Московский Авиационный Институт
(Научно-исследовательский университет)

Институт №8 "Информационные технологии и прикладная математика"

Курсовой проект

по дисциплине:

Численные методы

на тему:

Сингулярное разложение матриц

Студент: Рябыкин Алексей Сергеевич
Преподаватель: Сластушенский Юрий Викторович

Оценка: _

Москва 2021

Оглавление

Постановка задачи

Составить и отладить программу, обеспечивающую сингулярное разложение (SVD - singular value decomposition) матриц. Исходные данные готовятся самостоятельно и вводятся из файла или прямиком из программы.
SVD применяется как для вещественных, так и для комплексных матриц, однако, здесь рассмотрен вариант для вещественных.

Утверждение: $\forall$ вещественной матрицы A $(n \times n)$ $\exists$ матрицы U и V такие, что

$$U^{\intercal}AV = \Sigma,$$

где Σ - диагональная матрица с сингулярными значениями на главной диагонали.
Исходя из утверждения можем получить формулу сингулярного разложения:

$$A = U\Sigma V^{\intercal}$$

$V^{\intercal}$ в случае комплексной природы является эрмитово-сопряженной.

Теорема:(обощенная). Пусть A - произвольная матрица. Существуют такие ортонормированные базисы $\{e^k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{C}^n, \{q^k\}_{k=1}^m \subset \mathbb{C}^m$ и положительные числа $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_r, 0 \leq r \leq \min\{m, n\}$, что

$$Ae^k = \begin{cases} \sigma_k q^k, & k \leq r \\ 0, & k > r \end{cases}$$

$\square$ Доказательство:
Матрица $A * A$ самосопряжена и неотрицательно определена $\Rightarrow$ $\exists$ орнормированный базис собственных векторов $\{e^k\}_{k=1}^n$ матрицы $A * A$. Все ее собственные числа неотрицательны.

$$A^*Ae^k = \sigma_k^2 e^k, \qquad k = 1, 2, \dots, n.$$

$\sigma_k^2 \geq 0,\ \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0,\ \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_n = 0$. Положим $z^k = Ae^k,\ k = 1, 2, \ldots, r$

$$(z^p, z^q) = (Ae^p, Ae^q) = (A^*Ae^p, e^q) = \delta_p^2(e^p, e^q).$$

Тогда

$$(z^p, z^q) = \begin{cases} 0, & p \neq q, \\ \delta_p^2, & p = q, \Longrightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$q^k = \delta_k^{-1} Ae^k, \quad k = 1, 2, r,$$

векторы, образующие ортонормированную систему в $\mathbb{C}^m$. $\blacksquare$

Вектора $\{q^k\}_{k=1}^m$ - столбцы матрицы U, $\{e^k\}_{k=1}^n$ - матрицы V

Описание использованных технологий и алгоритма

Среда разработки: Visual Studio

Тип проекта: Консольное приложение (.NetCore)

Модель программирования: .Net Framework 4.7.1

Язык программирования: C#

Алгоритм

Есть два подхода для решения данной задачи: аналитический и численный. Первый базируется на приведении потенциально прямоугольной матрице к квадратной путем умножения на транспонированную к ней и нахождение собственных значений и векторов для найденной квадратной матрицы:

$$A^\intercal \cdot A = (U \cdot \Sigma \cdot V^\intercal)^\intercal \cdot (U \cdot \Sigma \cdot V^\intercal) = V \cdot \Sigma V^\intercal$$
$$A \cdot A^\intercal = (U \cdot \Sigma \cdot V^\intercal) \cdot (U \cdot \Sigma^2 \cdot V^\intercal)^\intercal = U \cdot \Sigma^2 U^\intercal$$

Из этого следует, что U является матрицей, состоящей из собственных векторов для квадратной матрицы $A \cdot A^\intercal$, V - матрица собственных векторов $A^\intercal \cdot A$. Сингулярные значения исходной матрицы и собственные значения квадратной матрицы соотносятся друг другу $\sigma = \sqrt{\lambda}$

Второй метод:

1. Цикл [1,...,rank(A)]:
2. Генерируем Гауссовский вектор $x_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$;
3. $s_i = \frac{\log(\frac{4 \log \frac{2n}{\delta}}{\varepsilon\delta})}{2\lambda}$;
4. Цикл [1,...,s]:
5. $x_j = A^\intercal A x_{i-1}$;
6. $v_i = \frac{x_i}{||x_i||}$;
7. $\sigma_i = ||Av_1||$;
8. $u_i = \frac{Av_1}{\sigma_1}$;

