Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет компьютерных наук
Прикладная математика и информатика

ДИПЛОМНАЯ РАБОТА

Исследовательский проект на тему

”Замена лица (FaceSwap) с помощью генеративных моделей”

Выполнил студент группы мИИАД22, 2 курс,
Рябыкин Алексей Сергеевич

Научный руководитель:
научный сотрудник Аланов Айбек

Москва 2024

РЕФЕРАТ

Дипломная работа содержит 18 страниц, N рисунок, N таблицу, N использованных источников.

Face swap, Deepfakes, ДИФФУЗИОННЫЕ МОДЕЛИ, ГЕНЕРАТИВНЫЕ МОДЕЛИ

Дипломная работа посвящена исследованию современных методов замены лиц на изображения с помощью диффузионных моделей. Исследована проблема

Теоретическая часть работы содержит исследовательский обзор статей о диффузионных моделях для задачи замены лиц на изображении (Face swap)...

В практической части содержатся результаты поставленных экспериментов, их анализ и постановка последующих исследований.

Contents

ВВЕДЕНИЕ

TBD

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1 Обзор литературы

1.1.1 Общие сведения о диффузионных моделях

Долго лидирующие на поприще генерации изображений генеративно-состязательные сети обладают набором проблем, с которыми боролось и продолжает бороться научное сообщество. Основными проблемами, сохранившимися до сих пор, являются нестабильность обучения [7], решаемая с помощью спектральной нормализации [8], контролирующей константу Липшица, вводя ограничение весов, для стабилизации обучения дискриминатора; Mode Collapse [9]. Последняя является одной из главных проблем моделей такого типа. Проблема заключается в том, что в процессе обучения генератор приходит к состоянию, при котором генерируется лишь ограченный (существенно меньший оригинального пространства изображений) набор выходов. Предлагаемые решения этой проблемы – WGAN [1] (авторы используют метрику Вассерштейна внутри лосс-функции, тем самым мотивируя дискриминатор выявлять повторяющие выходы, в которых стабилизировался генератор) и UGAN [10] (также адаптация функции потерь, однако теперь с оценкой выходов генератора на основе предсказаний будущих версий дискриминатора).

В отличие от генеративно-состязательных сетей эти же проблемы не свойственны новому классу моделей – диффузионным моделям. В оригинальной статье [2] авторы утилизируют идею из статистической термодинамики. Главной целью авторы видят определение двух процессов: итеративный диффузный процесс, который преобразует любое комплекное распределение данных в более простое и контролируемое, постепенно уменьшая SNR (signal-to-noise ratio), а также параметризованный обратный диффузионный процесс, обучаемый итеративно моделировать целевое распределение.

Прямой процесс

Рассмотрим набор данных из сложно контролируемого целевого распределения: $X = (x^1, \ldots, x^n)$. Построим прямой процесс диффузии, постепенно зашумляющий данные из целевого распределения (уменьшая

SNR).

$$x_0^i \to x_1^i \to \ldots \to x_T^i$$
$$x_t^i = \sqrt{1-\beta_t} \cdot x_{t-1}^i + \sqrt{\beta_t} \cdot \epsilon, \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(\epsilon|\ 0,\ I)$$

где β_t – скорость диффузии на шаге t, x^i – семпл из выборки (сейчас и далее просто x). Этот прямой диффузионный процесс может быть записан в следующем виде:

$$q(x_t|x_{t-1}) = \mathcal{N}(x_t|\sqrt{1-\beta_t}x_{t-1}, \beta_t I) \tag{1}$$

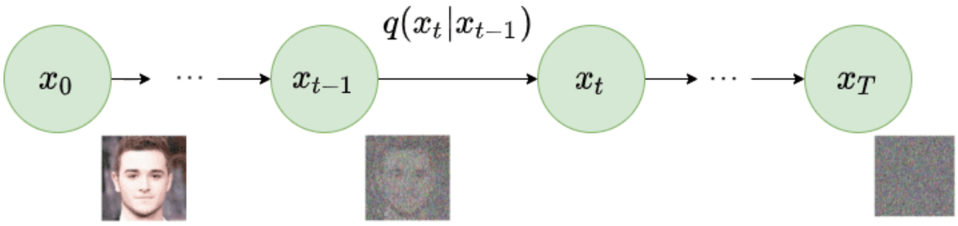

Рис. 1.1. Прямой процесс диффузии [5]

