Алгебра и геометрия.
Линейная алгебра

1. Группы, кольца, поля. Определения и примеры. Циклические группы. Теорема о гомоморфизме

Определение: (Группа)

Непустое множество $\mathcal{G}$, на котором определена некая операция $\bullet : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$, называется группой, если выполнены 3 свойства: $(\forall a, b, c \in \mathcal{G})$

1. ассоциативность $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$;
2. существование нейтрального элемента $\exists e \in \mathcal{G} : e \bullet a = a \bullet e = a$;
3. существование обратного элемента $\exists a^{-1} \in \mathcal{G} : a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e \in \mathcal{G}$;

Если $(\mathcal{G}, \bullet)$ удовлетворяет только свойству 1., то множество называется полугруппой. Если свойства 1. и 2., то моноид. Пример:

1. $(\mathbb{Z}, +)$ – группа;
2. $(\mathbb{Z}, \cdot)$ – моноид;
3. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\})$ – группа;
4. $(\mathbb{R}, +)$ – группа;
5. $(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ – группа.

Замечание

Абелевой группой называется группа $(\mathcal{G}, \bullet)$ в соответствии с определением, но обладающая также коммутативностью:

$$\forall a, b \in \mathcal{G} \; ab = ba$$

Примеры:

1. $(V_{2,3})$ – группа;
2. $(M_{n \times k}, +)$ – группа;
3. $(M_{n \times n}, \cdot)$ – моноид;
4. $S_n = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}\}$ – симметричная группа, но не абелева. Группа перестановок. Операция – композиция.

Определение: (Кольцо)

Множество R с двумя бинарными операциями $+$ и $\bullet$, для которого справедливы свойства:

1. Абелева группа по сложению $(R, +)$;
2. Моноид по умножению $(R, \bullet)$;
3. Дистрибутивность относительно умножения и сложения $\forall a, b, c \in R$:

$$a(b + c) = ab + ac$$
$$(a + b)c = ac + bc$$

Кольцо коммутативно, если умножение коммутативно. Примеры:

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ – кольца (коммутативные);
2. $M_n(\mathbb{R})$ – кольцо;
3. $2\mathbb{Z}$ (четные числа) – кольцо с единицей;
4. $(R^*, \bullet)$ – группа (множество всех обратимых элементов кольца);
5. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$

Определение: (Поле)

Коммутативное кольцо R называется полем, если его мультипликативная группа $R^* = R \setminus \{0\}$

Примеры: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – поле, $\mathbb{Z}$ – кольцо, но не поле.

Определение: (Изоморфизм)

Пусть M – множество с операцией $\circ$, а N – множество с операцией $\bullet$. Алгебраические структуры $(M, \circ)$ и $(N, \bullet)$ называются изоморфными ($(M, \circ) \simeq (N, \bullet)$), если существует биективное отображение

$$f : M \to N$$

такое, что $(\forall a, b \in M)$:

$$f(a \circ b) = f(a) \bullet f(b)$$

f в таком случае называют изоморфизмом структур $(M, \circ)$ и $(N, \bullet)$.

Пример: $a \to 2^a$ – изоморфизм множества $\mathbb{R}$ с операциями сложения и множества положительных чисел с операцией умножения ($2^{a+b} = 2^a 2^b$).

Пусть M – множество с операцией $\bullet$ и N – какое-либо его подмножество. Говорят, что N замкнуто относительно операции $\bullet$, если:

$$a, b \in N : \; a \bullet b \in N$$

Определение: (Подгруппа)

Подмножество B абелевой группы (аддитивной) A называется подгруппой, если:

1. B замкнуто относительно сложения;
2. $a \in B \implies -a \in B$;
3. $0 \in B$.

Замечание

Для мультипликативной группы подмножество B будет называться подгруппой, если:

1. B замкнуто относительно умножения;
2. $a \in B \implies a^{-1} \in B$;
3. $e \in B$.

В аддитивной абелевой группе $\mathbb{R}$ справедлива цепочка:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset R$$

В мультипликативной группе $\mathbb{R}^*$:

$$\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\} \subset \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \backslash \{0\} \subset \mathbb{R}^*.$$

Определение: (Подкольцо)

Подмножество L кольца K называется подкольцом, если

1. L является подгруппой аддитивной группы кольца K;
2. L замкнуто относительно умножения.

Подкольцо само является кольцом. Цепочка подгрупп аддитивной группы $\mathbb{R}$ является и цепочкой подколец.

Определение: (Подполе)

Подмножество L поля K называется подполем, если

1. L является подкольцом кольца K;
2. $a \neq 0 \in L \implies a^{-1} \in L$;
3. $e \in L$.

Поле $\mathbb{Q}$ – подполе поля $\mathbb{R}$.
Порядок группы – это $|\mathcal{G}|$

Еще примеры групп

1. $GL_n(F) = M_n(F)^* = \{A \in M_n(F) : \ |A| \neq 0\}$;
2. $SL_n(F) = \{A \in GL_n(F) : \ |A| = 1\} \subseteq GL_n(F)$;
3. $T_n(F) = \{A = [a_{ij}] \in GL_n(F) : \ a_{ij} = 0 \ \forall i,j : i > j\} \subseteq GL_n(F)$;
4. $GL_n(\mathbb{Z}) = M_n(\mathbb{Z})^*$;
5. S_n – группа перестановок на n элемента x:

$$S_n = \{\sigma : \ [n] \to [n] - - \text{биекция}\}$$

Определение: (Гомоморфизм)

Гомоморфизмом группы $\mathcal{G}$ в группу $\mathcal{H}$ называют отображение $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$, удовлетворяющее условию:

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

Примеры гомоморфизма

1. $(-1)^{\sigma\tau} = (-1)^{\sigma}(-1)^{\tau}$
   Это свойство говорит, что есть гомоморфизм $\text{sgn} : S_n \to \mathbb{Z}^* = (\{\pm 1\})$

$$\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}\sigma \cdot \text{sgn}\tau$$

Теорема: (Кэли)

Пусть $\mathcal{G}$ – группа, $|\mathcal{G}| = n$. Тогда в S_n есть подгруппа $H \subseteq S_n$, $H \cong \mathcal{G}$

Теорема: (О гомоморфизме групп)

Пусть $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ – гомоморфизм групп. Тогда

$$\text{Im} f \simeq \mathcal{G} \,\text{Ker} f$$

Или имеется изоморфизм:

$$\varphi : \ \text{Im} f \cong \mathcal{G} / \text{Ker} f$$

2. Подстановки. Определение подстановки, четность подстановок. Произведение подстановок, разложение подстановок в произведение транспозиций и независимых циклов.

Определение: (Циклическая группа)

Группа $\mathcal{G}$ называется циклической, если $\exists g \in G : \ G =< g >$

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$ – циклические группы.

Определение: (Порядок)

Пусть $a \in G$. Тогда порядок элемента a ($\operatorname{ord} a$) – это наименьшее натуральное n: $a^n = e$. Если такого n нет, то $\operatorname{ord} a = \infty$.

Пример: В $\mathbb{Z}_n$ $\operatorname{ord} 1 = n$.

Утв Пусть $a \in \mathcal{G}$, $\operatorname{ord} a = n$. Тогда $\forall k \in \mathbb{Z},\ a^k = e \iff n | k$.

Утв $\operatorname{ord} a = | < a > |$.

Определение: (Перестановка)

Перестановка на n элементах – это биекция $\sigma : [n] \to [n]$, где $[n] = \{1, \dots, n\}$. Множество всех перестановок – S_n.

S_n – группа относительно операции композиции:

$$\sigma \cdot \tau = \sigma \circ \tau : [n] \to [n],\ \sigma \circ \tau(i) = \sigma(\tau(i))$$

Табличный вид записи перестановки:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Цикл: $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in S_n$ – перестановка, которая $\sigma(i_s) = i_{s+1}$, $s = 1, \dots, k-1$, $\sigma(i_k) = i_1$, а остальные элементы $[n]$ неподвижны ($\sigma(x) = x$).

Определение: (Независимость циклов)

Циклы $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$, $\tau = (j_1, \dots, j_l)$ независимы, если:

$$\{i_1, \dots, i_k\} \cap \{j_1, \dots, j_l\} = \varnothing.$$

Для независимых циклов естественна коммутативность.

Утв Любая перестановка $\sigma \in S_n$ представима в виде произведения нескольких независимых циклов.

Построим это разложение. Будем записывать циклы вида (i), если $\sigma(i) = i$. Когда-то в списке $i_1, i_2, \dots$ появится повтор. Первым повторится i_1, иначе $i_{k+1} = \sigma(i_k) = i_s = \sigma(i_{s-1})$. Тогда $i_k = i_{s-1}$. Противоречие. Получили первый цикл. У каждого элемента в цикле там же содержится его σ - образ и σ – прообраз. Выберем наименьшее из $[n]$, которое еще не в цикле j_1 и повторим процедуру. Аналогично получим второй цикл и так далее. В итоге получим, что $\sigma(i_1, \dots, i_k)(j_1, \dots, j_l) \dots$

Определение: (Транспозиция)

Транспозиция – цикл длины 2, т.е. перестановка вида (i, j), $i \neq j$.

Утв Каждая перестановка $\sigma \in S_n$ есть произведение нескольких транспозиций.

Индукция по n. При $n = 1$ (id – пустое произведение). Пусть $\sigma \in S_n$, если $\sigma(n) = n$, то $\sigma \in S_{n-1}$. Для нее предположение верно по индукции. Если $\sigma(n) = i$, то положим $\tau = (i, n)\sigma$, тогда $\tau(n) = n \Rightarrow \tau$ – произведения транспозиций и $\sigma = (i, n)^{-1}\tau = (i, n)\tau$.

Определение: (Инверсия)

Пусть $\sigma \in S_n$. Назовем беспорядком (инверсией) в перестановке σ такую пару $(i, j) :\ 1 \leq i < j \leq n,\ \sigma(i) > \sigma(j)$. Обозначим $N(\sigma)$ – число беспорядков в σ. Знак $\sigma :\ \operatorname{sgn}\sigma = (-1)^\sigma := (-1)^{N(\sigma)}$.

Если $(-1)^\sigma = 1$, то σ – четная, иначе нечетная.

3. Комплексные числа. Геометрическое изображение, алгебраическая и тригонометрическая форма записи, извлечение корней, корни из единицы.

Аксиоматическое определение поля комплексных чисел.

Определение: (Поле $\mathbb{C}$)

Полем комплексных чисел называется всякое поле $\mathbb{C}$, обладающее следующими свойствами:

1. оно включает в себя подполе $\mathbb{R}$;
2. $i \in \mathbb{C} :\ i^2 = -1$;
3. минимально среди полей с предыдущими свойствами, т.е. $K \subset \mathbb{C} :\ K \ni \mathbb{R}, i \implies K = \mathbb{C}$.

Теорема о единственности поля $\mathbb{C}$ и алгебраическая форма представления. $a(\mathrm{Im})$ – вещественная часть, $b(\mathrm{Re})$ – мнимая.

Теорема: (Единственность поля $\mathbb{C}$)

Поле комплексных чисел существует и единственно с точностью до изоморфизма, переводящего $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Каждое комплексное число представляется в виде $a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i : i^2 = -1$.

Рассмотрим изоморфизм вида:
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad c = a + bi \to \bar{c} = a - bi', \quad (a, b \in \mathbb{R})$

Такое отображение называется комплексным сопряжением. Любой изоморфизм любой алгебраической структуры на себя называется автоморфизмом.

Комплексные числа можно изображать точками или векторами на плоскости. Число $c = a + bi$ изображается точкой или вектором с декартовыми координатами (a, b). Модулем комплексного числа $c = a+bi$ называется длина вектора, изображающего это число. Модуль при этом равен:

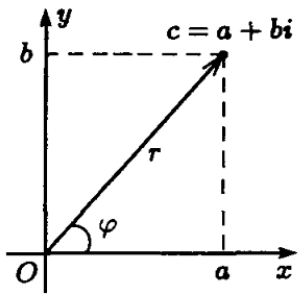


Рис. 1.1: Геометрическое изображение комплексного числа.

$$|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Аргумент ($\arg c$) – угол, между вектором и положительным направлением оси. Аргумент числа 0 не определен. r и φ – модуль и аргумент числа c. Тогда получим, что

$$a = r\cos\varphi, \qquad b = r\sin\varphi$$

Тогда (тригонометрическое представление)

$$c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Формулы для умножения, деления и возведения в степень:

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \\ = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$
(формула Муавра)

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа $c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ есть решение уравнения $z^n = c$. Пусть $|z| = s$, $\arg z = \psi \Rightarrow s^n = r,\ n\psi = = \varphi + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. Имеем $s = \sqrt[n]{r},\ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$:

$$z = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

Замечание

Корень $z = i$. Имеем $|z| = 1$, $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$

$$\sqrt{i} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2}, \quad k = 0, 1.$$

4. Системы линейных уравнений. Прямоугольные матрицы. Приведение матриц и систем линейных уравнений к ступенчатому виду. Метод Гаусса.

Системы линейных уравнений – системы вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

При этом $a_{ij} \in F$, $b_j \in F$. Система имеет матричный вид $Ax = b$, где:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \end{bmatrix} \in M_{k\times n}(F), \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} \in F^k$$

Решить систему – найти все $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \in F^n$, удовлетворяющие $Ax = b$. Введем понятия:

расширенная матрица СЛУ: $[A|b]$;

однородное СЛУ: $b = 0$;

СЛУ совместна: есть хотя бы одно решение;

Две СЛУ $A_1x = b$, $A_2x = b_2$ эквивалентны $A_1x_0 = b_1 \iff A_2x_0 = b_2$.