9. $A_{j+1} = A_j - u_j \sigma_j v_j^\intercal$

10. $U.Add(u_i)$

11. $V.Add(v_i)$

Листинг

```
public List<Object> SVD()
{
    List<Object> answer = new List<Object>();
    int rank_A = Rank();
    Tensor A = new Tensor(Rows,Columns);
    A = A + this;

    Tensor U = new Tensor(Rows, rank_A);
    Tensor V = new Tensor(Columns, rank_A);
    List<double> Sigma = new List<double>();
    Tensor sigma_t = new Tensor(rank_A, rank_A);
    double varepsilon = 0.01, delta = 0.001, lambda = 2;
    double iter = (int)(Math.Log(4*Math.Log(2*Columns / delta) / (varepsilo


    for (int i = 0; i < rank_A; i++)
    {
        Tensor x0 = new Tensor(random_normal(this), Columns, 1);
        Tensor xi_vec = new Tensor();
        Tensor AtA = A.Tranpose();
        AtA *= A;
        for (int j = 0; j < iter; j++)
        {
            xi_vec = AtA * x0;
            for (int k = 0; k < x0.Rows; k++)
                x0[k, 0] = xi_vec[k, 0];
        }
        Tensor v_i = new Tensor(Columns, 1);
        for (int k = 0; k < Columns; k++)
        {
            V[k, i] = xi_vec[k, 0] / xi_vec.norm_2();
            v_i[k, 0] = V[k, i];
        }

        Sigma.Add((A * v_i).norm_2());

        Tensor u_i = (A * v_i) * (1 / Sigma[i]);

        for (int k = 0; k < U.Rows; k++)
        {
            U[k, i] = u_i[k, 0];
        }
        Tensor U_i = new Tensor(U.Rows, 1);
```

```
        Tensor V_i = new Tensor(V.Rows, 1);
        for (int h = 0; h < U.Rows; h++)
            U_i[h, 0] = U[h, i];
        for (int h = 0; h < V.Rows; h++)
            V_i[h, 0] = V[h, i];
        Tensor tmp_tra = new Tensor(V_i.Columns, V_i.Rows);
        tmp_tra = V_i.Tranpose();

        A = A - (U_i * tmp_tra) * Sigma[i];

    }
    answer.Add(U);
    answer.Add(V);
    for (int i = 0; i < rank_A; i++)
        sigma_t[i, i] = Sigma[i];
    answer.Add(sigma_t);
    return answer;
}

public List<double> random_normal(Tensor A)
{
    List<double> x = new List<double>();
    int M = 0; int sigma = 1;
    Random tmp = new Random();
    for (int i = 0; i < A.Columns; i++)
    {
        x.Add(f_normal(tmp.Next(5)));
    }
    return x;

}

public double f_normal(double x) =>
    1 / Math.Sqrt(2 * Math.PI) * Math.Exp(-(x * x) / 2);
```

Применение

1. **Полярные разложения.** Пусть A - произвольная квадратная матрица. Сингулярное разложение можно переписать в виде:

$$A = WS, \quad A = TW,$$

где $W = UV^*$ - унитарная матрица, $S = V\Sigma V^*$, $T = U\Sigma U^*$ - самосопряженные неотрицательные матрицы. Формулы для A определяют *полярные разложения* матрицы (левое и правое). Находят применение, например, в механике деформируемого твердого тела.

2. **Решение СЛАУ.** Представим вектор b в виде $b = \sum\limits_{k=1}^{m}(b, q^k)q^k$, вектор x будем искать из разложения $x = \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e^k$. Для определения ξ_k воспользуемся $\xi_k = (b, q^k)/\sigma_k, \ \ k = 1, 2, \ldots, r$. Следует различать два случая:

   (a) все числа $\eta_k = (b, q^k), \ \ k = r+1, r+2, \ldots, m$ - нули, тогда

   $$x = \sum_{k=1}^{r} \frac{b, q^k)}{\delta_k e^k} + \sum_{k=r+1}^{n} \xi_k e^k,$$

   где $\xi_k, \ \ k = r+1, r+2, \ldots, n$ - произвольные числа, есть общее решение системы уравнений.