Используя трюк с репараметризаций можно получить явное выражение для семплирования на каждом шаге диффузии (ПРИЛОЖЕНИЕ 1):

$$x_t \sim q(x_t|x_0) = \mathcal{N}(x_t|\sqrt{\overline{\alpha}_t}x_0,\ (1-\overline{\alpha}_t)I), \tag{2}$$

где $\overline{\alpha_t} = \prod_{s=0}^{t}(1-\beta_t)$. Из последнего выражения нетрудно заметить, что при $T \to \infty \implies \overline{\alpha}_T \to 0$ генерируемый семпл будет иметь стандартное нормальное распределение $x_T \sim \mathcal{N}(x^T|0, I)$.

Обратный процесс

Построив обратный процесс: $q(x_{t-1}|x_t)$ будет возможно воссоздать истинную выборку по входному сигналу гауссова шума. В условиях выбора малых β_t можно гарантировать, что $q(x_{t-1}|x_t)$ также гауссово распределение. Однако, оценка $q(x_{t-1}|x_t)$ невозможна без генеральной совокупности. В статье [2] предлагается параметризовать оценку условной вероятности p_θ для запуска процесса обратной диффузии:

$$p_\theta(x_{t-1}|x_t) = \mathcal{N}(x_{t-1}|\mu_\theta(x_t, t), \Sigma_\theta(x_t, t)) \tag{3}$$

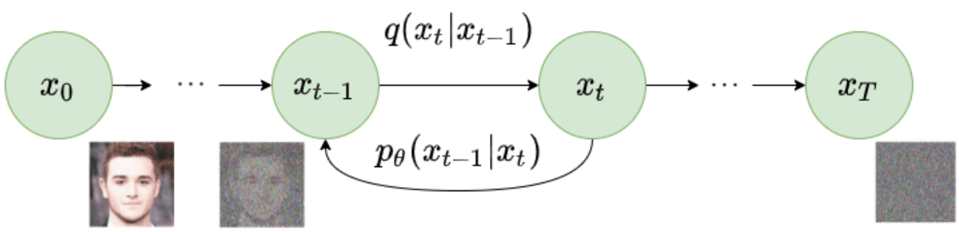

Рис. 1.2. Обратный процесс диффузии [5]

Обратная условная вероятность $q(x_{t-1}|x_t)$ контролируема, если обусловлена на x_0:

$$q(x_{t-1}|x_t, x_0) = \mathcal{N}(x_{t-1}, \tilde{\mu}(x_t, x_0), \tilde{\beta}_t I) \tag{4}$$

причем из 2 следует можно выразить:

$$\tilde{\beta}_t = \frac{1 - \overline{\alpha}_{t-1}}{1 - \overline{\alpha}_t} \cdot \beta_t,$$

$$\tilde{\mu}_t(x_t, x_0) = \ x_0 + \frac{\sqrt{\alpha_t}(1 - \overline{\alpha}_{t-1})}{1 - \overline{\alpha}_t} x_t$$

Пользуясь результатами ПРИЛОЖЕНИЕ 1. можно выразить:

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{\overline{\alpha}_t}}(x_t - \sqrt{1 - \overline{\alpha}_t \epsilon})$$

Собирая вместе два последних выражения, можем получить среднее для произвольного шага, зависящее от x_t:

$$\tilde{\mu}_t(x_t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_t}} \left(x_t - \frac{\beta_t}{\sqrt{1 - \overline{\alpha}_t}} \epsilon \right)$$

В статье [5] предлагается использовать нейронную сеть для оценки шума:

$$\tilde{\mu}_\theta(x_t, t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_t}} \left(x_t - \frac{\beta_t}{\sqrt{1 - \overline{\alpha}_t}} \epsilon_\theta(x_t, t) \right)$$

Тогда функция ошибки (подробнее в ПРИЛОЖЕНИЕ 3.) может быть выражена:

$$L_t = \mathbb{E}_{x_0, t, \epsilon} \left[\frac{1}{2||\Sigma_\theta(x_t, t)||_2^2} ||\tilde{\mu}_t - \tilde{\mu}_\theta(x_t, t)||_2^2 \right] = \ \left[\frac{1}{2||\Sigma_\theta(x_t, t)||_2^2} ||\epsilon_t - \epsilon_\theta(\sqrt{\overline{\alpha}_t} x_0 + \sqrt{1 - \overline{\alpha}_t} \epsilon, t)||^2 \right]$$

