1. Basic concepts and tasks of statistics. Types and sources of statistical data

Основные определения:

- Генеральная совокупность – сведения о всех анализируемых объектах;
- Выборка – множество результатов, отобранных из генеральной совокупности (репрезентативность);
- Объем совокупности – число единиц, образующих совокупность;
- Неопределенность и вариация (основные характеристики статистики) – при многократных измерениях происходят изменения;
- Признак – характеристика единицы совокупности;
- Показатель (индикатор) – количественная характеристика явления;
- Параметр – относительно постоянная величина, характеризующая генеральную совокупность;
- Выборочная характеристика (статистика) – эмпирический аналог параметра;
- Статистические выводы – заключения, формируемые анализом эмпирических данных.

Виды и источники статистических данных

Статистические данные разделяются на:

- Пространственные: сведения об объектах наблюдения с различным порядком;
- Временные: хронологический порядок (моментные – сумма только сумма значений и интервальные – суммирование дает общую характеристику и может быть проинтерпретирована);
- Пространственно-временные: набор объектов в хронологическом порядке со сведениями об объектах.

Статистические данные могут быть одномерными и многомерными, количественные и категориальные, первичные (регистрируемые для одного конкретного объекта) и агрегированные (объект – совокупность других объектов).

Шкалы измерения данных: качественные данные – номинальная (профессия, пол, город), порядковая (место в рейтинге), количественные (непрерывные и дискретные) – интервальная (температура воздуха), относительная (количество наличных денег, времени, объектов).

Источники статистических данных: непосредственные измерения, мнения экспертов, документированные значения.

- Статистическое наблюдение – планомерный и систематический сбор данных об исследуемых явлениях и процессах, бывает сплошным (на генеральной совокупности) и несплошным (на выборке).

Задачи статистики

В узком смысле: сжатие информации и наглядное представление результатов.

В широком смысле: обобщение результатов выборочного исследования на генеральную совокупность.

Первичная обработка: пример данных качественного характера

- таблица частот;
- столбиковая диаграмма;
- круговая диаграмма.

Первичная обработка: количественного характера.

- гистограмма

Этапы статистического моделирования:

Определение цели и задач моделирования

1. Формализация – преобразование объектов и отношений в математическую абстрактную модель;
2. Сбор и квантификация данных – предусматривает отражение данных в шкалах, их предварительная обработка – избавление от ошибок;
3. Спецификация модели – представление в виде формул;
4. Идентификация модели и ее анализ – оценка параметров модели, ее характеристик;
5. Верификация модели.

Выборочные статистики

Выборочная статистика – эмпирический аналог параметра. Выборочная характеристика является функцией от результатов наблюдений $\theta^* = \theta^*(x_1, \ldots, x_n)$

Порядковые статистики

- Медиана – величина, разделяющая упорядоченный набор на 2 равные части – 50% всех наблюдений находятся ниже медианы, 50% выше.
- Первый квартиль – величина, разделяющая упорядоченную выборку, 25% всех наблюдений лежит ниже первого квартиля, 75%, соответственно, выше.
- Аналогично можно определить второй квартиль, причем, становится ясно, что понятия первого квартиля и медианы совпадают;
- Третий квартиль итеративно можно определить как разделяющую величину, ниже которой лежат 75% наблюдений, оставшиеся 25% выше.
- Первый дециль: 10% наблюдений лежат ниже, 90% выше.
- Интерквартильный размах IQR – разность между третьим и первым квартилями (служит мерой разброса)

Моментные характеристики положения и разброса

- Среднее значение – сумма значений признака, деленная на число его значений. (характеристика положения);
- Дисперсия – среднее значения квадрата отклонения результатов наблюдений от среднего значения (разброс);
- Среднее квадратическое отклонение – положительный квадратный корень из дисперсии.

