Show that $P(x) = \sum_{k=1}^{(M+1)^d} p_{i_k}(x) \prod_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{M}{2a} |x^{(j)} - x_{i_k}^{(j)}|\right)_+$ is a local convex comb of Taylor Polynomials of m

proof:

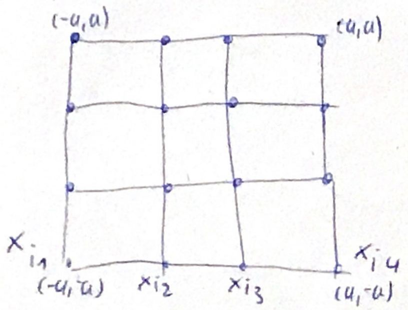
i) local, because it is a convex comb. for every $x \in [-a,a]$

ii) $\prod_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{M}{2a} |x^{(j)} - x_{i_k}^{(j)}|\right)_+ \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, (M+1)^d$, because $z_+ = \max\{z, 0\}$ $z \in \mathbb{R}$

iii) $\sum_{k=1}^{(M+1)^d} \prod_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{M}{2a} |x^{(j)} - x_{i_k}^{(j)}|\right)_+ = 1$

proof:

Sketch for $d=2$, $M=3$



$i_1 = (0,0)$
$i_2 = (1,0)$
$i_3 = (2,0)$
$i_4 = (3,0)$
⋮
$i_{16} = (3,3)$

Es ist ein Gitter mit $(M+1)^d$ Gitterpunkten die den x_{i_k} entsprechen.
Der Abstand zw. zwei Gitterpunkten beträgt $\frac{2a}{M}$.
Man betrachten immer den Abstand zu den ~~nächsten~~ nähesten 2^d Gitterpunkten, da nach der Formel $\left(1 - \frac{M}{2a} |x^{(j)} - |x_{i_k}^{(j)}|\right)_+ = 0$ immer gilt wenn der Abstand zw. $x^{(j)}$ & $x_{i_k}^{(j)} > \frac{2a}{M}$ ist.

Wir zeigen iii) mit Induktion über d.

IA: $(d=1)$

da x für $d=1$ zu zw. 2 Gitterpunkte liegen kann & mit der Begr. oben der Rest $= 0$ ist. oBdA. x liegt zw. x_{i_1} & x_{i_2}

Bzg. $\sum_{k=1}^{(M+1)} \left(1 - \frac{M}{2a} |x - x_{i_k}|\right)_+ \overset{\text{da}}{=} \left(1 - \frac{M}{2a} |x - x_{i_1}|\right)_+ + \left(1 - \frac{M}{2a} |x - x_{i_2}|\right)_+ = 1 + 1 - \frac{M}{2a} |\cancel{x} - x_{i_1} + x_{i_2} - \cancel{x}|$

da eh ≥ 0, da $|x - x_{i_2}| \leq \frac{2a}{M}$

da $x_{i_2} \geq x$

$= 1 + 1 - \frac{M}{2a} \cdot \frac{2a}{M} = 1$ ✓

da $x_{i_2} - x_{i_1} = \frac{2a}{M}$, weil es Gitterpunkte sind

IV: Die Aussage iii) gilt für ein beliebiges aber festes $d \in \mathbb{N}$.

IS: $d \mapsto d+1$ (bzw. $d-1 \mapsto d$)

Wir nehmen oBdA. an, dass $x_{(0,\dots,0)} \leq x \leq x_{(1,\dots,1)}$

$i_1 = (0,\dots,0)$

$i_{(M+1)^{d+1}} = (1,\dots,1)$

d.h. $x \in [-a, -a+\frac{2a}{M}]^{d+1}$

$$\sum_{k=1}^{(M+1)^{d+1}} \prod_{j=1}^{d+1} \left(1-\frac{M}{2a}|x^{(j)}-x_{i_k}^{(j)}|\right)_+ = \sum_{i\in\{0,1\}^{d+1}} \prod_{j=1}^{d+1} \left(1-\frac{M}{2a}|x^{(j)}-x_{i}^{(j)}|\right)_+$$

alle Summande sind 0, wenn $|x^{(j)}-x_{i_k}^{(j)}| \geq \frac{2a}{M}$ sind.
& wir haben oBdA ang. $x \in [-a,-a+\frac{2a}{M}]^{d+1}$ also $x_{(0,0,\dots,0)} \leq x \leq x_{(1,\dots,1)}$
wir haben also nur noch 2^{d+1} Summanden.
(Anz. Gitterpunkte die am nähesten zu x sind)

$$= \left(\sum_{i\in\{0,1\}^d\times\{0\}} \prod_{j=1}^{d} \left(1-\frac{M}{2a}|x^{(j)}-x_{i}^{(j)}|\right)_+\right) \cdot \left(1-\frac{M}{2a}|x^{(d+1)}-x_{(0,\dots,0)}^{(d+1)}|\right)$$

$$+\left(\sum_{i\in\{0,1\}^d\times\{1\}} \prod_{j=1}^{d} \left(1-\frac{M}{2a}|x^{(j)}-x_{i}^{(j)}|\right)\right) \cdot \left(1-\frac{M}{2a}|x^{(d+1)}-x_{(1,\dots,1)}^{(d+1)}|\right)$$

alle Gitterpunkte, die in der ~~letzten~~ (d+1). Komponente den selben wert haben, sind in dieser Dimension gleich weit von $x^{(d+1)}$ entfernt. D.h. in jedem Summanden kommt der Faktor $\left(1-\frac{M}{2a}|x^{(d+1)}-x_{(0,\dots,0)}^{(d+1)}|\right)$ bzw. $\left(1-\frac{M}{2a}|x^{(d+1)}-x_{(1,\dots,1)}^{(d+1)}|\right)$ vor,

da
$$\left(1-\frac{M}{2a}|x^{(d+1)}-x_i^{(d+1)}|\right) = \left(1-\frac{M}{2a}|x^{(d+1)}-x_{(0,0,\dots,0)}^{(d+1)}|\right) \text{ für } i\in\{0,1\}^d\times\{0\}$$
$$\text{bzw.} = \left(1-\frac{M}{2a}|x^{(d+1)}-x_{(1,\dots,1)}^{(d+1)}|\right) \text{ für } i\in\{0,1\}^d\times\{1\}$$

2mal (IV)
$$= 1\cdot\left(1-\frac{M}{2a}|x^{(d+1)}-x_{(0,\dots,0)}^{(d+1)}|\right) + 1\cdot\left(1-\frac{M}{2a}|x^{(d+1)}-x_{(1,\dots,1)}^{(d+1)}|\right)$$

$$= 1+1-\frac{M}{2a}|x^{(d+1)}-x_{(0,0,\dots,0)}^{(d+1)}+x_{(1,\dots,1)}^{(d+1)}-x^{(d+1)}|$$

$$\overset{}{\underset{?}{=}} 1+1-1 = 1$$

da $x_{(1,\dots,1)}-x_{(0,\dots,0)} = \frac{2a}{M}$, da es Gitterpunkte sind mit diesem Abstand.

□