В статье [5] авторы обнаружили, что обучение модели лучше работает с упрощенным лоссом, с опущенным весовым членом

$$L_t^* = \mathbb{E}_{x_0, t, \epsilon} \left[||\epsilon_t - \epsilon_\theta(\sqrt{\overline{\alpha}_t} x_0 + \sqrt{1 - \overline{\alpha}_t} \epsilon, t)||^2 \right]$$

Но в [6] авторы показывают, что если учить оценку ковариационной матрицы, то результат будет лучше.

Algorithm 1 Training

repeat
  $\mathbf{x}_0 \sim q(\mathbf{x}_0)$
  $t \sim \mathrm{Uniform}(\{1, \dots, T\})$
  $\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$
  Take gradient descent step on
    $\nabla_\theta \left\| \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_\theta(\sqrt{\bar{\alpha}_t}\mathbf{x}_0 + \sqrt{1-\bar{\alpha}_t}\boldsymbol{\epsilon}, t) \right\|^2$
until converged

Algorithm 2 Sampling

$\mathbf{x}_T \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$
for $t = T, \dots, 1$ **do**
  $\mathbf{z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ if $t > 1$, else $\mathbf{z} = \mathbf{0}$
  $\mathbf{x}_{t-1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_t}} \left(\mathbf{x}_t - \frac{1-\alpha_t}{\sqrt{1-\bar{\alpha}_t}} \boldsymbol{\epsilon}_\theta(\mathbf{x}_t, t) \right) + \sigma_t \mathbf{z}$
end for
return $\mathbf{x}_0$

Рис. 1.3. Алгоритмы обучения и семплирования [5]

1.1.2 Обуславливаемые диффузионные модели (Conditioned diffusion models)

В статье [4] предлагается модель латентной диффузии. Авторы представляют процесс диффузии не в пространстве пикселей, а в пространстве латентных эмбеддингов, полученных с помощью автоэнкодера (VQ-VAE). Авторы обнаружили, что даже агрессивная компрессия сохраняет семантическую и концептуальную информацию 1.4. Поэтому они сначала убирают избыточность (компрессируют) с помощью автоэнкодера, а затем манипулируют/генерируют семантические понятия с помощью процесса диффузии на выученном латентном уровне. Энкодер $\mathcal{E}$ используется для компрессии входных изображений в латентные эмбеддинги: $z = \mathcal{E}(x^{H \times W \times 3}) \in \mathbb{R}^{h \times w \times c}$

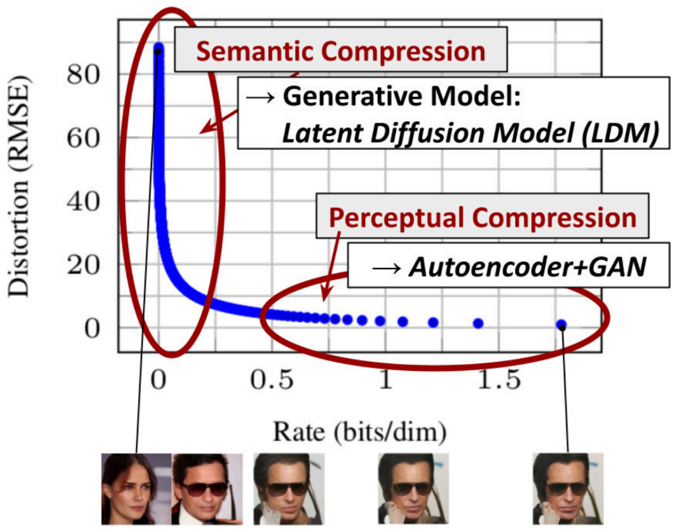

Рис. 1.4. Trade-off между сжатием и искажениями [4]

В [3] предлагается использование концептов.