Важные статистики

- Выборочной характеристикой называется функция от результатов наблюдений: Можем определить выборочное среднее значение двумя способами:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{среднее арифметическое}$$

$$\overline{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \quad \text{среднее геометрическое}$$

Так же можно определить выборочные дисперсию и среднеквадратичное отклонение:

$$\mathrm{var}(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \qquad \text{выборочная дисперсия}$$
$$S = \sqrt{\mathrm{var}(x_i)} \qquad \text{выборочное среднеквадратичное отклонение}$$

Выборочные начальные и центральные моменты:

$$\nu_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$
$$\mu_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^k$$

Коэффициенты асимметрии и эксцесса:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^*}{S^3}$$
$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{S^4} - 3$$

Характеристики равномерности распределения количественного признака

- Кривая Лоренца;
- Коэффициент Джини:

$$G = 1 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_{i\,\text{нак}} + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

2. Some basic information from probability theory to construct the statistical models.

Понятие вероятности

Definition

Вероятность P – численная мера объективной возможности наступления события. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – состоит из пространства элементарных исходов Ω, сигма-алгебры на этом пространстве $\mathcal{F}$ и самой вероятности P, формально, сигма-аддитивной меры.

Note

Требования к вероятности:

$$P(\Omega) = 1,$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Definition

События A и B несовместны, если $AB = \varnothing$

Definition

События образуют полную группу событий, если их сумма является достоверным событием.

Definition

Полная группа попарно несовместных событий определяется как произведение $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$ является достоверным событием, то есть $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = 1$.

Другое определение вероятности:

Definition

Вероятность наступления события A можно представить как предел относительной частоты при большом количестве испытаний:

$$P(A) \approx \frac{m}{n}.$$

Вероятность наступления сложных событий

Theorem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Corollary:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Theorem: Inclusion-Exclusion

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right)$$

Note

Частный случай для несовместных событий A и B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Аналогично для суммы попарно несовместных событий $\sum_{i=1}^{n} A_i$:

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Theorem

Произведение зависимых событий

$$P(AB) = P(A)P(A|B) = P(B)P(B|A),$$

где $P(A|B)$ – условная вероятность события A.

Note

События A и B независимы, если

$$P(A|B) = A$$

Вероятность произведения попарно независимых событий:

$$P(A_1 \ldots A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Definition

При известных априорных вероятностях $P(A_i)$, условная вероятность $P(B|A_i)$, определяется следующим образом:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)},$$

где A_i – событие, априорное событию B.

Theorem

Формула полной вероятности:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

Theorem: Bayes

При известных априорных вероятностях $P(A)$ и $P(B)$ и условной вероятности $P(B|A)$, вероятность $P(A|B)$ может быть определена:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Схема Бернулли

Рассмотрим событие B_m, состоящее в том, что событие A в n повторных независимых испытаниях наступит ровно m раз. Вероятность такого события определяется следующим образом:

$$P_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m},$$

где p – вероятность наступления события A в каждом испытании.

Аппроксимации в случае большого количества испытаний:

- Случай редких событий (событий, вероятность которых стремится к нулю). При этом интенсивность событий постоянна: $\lambda = np$. В данном случае можно воспользоваться теоремой Пуассона:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$$

- Когда вероятность наступления события примерно равна 0.5, можно воспользоваться локальной теоремой Лапласа:

$$\lim_{n\to\infty} P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}}e^{-\frac{\frac{1}{2}(m-np)^2}{npq}}$$

Random variables

Definition: (Random variables)

Given an experiment with simple space S, a random variable is a function X of a kind $X: \ S \to \mathbb{R}$.

Пример: Число очков на игральной кости; оценка, полученная на экзамене; время ожидания автобуса на остановке.

Example: (Coin tosses) We toss a fair coin twice. The sample space is $S = \{HH, HT, TH, TT\}$. Here are some r.v.-s on this space:

- X = # of Heads:

$$X(HH) = 2, \ X(HT) = X(TH) = 1, X(TT) = 0$$

- Y = # of Tails: $Y = 2 - X$
- $I = \begin{cases} 1, & \text{if 1-st toss = Heads,} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ – indicator random variable.

Distributions and probability mass functions

There are two main types of r.v.-s.: discrete and continuous.

Definition: (Discrete random variable)

A random variable X is said to be discrete if there is a finite list of values $a_1, a_2, \dots, a_n$ or an infinite set $a_1, a_2, \dots$ s.t. $(\exists j)\ P(X = a_j) = 1$. If X is a discrete r.v., then this finite or countably infinite set of values it takes and such that $P(X = x) > 0$ is called the support of X.

Note

Continuous r.v.-s can take any real value in an interval.