   (b) если хотя бы одно из чисел η_k отлично от нуля, то система не имеет решений, вектор, определяемый из пункта (a) называют псевдорешением.

3. **Нахождение псевдообратной матрицы.** Псевдообратная матрица A с разложением по сингулярным значениям $A = U\Sigma V^*$ имеет вид

$$M^+ = V\Sigma^+ U^*,$$

где Σ^+ представляет собой псевдообратную матрицу Σ, которая образуется заменой каждого ненулевого диагонального элемента на его обратный элемент и транспонированием получившейся матрицы.

4. **Аппроксимация матрицы низкого ранга.** Пусть $A \in M_{m,n}$. Требуется построить матрицу $X \in M_{m,n}$, являющуюся наилучшим приближением к A среди всех матриц, ранг которых не превосходит заданного числа. Положим

$$X = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j q^j \otimes e^J.$$

Имеем $rank(X) = k$, причем $A - X = \sum\limits_{j=k+1}^{k} \sigma_j q^j \otimes e^j \Rightarrow$ максимальное сингулярное число матрицы $A-X$ равно σ_{k+1}. Пусть матрица $Y \in M_{m,n}$ имеет ранг, не превосходящий k. Тогда $def(Y)$ не меньше, чем $n-k$. $\exists z \neq 0,\ z \in span\{e^1, e^2, \dots, e^{k+1}\} \cap Ker(Y)$. $|z| = 1,\ z = \sum\limits_{j=1}^{k+1} \alpha_j e^j$. Имеем

$$((A-Y)^*(A-Y)z, z) = (A^*Az, z) = \sum_{j=1}^{k+1} \sigma_j^2 \alpha_j^2 \geq \sigma_{k+1}^2$$

Максимальное сингулярное число матрицы $A-Y$ не меньше, чем σ_{k+1}. Имеем X как наилучшее приближение к матрице A на множестве всех матриц ранга, не превосходящего заданное число.

5. **Сжатие информации.** Матрица X из прошлого пункта осуществляет сжатие информации, содержащейся в матрице A. Если A - квадратная матрица, то близость матриц X и A можно охарактеризовать неравенством $\max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij} - x_{ij}| \leq \sigma_{k+1}$

6. **Шумоподавление.**

7. **Рекомендательные системы.**

8. **Сжатие фотографий.**

Выводы

Ознакомился и реализовал численный метод сингулярного разложения матриц. Алгоритмическая сложность реализованного метода: $O(mnk\frac{\log(\frac{n}{\varepsilon\delta})}{\lambda})$ Сингулярное разложение матриц имеет широчайший спектр применения - от сжатия изображений (применимо в искусственном интеллекте, например, сжатие изображений и машинном обучении - рекомендательные системы), до математических и механических преобразований разного рода (нахождение обратных матриц, шумоподавление, аппроксимация матрицами низкого ранга, решение СЛАУ, полярные разложения).

Литература

1. Edo Liberty Lecture 7: Singular Value Decomposition;
2. Сингулярное разложение матриц;
3. Карчевский М.М. Сингулярное разложение матриц;
4. Бейлина Л., Карчевский М.М. Numerical Linear Algebra: Theory and Application;
5. Вычислительные методы алгебры 3. Сингулярное разложение;
6. MIT Lecture (Matrix Methods in Data Analysis);
7. Singular value Decomposition;