Рассмотрим совместную систему $Ax = b$. Пусть x_0 – частное решение ($Ax_0 = b$), U – подпространство решений ОСЛУ $Ax = 0$, тогда множество решений исходной системы это

$$x_0 + U = \{x_0 + u : u \in U\}$$

Определение: (Преобразования матриц)

Элементарные преобразования – преобразования трех типов:

Элем. пр-ния	Элем. матрицы	Обратные
1) К одной строке прибавить другую, умноженную на скаляр	$D_{ij}(\alpha) = E + \alpha \cdot E_{ij}$ $\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & & & j \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \to \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & \alpha \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	$D_{ij}(-\alpha)$
2) Умножить строку на ненулевой скаляр	$T_i(\lambda) = E + \lambda E_{ii} - E_{ii}$, $\lambda \in F$ $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} & & j & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \to \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$	$T_i(\lambda^{-1})$
3) Поменять две строки местами	$P_{ij} = E + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$	$P(ji)$

Элементарная матрица – матрица, домножение на которую слева осуществляет элементарное преобразование строк.

Определение: (Обратная матрица)

Матрица $M \in M_{n\times n}(F)$ называется обратимой, если $\exists M^{-1} \in M_{n\times n}(F)$:

$$MM^{-1} = M^{-1}M = E$$

Элементарные матрицы обратимы.

Замечание

Элементарные преобразования строк расширенной матрицы СЛУ переводят ее в расширенную матрицу эквивалентной системы.

Определение: (Ступенчатый вид)

Главным элементом строки матрицы A называется ее крайний левый ненулевой элемент.
Матрица A имеет ступенчатый вид, если все ее нулевые строки расположены в самом низу, а в остальных строках номера главных элементов строго возрастают (сверху вниз).

Теорема: (Прямой ход)

Любую матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

Как следствие, любая СЛУ эквивалентна системе, у которой расширенная матрица ступенчатого вида.

Определение

Для матрицы СЛУ в ступенчатом виде главный столбец – содержащий главный элемент какой-то строки. Главная переменная – переменна, которая соответствует главному столбцу. Остальные переменные называются свободными.

Замечание

Если свободным переменным придать какие-то значения, то значения главных восстановятся однозначно, если система совместна.

Система будет несовместна тогда, когда столбец свободных членов – главный (тогда в системе есть уравнение $0x = b_i (b_i \neq 0)$)

Определение

Ступенчатая матрица имеет упрощенный вид, если в каждом главном столбце ровно 1 ненулевой элемент, и он равен 1.

Теорема: (Обратный ход)

Любую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к упрощенному виду.

Теорема: (Метод Гаусса)

Рассмотрим СЛУ $Ax = b$, где расширенная матрица имеет упрощенный вид. Тогда

1. система совместна $\Longleftrightarrow$ столбец b – не главный;
2. если система совместна и $A = \left(E \middle| A'\right)$, то можно выписать фундаментальную матрицу:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -A' \\ \hline E \end{bmatrix}$$

и частное решение:

$$x_0 = \begin{bmatrix} b \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

У ОСЛУ $Ax = 0, A \in M_{k\times n}(F)$, $n > k$, всегда есть ненулевое решение.

5. Линейная зависимость и ранг. Линейная зависимость строк (столбцов). Основная лемма о линейной зависимости, базис и ранг системы строк (столбцов). Ранг матрицы. Критерий совместности и определенности системы линейных уравнений в терминах рангов матриц. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений.

Лемма: (о линейной зависимости)

Пусть $\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k}$ – векторы в линейном пространстве, $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in < \vec{e_1}, \dots, \vec{e_k} >$, где $n > k$. Тогда система векторов $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ линейно зависима.

Теорема

Пусть V – конечно-порожденное линейное пространство над F. Тогда все его базисы равномощны.

Определение: (Размерность)

Пусть V – линейное пространство (конечно порожденное). Его размерность ($\dim V$) – количество векторов в любом базисе V.

Теорема

Пусть V – конечно-порожденное линейное пространство над F. $\dim V = n$. $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k})$ – лнз система в V. Тогда ее можно дополнить до базиса в V : $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k}, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n)$

Определение: (Ранг системы векторов)

Пусть V – линейное пространство, $S \subseteq V$. Ранг S ($\operatorname{rank} S$) – это наибольший размер ЛНЗ подсистемы в S.

$\operatorname{rank} S = \dim < S >$ (размерность линейной оболочки)

Определение: (Ранг матрицы)

Пусть $A \in M_{n\times k}(F)$. Ее строчный ранг $\operatorname{rank}_r(A)$ – ранг системы ее строк. Ее столбцовый ранг $\operatorname{rank}_c(A)$ – ранг системы ее столбцов.

Лемма

Пусть A, B – матрицы, тогда:

$$\operatorname{rank}_c(AB) \le \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{rank}_r(AB) \le \operatorname{rank}_r B.$$

Теорема: (О ранге матрицы)

$$\operatorname{rank}_r A = \operatorname{rank}_c A.$$

Теорема: (Кронекера-Капелли)

Система $Ax = b$ совместна $\Longleftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b)$$

Определение: (ФСР)

Базис пространства решений ОСЛУ $Ax = 0$ – называется ее фундаментальной системой решений. Фундаментальная матрица системы – матрица, столбцы которой образуют ФСР.

6. Определители. Определитель квадратной матрицы, его основные свойства. Критерий равенства определителя нулю. Формула разложения определителя матрицы по строке (столбцу).

Определение: (Полилинейная функция)

Пусть V – линейное пространство над F, Рассмотрим функцию:

$$f : V \times V \times \ldots \times V \to F$$

Эта функция называется полилинейной, если она линейна по каждому из n аргументов, т.е. $(\forall \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V,\ \forall \lambda \in F)$

$$f(\ldots, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \ldots) = f(\ldots, \vec{v}_1, \ldots) + f(\ldots, \vec{v}_2, \ldots)$$
$$f(\ldots, \lambda\vec{v}, \ldots) = \lambda f(\ldots, \vec{v}, \ldots)$$

Функция называется кососимметричной, если

1. значение функции меняет знак при замене любых двух аргументов местами:

$$f(\ldots, \vec{u}, \ldots, \vec{v}, \ldots) = -f(\ldots, \vec{v}, \ldots, \vec{u}, \ldots)$$

2. Функция обнуляется при подстановке двух одинаковых аргументов:

$$f(\ldots, \vec{v}, \ldots, \vec{v}, \ldots) = 0,\ \forall \vec{v} \in V.$$

Утв

Пусть $f : V^n \to F$ – кососимметричная функция, перестановка $\sigma \in S_n$ (группа перестановок). Тогда $\forall \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$:

$$f(\vec{v}_{\sigma(1)}, \vec{v}_{\sigma(2)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(n)}) = (-1)^\sigma f(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n).$$

Теорема

Пусть V – линейное пространство над F, $e = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – базис в V. Пусть $c \in F$. Тогда $\exists!$ полилинейная кососимметричная функция $f : V^n \to F$ такая, что

$$f(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = c.$$

Это отображение задается так. Если $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = eA$, где $A = [a_{ij}]$, то

$$f(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = c \cdot \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{\sigma(1),1}, a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}$$

Определение: (Определитель)

Пусть $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$. Тогда ее определитель – это $\det A = |A|$ и равен:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_{\sigma(1),1}, a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}$$

Определитель – кососимметричная и полилинейная функция от столбцов матрицы A.

Свойства определителя

Определение: (Треугольная матрица)

Квадратная матрица $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$ называется верхне треугольной, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Аналогично – нижнетреугольная.

$$\det A^\top = \det A$$

Если A – треугольная:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Пусть $A \in M_n(F)$, D – элементарная матрица размера n. Тогда

$$\det(A \cdot D) = \det A \cdot \det D$$

Уточнение: При прибавлении к столбцу другого, умноженного на скаляр – det не меняется.

При умножении столбца на λ: det умножается на λ.

При перестановке 2 столбцов det меняет знак.

Быстрое вычисление определителя

Пусть $A \in M_n(F)$. Приведем ее методом Гаусса к ступенчатому виду. Определитель меняется по понятным правилам. Ступенчатая матрица – верхне треугольная. Ее определитель известен.

Замечание

Матрица $A \in M_n(F)$ невырождена $\iff \det A \neq 0$

Пусть $A, B \in M_n(F)$. Тогда

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Пусть A – матрица вида:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline O & D \end{array}\right],$$

где $B \in M_k(F),\ D \in M_n(F),\ C \in M_{k\times n}(F), 0 = 0_{n\times k}$. Тогда:

$$\det A = \det B \cdot \det D$$

Определение: (Минор)

Пусть A – матрица. Ее минор порядка k – определитель подматрицы размера $k \times k$. Если $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$, то дополнительный минор к элементу a_{ij} – это минор, полученный вычеркиванием i-ой строки и j-ого столбца.

Замечание

Ранг матрицы A равен наибольшему порядку ее ненулевому минора.

Определение: (Алг-кое дополнение)

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} – это $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Лемма

Пусть $A \in M_n(F)$:

$$A = \begin{bmatrix} & & & * & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ & & & * & & & \end{bmatrix}$$

Тогда $\det A = a_{ij} \cdot A_{ij}$

Теорема: (Разложение определителя)

Пусть $A = [a_{ij}] \in M_n(F)$. Тогда $(\forall i = 1, \dots, n)$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

Или $(\forall j = 1, \dots, n)$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

7. Операции над матрицами. Операции над матрицами и их свойства. Теорема о ранге произведения двух матриц. Определитель произведения квадратных матриц. Обратная матрица, ее явный вид (формула), способ выражения с помощью элементарных преобразований строк.

Операции над матрицами

Пусть $A = [a_{ij}],\ B = [b_{ij}]$

- $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$, если A и B одного размера;
- $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$ (аналогичное условие);
- $\alpha \in \mathbb{R}:\ \alpha A = A\alpha = [\alpha a_{ij}]$
- транспонирование: $A^\top :\ A^\top = [a_{ji}]$

Умножение матриц

Строка · столбец: $A = [a_1, \dots, a_n] \in M_{1\times n},\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in M_{n\times 1}$.

Тогда

$$A \cdot B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Матрица · матрица: $A = [a_{ij}] \in M_{n\times t},\ B = [b_{ij}] \in M_{t\times s}$. Тогда

$$A \cdot B = C = [c_{ij}] \in M_{n\times s},$$

где

$$c_{ij} = a_{i*} \cdot b_{*j} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Замечание

Строка матрицы C – это линейная комбинация строк B. Столбец матрицы C – линейная комбинация столбцов A.

Свойства

1. $A+(B+C)=(A+B)+C$;
2. $A+B=B+A$;
3. $\exists 0_{n\times k}\in M_{n\times k}:\ 0+A=A+0=A$;
4. $A+(-1)\cdot A=0$;
5. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
6. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;
7. $1\cdot A=A$;
8. $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$.

Свойства умножения

1. $A(BC)=(AB)C$;
2. $\lambda(AB)=(\lambda A)\cdot B=A\cdot(\lambda B)$;
3. $A(B+C)=AB+AC$;
4. $(A+B)C=AC+BC$;

Свойства транспонирования

1. $(A^\top)^\top=A$;
2. $(A+B)^\top=A^\top+B^\top$;
3. $(\lambda A)^\top=\lambda A^\top$;
4. $(AB)^\top=B^\top A^\top$.

Теорема: (Ранг произведения)

Ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей.

Определение: (Обратная матрица)

Матрица $M\in M_{n\times n}(F)$ называется обратимой, если $\exists M^{-1}\in M_{n\times n}(F)$:

$$MM^{-1}=M^{-1}M=E$$

Задача поиска обратной матрицы сводится к поиску обратных элементов в кольце квадратных матриц на поле F: $(M_n(F))^*=GL_n(F)$

Теорема

Пусть $A\in M_n(F)$. Тогда равносильны условия:

1. матрица A невырождена ($\operatorname{rank}A=n$);
2. матрица A элементарными преобразованиями строк приводится к единичной матрице E;
3. матрица A – произведение элементарных матриц;
4. матрица A – обратима;
5. матрица A – обратима слева (справа):

$$\exists B:\ BA=E$$

Алгоритм нахождения обратной матрицы.

Запишем матрицу в виде $(A|E)$. Тогда с помощью элементарных преобразований можно получить $(E|B)$. Причем $B=A^{-1}$.

8. Векторные пространства; базис. Векторное пространство, его базис и размерность. Преобразования координат в векторном пространстве. Подпространства как множества решений систем однородных линейных уравнений. Связь между размерностями суммы и пересечения двух подпространств. Линейная независимость подпространств. Базис и размерность прямой суммы подпространств

Определение: (Векторное пространство)

Векторным (или линейным) пространством над полем F называется множество V с операциями сложения и умножения на элементы поля F, обладающими свойствами:

1. абелева группа относительно сложения $(V,+)$;
2. $\lambda(\vec a+\vec b)=\lambda\vec a+\lambda\vec b,\quad \forall\vec a,\vec b\in V,\ \lambda\in F$;
3. $(\lambda+\mu)\vec a=\lambda\vec a+\mu\vec a,\quad \forall\lambda,\mu\in F,\ \vec a\in V$;
4. $(\lambda\mu)\vec a=\lambda(\mu\vec a)\quad \forall\lambda,\mu\in F,\ \vec a\in V$;
5. $1\vec a=\vec a\quad \forall\vec a\in V$.

Примеры:

1. V_2,V_3 – линейные пространства;
2. $M_{n\times k}(F)$ – линейное пространство над F;
3. Поле – линейное пространство над подполем ($\mathbb{R}$ – над $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$).

Определение: (Подпространство)

Пусть V – линейное пространство над полем F. Подмножество U называется подпространством, если

1. U является подгруппой аддитивной группы V;

2. $(\forall \vec{a} \in U, \lambda \in F)\lambda\vec{a} \in U$;

Любое подпространство является пространством над F.