The distribution of an r.v. specifies the probabilities of all events associated with the r.v. For a discrete case the most natural way to do this is:

Definition: (Probability mass function)

The probability mass function (PMF) of a discrete r.v. X is the function p_X given by $p_X(x) = P(X = x)$. It is non-zero positive if $x \in$ (support X) and 0 otherwise.

Note

In writing $P(X = x)$, $X = x$ denotes an event. (Sometimes also written as $\{X = x\}$ – formally, $\{s \in S : X(s) \in x\}$).

Example: (Two coin tosses). $X = \#$ of Heads, $Y = \#$ of Tails, $I = \begin{cases} 1, & \text{if 1-st toss = Heads,} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ – indicator variable.

$$p_X(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad p_X(1) = \frac{1}{2}, \quad p_X(2) = \frac{1}{4},$$

$$Y = 2 - X, \text{ so same PMF.} \quad p_I(0) = \frac{1}{2},\ p_I(1) = \frac{1}{2}.$$

Example: (sum of die rolls). Roll two fair 6-sided dice. Let $T = X + Y$, where X, Y are individual rolls. The sample space is $S = \{(1,1), (1,2), \dots, (6,5), (6,6)\}$:

$$p_T(2) = p_T(12) = \frac{1}{36},\ p_T(3) = p_T(11) = \frac{2}{36}, \dots,\ p_T(7) = \frac{6}{36}.$$

Theorem: (Valid PMFs)

Let X be a discrete random variable with support $x_1, x_2, \dots$. The PMF p_X of X must satisfy:

- Nonnegative: $p_X(x) > 0$ if $x = x_j$ for some j, $p_X(x) = 0$ otherwise;
- Sums to 1: $\sum_{j=1}^{\infty} p_X(x_j) = 1$.

Bernoulli and Binomial

Definition: (Bernoulli distribution)

A random variable X is said to have Bernoulli distribution with parameter p if $P(X = 1) = p$ and $P(X = 0) = 1-p$, where $0 < p < 1$. We write $X \sim$ Bern(p)(X is Bernoulli-distributed). It is a family of distributions indexed by p.

Definition: (Indicator random variable)

Indicator r.v. of an event A = r.v. that equals 1 if A occurs and 0 otherwise. It denoted by I_A or $I(A)$.

Note

$$I_A \sim \text{Bern}(p) \text{ with } p = P(A).$$

An experiment that can result in a "success" or "failure" (but not both) is called a Bernoulli trial. A Bernoulli r.v. thus = indicator r.v. of success in Bernoulli trial.

Suppose n independent Bernoulli trials are run, each with $P(\text{success}) = p$. Let X = the number of successes. $X \sim$ Bin(n, p) – the Binomial distribution with parameters $n = 1, 2, \ldots$ and $0 < p < 1$.

Note

Bern(p) is the same as Bin$(1, p)$

Theorem: (Binomial PMF)

If $X \sim$ Bin(n, p), then the PMF of X:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{for } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Theorem

Let $X \sim$ Bin(n, p) and $q = 1-p$ (we often use q as a failure probability in Bernoulli trial). Then $n-X \sim$ Bin(n, q) (based on the binomials symmetry property).

<u>Corollary:</u> Let $X \sim$ Bin(n, p) with $p = \frac{1}{2}$ and even n. Then the distribution of X is symmetric about $\frac{n}{2}$ – that is:

$$P(X = \frac{n}{2} + j) = P(X = \frac{n}{2} - j)$$

Hypergeometric

<u>Preface</u>: Urn with w white and b black balls, drawing n balls with replacement yields Bin$(n, \frac{w}{w+b})$, for X — # of white balls in n trials. If we instead sample without replacement, then X follows a Hypergeometric distribution: $X \sim$ HGeom(w, b, n). In Bernoulli trials are independent, in Hypergeometric trials are dependent (cause of without replacement nature).

Theorem: (Hypergeometric PMF)

If $X \sim$ HGeom(w, b, n), then

$$P(X = k) = \frac{\binom{w}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{w+b}{n}}$$

Example: (Aces in a poker hand). In a 5-card hand from a we shuffled deck, the # of aces $\sim$ HGeom$(4, 48, 5)$. Then

$$P(3 \text{ aces}) = \frac{\binom{4}{3}\binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} \approx 0.0017.$$

Theorem

HGeom(w, b, n) and HGeom$(n, w + b - n, w)$ are identical.