Приложение

ТЕСТ 1.

```
Matrix A:
------------------------------------------------------------

| 10 || 61 || 1 || 10 || 84 || 61 || 19 |
| 33 || 90 || 83 || 17 || 25 || 10 || 67 |
| 93 || 34 || 13 || 22 || 17 || 38 || 69 |
| 37 || 47 || 76 || 8 || 91 || 28 || 89 |
| 97 || 11 || 8 || 47 || 41 || 72 || 31 |
| 57 || 41 || 88 || 4 || 86 || 22 || 82 |
| 2 || 34 || 55 || 60 || 78 || 73 || 56 |

------------------------------------------------------------
Rank(A):
20
------------------------------------------------------------
Needed time:37,6574ms
------------------------------------------------------------

Matrix U:
------------------------------------------------------------
| 0,19421624157620918 || 0,13133303650676886 || 0,18727790677960746 || -0,01115644341448643 || 0,4386188426546102 || -0,3076857530428834 || 0,031193592864003635 |
| 0,19811480091847658 || -0,16828617811975466 || 0,33135591967030176 || 0,19622756870946448 || -0,04502419826234104 || 0,49006347863425853 || 0,2752549943284635 |
| 0,2317255280606439 || 0,09262722014396446 || -0,3700381345847637 || 0,03396952830231565 || 0,0151716680292507 || 0,22029194326824159 || 0,14080209450507178 |
| 0,2107669114671594 || -0,3261047555730252 || 0,09063000646788573 || 0,010060268373851659 || 0,08060464151134293 || -0,21991722814857337 || -0,38864450101887327 |
| 0,18091778790594437 || 0,20162414788307778 || -0,07412630911643925 || 0,36171864421934785 || -0,4482899592232441 || -0,23309960592397602 || -0,11790845886105329 |
| 0,23182517278828285 || -0,20404539701770205 || -0,2639285455741454 || 0,32613012990777435 || 0,194966668485033 || 0,27510527558082937 || 0,02015678204459529 |
| 0,24218305659662323 || 0,03272292788779481 || 0,40426819745456655 || 0,3023502869119188 || 0,26650154536625975 || -0,07625080087810333 || 0,005002148789519128 |

Matrix V:
------------------------------------------------------------
| 0,20169770482021956 || -0,157076325622406 || -0,39550237710121067 || 0,2546777848437275 || -0,312816956988829 || 0,005960600510958123 || -0,01449435171967275 |
| 0,2300489590767844 || -0,22032897731115922 || 0,1491061255434279 || -0,207866038380057 || 0,02007837423004932 || 0,13067025274648106 || 0,10362273118393153 |
| 0,19736057999723297 || -0,4458454726985926 || 0,16090381713228363 || 0,05656939051636169 || -0,19598439283598476 || 0,22652356319521733 || -0,08409089622959 14 |
| 0,18737893539505496 || 0,294802449028941 || 0,13144468992042668 || -0,11381167854366984 || -0,325385881020934 3 || -0,022204160289423396 || -0,12633879327217754 |
| 0,19633533309540765 || -0,2842491592921543 3 || 0,17750451126011468 || 0,1554445350583795 || 0,311366049445974 || -0,09727833251568732 || -0,40558879768116773 |
| 0,21722168790005894 || 0,4523265008221513 7 || 0,07268775325751232 || 0,044368168222226285 || 0,083922823144047 9 || -0,1300393733565356 || -0,22574316602232303 |
| 0,256343194271547 8 || -0,160148259582053 || -0,12661597910806585 || 0,03066194513240460 8 || 0,070339403365555 8 || 0,1568364398646222 || -0,14244672437545575 |
------------------------------------------------------------
```


```
Matrix A:
------------------------------------------------------------

| 10 || 61 || 1 || 10 || 84 || 61 || 19 |
| 33 || 90 || 83 || 17 || 25 || 10 || 67 |
| 93 || 34 || 13 || 22 || 17 || 38 || 69 |
| 37 || 47 || 76 || 8 || 91 || 28 || 89 |
| 97 || 11 || 8 || 47 || 41 || 72 || 31 |
| 57 || 41 || 88 || 4 || 86 || 22 || 82 |
| 2 || 34 || 55 || 60 || 78 || 73 || 56 |

------------------------------------------------------------
Rank(A):
20
------------------------------------------------------------
Needed time:37,6574ms
------------------------------------------------------------

Matrix U:
------------------------------------------------------------
| 0,19421624157620918 || 0,13133303650676886 || 0,18727790677960746 || -0,01115644341448643 || 0,4386188426546102 || -0,3076857530428834 || 0,031193592864003635 |