1.1.3 Обучение моделей

1.1.4 Задача замены лиц (Face swap)

1.2 Особенности поставленных экспериментов

1.2.1

2 ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1 Используемые инструменты

- Python 3
- PyTorch
- TorchVision
- Matplotlib
- hugging-face
- Plotly
- transformers
- TorchIntegral
- TorchPruning
- diffusers
- wandb

2.2 Экспериментальные результаты

2.3 Выводы

2.4 Дальнейшая работа

„”

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Arjovsky M., Chintala S., Bottou L. Wasserstein GAN. — 2017. — arXiv: `1701.07875 [stat.ML]`.
2. Deep Unsupervised Learning using Nonequilibrium Thermodynamics / J. Sohl-Dickstein [et al.]. — 2015. — arXiv: `1503.03585 [cs.LG]`.
3. DreamBooth: Fine Tuning Text-to-Image Diffusion Models for Subject-Driven Generation / N. Ruiz [et al.]. — 2023. — arXiv: `2208.12242 [cs.CV]`.
4. High-Resolution Image Synthesis with Latent Diffusion Models / R. Rombach [et al.]. — 2022. — arXiv: `2112.10752 [cs.CV]`.
5. Ho J., Jain A., Abbeel P. Denoising Diffusion Probabilistic Models. — 2020. — arXiv: `2006.11239 [cs.LG]`.
6. Nichol A., Dhariwal P. Improved Denoising Diffusion Probabilistic Models. — 2021. — arXiv: `2102.09672 [cs.LG]`.
7. On Convergence and Stability of GANs / N. Kodali [et al.]. — 2017. — arXiv: `1705.07215 [cs.AI]`.
8. Spectral Normalization for Generative Adversarial Networks / T. Miyato [et al.]. — 2018. — arXiv: `1802.05957 [cs.LG]`.
9. Thanh-Tung H., Tran T. On Catastrophic Forgetting and Mode Collapse in Generative Adversarial Networks. — 2020. — arXiv: `1807.04015 [cs.LG]`.
10. Unrolled Generative Adversarial Networks / L. Metz [et al.]. — 2017. — arXiv: `1611.02163 [cs.LG]`.

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Явное выражение для семплирования на произвольном шаге диффузии

Рассмотрим выражение 1. Положим $\alpha_t = 1 - \beta_t$ и $\overline{\alpha}_t = \prod_{s=0}^{t} \alpha_s$. Рекурсивно применяя трюк с репараметризацией:

$$x_t = \sqrt{1-\beta_t} x_{t-1} + \sqrt{\beta_t} \epsilon_{t-1} = \sqrt{\alpha_t \alpha_{t-1}} x_{t-2} + \sqrt{1 - \alpha_t \alpha_{t-1}} \epsilon_{t-2} = \ldots$$
$$\ldots = \sqrt{\overline{\alpha}_t} x_0 + \sqrt{1 - \overline{\alpha}_t} \epsilon_0,$$

где $\epsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \ldots \sim \mathcal{N}(0, I)$, $\overline{\epsilon}_{t-2}$ смесь нормальных распределений

$$\overline{\epsilon}_{t-2} \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{(1-\alpha_t) + \alpha_t(1-\alpha_{t-1})} I) = \mathcal{N}(0, \sqrt{1 - \alpha_t \alpha_{t-1}})$$

Обычно по мере зашумления используется больший шаг зашумлений, т.е.:

$$\beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_T,$$
$$\overline{\alpha_1} > \overline{\alpha_2} > \ldots > \overline{\alpha_T}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Динамика Ланжевена как стохастическая реализация уравнения Фоккера-Планка

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) в общем виде:

$$dx = f(x,t)dt + g(t)dW,$$

где W – Винеровский процесс.

Теорема 0.1. Эволюция распределения $p(x|t)$ по времени t детерменированно описывается дифференциальным уравнением Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial p(x|t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(x,t\right)p(x|t)\right) + \frac{1}{2}g^2(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(p(x|t)\right)$$

Proof. Докажем отдельно для детерминированной и стохастической частей.
Детерменированная часть $(g(t) = 0)$. Пусть $\hat{x} = x + f(x,t)dt$. Тогда:

$$p(\hat{x}|t+dt) = p(\hat{x} - f(x,t)dt|t)\left|\frac{\partial}{\partial x}(x + f(x,t)dt)\right|^{-1}.$$

Разложем в ряд Тейлора в точке $\hat{x}$ функцию $f(x,t)$:

$$f(x,t) = f(\hat{x},t) + \frac{\partial f(\hat{x},t)}{\partial x}f(x,t)dt + o(dt).$$

Для упрощения выкладок рассмотрим одномерный случай.