Discrete uniform

<u>Preface</u>: let C be a finite nonempty set of numbers. Choose one of these uniformly at random (i.e. all values are equally likely). Call the chosen number X. Then X is said to have the Discrete Uniform distribution with parameter C, which one can be denoted as $X \sim$ DUnif(C).

Note

The PMF is $P(X = x) = \frac{1}{|C|}$ for $x \in C$ (and 0 otherwise). For any subset $A \subset C,\ P(X \in A) = \frac{|A|}{|C|}$.

Числовые статистики для дискретных и непрерывных случайных величин

Начальные и центральные моменты для дискретных случайных величин:

$$\nu_k^* = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$$
$$\mu_k^* = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^k\, p_i.$$

Для непрерывной случайной величины:

$$\nu_k^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$
$$\mu_k^* = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^k\, f(x) dx.$$

Математическое ожидание – начальный момент первого порядка:

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i;$$
$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

Theorem: (Properties of expectation)

$$\mathbb{E}[\text{const}] = \text{const};$$
$$\mathbb{E}[\text{const}\, X] = \text{const}\, X;$$
$$\mathbb{E}[X_1 + \dots X_n] = \mathbb{E}X_1 + \dots \mathbb{E}X_n;$$
$$(\text{independent: })\mathbb{E}[X_1 \cdot \dots \cdot X_n] = \mathbb{E}X_1 \cdot \dots \cdot \mathbb{E}X_n;$$
$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i+1}^{n} X_i\right] = \mathbb{E}X_i$$

Дисперсия – центральный момент 2-го порядка:

$$\text{var}\, X = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 p_i$$
$$\text{var}\, X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 f(x)\, dx$$

Theorem: (Properties of the variance)

$$\text{var}\, X = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}X^2$$
$$\text{var}[\text{const}] = 0$$
$$\text{var}[\text{const}\, X] = \text{const}^2\, \text{var}\, X$$
$$(\text{independent: })\ \text{var}[X_1 + \dots + X_n] = \text{var}\, X_1 + \dots \text{var}\, X_n;$$
$$\text{var}[X \pm C] = \text{var}\, X$$
$$\text{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i+1}^{n} X_i\right] = \frac{\text{var}\, X_i}{n}$$

Взаимосвязи начальных и центральных моментов:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^2$$

Предельные теоремы

Theorem: (Bernoulli theorem)

Если вероятность появления события A в одном испытании равна p, число наступлений события при n независимых испытаниях m, то $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - P(A)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Note

Для оценки вероятности по теореме Бернулли используется формула:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - P(A)\right| < \varepsilon\right) \geqslant \frac{\operatorname{var} X}{n\varepsilon^2}.$$

Theorem

Пусть событие A может произойти в любом из n независимых испытаний с одной и той же вероятностью p и $\nu_n(A)$ – число осуществлений события A в n испытаниях. Тогда

$$\frac{\nu_n(A) - np}{\sqrt{np(1-p)}} \to N(0;1)$$

Theorem: (Центральная предельная теорема)

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные математические ожидания μ и дисперсии σ^2. Тогда

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu n}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0,1)$$

Другие предельные теоремы:

- Лемма Маркова

$$P(X \geqslant \tau) \leqslant \frac{M(X)}{\tau},\ \tau > 0.$$

- Неравенство Чебышева

$$P\{|X - E(X)|| \leqslant \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{\operatorname{var} X}{\varepsilon^2}$$

- Теорема Чебышева

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

3. Оценивание параметров в практике статистического анализа

В статистике наблюдения $x = (x_1, \ldots, x_n)$ рассматриваются как реализация случайного вектора $X_n = (X_1, \ldots, X_n)$, который имеет определенный закон распреления. Задача статистического оценивания заключается в оценке характеристик неизвестного распределения случайного вектора X_n, используя его реализацию x.

Definition: (Оценка)

Оценка $\hat{\theta}$ параметра θ – некоторая функция от наблюдений, принимающая значение параметра, которое на практике используют вместо неизвестного значения параметра θ.

