

Домашнее задание 1

Рябыкин Алексей

29 сентября 2022 г.

Задание 1. Определить закон распределения случайной величины, являющейся частотой выпадения орла при трех подбрасываниях монеты. Найти математическое ожидание, дисперсию, моду, медиану, квантили 0.1, 0.25, 0.9, коэффициенты ассиметрии и эксцесса.

Решение: Запишем закон распределения:

Событие X	орел не выпал	орел выпал 1 раз	орел выпал 2 раза	орел выпал 3 раза
x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Найдем математическое ожидание случайной величины:

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=0}^3 x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

Найдем дисперсию дискретной случайной величины:

$$\text{var } X = \mathbb{E}[X^2] - [\mathbb{E}X]^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Мода: $x_i = 1$ или $x_i = 2$.

Медиана: запишем кумулятивную функцию распределения

$P(X \leq x_i)$	0.125	0.5	0.625	1
-----------------	-------	-----	-------	---

Медиану можно определить как среднеарифметическое наибольшего значения f_1 , при котором выполняется $P(X \leq f_1) \leq 0.5$ и наименьшего f_2 , для которого $P(X \leq f_2) \geq 0.5$. $f_1 = 1$ и $f_2 = 2$. Тогда медиана:

$$Me = \frac{f_1 + f_2}{2} = 1.5$$

Квантиль 0.1: q -квантиль в дискретном случае можно определить как любое число $u_q(F)$, лежащее между двумя возможными соседними значениями $x_{i(q)}$ и $x_{i(q)+1}$, такое, что

$$F(x_{i(q)}) < q \text{ и } F(x_{i(q)+1}) \geq q.$$

Тогда квантиль 0.1 – любое число из диапазона $(-\infty, 0)$.

Квантиль 0.25: $(0, 1)$

Квантиль 0.9: $(2, 3)$

Коэффициент ассиметрии: вычисляется по формуле

$$\beta_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

где μ_3 – центральный момент третьего порядка, равный

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1v_2 + 2v_1^3,$$

где $v_i = \mathbb{E}[X^i]$ – начальный момент i -го порядка, и σ – средне-квадратичное отклонение. Найдем начальные и центральные моменты:

$$v_1 = \frac{3}{2}, v_2 = 3, v_3 = \frac{54}{8}, v_4 = \frac{132}{8}$$

$$\mu_3 = \frac{54}{8} - 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 + 2 \cdot \frac{27}{8} = 0 \Rightarrow \beta_1 = 0.$$

$$\mu_4 = \frac{21}{16}$$

Коэффициент эксцесса:

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \approx -0.67$$

■

Задание 2.1 Случайная величина задается следующим законом распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.2x, & 0 \leq x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию, моду, медиану, квантили 0.1, 0.25, 0.9, коэффициенты асимметрии и эксцесса.

Решение: Заметим, что это равномерное распределение с $b = 5$, $a = 0$. Тогда, математическое ожидание $\mathbb{E} = \frac{5}{2}$, дисперсия $\text{var} = \frac{25}{12}$, коэффициент асимметрии $\beta_1 = 0$, эксцесса $\beta_2 = -\frac{6}{5}$, мода $[0, 5]$, медиана 2.5, $x_{0.1} = 0.5$, $x_{0.25} = 1.25$, $x_{0.9} = 4.5$.

■