
$+\infty$	$l \succ 0$	$+\infty$
$+\infty$	$l \prec 0$	$-\infty$
0	0	شكل غير محدد
$\pm\infty$	$\pm\infty$	شكل غير محدد

ملاحظة : شكل غير محدد لا يعني أنه لا يمكن حساب النهاية.

(6 تطبيقــات

a- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n$ $n\in\mathbb{N}^*$

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n$ $n\in\mathbb{N}^*$

b- نـهاية دالة حدودية

خاصية : نـهاية دالة حدودية عندما يؤول x إلى $\pm\infty$ هي نـهاية حدها الأعلى درجة.

c- نـهاية دالة جذرية

خاصية : نـهاية دالة جذرية عندما يؤول x إلى $\pm\infty$ هي نـهاية خارج حديها الأكبر درجة.

d- نـهاية دالة لاجذرية

أمثلــة :

(1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-x$

(3 $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2}+x$

(4 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2-2x+2}$

(5 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x\succ1}} \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

(6 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

(7 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

(8 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x^2-1}{x+1}}$

(9 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{2x^2+1}{x^3+x+1}}$

(10 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+2}{x^2-x+1}}$

II- نهايات الدوال المثلثية

تمهيد : لدينا لكل x من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ $\quad |\sin x| \prec |x| \prec |tgx|$

إذن $\quad \lim_{x\to 0} \sin x = 0 = \sin 0$

تطبيقات :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} tgx$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \cos x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \cos^2 x + \sin x - 1$$

$$\lim_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x\prec\frac{\pi}{2}}} tgx$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tgx$$

بعض النهايات المهمة

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

لكل x من $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[-\{0\}$ $\quad |\sin x| \prec |x| \prec |tgx|$

إذن لكل x من $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ $\quad \left|\frac{x}{\sin x}\right| \prec \left|\frac{1}{\cos x}\right|$

وبما أن $\quad \lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{\cos x}\right| = 1$

فإن $\quad \lim_{x\to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1$

وبما أن x و $\sin x$ لهما نفس الإشارة بجوار **0**

فإن $\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

خاصية : $\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax} = 1 \qquad a \in \mathbb{R}^*$$

يكفي وضع $X = ax$

b) النهاية : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{\;}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$$

c) النهاية : $\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{sinx}{x} = 1$$

تطبيقات : **أحسب النهايات التالية :**

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x}$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{tg5x}{2x}$

3) $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{x - \frac{\pi}{6}}$

4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2 + 1}$

القدرات المستهدفة

ـ حساب نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية و الدوال اللا جذرية .
ـ حساب نهايات الدوال المثلثية البسيطة باستعمال الدوال الإعتيادية .

I– النهاية المنتهية :

1 – النهاية 0 عند 0 :

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه 0 .
نقول إن نهاية f هي 0 عندما يؤول x إلى 0 إذا كان :
لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عنصر $\alpha > 0$ بحيث لكل x من $]-\alpha,\alpha[-\{0\}$ يكون $|f(x)| < \varepsilon$.
و نكتب $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

خاصية :

الدوال المعرفة على الشكل : $f(x) = ax^n$ بحيث $n \in \mathbb{N}^*$ و $a \in \mathbb{R}$ تؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى 0 .

أمثلة :

$\lim_{x\to 0} 3x^2 = 0$ و $\lim_{x\to 0} -4x^3 = 0$

الدوال المعرفة على الشكل : $f(x) = a\sqrt{|x|}$ بحيث $a \in \mathbb{R}$ تؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى 0 .

أمثلة :

$\lim_{x\to 0} 2\sqrt{|x|} = 0$ و $\lim_{x\to 0} -\sqrt{|x|} = 0$.

2 – النهاية l عند x_0 :

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 .
نقول إن نهاية f هي l عندما يؤول x إلى x_0 إذا كان : $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - l = 0$

مثال :

$\lim_{x\to 1} 3x^2 = 3$ و $\lim_{x\to 4} 2\sqrt{|x|} = 4$

3 – النهاية على اليمين و على اليسار :

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]x_0, x_0+\alpha[$ بحيث $\alpha > 0$.
نقول إن f تقبل النهاية l في x_0 على اليمين إذا كان قصورها على مجال $]x_0, x_0+a[$ حيث $a > 0$ ينطبق مع قصور دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 و نكتب $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$ أو $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = l$.

خاصية :

تكون لدالة f نهاية عند x_0 إذا و فقط إذا كانت لها نفس النهاية على اليمين و على اليسار في x_0 .

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $\begin{cases} f(x) = 2x-3 & (x \geq 1) \\ f(x) = -x & (x<1) \end{cases}$ لندرس نهاية الدالة f عند العدد 1 .

لدينا : $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x-3 = 2-3 = -1$ و $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -x = -1$

بما أن $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = -1$ فإن $\lim_{x\to 1} f(x) = -1$.