Существует два подхода к статистическому оцениванию параметров:

1) θ – неслучайная величина, неизвестная;

2) θ – случайная величин с известной плотностью распределения $f(\theta)$ (Байесовский подход)

Theorem

Байесовский критерий минимального среднего риска оценивания:

$$\bar{r} = \int\limits_{\theta}\int\limits_{\hat{\theta}} r\left(\theta;\hat{\theta}\right) f(\theta;x)\,dx\,d\theta$$
$$f(\theta;x) = f(\theta)f(x|\theta)$$

$$\bar{r} = \int\limits_{\theta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r\left(\theta;\hat{\theta}\right) f(\theta)f(x|\theta)\,dx\,d\theta,$$

где

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} r\left(\theta;\hat{\theta}\right) f(\theta)f(x|\theta)\,dx \to \min$$

условный средний риск.

Два вида представления оценок:

- Точечный $\hat{\theta}$
- Интервальный $P\left(\theta_{\min} \leqslant \theta \leqslant \theta_{\max}\right) = r$

Точечное оценивание параметров

Note

Свойства оценок:

- Несмещенность оценки – математическое ожидание оценки совпадает с оцениваемым параметром:

$$\mathbb{E}\hat{\theta} = \theta.$$

- Состоятельность – при увеличении числа наблюдений оценка сходится по вероятности к оцениваемому параметру;

- Эффективность – несмещенная ценка, дисперсия которой является минимальной по сравнению с другими оценками

Метод моментов: выборочные моменты используются в качестве оценок моментов генеральной совокупности.

Рассмотрим непрерывную случайную величину X, которая в результате n испытаний принимает значения $x_1, \ldots, x_n$. Нам известен вид функции плотноти $f(x;\theta)$ с неизвестным параметром θ. Для нахождения оценок ставят оптимизационную задачу максимизации функции правдоподобия вида:

$$L(x_1, \ldots, x_n;\ \theta) = f(x_1;\theta)\ldots f(x_n;\theta)$$

Для работы с производными рассматривают логарифм функции правдоподобия.

Пример: Exponential distribution:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0 \\ 0, x \leqslant 0 \end{cases}$$

Likelihood:

$$L(x;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x}$$

Log-likelihood:

$$\ln L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

The result of partial derivation:

$$\frac{d \ln L}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

Now we can obtain estimated value:

$$\lambda^* = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}.$$

Примеры точечных оценок наиболее важных характеристик

- Оценка математического ожидани – выборочное среднее:

$$\mathbb{E}X \approx \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- Оценка генеральной дисперсии – выборочная дисперсия:

$$\text{var}\, X \approx S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 .$$

- Несмещенная оценка дисперсии:

$$\text{var}\, X \approx S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 .$$

- Выборочная оценка генеральной доли:

$$p = \frac{m}{n}.$$

Для обеспечения робастности используется метод максимального квази-правдоподобия

Интервальное оценивание параметров

Пусть имеется выборка $x = (x_1, \ldots, x_n)$ из генеральной совокупности $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Целью является построения доверительного интервала $(\theta_{\text{min}}; \theta_{max})$, такого что:

$$P\left(\theta_{\text{min}} < \theta_{\text{max}}\right) = \gamma,$$

где γ – надежность.

Этапы построения интервальных оценок:

- Выбор γ;
- $\zeta = \mu(\theta)$, причем подразумевается,что $P(\zeta)$ известно;
- Построение доверительного интервала для статистики:

$$P\left(\zeta_{\text{min}} < \zeta < \zeta_{\text{max}}\right) = \gamma.$$

- Построение доверительного интервала для оценки:

$$P\left(\theta_{\text{min}} < \theta < \theta_{\text{max}}\right) = \gamma.$$

Пример: (для построения доверительного интервала для среднего) Пусть имеется выборка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, кроме того $x_i \sim N(a, \sigma^2)$ i.i.d и σ^2 известно.

- Выберем $\overline{X}$ в качестве статистики.

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = a \qquad \text{var}\, \overline{X} = \frac{1}{n}\sigma^2$$

$\overline{X} \sim N\left(a, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$:

$$\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$P\left(-t_\gamma < \frac{\overline{X} - a}{\sigma} - \sqrt{n} < t_\gamma\right) = \gamma$$

$$P\left(\overline{X} - t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

4. Статистическая проверка гипотез и ее приложения