Замечание

Пересечение подпространств тоже подпространство.

Определение: (Линейная комбинация)

Линейной комбинацией векторов $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$ называется всякое выражения вида:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i;$$

где λ_i $(\forall i = 1, \dots, n)$ – элементы поля.

Система векторов $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ – линейно зависима, если $\exists \lambda \neq 0 \in F^n : (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)\lambda = \vec{0}$. Иначе линейно независима.

Замечание

Подсистема ЛНЗ – ЛНЗ.
Система $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ ЛЗ $\iff$ один из ее векторов выражается через остальные, т.е. равен их линейной комбинации.

Определение

Пусть V – линейное пространство над F, M – подмножество V. Линейной оболочкой множества M называется:

$$< M > = \bigcap_{U \leq V, U \geq M} U$$

Или: наименьшее по включению (содержащееся в любом другом подпространстве) подпространство, которое содержит M.

Замечание

Если $M \leq V$, то

$$< M > = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i : \begin{array}{l} \alpha_i \in F \\ \vec{v}_i \in M \end{array} \right\}$$

Определение: (Конечная порожденность)

Пусть V – линейное пространство над F. Оно конечно порождено, если $\exists \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V : V =< \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n >$.

Определение: (Базис)

Система векторов $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ называется базис в V, если:

1. система линейно независима
2. $< \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n > = V$.

Если $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ – базис, $(\forall \vec{v} \in V)\exists \alpha : \vec{v} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)\alpha$. Тогда α – координатный столбец вектора $\vec{v}$ в базисе e.

Замечание

Координатный столбец единственный.

Определение: (Изоморфизм пространств)

Пусть U и V – линейные пространства над полем F. Отображение $\varphi : U \to V$ – изоморфизм, если

1. φ – изоморфизм абелевых групп;
2. $\forall \lambda \in F\ \forall \vec{a} \in U \quad \varphi(\lambda\vec{a}) = \lambda\varphi(\vec{a})$

Если φ существует, то $U \simeq V$ (изоморфно).

Рассмотрим ОСЛУ $Ax = 0$ $A \in M_{k \times n}(F)$, тогда множество всех ее решений – линейное подпространство в F^n.

Сумма и пересечение подпространств

Пусть V - линейное пространство над полем F, U_1 и U_2 – его подпространства.

Замечание

$U_1 \cap U_2 \subseteq V$

Определение

Сумма U_1 и U_2 – это

$$U_1 + U_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 : \vec{u}_i \in U_i\}$$

Тогда $U_1 + U_2 \subseteq V$.

Замечание

Сумма подпространств – ассоциативная и коммутативная операция.

Утв

Пусть U_1 порождено S_1 ($U_1 = \langle S_1 \rangle$, $U_2 = \langle S_2 \rangle$), где $S_1, S_2 \subseteq V$. Тогда $U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle = \langle S_1 \cup S_2 \rangle$

Следствие: $\dim(U_1 + \ldots + U_k) \leq \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$

Замечание

$U_1 + U_2 = U_1 + U_3 \nRightarrow U_2 = U_3$

Определение

Пусть $U_1, \ldots, U_k \subseteq V$. Их сумма называется прямой суммой, если $\forall \vec{v}_i \in U_1 + \ldots + U_k\ \exists!\ \vec{u}_1 \in U_1, \ldots, \vec{u}_k \in U_k$:

$$\vec{v} = \vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_k.$$

Если сумма $\vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_k$ прямая, тогда

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_k$$

Утв

$U_1 + \ldots + U_k$ прямая $\iff \exists!\ \vec{u}_i \in U_i$:

$$\vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_i = \vec{0}.$$

Теорема: (Размерность и базис прямой суммы)

Пусть $U_1, \ldots, U_k \subseteq V$, e_i – базис в U_i. Тогда равносильны утверждения:

1. $U_1 + \ldots + U_k = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$;
2. $\dim(U_1 + \ldots U_k) = \sum_{i=1}^{k} \dim U_i$;
3. Конкатенация базисов – базис в $U_1 + \ldots + U_k$.

Определение: (Прямое дополнение)

Пусть $U \subseteq V$. Подпространство $W \subseteq V$ называется прямым дополнением подпространства U (в пространстве V), если $U \oplus W = V$

Утв

Пусть $U \subseteq V$. Тогда у него $\exists$ прямое дополнение. Причем

$$\dim W = \dim V - \dim U$$

Теорема: (Формула Грассмана)

Пусть $U_1, U_2 \subseteq V$. Тогда

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U - 2$$

9. Линейные отображения и линейные операторы. Линейные отображения, их запись в координатах. Образ и ядро линейного отображения, связь между их размерностями. Сопряженное пространство и сопряженные базисы. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.

Определение: (Линейное отображение)

Пусть V – линейное пространство над F. Тогда отображение $f : V \to F$ называется линейный функционалом (отображением) на V, если $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V, \alpha \in F$:

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$$
$$f(\alpha\vec{a}) = \alpha f(\vec{a})$$

Множество всех линейных функционалов на V – V^*.

Если $f_1, f_2 \in V^*$, то определим их сумму:

$$(f_1 + f_2)(\vec{v}) = f_1(\vec{v}) + f_2(\vec{v})$$

Если $\alpha \in F$, то определим:

$$(\alpha f_1)(\vec{v}) = \alpha \cdot f_1(\vec{v})$$

Определение: (Сопряженное пространство)

V^* – сопряженное или двойственное пространство к V.

Пусть $e = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – базис в V. Тогда, если $f \in$

V^*, $\vec{v} \in V$, $\vec{v} \leftrightarrow \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$, то

$$f(\vec{v}) = f(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{k} f(\alpha_i \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(\vec{e}_i).$$

Введем $f_i : V \to F$, $f_i(\vec{v}) = \alpha_i$. Тогда $f_i \in V^*$.

Утв

$(f_1, \dots, f_n)$ – базис в V^*, при этом координаты $f \in V^*$ – это $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)$.

Следствие: Размерность $\dim V^* = \dim V = n$.

Определение: (Двойственный базис)

Базис в $(f_1, \dots, f_n)$ в V^* называется взаимным (двойственным) к базису $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ в V.

Базис в V^* – столбец, координаты в строку. $f = [f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)] \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$.

Теорема

Пусть e, e' – базисы в V, причем $e' = eS$, и пусть F, F' – взаимные к ним базисы в V^*. Тогда

$$F = SF'.$$

Определение: (Линейные отображения)

Пусть U, V – два линейных пространства над F. Отображение $\varphi : U \to V$ называется линейным оператором (отображением), если $\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$, $\forall \alpha \in F$:

$$\varphi(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \varphi(\vec{u}_1) + \varphi(\vec{u}_2)$$
$$\varphi(\alpha \vec{u}_1) = \alpha \varphi(\vec{u}_1)$$

Введем обозначения: $\mathcal{L}(U, V)$ – множество всех линейных отображений $U \to V$. $\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(V, V)$ – все линейные преобразования пространства V. ЛЗ переход в ЛЗ.

Определение: (Образ и ядро)

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(U, V)$. Его образ $\mathrm{Im}\varphi = \varphi(U) = \{\varphi(\vec{u}) : \vec{u} \in U\} \subset V$. Его ядро – это $\mathrm{Ker}\,\varphi = \varphi^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{u} \in U : \varphi(\vec{u}) = \vec{0}\}$

Лемма

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(U, V)$ и пусть W – прямое дополнение к $\mathrm{Ker}\,\varphi$ в U. ($U = W \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi$). Тогда $\varphi|_W$ осуществляет биекцию $W \to \mathrm{Im}\varphi$, т.е. их изоморфизм.

Следствие: $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \dim \mathrm{Im}\varphi = \dim U$.

Утв

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(U, V)$, $\vec{v}_0 \in \mathrm{Im}\varphi$ и пусть $\vec{u}_0 \in U$: $\varphi(\vec{u}_0) = \vec{v}_0$. Тогда $\varphi^{-1}(\vec{v}_0) = \vec{u}_0 + \mathrm{Ker}\,\varphi$.

Определение

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(U, V)$. Выберем базисы $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ в U, $F = (f_1, \dots, f_n)$ в V. Тогда матрица φ в базисах e, F:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix} \in M_{n \times k}(F),$$

где $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \leftrightarrow \varphi(\vec{e}_i)$. Или

$$\varphi(e) = FA$$

Утв

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(U, V)$, $\varphi \underset{(e,F)}{\leftrightarrow} A$. Пусть $\vec{u} \in U$, $\vec{u} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$. Тогда $\varphi(\vec{u}) \underset{F}{\leftrightarrow} A\alpha$.

Утв

Пусть $\varphi \underset{(e,F)}{\leftrightarrow} A$. Тогда $\mathrm{rank}\, A = \dim \mathrm{Im}\varphi$ (не зависит от выбора базисов).

Переход между базисами

Утв

Пусть $\varphi \in \mathcal{L}(U, V)$, e и e' – базисы в U, F и F' – базисы в V с матрицами перехода S – от e к e', T – от F к F'. Пусть $\varphi \underset{(e,F)}{\leftrightarrow} A$, $\varphi \underset{(e',F')}{\leftrightarrow} A'$. Тогда

$$A' = T^{-1}AS$$

10. Билинейные и квадратичные функции. Билинейные функции, их запись в координатах. Изменение матрицы билинейной функции при переходе к другому базису. Ортогональное дополнение к подпространству относительно симметрической билинейной функции. Связь между симметрическими билинейными и квадратичными функциями. Существование ортогонального базиса для симметрической билинейной функции. Нормальный вид вещественной квадратичной функции. Закон инерции.

(Обобщение скалярного умножения)

Определение: (Билинейная функция)

Пусть V – линейное пространство на поле F. Билинейная функция или форма – функция вида:

$$b : V \times V \to F$$

линейная по каждому аргументу, т.е. $(\forall \vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V,\ \forall \lambda \in F)$:

$$b(\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}) = b(\vec{v}_1, \vec{v}) + b(\vec{v}_2, \vec{v})$$
$$b(\lambda \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \lambda f(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

Примеры билинейных функций

1. Скалярное произведение;
2. Определитель матрицы второго порядка как функция ее строк – билинейная функция на поле F^2.
3. Функция $b(U, V) = \operatorname{tr} UV$ – билинейная функция на кольце $M_n(F)$.

Обозначим множество всех билинейных форм на V – $\mathcal{B}(V)$

Определение: (Матрица билинейной формы)

Пусть $b \in \mathcal{B}(V)$ и $e = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – базис в V. Матрица билинейной формы b в базисе e – это

$$B = [b\vec{e}_i, \vec{e}_j]$$

Утв

Пусть $b \in \mathcal{B}(V), e$ – базис в V, $b \underset{e}{\leftrightarrow} B$. Пусть $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $\vec{u} \underset{e}{\alpha}, \vec{v} \underset{e}{\leftrightarrow}$. Тогда

$$b(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha^\top B \beta$$

Замечание

Если $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$, то

$$(b_1 + b_2)(\vec{u}, \vec{v}) = b_1(\vec{u}, \vec{v}) + b_2(\vec{u}, \vec{v})$$
$$(\alpha b_1)(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha \cdot b_1(\vec{u}, \vec{v})$$

Тогда $b_1 + b_2$, $\alpha b_1 \in \mathcal{B}(V)$. Более того, $\mathcal{B}(V)$ – линейное пространство над F.

Теорема

Пусть e, e' – базисы в V, $e' = eS$. Пусть $b \in \mathcal{B}(V)$, $b \underset{e}{\leftrightarrow} B$, $b \underset{e'}{\leftrightarrow} B'$. Тогда $B' = S^\top BS$.

Замечание

Если $F = \mathbb{R}$, то знак определителя матрицы билинейной формы не зависит от базиса.

Определение

Пусть $b \in \mathcal{B}(V)$. Эта форма называется симметрической, если

$$b(\vec{u}, \vec{v}) = b(\vec{v}, \vec{u}), \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$$

Эта форма называется кососимметричной, если

1. $b(\vec{u}, \vec{v}) = -b(\vec{v}, \vec{u})$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$;
2. $b(\vec{v}, \vec{v}) = 0$, $\forall \vec{v} \in V$.

Определение

Пусть $A \in M_n(F)$. A – симметрична, если $A^\top = A$ и кососимметрична, если

1. $A^\top = -A$;

2. на диагонали нули.

Утв

Пусть $b \in \mathcal{B}(V)$, $b \underset{e}{\leftrightarrow} B$. Тогда b – симметрична/кососимметрична $\Longleftrightarrow$ B – симметрична/кососимметрична.

Теорема

Если char $F \neq 2$, то

$$\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}^{+}(V) \oplus \mathcal{B}^{-}(V)$$

Определение: (Ядро)

Пусть $b \in \mathcal{B}^{\pm}(V)$. Тогда ядро этой формы это $\operatorname{Ker} b = \{\vec{v} \in V : \forall \vec{u} \in V\ b(\vec{u}, \vec{v}) = 0\} = \{\vec{u} \in V : \forall \vec{v} \in V\ b(\vec{u}, \vec{v}) = 0\}$

Пусть $b \in \mathcal{B}^{\pm}(V)$, $\vec{b} \underset{e}{\leftrightarrow} B$. Пусть $\vec{u} \underset{e}{\leftrightarrow} \alpha$. Если $B\alpha = 0$, то $b(\vec{u}, \vec{v}) = \beta^{\top} B\alpha = 0 \Rightarrow \vec{v} \in \operatorname{Ker} b$. Если же в столбце $B\alpha$ есть ненулевой элемент (i-ый, например), то

$$b(\vec{e}_i, \vec{v}) = (0, \dots, 1, \dots, 0)B\alpha \neq 0 \Rightarrow \vec{v} \notin \operatorname{Ker} b.$$

Утв

$$\vec{v} \in \operatorname{Ker} b \Longleftrightarrow B\alpha = 0 \Longleftrightarrow b(\vec{e}_i, \vec{v}) = 0\ (\forall i = 1 \dots n).$$

Следствие: $\operatorname{Ker} b \subseteq V$,

$$\dim \operatorname{Ker} b = \dim V - \operatorname{rank} B$$

Определение: (Невырожденная)

Билинейная форма называется невырожденной, если $\operatorname{Ker} b = 0 \Longleftrightarrow$ ее матрица B невырождена.