$$p(\hat{x}|t+dt) = p\left(\hat{x} - f(\hat{x},t)dt - \underbrace{\frac{\partial f(\hat{x},t)}{\partial x}f(x,t)dt^2}_{\text{т.к. } dt\to 0, \text{ то } o(dt)} + o(dt)\right)\left(1 + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt\right)^{-1} =$$

$$= p(\hat{x} - f(\hat{x},t)dt + o(dt)|t)\cdot\left(1 + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)^{-1} =$$

$$= p(\hat{x} - f(\hat{x},t)dt + o(dt)|t)\cdot\left(1 - \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt + o(dt)\right) =$$

$$= \left[p(\hat{x}|t) - \frac{\partial p(\hat{x}|t)}{\partial x}\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}f(\hat{x},t)dt^2 - \frac{\partial p(\hat{x}|t)}{\partial x}f(\hat{x},t)dt - p(\hat{x}|t)\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}dt + o(t)\right] =$$

$$= p(\hat{x}|t) - \frac{\partial p(\hat{x}|t)}{\partial x}f(\hat{x},t)dt - \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}p(\hat{x}|t)dt + o(t) =$$

$$p(\hat{x}|t) - dt\left(\frac{\partial p(\hat{x},t)}{\partial x}f(\hat{x},t) + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}p(\hat{x}|t)\right) + o(dt) =$$

$$= p(\hat{x}|t) - dt\left(\frac{\partial p(\hat{x}|t)}{\partial x}f(\hat{x},t) + \frac{\partial f(\hat{x},t)}{\partial x}p(\hat{x},t)\right) + o(dt)$$

Перенесем налево $p(\hat{x}|t)$, разделим обе части на dt и рассмотрим $\lim\limits_{dt\to 0}$:

$$\underline{\frac{\partial p(\hat{x}|t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(f(\hat{x},t)p(\hat{x}\ t)\right).}$$

Рассмотрим теперь стохастическую часть. Пусть $\hat{x} = x + \epsilon$, где $\epsilon \sim \mathcal{N}(\epsilon|0, g^2(t)dt)$:

$$p(\hat{x}|t+dt) = \int p(\hat{x}-\epsilon|t)\mathcal{N}(\epsilon|0, g^2(t)dt)d\epsilon =$$

$$\int \left(p(\hat{x},t) - \epsilon\frac{\partial p(\hat{x}|t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\epsilon^2\frac{\partial^2 p(\hat{x}|t)}{\partial x^2} + o(\epsilon^2)\right)\cdot \mathcal{N}(\epsilon|0, g^2(t)dt)d\epsilon =$$

$$p(\hat{x}|t)\underbrace{\int \mathcal{N}(\epsilon|0, g^2(t)dt)d\epsilon}_{1} - \frac{\partial p(\hat{x}|t)}{\partial x}\underbrace{\epsilon\mathcal{N}(\epsilon|0, g^2(t)dt)d\epsilon}_{\mu=0} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(\hat{x}|t)}{\partial x^2}\underbrace{\int \epsilon^2\mathcal{N}(\epsilon|0, g^2(t)dt)d\epsilon}_{\sigma=g^2(t)dt} + \int\underbrace{\epsilon^2\cdot o(1)\cdot\mathcal{N}(\epsilon|0, g^2(t)dt)d\epsilon}_{o(1)\cdot g^2(t)dt=o(dt)} =$$

Упростив последнее выражение, получим:

$$= p(\hat{x}|t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(\hat{x}|t)}{\partial x^2}g^2(t)dt + o(dt).$$

Перенесем первое слагаемое налево и поделим обе части на dt:

$$\frac{p(\hat{x}|t+dt) - p(\hat{x}|t)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(\hat{x}|t)}{\partial x^2}g^2(t) + o(1)$$

При $\lim\limits_{dt\to 0}$:

$$\frac{\partial p(\hat{x}|t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p(\hat{x}|t)}{\partial x^2}g^2(t)$$

По принципу суперпозиции, получаем доказываемое выражение:

$$\frac{\partial p(x|t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(x,t\right)p(x|t)\right) + \frac{1}{2}g^2(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(p(x|t)\right)$$

□

Рассмотрим теперь стохастическое дифференциальное уравнение с $g(t) = 1,\ f(x,t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x}\log p(x|t)$. Запишем эволюцию распределения для этого СДУ:

$$\frac{\partial p(x|t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log p(x|t)p(x|t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x|t) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{p(x|t)}\frac{\partial}{\partial x}p(x|t)p(x|t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(x|t) = 0.$$