| 0,19811480091847658 || -0,16828617811975466 || 0,33135591967030176 || 0,19622756870946448 || -0,04502419826234104 || 0,49006347863425853 || 0,2752549943284635 |
| 0,2317255280606439 || 0,09262722014396446 || -0,3700381345847637 || 0,03396952830231565 || 0,0151716680292507 || 0,22029194326824159 || 0,14080209450507178 |
| 0,2107669114671594 || -0,3261047555730252 || 0,09063000646788573 || 0,010060268373851659 || 0,08060464151134293 || -0,21991722814857337 || -0,38864450101887327 |
| 0,18091778790594437 || 0,20162414788307778 || -0,07412630911643925 || 0,36171864421934785 || -0,4482899592232441 || -0,23309960592397602 || -0,11790845886105329 |
| 0,23182517278828285 || -0,20404539701770205 || -0,2639285455741454 || 0,32613012990777435 || 0,194966668485033 || 0,27510527558082937 || 0,02015678204459529 |
| 0,24218305659662323 || 0,03272292788779481 || 0,40426819745456655 || 0,3023502869119188 || 0,26650154536625975 || -0,07625080087810333 || 0,005002148789519128 |

Matrix V:
------------------------------------------------------------
| 0,20169770482021956 || -0,157076325622406 || -0,39550237710121067 || 0,2546777848437275 || -0,312816956988829 || 0,005960600510958123 || -0,01449435171967275 |
| 0,2300489590767844 || -0,22032897731115922 || 0,1491061255434279 || -0,207866038380057 || 0,02007837423004932 || 0,13067025274648106 || 0,10362273118393153 |
| 0,19736057999723297 || -0,4458454726985926 || 0,16090381713228363 || 0,05656939051636169 || -0,19598439283598476 || 0,22652356319521733 || -0,08409089622959 14 |
| 0,18737893539505496 || 0,294802449028941 || 0,13144468992042668 || -0,11381167854366984 || -0,325385881020934 3 || -0,022204160289423396 || -0,12633879327217754 |
| 0,19633533309540765 || -0,2842491592921543 3 || 0,17750451126011468 || 0,1554445350583795 || 0,311366049445974 || -0,09727833251568732 || -0,40558879768116773 |
| 0,21722168790005894 || 0,4523265008221513 7 || 0,07268775325751232 || 0,044368168222226285 || 0,083922823144047 9 || -0,1300393733565356 || -0,22574316602232303 |
| 0,256343194271547 8 || -0,160148259582053 || -0,12661597910806585 || 0,03066194513240460 8 || 0,070339403365555 8 || 0,1568364398646222 || -0,14244672437545575 |
------------------------------------------------------------
```


```
(Sigma)Matrix with singular values:
| 992,0996295216385 || 0 || 0 || 0 || 0 || 0 || 0 |
| 0 || 238,15821804788663 || 0 || 0 || 0 || 0 || 0 |
| 0 || 0 || 217,35050663169355 || 0 || 0 || 0 || 0 |
| 0 || 0 || 0 || 202,07763600104528 || 0 || 0 || 0 |
| 0 || 0 || 0 || 0 || 181,8374207474711 || 0 || 0 |
| 0 || 0 || 0 || 0 || 0 || 161,71767369317377 || 0 |
| 0 || 0 || 0 || 0 || 0 || 0 || 163,72002694131223 |
------------------------------------------------------------

------------------------------------------------------------

U*(Sigma)*V^T check
| 10,000000000000014 || 61 || 0,9999999999999984 || 10,000000000000004 || 84,00000000000001 || 61 || 18,999999999999996 |
| 33,00000000000001 || 90,00000000000004 || 83,00000000000003 || 17,000000000000018 || 24,999999999999993 || 10,000000000000002 || 67,00000000000003 |
| 93 || 34,00000000000002 || 13,000000000000012 || 22,00000000000001 || 17,000000000000014 || 38 || 69,00000000000001 || 37,000000000000014 || 47,000000000000014 || 76,00000000000003 || 7,999999999999993 || 91,00000000000001 || 28,00000000000001 || 89,00000000000001 |
| 97,00000000000001 || 11,000000000000007 || 8 || 47,000000000000014 || 40,99999999999986 || 72 || 30,9999999999999 || 56,99999999999986 || 41,00000000000002 || 87,9999999999999 || 4 || 86 || 21,999999999999996 || 82 |
| 2,000000000000016 || 33,9999999999999 || 54,99999999999997 || 60,000000000000014 || 77,99999999999997 || 73 || 56,00000000000003 |
------------------------------------------------------------

Difference between U*(Sigma)*V^T and A:
------------------------------------------------------------