Пусть на пространстве V задана фиксированная форма $b \in \mathcal{B}^{\pm}(V)$.

Определение: (Ортогональные векторы)

Векторы $\vec{u}, \vec{v} \in V$ ортогональны относительно системы формы b, если $b(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Определение: (Ортогональное дополнение)

Если $U \subseteq V$, то ортогональным дополнением к подпространству U называется:

$$U^{\perp} = \{\vec{v} \in V : \forall \vec{u} \in U\ b(\vec{u}, \vec{v}) = 0.\}$$

Пример

Если b – скалярное произведение в V_3, а U – прямая, то $U^{\perp}$ – плоскость, перпендикулярная U (и наоборот).

Утв

$$\dim U^{\perp} \geq \dim V - \dim U$$

(коразмерность подпространства U).

Определение: (Невыр-сть подпространства)

Подпространство $U \subseteq$ называется невырожденным (относительно формы b), $b\big|_U$ (ограничение на U) будет невырожденным.

Замечание

Матрица $b\big|_U$ – подматрица в левом верхнем углу.

Определение: (Квадратичная форма)

Пусть $b \in \mathcal{B}(V)$. Тогда квадратичная форма ассоциированная с b – это отображение вида $q : V \to F$:

$$q(\vec{v}) = b(\vec{v}, \vec{v}).$$

Замечание

В координатах, если $\vec{u} \leftrightarrow \alpha, \vec{v} \leftrightarrow \beta$, то

$$b(\vec{u}, \vec{v}) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j b_{ij}$$

$$q(\vec{v}) = \sum_{i,j} = \beta_i \beta_j b_{ij}$$

Если $b \in \mathcal{B}^{-}(V)$ (кососимметрическая), то $q = 0$. Поскольку $\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}^{+}(V) \oplus \mathcal{B}^{-}(V)$, то можно считать, что q определяется по симметрической билинейной форме.

Теорема: (Единственность симм. формы)

Пусть q – квадратичная форма на V. Тогда $\exists! b \in \mathcal{B}^{+}(V)$, с которой ассоциирована q.

Следствие: Линейное пространство квадратичных форм на V $Q(V)$ изоморфно $\mathcal{B}^{+}(V)$.

Определение: (Полярная форма)

Пусть $q(\vec v) = b(\vec v, \vec v)$, $b \in \mathcal{B}^+(V)$. Форма b называется полярной к квадратичной форме q. Матрицей квадратичной формы q в базисе e называется матрица полярной к ней симметричной билинейной формы b.

Замечание

Если $q \underset{e}{\leftrightarrow} B, \vec v \underset{e}{\leftrightarrow} x$, то

$$q(\vec v) = b(\vec v, \vec v) = x^\top Bx.$$

Теорема: (Диагонализация)

Пусть $q \in Q(V)$. Тогда в V $\exists$ базис, в котором матрица q диагональна. (То же верно для симметричной билинейной формы $b \in \mathcal{B}^+(V)$.)

Замечание

Диагональный вид не всегда один и тот же.

Следствие: $\forall q \in Q(V)$ $\exists$ базис, в котором матрица формы диагональна, и на диагонали стоят ±1 и 0.

Определение: (Канонический)

Такой вид матрицы – канонический для формы q, базис – канонический базис.

Ранг формы – суммарное количество ±1.

Определение

Пусть $q \in Q(v)$. Форма называется

- положительной полуопределенной, если $\forall \vec v \in V$ $q(\vec v) \geq 0$
- положительно определенной, если $\forall \vec 0 \neq \vec v \in V$ $q(\vec v) > 0$;
- отрицательно определенная (полуопределенная) – аналогично.

Форма положительно определена $\Leftrightarrow$ в ее каноническом виде на диагонали единицы, положительно полуопределена $\Leftrightarrow$ в ее каноническом виде нет -1.

Определение: (Индекс инерции)

Пусть $q \in Q(V)$. Положительный индекс инерции $\sigma_+(q)$ – это наибольшая размерность подпространства $U \subseteq V$: $q|_U$ – положительно определенная. Отрицательный индекс инерции $\sigma_-(q)$ – аналогично. Сигнатура формы q – пара $(\sigma_+(q), \sigma_-(q))$.

Замечание

$\{\vec v \in V : q(\vec v) \geq 0\}$ – не подпространство.

Теорема

Пусть $q \in Q(V)$, B – ее канонический вид в базисе e. Тогда в B есть ровно $\sigma_+(q)$ единиц и ровно $\sigma_-(q)$ -1.

Следствие (Закон инерции): В каноническом виде формы $q \in Q(V)$ всегда одно и то же количество единиц и -1.

11. Евклидовы пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Ортогональные базисы. Ортогонализация Грама-Шмидта. Ортогональные операторы.

Определение: (Евклидово пр-во)

Евклидово пространство – это линейное пространство V над $\mathbb{R}$, на котором задана положительно определенная симметрическая билинейная форма (скалярное произведение, $(\vec u, \vec v)$).

Определение: (Длина)

Длина вектора $\vec v \in V$ – это $||\vec v|| = \sqrt{(\vec v, \vec v)}$

$\vec v \neq \vec 0 \Rightarrow ||\vec v|| > 0.$

Определение: (Матрица Грама)

Пусть $\vec v_1, \dots, \vec v_k \in V$. Матрица Грама – это :

$$\Gamma(\vec v_1, \dots, \vec v_k) = \left((\vec v_i, \vec v_j)\right)$$

Матрица Γ – симметрична.

Утв

1. $\Gamma(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ положительно полуопределена;
2. $\Gamma(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ положительно определена $\Leftrightarrow$ $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ ЛНЗ $\Longleftrightarrow \det \Gamma(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) > 0$.

Теорема: (Неравенство Коши-Буняковского-Шварца)

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad |(\vec{u}, \vec{v})|^2 \le ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$$

Замечание

В координатном виде: $(x, \overline{y}) = x^\top \overline{y}$:

$$\left|\sum_i x_i \overline{y}_i\right|^2 \le \sum_i |x_i|^2 \cdot \sum_i |y_i|^2$$

Теорема: (Неравенство треугольника)

$$||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| \ge ||\vec{u} + \vec{v}||.$$

Замечание

Равенство достигается, когда $\vec{u}, \vec{v}$ коллинеарны (ЛНЗ).

Определение

В евклидовом пространстве угол между ненулевыми векторами $\vec{u}, \vec{v}$ определяется равенством

$$\cos < (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}$$

Определение: (Ортог-ная с-ма векторов)

Система векторов $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ называется ортогональной, если $\forall i \ne j \; (\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0$.
Система подпространств $U_1, \dots, U_k \subseteq V$ называется ортогональной, если $\forall i \ne j \; \forall \vec{u}_i \in U_i, \; \forall \vec{u}_j \in U_j \; (\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0$.

Система векторов ортонормирована, если она ортогональна и длины всех векторов единичны.

Утв

Пусть $U_1, \dots, U_k$ – ортогональная система подпространств в V. Тогда эти подпространства образуют прямую сумму.

Следствие: Ортогональная система ненулевых векторов ЛНЗ.

Теорема

В V $\exists$ ортонормированный базис.

Замечание

Пусть e – ОНБ, $\vec{u} \underset{e}{\leftrightarrow} x$, $\vec{v} \underset{e}{\leftrightarrow} y$. Тогда $(\vec{u}, \vec{v}) = x^\top E \overline{y} = x^\top \overline{y}$

Определение: (Изоморфизм)

Пусть V_1, V_2 – два евклидовых пространства. Отображение $\varphi : V_1 \to V_2$ называется изоморфизмом, если φ – изоморфизм линейных пространств, и $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_1 \; (\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})) = (\vec{u}, \vec{v})$. Пространства изоморфны, если между ними существует изоморфизм.

Теорема

Евклидовы пространства V_1 и V_2 изоморфны $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$.

Определение: Ортогональная матрица

Матрица $S \in M_n(\mathbb{R})$ называется ортонормированной, если $S^\top S = E$.

Утв

Пусть V – евклидово пространство, e – ОНБ в V, $e' = eS$ – базис. Тогда e' – ОНБ $\Leftrightarrow$ S ортогональна.

Обозначение: O_n – множество ортогональных матриц в $M_n(\mathbb{R})$. O_n – группы относительно умножения (ортогональная группа).

Определение

Пусть $U \subseteq V$, $\vec{v} \in V$. Ортогональная проекция $\vec{v}$ – это такой вектор $\vec{u} \in U$, что $u - \vec{u} \perp U (\vec{v} - \vec{u} \in U^\perp)$. Обозначение: $\vec{u} = \mathrm{pr}$

Утв

Пусть $e = (\vec{e}_1,, \dots, \vec{e}_k)$ – ортогональный базис в

U. Тогда $\mathrm{pr}_U \vec{v} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\vec{v}, \vec{e}_i)}{(\vec{e}_i, \vec{e}_i)} \vec{e}_i$

Метод Грама-Шмидта (версия метода Якоби)

Пусть $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ – базис в V. Найдем ортогональный базис

$$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)S,$$

где S – унитреугольная матрица.

Замечание

Если матрица перехода треугольная, то $(\vec{e}_1,, \dots, \vec{e}_k)$ выражаются через $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$, т.е. $< \vec{e}_1,, \dots, \vec{e}_k >=< \vec{v}_1, \dots, vv_k >$

В качестве $\vec{e}_1 = \vec{v}_1$, для $k \geq 1$. $\vec{e}_{k+1} = \vec{v}_{k+1} - \mathrm{pr}_{<\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n>} \vec{v}_{k+1}$. Если так, то $\vec{e}_{k+1} \perp < \vec{e}_1,, \dots, \vec{e}_k >$. Тогда система векторов получится ортогональной. Далее покажем индукцией, что $< \vec{e}_1,, \dots, \vec{e}_k >=< \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k >$. При $k = 1$ это верно. При $k \geq 1$ $\vec{e}_{k+1} = \vec{v}_{k+1} - \mathrm{pr}_{<\vec{e}_1,,\dots,\vec{e}_k>} \vec{v}_{k+1} = \vec{v}_{k+1} - \mathrm{pr}_{<\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k>} \vec{v}_{k+1} = \vec{v}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ik} \vec{v}_i \Rightarrow \vec{e}_{k+1} \in < \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+1} >$, Более того, $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)S$, где S – унитреугольная. В частности, $\vec{v}_{k+1} = \vec{e}_{k+1} + \mathrm{pr}_{<\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n>} \vec{v}_{k+1} \in < \vec{e}_1,, \dots, \vec{e}_k >$. Значит $< \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k+1} >=< \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{k+1} >$. Итак, метод работает, получена ортогональная система – базис, и матрица замены – унитреугольная.

$$\vec{e}_{k+1} = \vec{v}_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(\vec{v}_{k+1}, \vec{e}_i)}{(\vec{e}_i, \vec{e}_i)} \vec{e}_i$$

12. Собственные векторы и собственные значения. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Собственные подпространства линейного оператора, их линейная независимость. Условие диагонализируемости оператора. Самосопряжённое линейное преобразование конечномерного евклидова пространства, свойства его собственных значений и собственных векторов.

Математический анализ

1. Пределы по Коши и Гейне, непрерывность. Пределы последовательности и функций. Непрерывные функции.

Пусть $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Тогда задана числовая последовательность, причем принято обозначение $x(n) = x_n$.

Определение: (Предел последовательности)

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, называется сходящейся к $l \in \mathbb{R}$ (или $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$), если $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N) :\ |x_n - l| < \varepsilon$.

Пример: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N) :$ $|\frac{1}{n}| < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}\ N = [\frac{1}{\varepsilon}]+1. (\forall \varepsilon > 0)\ N = [\frac{1}{\varepsilon}]+1 \in \mathbb{N}\ (\forall n > N)\ n > N \to$
$\to n > \frac{1}{\varepsilon} \to \frac{1}{n} < \varepsilon$ $\square$

Теорема: (Единственность предела последовательности)

Числовая последовательность не может иметь более одного предела.

Теорема: (Свойства предела последовательности)

- (ограниченность сходящихся последовательностей). $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится $\Rightarrow$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена;
- (отделимость от нуля) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \neq 0$, то $(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall n > N)\ (sign(x_n) = sign(l)) \land |x_n| > \frac{|l|}{2}$;
- (переход к пределу в неравенствах) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l_2$, $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n \leq y_n, \Rightarrow l_1 \leq l_2$;
- (о промежуточной последовательности) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n =$ $= l,\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \leq y_n \leq z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$.

Теорема: (Арифметические операции со сходящимися последовательностями)

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l_2$, то

- $x_n \pm y_n$ сходится к $l_1 \pm l_2$;
- $x_n \cdot y_n$ сходится к $l_1 \cdot l_2$;
- если дополнительно $y_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ l_2 \neq 0$, то $\frac{x_n}{y_n}$ сходится к $\frac{l_1}{l_2}$.

Определение: (Бесконечно малая)

Бесконечно малой последовательностью называется последовательность, сходящаяся к нулю.

Теорема

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную есть бесконечно малая.

