Lemma 3:

~~Vorg~~

$\sigma: \mathbb{R} \to [0,1]$ 2-admissible f_{mult} aus Lemma 2

f_{id} from Lemma 1.

$$a \geq 1 \quad R \geq \frac{\|\sigma''\|_\infty \cdot a}{2 \cdot |\sigma'(t_{\sigma,id})|}$$

$$f_{ReLU}(x) = f_{mult}(f_{id}(x), \sigma(R \cdot x))$$

$$= \sum_{k=1}^{4} d_k \cdot \sigma\left(\sum_{i=1}^{2} b_{k,i} \cdot \sigma(a_i \cdot x + t_\sigma) + b_{k,3} \cdot \sigma(a_3 \cdot x) + t_\sigma\right)$$

$\Rightarrow \forall x \in [-a, a]$

$$|f_{ReLU}(x) - \max\{x, 0\}| \leq 56 \cdot \frac{\max\{\|\sigma''\|_\infty, \|\sigma'''\|_\infty, 1\}}{\min\{2 \cdot |\sigma'(t_{\sigma,id})|, |\sigma''(t_\sigma)|, 1\}} \cdot a^3 \cdot \frac{1}{R}$$

proof:

Da σ 2-admissible ist, gilt:

$$|\sigma(R \cdot x) - \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)| \leq \frac{1}{\underset{\downarrow}{|R \cdot x|}} = \frac{1}{R|x|} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$R \geq 0$

$\downarrow$

folgt aus $|\sigma(R \cdot x) - 1| \leq \frac{1}{R|x|}$ $\quad x > 0$

$$|\sigma(R \cdot x)| \leq \frac{1}{R|x|} \quad x < 0$$

Nach Lemm 1 & Lemma 2 gilt:

$$|f_{id}(x) - x| \leq \frac{\|\sigma''\|_\infty \cdot a^2}{2 \cdot |\sigma'(t_{\sigma,id})|} \cdot \frac{1}{R} \quad x \in [-a, a]$$

and

$$|f_{mult}(x, y) - x \cdot y| \leq \frac{160}{3} \frac{\|\sigma'''\|_\infty \cdot a^3}{|\sigma''(t_\sigma)|} \cdot \frac{1}{R} \quad x \in [-2a, 2a]$$

$\boxed{2^3 = 8}$

Lema 2 $\boxed{20 \cdot 8 = 160}$

~~Für~~ da $a \geq 1$ bildet $\sigma : \mathbb{R} \to [0,1]$ auch insbesondere nach $[-2a, 2a]$ ab, also auch $\sigma(R \cdot x)$

$$\Rightarrow f_{id}(x) = \frac{R}{\sigma'(\epsilon_{\sigma,id})} \cdot \Big(\underbrace{\sigma\Big(\frac{x}{R} + \epsilon_{\sigma,id}\Big) - \sigma(\epsilon_{\sigma,id})}_{\in[\;]\ \in[-a,a]}\Big)$$

$$\leq \frac{R}{|\sigma'(\epsilon_{\sigma,id})|} \leq R$$

$f_{id}(x)$ liegt in $[-2a, 2a]$ WARUM?

$$\Rightarrow |f_{ReLU}(x) - \max\{x, 0\}|$$

$$= |f_{mult}(f_{id}(x), \sigma(R \cdot x)) - x \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)|$$

2 mal Δ-Ungl. $\leq |f_{mult}(f_{id}(x), \sigma(R \cdot x)) - f_{id}(x)\sigma(R \cdot x)|$

$$+ \underbrace{|f_{id}(x) \cdot \sigma(R \cdot x) - x \cdot \sigma(R \cdot x)|}_{\leq \sigma(R \cdot x)|f_{id}(x) - x|} + \underbrace{|x\sigma(R \cdot x) - x \cdot \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)|}_{\leq |x|\,|\sigma(R \cdot x) - \mathbb{1}_{[0,\infty)}|}$$

$$\leq \frac{160}{3} \cdot \frac{\|\sigma'''\|_\infty \cdot a^3}{|\sigma''(\epsilon_\sigma)|} \cdot \frac{1}{R} + \overset{\text{Lem 1}}{\frac{\|\sigma''\|_\infty \cdot a^2}{2 \cdot |\sigma'(\epsilon_{\sigma,id})|}} \cdot \frac{1}{R} + \frac{1}{R}$$

$$\leq \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{160}{3} \frac{\|\sigma'''\|_\infty \cdot a^3}{|\sigma''(\epsilon_\sigma)|} + \frac{1}{2} \overset{\text{mit } \frac{a}{a}}{\frac{\|\sigma''\|_\infty \cdot a^3}{a|\sigma'(\epsilon_{\sigma,id})|}} + \frac{a^3}{a^3} \right)^{\text{mit } \frac{a^3}{a^3}}$$

Jeden Summanden abschätzen & da $a \geq 1$ $\;a^2 \leq a^3,\ 1 \leq a^3\;$ $\frac{1}{a|\sigma'(\epsilon_{\sigma,id})|} \leq \frac{1}{|\sigma'(\epsilon_{\sigma,id})|}$, da $a \geq 1$

$$\leq \frac{1}{R} \left(\frac{168}{3} \frac{\|\sigma'''\|_\infty \cdot a^3 + \|\sigma''\|_\infty \cdot a^3 + a^3}{\min\{2 \cdot |\sigma''(\epsilon_{\sigma,id})|, |\sigma'(\epsilon_{\sigma,id})|, 1\}} \right)$$

$$\leq \frac{1}{R} a^3 \quad \frac{168}{3} = 56 \ldots$$