##
##
##
##

agabel

User: agabel@fb04315.mathematik.tu-darmstadt.de
Name: Adrian Gabel
Host: fb04315.mathematik.tu-darmstadt.de
Date: Thu Nov 7 15:09:31 CET 2019

Sigmoidal squasher ist N-admissible für $N \in \mathbb{N}$

proof:

sigmoidal squasher $\sigma : \mathbb{R} \to [0,1]$, $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

σ ist stetig diffbar (als Komposition stetig diffbarer Funktionen)

Die Ableitung hat die Form:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x) = -\frac{1}{(1+e^{-x})^2} \cdot (-e^{-x})$$

$$= \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \cdot \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{1+e^{-x}}\right) \cdot \frac{1}{1+e^{-x}}$$

$$= (1-\sigma(x)) \cdot \sigma(x)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \cancel{x}^2}(x) = \sigma'(x)\sigma(x) + (1-\sigma(x))\sigma'(x)$$

$$= (1-\sigma(x))\sigma(x)$$

$$+ (1-\sigma(x))^2$$

usw.

Da wir bei weiterem ableiten die Produktregel immer wieder anwenden sind alle Ableitungen von σ, Polynome in σ.
Damit folgt (i) aus Definition 2, da σ durch 0 und 1 beschränkt ist.

~~und damit daraus~~.

Beweis von

(ii):

Polynome die nicht das 0-Polynom sind haben auf $(0,1)$ endlich viele Nullstellen & σ bildet in das intervall $[0,1] \supseteq (0,1)$ ab.
& da die Ableitungen von σ wieder Polynome sind für die die obere Eigenschaft gilt (als Zusammensetzung von σ (Polynome in σ)

$\exists\, t_\sigma \in \mathbb{R}$ sodass alle Ableitungen bis zum Grad N von $\sigma \neq 0$ sind.
mit $\sigma(t_\sigma) \neq 0$ & da die Ableitungen ein Komposition von $\sigma(x)$ ist gilt $\exists$ ($\square$)

Beweis von

iii):

Sei $x > 0$ beliebig

$$x \leq e^x + 1$$

Mittelwertsatz: $x \in [0,\infty) = I$

$\exists z \in I$: $(e^x - 1)/(x-0) = e^z$ $\quad e^z \geq 1$, da $z \geq 0$ da $z \in I$

$\Rightarrow \dfrac{e^x - 1}{x - 0} \geq 1 \iff e^x - 1 > 1 + x$

$\Rightarrow e^x + 1 > x \geq x$

$$\Rightarrow x \leq e^x + 1$$

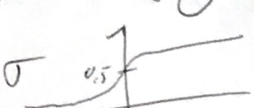
$$\iff x \cdot e^{-x} \leq 1 + e^{-x} \qquad \text{da } x > 0 \text{ \& } 1 + e^{-x} > 0$$

$$\iff \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \leq \frac{1}{x}$$

$$\iff \underbrace{1 - \frac{1}{1 + e^{-x}}}_{\geq 0} \leq \frac{1}{x}$$

$\iff$ $\cancel{1 - \frac{1}{1+e^{-x}}}$ < 0, da $\frac{1}{1+e^{-x}} < 1$, da $1 + e^{-x} > 1$, da $e^{-x} > 0$

$|\sigma(x) - 1| \leq \frac{1}{x}$, daraus folgt die erste Ungleichung.

für $y < 0$ gilt das ~~gleich~~ gleiche, da σ  symmetrisch in $(0, \frac{1}{2})$ ist.

da $\tilde{\sigma}(x) = \sigma(x) - \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ zz $\tilde{\sigma}$ ist punktsymmetrisch.

$-\tilde{\sigma}(x) = -\sigma(x) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{2}$