Эквивалентные обозначения предела из определения:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N)\ |x_n - l| < \varepsilon$$
$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$$
$$x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) =: \varepsilon\text{-окрестность } U_\varepsilon(l)$$

То есть у каждого действительного числа есть ε-окрестность. Дополняем числовую прямую символами $+\infty, -\infty, \infty$. Тогда

$$U_\varepsilon(+\infty) := (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$$
$$U_\varepsilon(-\infty) := (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$$
$$U_\varepsilon(\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \cup (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$$

Для них определено отношение порядка, причем $(\forall x \in \mathbb{R})\ -\infty < x < +\infty$.Тогда для всех значений предела справедливо определение вида $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N)\ x_n \in U_\varepsilon(l)$. Кроме того, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Определение

Бесконечно большой последовательностью называется последовательность, имеющая предел $(\pm)\infty$.

Теорема

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ бесконечно малая $\Leftrightarrow \{\frac{1}{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно большая.

Определение

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$\text{монотонно}\begin{cases}\text{неубывающей} & (\forall n \in \mathbb{N}) & x_n \le x_{n+1}\\ \text{невозрастающей} & (\forall n \in \mathbb{N}) & x_n \ge x_{n+1}\\ \text{возрастающей} & (\forall n \in \mathbb{N}) & x_n < x_{n+1}\\ \text{убывающей} & (\forall n \in \mathbb{N}) & x_n > x_{n+1}\end{cases}$$

(называется … если …; для возрастающей и убывающей — *)

* – строго монотонно

Теорема: (Вейерштраса)

Каждая неубывающая (невозрастающая) ограниченная сверху (снизу) последовательность сходится, причем ее предел равен точной верхней (нижней) грани.

Замечание

(дополнение к т. Вейерштраса) $\forall$ монотонная последовательность имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$.
Пусть $\{x_n\}$ – неубывающая и неограниченная сверху, тогда $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ x_N > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow$
$\Rightarrow (\forall n > N)\ x_n \ge x_N > \frac{1}{\varepsilon}$.

Теорема: (Принцип Кантора вложенных отрезков)

Всякая последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ (т.е. $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], \forall n \in \mathbb{N}$) имеет непустое пересечение ($\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \neq \varnothing$).

Лемма: (Неравенство Бернулли)

$(\forall x \ge -1)\ (\forall n \in \mathbb{N})\ (1 + x)^n \ge 1 + nx$

Теорема: (О числе e)

Последовательность $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ сходится. Ее предел называется числом e.

Определение

Если $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел, то $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = l$, то l называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$.

Пример: Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \mathbb{Q}$. Множество частичных пределов этих последовательностей есть $\overline{\mathbb{R}}$.

Теорема: (Больцано-Вейерштрасса)

Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Утв

$\forall$ числовая последовательность имеет хотя бы один частичный предел (конечный или бесконечный)

Определение

Верхним (нижним) пределом числовой последовательности называется наибольший (наименьший) из ее частичных пределов.

Теорема: (Три определения верхнего и нижнего пределов)

Каждая ограниченная последовательность $\{x_n\}$ имеет конечные верхние и нижние пределы $L = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $l = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ Справедливы такие следующие утверждения

- $((\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N):\ x_n < L + \varepsilon) \wedge$
  $\wedge ((\forall \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n > N):\ x_n > L - \varepsilon)$
  $((\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n > N):\ x_n > l - \varepsilon) \wedge$

$\wedge ((\forall \varepsilon > 0)\,(\forall N \in \mathbb{N})\,(\exists n > N): \; x_n < l + \varepsilon)$;

- $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$
  $l = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1,\ldots}\}$

Замечание

Для произвольной числовой последовательности верхние и нижние пределы также существуют, но могут быть бесконечными.

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n > N)\,(\forall p \in \mathbb{N}): \; |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

Теорема: (Критерий Коши сходимости числовых последовательностей)

Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Предел функции

Определение

Проколотой δ-окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество $\dot{U}_\delta(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$. $\dot{U}_\delta((\pm)\infty) := U_\delta((\pm)\infty)$.

Определение

Пусть функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a $\dot{U}_\delta(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$. Тогда $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ($l \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$) означает, что:

по Коши $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \dot{U}_\delta(a))\; f(x) \in U_\varepsilon(l)$

по Гейне $(\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(f) \setminus \{a\}, \; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a) \; \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$

Теорема

Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Пусть $a, l \in \mathbb{R}$

$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x, 0 < |x - a| < \delta)\; |f(x) - l| < \varepsilon$.

Теорема: (Свойства предела функции, связанные с неравенствами)

1. (ограниченность) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, то
   $(\exists \delta > 0)\,(\exists M \in \mathbb{R})\,(\forall x \in \dot{U}_\delta(a))\; |f(x)| \leq M$
2. (отделимость от нуля) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, то
   $(\exists c > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \dot{U}_\delta(a))\; |f(x)| > c$
   и $sign\; f(x) = sign\; l$ ($sign(\pm\infty) = \pm 1$)
3. (предельный переход в неравенствах) Если $(\exists \delta_0 > 0)\,(\forall x \in \dot{U}_\delta(a))\; f(x) \leq g(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x) \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$
4. (о промежуточной функции) Если $(\exists \delta_0 > 0)\,(\forall x \in \dot{U}_{\delta_0}(a))\; f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

Теорема: (Свойства предела, связанные с арифметическими операциями)

Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$. Тогда

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$
3. Если $B \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

Теорема: (Критерий Коши существования предела функции)

$\exists$ конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ тогда и только тогда, когда

$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x', x'' \in \dot{U}_\delta(a))\; |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

Определение

Пусть f определена в (a, b), $-\infty < a < b < +\infty$. Тогда существует левосторонний предел B в точке b ($B = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b-0)$), если

1) (по Коши) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x,\ b - \delta < x < b)\ f(x) \in U_\varepsilon(B)$

2) (по Гейне) $(\forall \{x_n\} \subset (a, b), \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b)\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = B$.

Существует правосторонний предел A в точке a ($A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a+0)$), если

1) (по Коши) $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x,\ a < x < a + \delta)\ f(x) \in U_\varepsilon(A)$

2) (по Гейне) $(\forall \{x_n\} \subset (a, b), \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a)\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Теорема: (Связь предела и односторонних пределов)

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\} \iff$
$\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$

Определение

Функция f $(\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2)$

называется на X, если

$$\text{монотонно}\begin{cases} \text{неубывающей} & f(x_1) \le f(x_2) \\ \text{невозрастающей} & f(x_1) \ge f(x_2) \\ \text{возрастающей} & f(x_1) < f(x_2) \\ \text{убывающей} & f(x_1) > f(x_2) \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} *$$

* – строго монотонно

$\sup\limits_{x\in X} f(x) := \sup\{f(x) :\ x \in X\}$

$\inf\limits_{x\in X} f(x) := \inf\{f(x) :\ x \in X\}$

Теорема: (Существование пределов монотонной функции)

Если

1. f – не убывает на (a, b) $\Longrightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$
2. f – не возрастает на (a, b) $\Longrightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$
3. f – не убывает на (a, b) $\Longrightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$
4. f – не возрастает на (a, b) $\Longrightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$

Пример:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$
2. $\lim\limits_{+0} \dfrac{1}{x} = +\infty, \lim\limits_{-0} \dfrac{1}{x} = -\infty$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$
4. Функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Эта функция не имеет предел ни в одной точке. Пусть $a \in \mathbb{Q}$. Тогда определим две последовательности Гейне

$x'_n = a + \dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} f(x'_n) = 1$, $x''_n = a + \dfrac{\sqrt{2}}{n} \underset{n\to\infty}{\to} f(x''_n) = 0 \Rightarrow$ предела в точке a не существует. Если $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, то

$x'_n = a + \dfrac{1}{n} \to a\ f(x'_n) = 0$

$|x''_n - a| < \dfrac{1}{10^n}\ f(x''_n) = 1 \Rightarrow$ предела в точке a не существует.

Непрерывность

Определение

Пусть f определена в некоторой окрестности $U_{\delta_0}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, то f называется непрерывной в x_0.

Определение

Пусть f определена в $(a, x]$, $(-\infty \le a < x_0)$. Если $f(x_0 - 0) = f(x_0)$, то f непрерывна слева в x_0.

Определение

Пусть f определена в $[x_0, b)$, $(x_0 < b \le +\infty)$. Если $f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то f непрерывна справа в x_0.

Определение

Пусть f определена в $\dot{U}_\delta(a)$. Если f не является непрерывной в x_0, то x_0 называется точкой разрыва функции f.

Определение

Если x_0 – точка разрыва f и $\exists$ конечные $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$, то x_0 – точка разрыва I-го рода. В противном случае – II-го рода.

Определение

Точка разрыва I-го рода называется точкой устранимого разрыва, если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$. Точка разрыва II-го рода называется точкой бесконечного разрыва, если $\exists$ хотя бы один бесконечный $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Пример:

1. $f(x) = sign\ x$. $f(+0) = 1, f(-0) = -1$ – точка разрыва первого рода.
2. $f(x) = |sign\ x|$. $f(+0) = f(-0) = 1 \neq f(0) = 0$ – устранимый разрыв
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $f(+0) = +\infty,\ f(-0) = -\infty$ бесконечный разрыв
4. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ – точка разрыва второго рода
5. Функция Дирихле – разрывна в каждой точке
6. Функция Римана

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если } x = \dfrac{m}{n} \text{ и } n \text{ – наименьшая из возможны} \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$ $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\exists\delta = \min\{|x_0 - \dfrac{[nx_0]}{n}|, |x_0 - \dfrac{[nx_0] \pm 1}{n}| : \dfrac{1}{n} \geq \varepsilon\})$ – непрерывна во всех иррациональных точках.

Теорема

Пусть f определена в некоторой окрестности $U_{\delta_0}(x_0)$. Следующие утверждения эквивалентны:

1. f непрерывна в x_0
2. $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x,\ |x - x_0| < \delta)\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
3. $(\forall\{x_n\} \subset \mathscr{D}(f),\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Следствие: из свойств предела функции.

1. (ограниченность) Если f непрерывна в x_0, то $(\exists\delta)\ (\exists M)\ (\forall x, |x - x_0| < \delta)\ |f(x)| \leq M$
2. (отделимость от нуля) Если f непрерывна в $x_0, f(x_0) \neq 0$, то $(\exists\delta > 0)$ $(\forall x, |x - x_0| < \delta)$ $|f(x)| > \dfrac{|f(x_0)|}{2}$ и $sign\ f(x) = sign\ f(x_0)$
3. (арифметические) Если f, g непрерывны в x_0, то $f \pm g, f \cdot g$ и (для $g(x_0) \neq 0$) $\dfrac{f}{g}$ непрерывны в x_0.

Теорема: (Переход к пределу в сложной функции)

Если $\lim\limits_{x\to x_0(\pm 0)} f(x) = a$ и g непрерывна в a, то $\lim\limits_{x\to x_0(\pm 0)} g(f(x)) = g(a)$

Следствие: (Непрерывность сложной функции) Если f непрерывна в x_0, а g непрерывна в $f(x_0)$, то $g \circ f$ непрерывна в x_0

Замечание

Из $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{y\to a} g(y) = b$, вообще говоря не следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = b$. Последнее равенство справедливо, если $f(x) \neq a$ для $x \in \dot{U}_{\delta_0}$, $\delta_0 > 0$

Теорема: (О точках разрыва монотонной функции)

Если f монотонна на (a, b) $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, то она может иметь на (a, b) не более чем счетное множество точек разрыва. Все эти точки разрыва (если есть) – точки разрыва первого рода, причем неустранимого.

Определение

f называется непрерывной на множестве X, если $(\forall x_0 \in X)$ $(\forall\varepsilon > 0)$ $(\forall\delta > 0)$ $(\forall x \in X,\ |x - x_0| < \delta)$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Теорема: (Первая теорема Вейерштрасса о непрерывных на отрезках функциях)

Если f непрерывна на $[a, b]$, то f ограничена на $[a, b]$

Теорема: (Вторая теорема Вейерштрасса о непрерывных на отрезках функциях)

Если f непрерывна на $[a, b]$, то $(\exists x', x'' \in [a, b])$, $f(x') - \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $f(x'') = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

Теорема: (Больцано-Коши о промежуточных значениях)

Пусть f непрерывна на $[a, b]$. $\forall c = f(x_1) < d = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in [a, b]$, $(\forall e \in (c, d))$ $(\exists \gamma \in [a, b])$ $f(\gamma) = e$.

Определение

$I \subset \mathbb{R}$ называется промежутком, если $\forall\{x_1 < x_2, x_1, x_2 \in I\}$ $[x_1, x_2] \subset I$. Если I содержит хотя бы две точки, то I – невырожденный промежуток.

Лемма

1. I – невырожденный промежуток $\Leftrightarrow$ $(\exists a < b,\ a, b \in \mathbb{R})$: $(I = (-\infty, +\infty)) \vee (I = (-\infty, b]) \vee (I = (-\infty, b)) \vee (I = [a, +\infty)) \vee (I = (a, +\infty)) \vee (I = (a, b)) \vee (I = [a, b)) \vee (I = (a, b]) \vee (I = [a, b])$

Лемма

Если f непрерывна на промежутке I, то образ промежутка $f(I) = \{y : \exists x \in I,\ f(x) = y\}$ – промежуток. В частности, если I – отрезок, то $f(I)$ – тоже отрезок.

Замечание

Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

$(f[-a, a]) = [a, -a]$

Лемма

Пусть f монотонна и непостоянна на промежутке I. Тогда f непрерывна на I тогда и только тогда, когда I промежуток.

Теорема: (Об обратной функции)

Если f строго монотонна и непрерывна на промежутке I, то на промежутке $f(I)$ определена строго монотонна в том же смысле, что и f, обратная функция f^{-1}, то есть $f^{-1} : f(I) \to I$, $(\forall x \in I)\ f^{-1}(f(x)) = x$, $(\forall y \in f(I))\ f(f^{-1}(y)) = y$.