| -1,4210854715202004E-14 || 0 || 1,5543122344752192E-15 || -3,552713678800501E-15 || -1,4210854715202004E-14 || 0 || 3,552713678800501E-15 |
| -7,105427357601002E-15 || -4,263256414560601E-14 || -2,842170943040401E-14 || -1,7763568394002505E-14 || 7,105427357601002E-15 || -1,7763568394002505E-15 || -2,842170943040401E-14 |
| 0 || -2,1316282072803006E-14 || -1,2434497875801753E-14 || -1,0658141036401503E-14 || -1,4210854715202004E-14 || 0 || -1,4210854715202004E-14 |
| -1,4210854715202004E-14 || -1,4210854715202004E-14 || -2,842170943040401E-14 || 7,105427357601002E-15 || -1,4210854715202004E-14 || -1,0658141036401503E-14 || -1,4210854715202004E-14 |
| -1,4210854715202004E-14 || -7,105427357601002E-15 || 0 || -1,4210854715202004E-14 || 1,4210854715202004E-14 || 0 || 1,0658141036401503E-14 |
| 1,4210854715202004E-14 || -2,1316282072803006E-14 || 1,4210854715202004E-14 || 0 || 0 || 3,552713678800501E-15 || 0 || -1,5987211554602254E-14 || 7,105427357601002E-15 || 2,842170943040401E-14 || -1,4210854715202004E-14 || 2,842170943040401E-14 || 0 || -2,842170943040401E-14 |
------------------------------------------------------------
```


```
(Sigma)Matrix with singular values:
| 992,0996295216385 || 0 || 0 || 0 || 0 || 0 || 0 |
| 0 || 238,15821804788663 || 0 || 0 || 0 || 0 || 0 |
| 0 || 0 || 217,35050663169355 || 0 || 0 || 0 || 0 |
| 0 || 0 || 0 || 202,07763600104528 || 0 || 0 || 0 |
| 0 || 0 || 0 || 0 || 181,8374207474711 || 0 || 0 |
| 0 || 0 || 0 || 0 || 0 || 161,71767369317377 || 0 |
| 0 || 0 || 0 || 0 || 0 || 0 || 163,72002694131223 |
------------------------------------------------------------

------------------------------------------------------------

U*(Sigma)*V^T check
| 10,000000000000014 || 61 || 0,9999999999999984 || 10,000000000000004 || 84,00000000000001 || 61 || 18,999999999999996 |
| 33,00000000000001 || 90,00000000000004 || 83,00000000000003 || 17,000000000000018 || 24,999999999999993 || 10,000000000000002 || 67,00000000000003 |
| 93 || 34,00000000000002 || 13,000000000000012 || 22,00000000000001 || 17,000000000000014 || 38 || 69,00000000000001 || 37,000000000000014 || 47,000000000000014 || 76,00000000000003 || 7,999999999999993 || 91,00000000000001 || 28,00000000000001 || 89,00000000000001 |
| 97,00000000000001 || 11,000000000000007 || 8 || 47,000000000000014 || 40,99999999999986 || 72 || 30,9999999999999 || 56,99999999999986 || 41,00000000000002 || 87,9999999999999 || 4 || 86 || 21,999999999999996 || 82 |
| 2,000000000000016 || 33,9999999999999 || 54,99999999999997 || 60,000000000000014 || 77,99999999999997 || 73 || 56,00000000000003 |
------------------------------------------------------------

Difference between U*(Sigma)*V^T and A:
------------------------------------------------------------

| -1,4210854715202004E-14 || 0 || 1,5543122344752192E-15 || -3,552713678800501E-15 || -1,4210854715202004E-14 || 0 || 3,552713678800501E-15 |
| -7,105427357601002E-15 || -4,263256414560601E-14 || -2,842170943040401E-14 || -1,7763568394002505E-14 || 7,105427357601002E-15 || -1,7763568394002505E-15 || -2,842170943040401E-14 |
| 0 || -2,1316282072803006E-14 || -1,2434497875801753E-14 || -1,0658141036401503E-14 || -1,4210854715202004E-14 || 0 || -1,4210854715202004E-14 |
| -1,4210854715202004E-14 || -1,4210854715202004E-14 || -2,842170943040401E-14 || 7,105427357601002E-15 || -1,4210854715202004E-14 || -1,0658141036401503E-14 || -1,4210854715202004E-14 |
| -1,4210854715202004E-14 || -7,105427357601002E-15 || 0 || -1,4210854715202004E-14 || 1,4210854715202004E-14 || 0 || 1,0658141036401503E-14 |
| 1,4210854715202004E-14 || -2,1316282072803006E-14 || 1,4210854715202004E-14 || 0 || 0 || 3,552713678800501E-15 || 0 || -1,5987211554602254E-14 || 7,105427357601002E-15 || 2,842170943040401E-14 || -1,4210854715202004E-14 || 2,842170943040401E-14 || 0 || -2,842170943040401E-14 |
------------------------------------------------------------
```

