$$j = \begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_d \end{pmatrix} \qquad N \in \mathbb{N}_0$$

$$\#\{ j \mid j_1, \dots, j_d \in \{0, \dots, N\},\ j_1 + \dots + j_d \leq N \}$$

Kardinalität

$$\binom{N+d}{d} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N-1+k}{k}$$

$d \geq 1$

folgt aus $\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}$ $\quad k < n$

↑ Rekursiv anwend. & im letzten Schritt $\binom{n-k}{0}$ durch $\binom{n-k-1}{0}$ ersetzen

& das folgt aus rekursiver Anwendung von $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

$\boxed{10}$

$1+2+3+4=10$

im Binomialkoeff. $\hat{=}$

$\binom{0}{0}$

$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\boxed{\binom{4}{2}}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \dots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{n-k}{k-1} + \underbrace{\binom{n-k}{0}}_{=\binom{n-k-1}{0}} \quad \rightsquigarrow \text{Beh.}
\end{aligned}$$