Непрерывность элементарных функций

1. $y = x^n$, n – нечетное, $n \in \mathbb{N}$. – непрерывна, не ограничена. $y(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. $y^{-1} = \sqrt[n]{x}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $y = x^n$, n – четное, $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{D}(y) = [0, +\infty)$, $y([0, +\infty)) = [0, +\infty)$, $y^{-1} = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$.
   $x^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[n]{x})^m$, $x > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
3. $y = \sin(x)$. Непрерывность
   $$|\sin x - \sin a| = 2|\sin\frac{x-a}{2} \cdot \cos\frac{x+a}{2}| \leq |x - a| < \varepsilon$$
   $y = \cos(x)$. Непрерывность:
   $$|\cos x - \cos a| = 2|\sin\frac{x-a}{2} \cdot \sin\frac{x+a}{2}|$$
   Применяя теорему о частном tg, ctg – непрерывны. Применяя теорему об обратной функции arccos, arcsin, arctan ... – непрерывны.

Теорема: (Первый замечательный предел)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

4. $a^x := \lim\limits_{n \to \infty} a^{(x)_n}$, $(a > 1)$.
   Пусть $x > 0$, $(x)_n = \dfrac{[10^n x]}{10^n}$. $\{(x_n)\}$ – неубывающая последовательность, тогда $\{a^{(x)_n}\}$ – неубывающая. $(x)_n \leq [x] + 1 \Rightarrow a^{(x)_n} \leq a^{[x]+1}$

$x < 0,\ a := \frac{1}{a^{-x}}$.

$y = a^x,\ x \in \mathbb{R}\ x_1 < x_2 \overset{?}{\Rightarrow} a^{x_1} < a^{x_2}$

$(x_1)_n \le x_1 < (x_2)_n \le x_2$. По теореме о плотности рациональных чисел: $\exists r \in \mathbb{Q}\ x_1 < r_1 < r_2 < x_2$. Тогда по свойствам степеней с рациональными показателями: $a^{(x_1)_n} < a^{r_1} < a^{r_2} < a^{(x_2)_n}$. Переходя к пределу в неравенствах: $a^{x_1} \le a^{r_1} < a^{r_2} \le a^{x_2}$.

Лемма

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0.$

Лемма

$(\forall \{r_n\} \subset \mathbb{Q},\ \lim\limits_{n\to\infty} r_n = x)\ \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^x$

Теорема

Функция $y = a^x$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, $(a > 0)$

Следствие: Если $(0 < a < 1) \vee (a > 1)$, то $\exists$ обратная функция $y = \log_a x$, непрерывная на $(0, +\infty)$

Теорема: (Второй замечательный предел)

$\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e$

Следствие:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(x + 1)}{x} = \frac{1}{\ln a}$

2. Элементы общей топологии. Непрерывные отображения. Компактность, связность, хаусдорфовость.

Определение

Метрическим пространством называется множество X такое, что для любых $x, y \in X$ определено действительное число $\rho(x, y)$

(метрическое расстояние) и верны следующие утверждения:

1. $\forall x, y \in X\ \ \rho(x, y) \geqslant 0$, причём $\rho(x, y) = 0$, $x = y$
2. $\forall x, y \in X\ \ \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in X\ \ \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Теорема

Каждое линейное нормированное множество (над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$) является метрическим пространством с метрикой, индуцированной нормой по формуле:

$$\rho(x, y) = ||x - y||$$

Следствие: $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ - метрические пространства с метрикой

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = ||\vec{x} - \vec{y}||$$

Утв

Любое множество является метрическим пространством

Замечание

Дальнейшие определения даны для метрического пространства X. В качестве примера удобно брать $X = \mathbb{R}^2$.

Определение

Открытым шаром с центром в точке $x_0 \in X$ радиусом $\varepsilon > 0$ (или же ε-окрестностью точки x_0) называется множество

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X :\ \rho(x, x_0) < \varepsilon\}$$

Определение

Точка x_0 называется *внутренней точкой* множества $A \subset X$, если она принадлежит A вместе с некоторой своей ε-окрестностью:

$$U_\varepsilon(x_0) \subset A$$

Определение

Внутренностью множества A называется множество всех внутренних точек множества A. Обозначается как

$$\operatorname{int} A,\ A$$

От слова interior.

Определение

Множество $A \subset X$ называется *открытым*, если все его точки - внутренние, то есть $A \subset \operatorname{int} A$. Естественно, $\varnothing$ - открытое множество.

Определение

Точка x_0 называется *точкой прикосновения* множества $A \subset X$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ U_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \varnothing$$

Определение

Множество всех точек прикосновения множества $A \subset X$ называется его *замыканием* и обозначается как

$$\operatorname{cl} A,\ \bar{A}$$

Определение

Множество $A \subset X$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения, то есть $A \supset \operatorname{cl} A$. Естественно, $\varnothing$ - замкнутое множество

Определение

Замкнутым шаром с центром в точке $x_0 \in X$ и радиусом $\varepsilon > 0$ называется

$$\bar{B}_\varepsilon(x_0) = \{x \in X :\ \rho(x_0, x) \leq \varepsilon\}$$

Лемма

Для любого $A \subset X$ верно, что

$$\operatorname{int} A \subset A \subset \operatorname{cl} A$$

Следствие: A - открытое множество , $\operatorname{int} A = A$
A - замкнутое множество , $\operatorname{cl} A = A$

Лемма

$\forall A_1 \subset A_2 \subset X$ верно, что

$$\operatorname{int} A_1 \subset \operatorname{int} A_2$$
$$\operatorname{cl} A_1 \subset \operatorname{cl} A_2$$

Лемма

Открытый шар является открытым множеством.

Лемма

Замкнутый шар является замкнутым множеством.

Теорема

1. Внутренность любого множества $A \subset X$ открыта.
2. Замыкание любого множества $A \subset X$ замкнуто.

Лемма

Для любого $A \subset X$ верны равенства

- $X \text{n} \operatorname{int} A = \operatorname{cl}(X \text{n} A)$
- $X \text{n} \operatorname{cl} A = \operatorname{int}(X \text{n} A)$

Следствие: $A \subset X$ - открытое множество тогда и только тогда, когда $X \text{n} A$ - замкнутое.

Определение

Внутренняя точка дополнения множества $A \subset X$ называется *внешней точкой*.

Определение

Границей множества $A \subset X$ называется множество

$$\partial A = \operatorname{cl} A \setminus \operatorname{int} A$$

Все точки ∂A называются *граничными* точками множества A.

Лемма

$$x_0 \in \partial A,\ (\forall \varepsilon > 0\ \ U_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \varnothing,\ U_\varepsilon(x_0) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing)$$

Теорема: (Основное свойство совокупности открытых множеств)

Пусть X - метрическое пространство. Тогда совокупность T открытых подмножеств X обладает следующими свойствами:

1. $\varnothing \in \mathrm{T}, X \in \mathrm{T}$
2. $\forall G_1, G_2 \in \mathrm{T} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathrm{T}$
3. $\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathrm{T} \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} G_\alpha \in \mathrm{T}$, где A является некоторым множеством индексов

Замечание

Под *совокупностью* множеств подразумевается множество всех множеств, обладающих указанным свойством (в данном случае - множество всех открытых множеств).

Определение

Множество X называется *топологическим пространством*, если в нём выделена система подмножеств T, называемых *открытыми*, которая удовлетворяет свойствам из теоремы.

Множество T называется *топологией* множества X.

Определение

Пусть X - топологическое пространство с топологией T. Тогда x_0 называется пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, если

$$(\forall G \in \mathrm{T}, x_0 \in G)\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N\ x_n \in G$$

Предел обозначается как

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

Замечание

Чтобы обеспечить единственность предела, достаточно добавить свойство *хаусдорфовости*:

$$\forall x, y \in X\ \exists G_x, G_y \in \mathrm{T}:\ (x \in G_x) \wedge (y \in G_y) \wedge (G_x \cap G_y = \varnothing)$$

Такое топологическое пространство называется *хаусдорфовым*.

Определение

Компактным множеством в метрическом пространстве X называется такое множество K, что из любого его открытого покрытия множествами с индексами из A можно выделить конечное подпокрытие:

$$\exists \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A:\ \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \supset K$$

Теорема

Любое компактное множество замкнуто

Теорема

Каждое замкнутое подмножество компактного множества компактно.

Определение

n-мерным кубом назовём декартово произведение отрезков, каждый из которых имеет длину d:

$$I = \prod_{j=1}^{n} [a^{(j)}; b^{(j)}]:\ \forall j \in \{1, \dots, n\}\ \ b^{(j)} - a^{(j)} = d$$

Теорема

n-мерный куб компактен.

Следствие: При $n = 1$ получается утверждение, что из любого покрытия отрезка $[a; b]$ открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие. Это утверждение также известно как *теорема Гейне-Бореля*

Теорема: (Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$)

В пространстве $\mathbb{R}^n$ следующие утверждения эквивалентны:

1. K - ограниченное замкнутое множество
2. K - компактное множество
3. $\forall \{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K \ \exists \left(\{\vec{x}_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}, \lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_{m_k} = \vec{x}_0 \in K \right)$

Замечание

Утверждения 2 и 3 эквивалентны в любом метрическом пространстве, а вот эквивалентность с 1м - специфично для $\mathbb{R}^n$

3. Ряды. Числовые и функциональные ряды. Признаки сходимости (Даламбера, Коши, интегральный, Лейбница). Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

4. Дифференцирование. Дифференцирование функций. Применение производной для нахождения экстремумов функций. Формула Тейлора.

Определение

Пусть f определена в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{R}$. Приращением функции f, отвечающим приращению аргумента δx в точка a, называется $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a) (= \Delta f)$. Производной функции $y = f(x)$ в точке a называется конечный предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a),$$

если он существует.

Теорема

Если $\exists f'(a)$, то f непрерывна в точке a.

Замечание

Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример: $f(x) = |x|$, $a = 0$. Не существует предела, так как

$$\lim_{\Delta x\to +0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = 1, \ \lim_{\Delta x\to -0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = -1$$

Теорема: (Арифметические операции с производными)

Если $\exists f'(x_0)$ и $g'(x_0)$, то $\exists$ в точке x_0 у $f \pm g$, $f \cdot g$ и (в случае $g(x_0) \neq 0$) $\frac{1}{g}$, причем

1. $$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$
2. $$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$
3. $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Теорема: (Производные основных элементарных функций)

Справедливые следующие формулы:

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\sinh x)' = \cosh x$$
$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \qquad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$
$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \qquad (\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$
$$(x^a)' = ax^{a-1}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Теорема: (Производная обратной функции)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\delta > 0$. Если $\exists f'(x) \neq 0$, то обратная функция $x = \varphi(y) = f^{-1}(y)$ имеет производную в $y_0 = f(x_0)$, равную

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Утв

Справедливы формулы:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ |x < 1|$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ |x < 1|$$
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \ x > 0, \ a > 0, \ a \neq 1$$

Замечание

Требование непрерывности в теореме 4 существенно.

Дифференцируемость

Определение

Пусть f определена в некоторой окрестности точки a. Если приращение Δy функции f в точке a, отвечающее приращению аргумента Δx, может быть записано в виде $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$, $A \in \mathbb{R}$, то f называется дифференцируемой в точке a, а выражение $A\Delta x$ называется дифференциалом функции f в точке a (Обозначение: $dy = df = A\Delta x$)

Теорема: (Дифференцируемость и производная)

Пусть f определена в некоторой окрестности точки a. f – дифференцируема в a тогда и только тогда, когда $\exists f'(a) \in \mathbb{R}$

Утв

1. Если f дифференцируема в точке a, то f непрерывна в точке a
2. Если f, g дифференцируемы в точке a, то $f \pm g$, $f \cdot g$, и (для $g(a) \neq 0$) $\frac{f}{g}$ дифференцируемы в a, причем

$$d(f \pm g)\big|_a = df\big|_a \pm dg\big|_a$$
$$d(f \cdot g)\big|_a = g(a)df\big|_a + f(a)dg\big|_a$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(a)df\big|_a - f(a)dg\big|_a}{g^(a)}$$

Теорема: (Дифференцируемость сложной функции)

Если $y = g(x)$ дифференцируема в точке a, f дифференцируема в точке $b = y(a)$, то $h = f \circ g$ дифференцируема в точке a, причем $h'(a) = f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)$

Определение

В определении дифференциала $dy = f'(x_0)\Delta x$ приращение независимого аргумента называется его дифференциалом ($dx = \Delta x$)

Утв

(Инвариантность формы первого дифференциала) Формула $dy = f'(x)dx$ для дифференциала функции $y = f(x)$ в точке x справедлива как в случае независимой переменной x, так и в случае, когда x является дифференцируемой функцией.

Утв

Если функция $y(x)$ задана параметрически ($x = \varphi(t), y = \psi(t), \varphi, \psi$ дифференцируемы на (a, b), φ строго монотонна на (a,b) и $\varphi'(t) \neq 0, \ t \in (a, b)$), то она дифференцируема, причем $y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, где $x = \varphi(t), \ t \in (a, b)$.

Пример: (функция, заданная параметрически)

$$x = \cos t$$
$$y = \sin t$$
$$0 \leq t < 2\pi$$

Определение

Графиком функции $f : X \to \mathbb{R}$ называется множество точек $\{(x, y) : x \in X, \ y = f(x)\}$.

Секущей к графику функции $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ называется прямая, проходящая через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, где $0 < |\Delta x| < \delta$. Ее угловой коэффициент $k_{\text{сек}} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если $\exists k_{\text{кас}} := \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}} \in \overline{\mathbb{R}}$, то прямая, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$ с угловым коэффициентом $k_{\text{кас}}$, называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Определение

Если f непрерывно в точке x_0 и $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}(\pm\infty)$, то говорят, что f имеет бесконечную производную в точке x_0.