TECT 2.

```
Matrix A:
-----------------------------------------------------------

|  10  ||  61  ||  1  ||  10  ||  84  ||  61  ||  19  |
|  78  ||  33  ||  90  ||  83  ||  17  ||  25  ||  10  |
|  99  ||  43  ||  93  ||  34  ||  13  ||  22  ||  17  |
|  28  ||  37  ||  38  ||  37  ||  47  ||  76  ||  8  |
|  42  ||  74  ||  19  ||  68  ||  97  ||  11  ||  8  |
|  40  ||  99  ||  8  ||  69  ||  5  ||  57  ||  41  |
|  48  ||  60  ||  17  ||  3  ||  71  ||  3  ||  2  |

-----------------------------------------------------------
Rank(A):
14
-----------------------------------------------------------
Needed time:24,8507ms
-----------------------------------------------------------

Matrix U:
-----------------------------------------------------------
|  0,22141356100351708  ||  0,39805049538707177  ||  0,09095721904181486  ||  0,22589307216290477  ||  -0,15009947197560794  ||  0,18341493496882758  ||  -0,184215703739381З  |
|  0,2309742893187872  ||  -0,42955403048193463  ||  0,012042242331652192  ||  0,1239379231616226  ||  -0,46351456269671754  ||  -0,09697004898611573  ||  -0,020546771282766645  |
|  0,30173122819774767  ||  -0,341922943506З937  ||  0,22575629976089587  ||  0,13687112475075328  ||  0,02142584309717839  ||  0,04383466469359317  ||  -0,2458937310773221  |
|  0,22969726544436736  ||  0,15364538190009863  ||  0,019049622524805635  ||  0,35637115803443836  ||  -0,5075861790867587  ||  0,07996080647735793  ||  -0,034392598812908674  |
|  0,22848452738928 5  ||  0,278900024063943З  ||  0,042200129816836913  ||  -0,29259553012412787  ||  -0,33733267153215474  ||  -0,034616534864501225  ||  -0,10426986275674457  |
|  0,292514135865887 6  ||  0,2221247058338416  ||  -0,3697242252826437  ||  0,12668147197719903  ||  0,15521433642629012  ||  0,4417692416172833  ||  0,4859262066955021  |
|  0,23883645010903398  ||  0,1098373881474225  ||  0,21423811599449105  ||  -0,03771574931736771  ||  0,29808471630756084  ||  0,4300965114896176  ||  -0,44378199423915415  |

Matrix V:
-----------------------------------------------------------
|  0,28531632554716957  ||  -0,2539282752087944  ||  0,08347358844981256  ||  -0,13848758640529676  ||  0,08307343649382426  ||  -0,22283237218499105  ||  -0,10229775661763724  |
|  0,22734996355772077  ||  0,07628449360949376  ||  -0,20213873376773  ||  0,03699609208184012  ||  0,03778934901593636  ||  0,41569573775056606  ||  -0,11247295928887205  |
|  0,20625343298859103  ||  -0,49704691458228045  ||  -0,0642447725709111  ||  0,2790788871929693  ||  -0,05501892171801628  ||  -0,229228524468416  ||  -0,11606280090438052  |
|  0,20822350604840323  ||  -0,14242673011420642  ||  0,03055286613412133  ||  -0,25553406294552283  ||  -0,35560779596187103  ||  0,030387116259895996  ||  0,545863513630664 1  |
|  0,22863136895797836  ||  0,4081288474635362  ||  0,234455948095611  ||  -0,38652106153483345  ||  -0,1943602214021658З  ||  -0,16642617782709984  ||  -0,273379594697403 9  |
|  0,13807675522117577  ||  0,018473088148665624  ||  -0,2984804406334571  ||  0,2212296695492364 2  ||  -0,25827987813135933  ||  0,269904052697212 3  ||  -0,07786163546041538  |
|  0,180482897592379 6  ||  -0,08697166927633944  ||  0,08770306334612206  ||  -0,15760802286548092  ||  0,243933859813513 9  ||  -0,12956254913222082  ||  0,40893399994470 38  |