4 – النهاية 0 عند $+\infty$:

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]a,+\infty[$.
نقول إن نهاية f هي 0 عندما يؤول x إلى $+\infty$
إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عنصر $B > 0$ بحيث لكل x من المجال $]B,+\infty[$ يكون $|f(x)| < \varepsilon$
و نكتب $\lim_{x} f(x) \quad 0$

خاصية :

الدوال المعرفة على الشكل : $f(x)=\frac{k}{x^n}$ **و** $g(x)=\frac{k}{\sqrt{|x|}}$ **حيث** $n\in\mathbb{N}^*$ **و** $k\in\mathbb{R}$ **تؤول إلى 0 عندما يؤول** x **إلى** $+\infty$

مثال :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^4}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{x^3}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{|x|}}=0$.

5 – النهاية l عند $+\infty$:

تعريف :

لتكن f **دالة معرفة على مجال من نوع** $]a,+\infty[$ **.**

تكون نهاية f **هي** l **عندما يؤول** x **إلى** $+\infty$

إذا و فقط إذا كانت نهاية الدالة $f(x)-l$ **هي** 0 **عند** $+\infty$ **و نكتب** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ **.**

مثال :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2$$

6 – النهاية l عند $-\infty$:

تعريف :

لتكن f **دالة معرفة على مجال من نوع** $]-\infty,b[$ **.**

تكون نهاية f **هي** l **عندما يؤول** x **إلى** $-\infty$

إذا و فقط إذا كانت نهاية الدالة $f(-x)$ **هي** l **عند** $+\infty$

بمعنى : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(-x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$

مثال :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1$$

خاصيات النهايات و الترتيب :

إذا كان على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 $|f(x)-l|\le u(x)$ **و كان** $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$ **فإن** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l$ **.**

إذا كان على مجال من نوع $]a,+\infty[$ $|f(x)-l|<u(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=0$ **فإن** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ **.**

إذا كان على مجال من نوع $]-\infty,b[$ $|f(x)-l|<u(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=0$ **فإن** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$ **.**

7 – إتصال دالة :

تعريف :

تكون دالة f **متصلة في** x_0 **إذا و فقط إذا كانت لها نهاية في** x_0 **تساوي** $f(x_0)$

يعني : $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة على الشكل : $\begin{cases} f(x)=x\sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

لنبين ان f متصلة في 0 .

لدينا : $|f(x)-0|=|x\sin(\frac{1}{x})|<|x|$ لأن لكل عدد حقيقي x لدينا $|\sin(x)|<1$.

و لدينا $\lim\limits_{x\to0}|x|=0$ و منه $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$ إذن f متصلة في 0 .

خاصية :

كل دالة حدودية متصلة في كل نقطة من $\mathbb{R}$ **.**

كل دالة جدرية متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها .

مثال :

بمعنى لحساب نهاية دالة حدودية في عدد حقيقي نقوم بتعويض المجهول بالعدد.

$$\lim_{x\to1}(2x^2-x+4)=2(1)^2-1+4=5$$

$$\lim_{x\to-2}(x^2+2x-1)=(-2)^2+2(-2)-1=4-4-1=-1$$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x+1}=\frac{5}{3}$$

8 ـ تمديد باتصال :

تعريف :

لتكن f دالة غير معرفة في x_0 لكن لها نهاية l في x_0 .

الدالة المعرفة كمايلي $\begin{cases} g(x)=f(x)(x\in Df) \\ g(x_0)=l \end{cases}$ **هي دالة متصلة في x_0 تسمى تمديد بإتصال للدالة f في x_0 .**

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ الغير معرفة في العدد 3 .

بما أن $\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$ فإن $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}x+3=3+3=6$

و منه الدالة g المعرفة على الشكل : $\begin{cases} g(x)=f(x)(x\neq 3) \\ g(3)=6 \end{cases}$ تنطبق مع الدالة f على $\mathbb{R}-\{3\}$ و متصلة في 3 .

الدالة g تسمى تمديدا باتصال للدالة f في 3

9 ـ الإتصال على اليمين و على اليسار :

خاصية :

تكون الدالة f متصلة في x_0 إذا و فقط إذا كانت متصلة على اليمين و على اليسار في x_0 .