Таким образом, мы показали, что динамика Ланжевена как стохастическая реализация уравнения Фоккера-Планка сохраняет распределение.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Вывод ELBO

Используя правило Байеса для 4, получим:

$$q(x_{t-1}|x_t,x_0)=q(x_t|x_{t-1},x_0)\frac{q(x_{t-1}|x_0)}{q(x_t|x_0)}=$$
$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_t-\sqrt{\alpha_t}x_{t-1})^2}{\beta_t}+\frac{(x_{t-1}-\sqrt{\bar{\alpha}_{t-1}}x_0)^2}{1-\bar{\alpha}_{t-1}}-\frac{(x_t-\sqrt{\bar{\alpha}_t}x_0)^2}{1-\bar{\alpha}_t}\right)\right)=$$
$$=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_t^2-2\sqrt{\alpha_t}x_tx_{t-1}+\alpha_tx_{t-1}^2}{\beta_t}+\frac{x_{t-1}^2-2\sqrt{\bar{\alpha}_{t-1}}x_0x_{t-1}+\bar{\alpha}_{t-1}x_0^2}{1-\bar{\alpha}_{t-1}}-\frac{(x_t-\sqrt{\bar{\alpha}_t}x_0)^2}{1-\bar{\alpha}_t}\right)\right)=$$
$$=\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_t}{\beta_t}+\frac{1}{1-\bar{\alpha}_{t-1}})x_{t-1}^2-(\frac{2\sqrt{\alpha_t}}{\beta_t}x_t+\frac{2\sqrt{\bar{\alpha}_{t-1}}}{1-\bar{\alpha}_{t-1}}x_0)x_{t-1}+C(x_t,x_0)\right)\right)$$

Среднее значение и дисперсия могут быть параметризованы следующим образом

$$\tilde{\beta}_t=1/\left(\frac{\alpha_t}{\beta_t}+\frac{1}{1-\bar{\alpha}_{t-1}}\right)=\frac{1}{\left(\frac{\alpha_t-\bar{\alpha}_t+\beta_t}{\beta_t(1-\bar{\alpha}_{t-1})}\right)}=\frac{1-\bar{\alpha}_{t-1}}{1-\bar{\alpha}_t}\cdot\beta_t$$

$$\tilde{\tilde{\mu}}_t(x_t,x_0)=\frac{\left(\frac{\sqrt{\alpha_t}}{\beta_t}x_t+\frac{\sqrt{\bar{\alpha}_{t-1}}}{1-\bar{\alpha}_{t-1}}x_0\right)}{\left(\frac{\alpha_t}{\beta_t}+\frac{1}{1-\bar{\alpha}_{t-1}}\right)}=\left(\frac{\sqrt{\alpha_t}}{\beta_t}x_t+\frac{\sqrt{\bar{\alpha}_{t-1}}}{1-\bar{\alpha}_{t-1}}x_0\right)\frac{1-\bar{\alpha}_{t-1}}{1-\bar{\alpha}_t}\cdot\beta_t=$$
$$=\frac{\sqrt{\alpha_t}(1-\bar{\alpha}_{t-1})}{1-\bar{\alpha}_t}x_t+\frac{\sqrt{\bar{\alpha}_{t-1}}\beta_t}{1-\bar{\alpha}_t}x_0$$

Подставим в это выражение $x_0=\frac{1}{\sqrt{\bar{\alpha}_t}}(x_t-\sqrt{1-\bar{\alpha}_t\epsilon_t})$:

$$\tilde{\mu}_t=\frac{\sqrt{\alpha_t}(1-\bar{\alpha}_{t-1})}{1-\bar{\alpha}_t}x_t+\frac{\sqrt{\bar{\alpha}_{t-1}}\beta_t}{1-\bar{\alpha}_t}\frac{1}{\sqrt{\bar{\alpha}_t}}(x_t-\sqrt{1-\bar{\alpha}_t\epsilon_t})=\frac{1}{\sqrt{\alpha_t}}\left(x_t-\frac{1-\alpha_t}{\sqrt{1-\bar{\alpha}_t}}\epsilon_t\right)$$