Теорема: (Геометрический смысл производной)

Пусть $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0. График f имеет касательную в точке $(x_0, f(x_0))$ тогда и только тогда, когда $\exists$ конечная или бесконечная производная $f'(x_0)$.

Замечание

Дифференциал – приращение ординаты касательной, отвечающее приращению аргумента Δx.

Определение

$\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (если $\exists$) называется правой производной $f'_+(x_0)$

$\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (если $\exists$) называется левой производной $f'_-(x_0)$

Если в определении дифференцируемости $\Delta x \to +0(-0)$, то имеем дифференцируемость справа(слева).

Производные и дифференциалы высших порядков

Определение

$f^{(0)} := f,\ f^{(1)} := f'$. По индукции, если $f^{(n-1)}$ дифференцируема в точке x_0, то $f^{(n)}(x_0) := (f^{(n-1)})'(x_0)$. Если $\exists f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, то f n раз дифференцируема в точке x_0.

Определение

$0! = 1,\ 1! = 1,\ n! = (n-1)!n,\ n \in \mathbb{N}$

$C_n^k = \binom{n}{k} := \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Лемма

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k,\ 1 \le k \le n,\ C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

Треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
\swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
\ldots\ \ldots & & \ldots\ \ldots & & \ldots\ \ldots & & \ldots\ \ldots & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
\swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & \swarrow\searrow & & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\ldots\ \ldots & & \ldots\ \ldots & & \ldots\ \ldots & & \ldots\ \ldots & &
\end{array}$$

Теорема: (Правило Лейбница)

Если u, v n раз дифференцируема в точке x, то $u \cdot v$ n раз дифференцируема в x, причем $(uv)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$

Теорема: (Производные n-го порядка элементарных функций)

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$$

$$(x^a)^{(n)} = a \cdot (a-1) \ldots (a-n+1) \cdot x^{a-n},$$

$$(a \notin \mathbb{N}) \lor (a \in \mathbb{N},\ a \ge n)$$

$$(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-1},\ n \in \mathbb{N}$$

Следствие: Бином Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},\ n \in \mathbb{N}$$

Утв

Для бинома Ньютона

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^k \alpha \cdot i^{n-k} \sin^{n-k} \alpha = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

положим $\alpha = \arccos x,\ x \in [-1.1]$. Тогда $\cos(\arccos x) = x,\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k i^{n-k} (\sqrt{1-x^2})^{n-k} =$$
$$= \cos(n \arccos x) + i \sin(n \arccos x)$$

Выражение вида:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

называется многочленом Чебышёва 1-го порядка, а выражение

$$U_{n-1}(x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

многочленом Чебышёва 2-го рода.

Следствие: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0,\ a > 1$

Определение

Дифференциалом n-го порядка функции $y = f(x)$ в точке x называется $d^n f(x) = d(d^{n-1} f)(x)$, причем при каждом выражении дифференциала Δx (приращение независимой переменной) считается постоянным, причем одним и тем же в каждом взятии дифференциала.

Замечание

Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то $\exists$ дифференциал n-го порядка в точке x_0, равный $d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n$

Теорема: (Формула Фаа-ди-Бруно)

Если $x = \varphi(t)$ n раз дифференцируема в точке t_0, $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$, то сложная функция $y = h(t) = f(\varphi(t))$ n раз дифференцируема в t_0, причем

$$h^{(n)}(t_0) = \sum_{\pi\in\Pi} f^{(|\pi|)}(x_0)\prod_{B\in\pi}\varphi^{(|B|)}(t_0),$$

где Π – множество разбиений $\{1, 2, \dots, n\}$, $|B|, |\Pi|$ – число элементов в B, π соответственно.

Формула Тейлора

Лемма

Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то $\exists!$ многочлен степени $\leq n$ $P_n(f, x)$, такой, что $f(x_0) = P_n(f, x_0)$, $f'(x_0) = P_n'(f, x_0) \dots f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(f, x_0)$. Этот многочлен имеет вид

$$P_n(f, x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

и называется многочленом Тейлора степени n относительно x_0.

Лемма

Если φ и ψ $(n + 1)$ раз дифференцируемы в $U_\delta(x_0)$,
$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \dots = \varphi^{(n)}(x_0) = 0$, $\psi(x_0) = \psi'(x_0) = \dots = \psi^{(n)}(x_0) = 0$, но $\psi'(x) \neq 0$, $\psi''(x) \neq 0, \dots, \psi^{(n+1)}(x) \neq 0$, $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$, то $(\forall x \in U_\delta(x_0))$ $\exists \xi$ между x_0 и x такая, что

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{\psi^{(n+1)}(\xi)}$$

Теорема: (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)

Если f $(n + 1)$ раз дифференцируема в $U_\delta(x_0)$, $\delta > 0$, то $(\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0))$ $\exists \xi$ между x_0 и x такая, что остаточный член $f(x) - P_n(f, x)$, (где $P_n(f, x)$ – многочлен Тейлора функции f относительно x_0) имеет вид

$$f(x) - P_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

$$(f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1})$$

Теорема: (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)

Если f n раз дифференцируема в точке x_0, то $f(x) - P_n(f, x) = o((x - x_0)^n)$, $x \to x_0$, где $P_n(f, x)$ – многочлен Тейлора степени n функции f относительно x_0.

Теорема: (Единственность представления формулой Тейлора)

Если для функции f справедливо представление

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots +$$
$$+ \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),\ x \to x_0$$

и

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots +$$
$$+ \dots + b_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),\ x \to x_0$$

, то $a_k = b_k$, $k = 0, 1, \dots, n$

Если $x_0 = 0$, то формула Тейлора называется формулой Маклорена.

Теорема: (Необходимые и достаточные условия монотонности функции)

Пусть f – дифференцируема на интервале (a, b). Тогда

1. $(\forall x \in (a, b))\ f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$ (f – неубывающая на (a, b));
2. $(\forall x \in (a, b))\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow$ (f – невозрастающая на (a, b));
3. $(\forall x \in (a, b))\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow$ (f – возрастающая на (a, b));
4. $(\forall x \in (a, b))\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow$ (f – убывающая на (a, b)).

Замечание

В правых частях можно заменить интервал на отрезок при дополнительных предположениях непрерывности функции на нем.

Теорема: (Первое достаточное условие локального экстремума функции)

Пусть f непрерывна в $U_{\delta_0}(x_0)$ и дифференцируема в $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(x_0)$, $\delta_0 > 0$

1. Если $(\exists \delta > 0)\ (\forall x \in (x_0 - \delta, x_0))\ f'(x)(>) \geq 0$ и $(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)\ f'(x) \leq (<)0$, то x_0 – точка (строгого) локального максимума f;
2. Если $(\exists \delta > 0)\ (\forall x \in (x_0 - \delta, x))\ f'(x) \leq (<)0$ и $(\forall x \in (x_0, x_0 + \delta))\ f'(x) \geq (>)0$, то x_0 – точка (строгого) локального минимума.

Теорема: (Второе достаточное условие локального экстремума функции)

Если f n-раз дифференцируема в точке x_0, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, то

1. Если n четно, то f имеет в точке x_0 локальный минимум при $f^{(n)}(x_0)$ >= и локальный максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$.
2. Если n нечетно, то f не имеет локального экстремума в точке x_0.

Определение

f называется выпуклой (вниз)(вогнутой вверх) на (a, b), если ее график лежит не выше хорды, стягивающей любые две точки этого графика над (a, b). f называется выпуклой (вверх)(вогнутой (вниз)) на (a, b), если ее график лежит не ниже хорды, стягивающей любые две точки этого графика над (a, b).

Теорема: (Необходимые и достаточные условия (строгой) выпуклости)

Пусть f дважды дифференцируема на (a, b)

1. (f выпукла вниз на (a, b)) $\Longleftrightarrow$ $((\forall x \in (a, b))\ f''(x) \geq 0)$
2. (f выпукла вверх на (a, b)) $\Longleftrightarrow$ $((\forall x \in (a, b)) f''(x) \leq 0)$
3. (f строго выпукла вниз на (a, b)) $\Longleftarrow$ $((\forall x \in (a, b)) f''(x) > 0)$
4. (f строго выпукла вверх на (a, b)) $\Longleftarrow$ $((\forall x \in (a, b)) f''(x) < 0)$

Замечание

3), 4) $\Rightarrow$, вообще говоря, неверно.

Пример: (к замечанию)
$\pm x^4, x \in (-1, 1)$

Определение

Пусть f непрерывна в $U_{\delta_0}(a)$, $\exists f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$ и $\exists \delta > 0$, что либо на $(a - \delta, a))$ f выпукла вниз, а на $(a, a + \delta)$ f выпукла вверх, либо на $(a - \delta, a))$ f выпукла вверх, а на $(a, a + \delta)$ f выпукла вниз. Тогда a – называется точкой перегиба.

Теорема: (Необходимые и достаточные условия точки перегиба)

Пусть f непрерывна в $U_{\delta_0}(a)$, дважды дифференцируема в $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a)$. Тогда a – точка перегиба для f $\Leftrightarrow$ $(\exists \delta > 0)$
либо $(\forall x \in (a - \delta, a))\ f''(x) \geq 0$ и $(\forall x \in (a, a + \delta))\ f''(x) \leq 0$
либо $(\forall x \in (a - \delta, a))\ f''(x) \leq 0$ и $(\forall x \in (a, a +$

$\delta)) \ f''(x) \geq 0$.

Теорема: (Геометрическое необходимое условие точки перегиба)

Пусть f дважды дифференцируема в $U_{\delta_0}(a)$ и пусть $y_{\text{кас}}(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ – уравнение касательной к графику $y = f(x)$ в точке $(a, f(a))$. Если a – точка перегиба для f, то $(\exists\delta > 0)$ такое, что
либо $(\forall x \in (a-\delta, a)) \ y_{\text{кас}} \leq f(x)$ и $(\forall x \in (a, a+\delta)) \ y_{\text{кас}}(x) \geq f(x)$,
либо $(\forall x \in (a-\delta, a)) \ y_{\text{кас}}(x) \geq f(x)$ и $(\forall x \in (a, a+\delta)) \ y_{\text{кас}}(x) \leq f(x)$.
(График расположен по разные стороны от касательной)

Замечание

Условие не является достаточным.

Пример: (к замечанию)

$$y = \begin{cases} (2 + \sin\frac{1}{x})x^5, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 5x^4(2 + \sin\frac{1}{x}) - x^3\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$y'' = \begin{cases} 20x^3(2 + \sin\frac{1}{x}) - 8x^2\cos\frac{1}{x} - x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Точкой перегиба не является 0, хотя график расположен по разные стороны касательной.

Определение

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty$

Определение

Прямая $y = kx+b$ называется невертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, $x \to \pm\infty$, если $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx - b) = 0$. Если $k = 0$, то асимптота называется горизонтальной. Если $k \neq 0$, то наклонной.

Теорема: (Необходимое и достаточное существование асимптоты)

Прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$ (при $x \to +\infty$) тогда и только тогда, когда $\exists k = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $\exists b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx)$

5. Функции многих переменных. Частные производные. Градиент и его геометрический смысл. Метод градиентного спуска. Поиск экстремумов функций от многих переменных.

Дифференцируемость функций многих переменных

Определение

(Полным) приращением функции $f(\vec{v}x)$ *в точке* $\vec{v}x_0 \in \mathbb{R}^n$, отвечающим приращению $\vec{v}\Delta x := \vec{v}x - \vec{v}x_0$, называется

$$\Delta f(\vec{v}x_0) = f(\vec{v}x) - f(\vec{v}x_0)$$

Определение

Пусть f определена в некоторой окрестности точки $\vec{v}x_0$. Тогда f называется *дифференцируемой* в точке $\vec{v}x_0$, если её приращение $\Delta f(\vec{v}x_0)$ может быть записано в виде

$$\Delta f(\vec{v}x_0) = \langle \vec{v}A, \vec{v}\Delta x \rangle + o(|\vec{v}\Delta x|), \ \vec{v}\Delta x \to \vec{v}0$$

где $\vec{v}A \in \mathbb{R}^n$ - *градиент* f в точке $\vec{v}x_0$. Обозначается как

$$\operatorname{grad} f(\vec{v}x_0) := \vec{v}A$$

Выражение $\langle \vec{v}A, \vec{v}\Delta x \rangle$ называется *дифференциалом* функции f в точке $\vec{v}x_0$:

$$df(\vec{v}x_0) := \langle \vec{v}A, \vec{v}\Delta x \rangle$$

Определение

Частным (частичным) приращением функции $f(\vec{v}x)$ в точке $\vec{v}x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется приращение функции $f(\vec{v}x)$, отвечающее приращению $\vec{v}\Delta x_j$, имеющему вид

$$\vec{v}\Delta x_j = (0, \dots, \Delta x_j, \dots, 0)$$

Частичное приращение обозначается как

$$\Delta_j f(\vec{v}x_0) = f(\vec{v}x_0 + \vec{v}\Delta x_j) - f(\vec{v}x_0) = f(x_{1,0}, \dots, x_{j-1,0}, x_{j,0} + \Delta x_j, x_{j+1,0}, \dots, x_{n,0}) - f(x_{1,0}, \dots, x_{n,0})$$

Замечание

Заметим, что частичное приращение является приращением функции одной переменной:

$$\Delta_j f(\vec{v}x_0) = \Delta\phi_j(x_{j,0})$$

где $\phi_j(x_j) = f(x_{1,0}, \dots, x_{j-1,0}, x_j, x_{j+1,0}, \dots, x_{n,0})$

Определение

Частной производной функции $f(\vec{v}x)$ в точке $\vec{v}x_0$ по j-й переменной называется производная функции ϕ_j в точке $x_{j,0}$, если она существует. Обозначается как

$$f'_{x_j}(\vec{v}x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{v}x_0) := \phi_j'(x_{j,0})$$

Определение

Также мы будем говорить о просто частной производной функции $f(\vec{v}x)$, которая является ничем иным как функцией многих переменных:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{v}x) := \phi_j'(\vec{v}x) = \phi_j'(x_{1,0}, \dots, x_{n,0})$$

Замечание

То есть взяли производную от ϕ_j, при этом не подставляли ни один аргумент как числовое значение. Полученная функция как функция от $\vec{v}x$ является просто частной производной.