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

10 ـ العمليات على النهايات المنتهية :

f و g دالتان و λ عدد حقيقي .إذا كانت f و g لهما نهاية في x_0 .

$$\lim(f+g)=\lim f+\lim g$$

$$\lim(f\times g)=\lim f\times\lim g$$

$$\lim(\lambda f)=\lambda\lim f$$

إذا كانت g غير منعدمة فإن

$$\lim(\frac{1}{g})=\frac{1}{\lim g}$$

$$\lim(\frac{f}{g})=\frac{\lim f}{\lim g}$$

$$\lim|f|=|\lim f|$$

إذا كانت f موجبة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 فإن $\lim\sqrt{f}=\sqrt{\lim f}$

مثال :

$$\lim_{x\to 2}\left[\left(x^2-x+1\right)+\left(\sqrt{x+7}\right)-\left(\sqrt{\frac{x^2+4}{x-1}}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(x^2-x+1\right)+\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{x+7}\right)-\lim_{x\to 2}\left(\sqrt{\frac{x^2+4}{x-1}}\right)$$

لدينا $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-x+1\right)=2^2-2+1=3$

و لدينا $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x+7}\right)=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(x+7)}=\sqrt{2+7}=\sqrt{9}=3$

و لدينا $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{\dfrac{x^2+4}{x-1}}\right)=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2+4}{x-1}\right)}=\sqrt{\dfrac{2^2+4}{2-1}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

ومنه $\lim_{x\to 2}\left[\left(x^2-x+1\right)+\left(\sqrt{x+7}\right)-\left(\sqrt{\frac{x^2+4}{x-1}}\right)\right]=3+3-2\sqrt{2}=6-2\sqrt{2}$

II- النهاية اللامنتهية :

1 – النهاية $+\infty$ عند 0 :

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه 0 .

نقول إن f تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى 0 إذا كان :

لكل $A>0$ يوجد عنصر $\alpha>0$ بحيث لكل x من $]-\alpha,\alpha[-\{0\}$ يكون $f(x)>A$.

و نكتب $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$.

خاصية :

الدوال المعرفة على الشكل : $f(x)=\frac{k}{x^n}$ و $g(x)=\frac{k}{\sqrt{x}}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$ و $k\in\mathbb{R}^{*+}$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى 0 على اليمين .

مثال :

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^4}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{4}{x^3}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt{|x|}}=+\infty .$$

2 – النهاية $+\infty$ عند x_0 :

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 .

نقول إن f تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى x_0 إذا كانت الدالة $f(x_0+h)$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول h إلى 0 .

و نكتب $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

مثال :

$$\lim_{x\to 1}\frac{3}{(x-1)^2}=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 2}\frac{3}{\sqrt{(x-2)^2}}=+\infty$$

3 – النهاية $+\infty$ عند $+\infty$:

تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]a,+\infty[$.

نقول إن نهاية f هي $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$

إذا كان لكل $A>0$ يوجد عنصر $B>0$ بحيث لكل x من المجال $]B,+\infty[$ يكون $f(x)>A$.

و نكتب $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

خاصية :

الدوال المعرفة على الشكل : $f(x)=kx^n$ و $g(x)=k\sqrt{x}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$ و $k\in\mathbb{R}^{*+}$ تؤول إلى $+\infty$ عندما يؤول x إلى $+\infty$.

مثال :

$$\lim_{x\to+\infty}3x^4=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}3\sqrt{x}=+\infty .$$

4 – النهاية $-\infty$ عند $+\infty$ أو $-\infty$ أو x_0 :

خاصية :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(-f(x)\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(-f(x)\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\left(-f(x)\right)=+\infty$$

مثال :

$$\lim_{x\to-\infty}3x^3=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}-2x^3=+\infty .$$

Chorfi_mouhsine@yahoo.fr

خاصيات النهايات و الترتيب :

إذا كان $f(x)\geq u(x)$ و $\lim u(x)=+\infty$ فإن $\lim f(x)=+\infty$

إذا كان $f(x)\leq u(x)$ و $\lim u(x)=-\infty$ فإن $\lim f(x)=-\infty$

5 ـ العمليات على النهايات اللامنتهية و الأشكال الغير المحددة :

نهاية مجموع

نهاية f	نهاية g	نهاية f+g
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

نهاية دالة في عدد حقيقي

نهاية f	إشارة λ	نهاية λf
$+\infty$	موجبة	$+\infty$
$+\infty$	سالبة	$-\infty$
$-\infty$	موجبة	$-\infty$
$-\infty$	سالبة	$+\infty$

نهاية جداء

نهاية f	نهاية g	نهاية fg
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	شكل غير محدد
$-\infty$	0	شكل غير محدد

نهايةمقلوب دالة

نهاية f	نهاية مقلوبf
$+\infty$	0^+
0^+	$+\infty$
$-\infty$	0^-
0^-	$-\infty$

نهايةخارج

نهاية f	نهاية g	نهاية خارج f على g
∞	∞	شكل غير محدد
0	0	شكل غير محدد
$+\infty$	0^+	$+\infty$
$+\infty$	0^-	$-\infty$
0	$+\infty$	0
0	$-\infty$	0

III ـ نهاية الدوال المثلثية :

خاصية :

الدوال المثلثية : $\sin(x)$ و $\cos(x)$ و $\tan(x)$ **متصلة في مجموعة تعريفها .**

نهاية الدوال المثلثية

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$