-----------------------------------------------------------

(Sigma)Matrix with singular values:
|  822,9942333527559  ||  0  ||  0  ||  0  ||  0  ||  0  ||  0  |
|  0  ||  213,97399681358323  ||  0  ||  0  ||  0  ||  0  ||  0  |
|  0  ||  0  ||  190,56789647341304  ||  0  ||  0  ||  0  ||  0  |
|  0  ||  0  ||  0  ||  165,8252930924456  ||  0  ||  0  ||  0  |
|  0  ||  0  ||  0  ||  0  ||  149,92591153247895  ||  0  ||  0  |
|  0  ||  0  ||  0  ||  0  ||  0  ||  137,2935711624152  ||  0  |
|  0  ||  0  ||  0  ||  0  ||  0  ||  0  ||  130,96622571827876  |
-----------------------------------------------------------
```

```
-----------------------------------------------------------

U*(Sigma)*V^T check
|  10,000000000000014  ||  61,00000000000002  ||  1,0000000000000109  ||  10,000000000000018  ||  84  ||  61,000000000000014  ||  19  |
|  78,00000000000003  ||  33  ||  90,00000000000001  ||  83  ||  17,00000000000001  ||  25,000000000000004  ||  10,000000000000005  |
|  99,00000000000001  ||  43,00000000000001  ||  93,00000000000001  ||  34,00000000000001  ||  12,999999999999996  ||  22,00000000000002  ||  17,000000000000007  |
|  28,00000000000002  ||  37,00000000000001  ||  38,00000000000001  ||  37,00000000000001  ||  47  ||  75,99999999999999  ||  7,999999999999999  |
|  42  ||  74  ||  19,00000000000001  ||  68,00000000000003  ||  97  ||  10,999999999999998  ||  8,000000000000005  |
|  40,00000000000002  ||  98,99999999999999  ||  8,000000000000014  ||  69,00000000000003  ||  4,999999999999986  ||  57,00000000000002  ||  41,00000000000001  |
|  48,000000000000014  ||  60,00000000000004  ||  17,000000000000018  ||  3,000000000000018  ||  70,99999999999999  ||  3,0000000000000044  ||  2,0000000000000164  |
-----------------------------------------------------------

Difference between U*(Sigma)*V^T and A:
-----------------------------------------------------------

|  -1,4210854715202004E-14  ||  -2,1316282072803006E-14  ||  -1,0880185641326534E-14  ||  -1,7763568394002505E-14  ||  0  ||  -1,4210854715202004E-14  ||  0  |
|  -2,842170943040401E-14  ||  0  ||  -1,4210854715202004E-14  ||  0  ||  -1,0658141036401503E-14  ||  -3,552713678800501E-15  ||  -5,329070518200751E-15  |
|  -1,4210854715202004E-14  ||  -7,105427357601002E-15  ||  -1,4210854715202004E-14  ||  -7,105427357601002E-15  ||  3,552713678800501E-15  ||  -2,1316282072803006E-14  ||  -7,105427357601002E-15  |
|  -2,1316282072803006E-14  ||  -7,105427357601002E-15  ||  -7,105427357601002E-15  ||  -7,105427357601002E-15  ||  0  ||  1,4210854715202004E-14  ||  8,881784197001252E-16  |
|  0  ||  0  ||  -1,0658141036401503E-14  ||  -2,842170943040401E-14  ||  0  ||  1,7763568394002505E-15  ||  -5,329070518200751E-15  |
|  -2,1316282072803006E-14  ||  1,4210854715202004E-14  ||  -1,4210854715202004E-14  ||  -2,842170943040401E-14  ||  1,4210854715202004E-14  ||  -2,1316282072803006E-14  ||  -7,105427357601002E-15  |
|  -1,4210854715202004E-14  ||  -4,263256414560601E-14  ||  -1,7763568394002505E-14  ||  -1,8207657603852567E-14  ||  1,4210854715202004E-14  ||  -4,440892098500626E-15  ||  -1,6431300764452317E-14  |
-----------------------------------------------------------
```