Запишем наконец нижнюю вариационную границу (ELBO):

$$\begin{aligned}
-\log p_\theta(x_0) &\le -\log p_\theta(x_0) + D_{\text{KL}}(q(x_{1:T}|x_0)\|p_\theta(x_{1:T}|x_0)) \\
&= -\log p_\theta(x_0) + \mathbb{E}_{x_{1:T}\sim q(x_{1:T}|x_0)}\Big[\log \frac{q(x_{1:T}|x_0)}{p_\theta(x_{0:T})/p_\theta(x_0)}\Big] \\
&= -\log p_\theta(x_0) + \mathbb{E}_q\Big[\log \frac{q(x_{1:T}|x_0)}{p_\theta(x_{0:T})} + \log p_\theta(x_0)\Big] \\
&= \mathbb{E}_q\Big[\log \frac{q(x_{1:T}|x_0)}{p_\theta(x_{0:T})}\Big] \\
\text{Let } L_{\text{VLB}} &= \mathbb{E}_{q(x_{0:T})}\Big[\log \frac{q(x_{1:T}|x_0)}{p_\theta(x_{0:T})}\Big] \ge -\mathbb{E}_{q(x_0)}\log p_\theta(x_0)
\end{aligned}$$

Финалочка: переписываем этот весь треш в комбинацию нескольких KL-дивергенций и энтропии

$$\begin{aligned}
L_{\text{VLB}} =& \mathbb{E}_{q(x_{0:T})}\Big[\log \frac{q(x_{1:T}|x_0)}{p_\theta(x_{0:T})}\Big] = \mathbb{E}_q\Big[\log \frac{\prod_{t=1}^T q(x_t|x_{t-1})}{p_\theta(x_T)\prod_{t=1}^T p_\theta(x_{t-1}|x_t)}\Big] = \\
&= \mathbb{E}_q\Big[-\log p_\theta(x_T) + \sum_{t=1}^T \log \frac{q(x_t|x_{t-1})}{p_\theta(x_{t-1}|x_t)}\Big] = \\
&= \mathbb{E}_q\Big[-\log p_\theta(x_T) + \sum_{t=2}^T \log \frac{q(x_t|x_{t-1})}{p_\theta(x_{t-1}|x_t)} + \log \frac{q(x_1|x_0)}{p_\theta(x_0|x_1)}\Big] = \\
&= \mathbb{E}_q\Big[-\log p_\theta(x_T) + \sum_{t=2}^T \log \Big(\frac{q(x_{t-1}|x_t,x_0)}{p_\theta(x_{t-1}|x_t)}\cdot\frac{q(x_t|x_0)}{q(x_{t-1}|x_0)}\Big) + \log \frac{q(x_1|x_0)}{p_\theta(x_0|x_1)}\Big] = \\
&= \mathbb{E}_q\Big[-\log p_\theta(x_T) + \sum_{t=2}^T \log \frac{q(x_{t-1}|x_t,x_0)}{p_\theta(x_{t-1}|x_t)} + \sum_{t=2}^T \log \frac{q(x_t|x_0)}{q(x_{t-1}|x_0)} + \log \frac{q(x_1|x_0)}{p_\theta(x_0|x_1)}\Big] = \\
&= \mathbb{E}_q\Big[-\log p_\theta(x_T) + \sum_{t=2}^T \log \frac{q(x_{t-1}|x_t,x_0)}{p_\theta(x_{t-1}|x_t)} + \log \frac{q(x_T|x_0)}{q(x_1|x_0)} + \log \frac{q(x_1|x_0)}{p_\theta(x_0|x_1)}\Big] = \\
&= \mathbb{E}_q\Big[\log \frac{q(x_T|x_0)}{p_\theta(x_T)} + \sum_{t=2}^T \log \frac{q(x_{t-1}|x_t,x_0)}{p_\theta(x_{t-1}|x_t)} - \log p_\theta(x_0|x_1)\Big] = \\
&= \mathbb{E}_q[\underbrace{D_{\text{KL}}(q(x_T|x_0)\parallel p_\theta(x_T))}_{L_T} + \sum_{t=2}^T \underbrace{D_{\text{KL}}(q(x_{t-1}|x_t,x_0)\parallel p_\theta(x_{t-1}|x_t))}_{L_{t-1}} \underbrace{-\log p_\theta(x_0|x_1)}_{L_0}]
\end{aligned}$$