Теорема

Если f дифференцируема в точке $\vec{v}x_0$, то существуют частные производные $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, причём

$$\operatorname{grad} f(\vec{v}x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{v}x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{v}x_0) \right)$$

Теорема

Если f дифференцируема в $\vec{v}x_0$, то она непрерывна в $\vec{v}x_0$.

Теорема: (Достаточное условие дифференцируемости)

Если f определена в окрестности точки $\vec{v}x_0$ вместе со своими частными производными, причём они непрерывны в $\vec{v}x_0$, то f дифференцируема в $\vec{v}x_0$

Геометрический смысл градиента и дифференцируемости

Определение:

- это открытое связное множество. *Замкнутая область* - это замыкание области.

Определение

Параметрически заданной поверхностью в $\mathbb{R}^3$ называется множество точек $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, задаваемых непрерывными в некоторой замкнутой области $\vec{v}D \subset \mathbb{R}^2$ функциями

$$x = \phi(u, v)$$
$$y = \psi(u, v)$$
$$z = \chi(u, v)$$

В частности, график функции $z = f(x, y)$, где $(x, y) \in \vec{v}D$.

Определение

Плоскость, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, называется *касательной плоскостью* к графику $z = f(x, y)$ в данной точке, если для $M_1(x, y, f(x, y))$ угол между секущей M_0M_1 и плоскостью стремится к нулю при $(x, y) \to (x_0, y_0)$ в $\vec{v}D$.

Теорема

Если $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то касательная плоскость к $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ существует и задаётся уравнением

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Определение

Производной функции f в точке $\vec{v}x_0$ по направлению $\vec{v}l$ называется предел (если он существует):

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}l}(\vec{v}x_0) := \lim_{t \to 0+} \frac{f(\vec{v}x_0 + t\vec{v}l) - f(\vec{v}x_0)}{t}$$

Замечание

В разных книгах производную по направлению определяют по-разному. Например, могут убрать стремление t к 0 лишь с положительной стороны, могут добавить модуль $\vec{v}l$ в знаменатель или потребовать, что $\vec{v}l$ имеет единичную длину. Поэтому, если нужно прочитать доказательство, использующее производную по направлению, то стоит уточнить, что именно под этим понятием подразумевает автор.

Утв

Если f дифференцируема в $\vec{v}x_0$, то она имеет производную по любому направлению $\vec{v}l \neq \vec{v}0$, причём

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}l}(\vec{v}x_0) = \langle \operatorname{grad} f(\vec{v}x_0), \vec{v}l \rangle$$

Следствие: Если f дифференцируема в точке $\vec{v}x_0$ и $\operatorname{grad} f(\vec{v}x_0) \neq \vec{v}0$, то производная по направлению $\vec{v}l$, $|\vec{v}l| = 1$

- Максимальна при $\vec{v}l = \frac{\operatorname{grad} f(\vec{v}x_0)}{|\operatorname{grad} f(\vec{v}x_0)|}$
- Минимальна при $\vec{v}l = -\frac{\operatorname{grad} f(\vec{v}x_0)}{|\operatorname{grad} f(\vec{v}x_0)|}$

Замечание

То есть по сути данное следствие указывает, что изменение функции максимально по направлению градиента в данной точке и минимально в обратную сторону.

6. Интегрирование. Определенный и неопределенный интегралы. Методы интегрирования функций. Первообразные различных элементарных функций.

7. Кратные интегралы (двойные, тройные), замена координат, связь с повторными.

Определение кратного интеграла

Случай, когда $f(x)$ - ограниченная функция.

Определение

Пусть f – ограниченная функция, заданная на измеримом по Лебегу Жордану) множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры.

Разбиением множества E называется $E = \bigsqcup_{k=1}^{N} E_k$, где E_k - измеримые по Лебегу (Жордану).

В качестве Δx_k будем брать меру множеств E_k.

Обозначим $M_k = \sup_{x \in E_k} f(x)$, $m_k = \inf_{x \in E_k} f(x)$

Суммы Дарбу - Лебега (Жордана): верхняя $\mathcal{U}(P, f) = \sum_{k=1}^{N} M_k \cdot \mu_{(J)}(E_k)$, нижняя $L(P, f) = \sum_{k=1}^{N} m_k \cdot \mu_{(J)}(E_k)$.

Верхний интеграл Лебега или Римана (L)(R) $\bar{I}_E(f) = \inf_P \mathcal{U}(P, f)$,

Нижний интеграл Лебега или Римана (L)(R) $\underline{I}_E(f) = \sup_P L(P, f)$

Определение

Если (R) $\bar{I}_E(f)$ = (R) $\underline{I}_E(f)$, то f называется интегрируемой по Риману на E, $\int_E f(x)dx$ = (R) $\bar{I}_E(f)$

Если (L) $\bar{I}_E(f)$ = (L) $\underline{I}_E(f)$, то f называется интегрируемой по Лебегу на E, $\int_E f(x)d\mu(x)$ = (L) $\bar{I}_E(f)$

Утв. 1 Функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$(в смысле старого определения) $\Leftrightarrow$ f интегрируема по Риману на $E = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$.

Определение

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — ограниченная измеримая на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры функция.

Если $M = \sup_{x \in E} f(x)$, $m = \inf_{x \in E} f(x)$, то **разбиением Лебега**, отвечающим разбиению $Q = \{m = y_0 < y_1 < \ldots < y_N = M\}$, называется разбиение $P : E = \bigsqcup_{i=1}^{N} E_i$, где $E_i = \{x \in E : fx) \in [y_{i-1}, y_i)\}$, $i = 1, \ldots, N - 1$.

$$E_N = \{x \in E : fx) \in [y_{N-1}, y_N]\}$$

Тогда интегральной суммой Лебега назовем $S(Q, f, \{t_i$

$i = 1, \ldots, N$.

Теорема: (Основная теорема об интеграле Лебега от ограниченных функций)

Если $f(x)$ ограниченная измеримая на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры функция, то она интегрируема по Лебегу (суммируема) на E, причем ее интеграл равен пределу интегральных сумм с разбиениями Лебега, отвечающими разбиениям Q, при стремящемся к нулю диаметре последнего, т.е.

$$\int_E f(x)d\mu(x) = \lim_{\Delta(Q) \to 0} S(Q, f, \{t_i\}).$$

Это значит, что $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall Q, \Delta(Q) < \delta)$ и $\forall \{t_i\}, t_i \in E_i, i = 1, \ldots, N$, где $E = \bigsqcup_{i=1}^{N} E_i$ — разбиение Лебега, отвечающее разбиению Q отрезка $[m, M]$, выполняется $|S(Q, f, \{t_i\}) - \int_E f(x)d\mu(x)| < \varepsilon$.

Случай, когда $f(x) \geqslant 0$.

Пусть $f(x) \geqslant 0$ - измеримая на измеримом по Лебегу множестве E конечной меры функция. В качестве разбиений будем допускать и разбиения на счетное число измеримых по Лебегу множеств:

$E = \bigsqcup\limits_{i=0}^{\infty} E_i$, $E_0 := \{x \in E : f(x) = +\infty\}$. Обратите внимание! Индексацию ведем с 0, и E_0 жестко фиксируем. Соглашение: если $\mu(E_0) = 0$, то $(+\infty) \cdot \mu(E_0) = 0$. Получаем, что мы ничего не можем сказать о M, а $m = 0$.

Тогда разбиение принимает вид $Q : 0 = y_0 < y_1 < \dots$

В качестве $E_i = \{x \in E : f(x) \in [y_{i-1}, y_i)\}, i = 1, \dots$

$\Delta(Q) := \sup\limits_{i=1,\dots}(y_i - y_{i-1})$, может равняться и $+\infty$.

$L(P, f) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} m_i \cdot \mu(E_i)$, $\mathcal{U}(P, f) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} M_i \cdot \mu(E_i)$

Теорема: Основная теорема об интеграле Лебега для неограниченных измеримых функций

Если $f(x)$ - неотрицательная, измеримая на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры, то она интегрируема по Лебегу на E, причем $\int\limits_E f(x)d\mu(x) = \lim\limits_{\Delta(Q)\to 0} S(Q, f, \{t_i\})$. При конечном значении интеграла понятие предела такого вида – то же, что и в предыдущей основной теореме, если же интеграл бесконечен, то требуется, чтобы $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall Q, \Delta(Q) < \delta)$ и $\forall\{t_i\}, t_i \in E_i, i = 1, \dots$, где $E = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ — разбиение Лебега, отвечающее разбиению Q полуоси $[0, +\infty)$, выполняется $S(Q, f, \{t_i\}) \geqslant \varepsilon$.

Определение

Если $\int\limits_E f(x)d\mu(x) < +\infty$, то f называется суммируемой на E.

Случай, когда $f(x)$ - любого знака.

Пусть $f(x)$ измерима на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры. Введем $f_+(x) := \max(f(x), 0), f_-(x) := \max(-f(x), 0)$ - это неотрицательные, измеримые функции. Такие функции интегрируемы по Лебегу, то есть существуют $\int\limits_E f_+(x)d\mu(x), \int\limits_E f_-(x)d\mu(x)$. Если хотя бы один из этих интегралов конечен, то f называется интегрируемой по Лебегу. Если оба конечны, то f - суммируемая на E.

$$\int\limits_E f_+(x)d\mu(x) - \int\limits_E f_-(x)d\mu(x) = \int\limits_E f(x)d\mu(x)$$

Пример измеримой, но не интегрируемой по Лебегу функции: возьмем отрезок, на одной его половине функция равна $+\infty$, на другой $-\infty$.

8. Элементы функционального анализа: нормированные, метрические пространства, непрерывность, ограниченность.

В вопросе про топологию

9. Алгебра и сигма-алгебра. Мера. Измеримые множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега.

Теория вероятностей и случайные процессы

1. Основные понятия теории вероятностей. Определение вероятностного пространства, простейшие дискретные случаи (выборки с порядком и без него, упорядоченные и неупорядоченные), классическая вероятностная модель. Случайная величина, функция распределения.

Математические модели в ТВ. Случайный эксперимент:

2. Условные вероятности. Определение условной вероятности, формула полной вероятности, формула Байеса.

3. Математическое ожидание, дисперсия, корреляция. Определение математического ожидания, дисперсии, ковариации и корреляции, их свойства.

4. Независимость событий. Попарная независимость и независимость в совокупности.

5. Основные теоремы теории вероятностей. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема.

6. Распределения. Стандартные дискретные и непрерывные распределения, их математические ожидания, дисперсии и свойства: биномиальное, равномерное, нормальное, пуассоновское, показательное, геометрическое.

Алгоритмы

1. Анализ алгоритмов. Понятие о сложности по времени и по памяти. Асимптотика, О- символика. Доказательство корректности алгоритмов.

2. Строки и операции над ними. Представление строк. Вычисление длины, конкатенация. Алгоритмы поиска подстроки в строке.

3. Сортировки. Нижняя теоретико-информационная оценка сложности задачи сортировки. Алгоритмы сортировки вставками, пузырьком, быстрая сортировка, сортировка слиянием. Оценка сложности.

4. Представление матриц и векторов. Алгоритмы умножения матриц и эффективные способы их реализации. Численные методы решения систем линейных уравнений.

5. Численное дифференцирование и интегрирование. Численные методы для решения систем дифференциальных уравнений.

6. Граф. Ориентированный граф. Представления графа. Обход графа в глубину и в ширину. Топологическая сортировка. Подсчет числа путей в орграфе.

7. Алгоритмы поиска кратчайших путей в графе. Алгоритм Дейкстры. Алгоритм Форда-Беллмана. Алгоритм Флойда. Алгоритм А*.

8. Недетерминированные конечные автоматы, различные варианты определения. Детерминированные конечные автоматы. Их эквивалентность. Машина Тьюринга.

Комбинаторика

1. Основные правила комбинаторики: правило сложения, умножения. Основные комбинаторные объекты: сочетания и размещения с повторениями и без повторений. Формулы для количества сочетаний и размещений. Принцип Дирихле. Примеры.

Правило сложения

Утв

Пусть у нас есть множество A, содержащее n объектов, и B, содержащее m объектов. Тогда число способов выбрать 1 объект из A **или** один объект из B равно $n + m$.

Правило умножения

Утв

Пусть у нас есть множество A, содержащее n объектов, и B, содержащее m объектов. Тогда число способов выбрать 1 объект из A **и** один объект из B равно $n \cdot m$.

Способы выбора объектов из множества

Размещения с повторениями

Определение

Числом $\bar{A}_n^k$ называется количество способов выбрать k элементов из множества n элементов так, что при этом нам **важен** порядок выбора и мы **допускаем** повторения элементов.

Замечание

Читается как «A из n по k с чертой».

Замечание

Размещение из k элементов с повторениями также называют *k-размещением с повторениями*.

Теорема

$$\bar{A}_n^k = n^k.$$

Размещения без повторений

Определение

Факториалом числа $n > 0$ называют число

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

При этом считают, что

$$0! = 1! = 1.$$

Определение

Числом A_n^k называется количество способов выбрать k элементов из множества n элементов так, что при этом нам **важен** порядок выбора и мы **не допускаем** повторения элементов.

Замечание

Читается как «A из n по k».

Замечание

Размещение из k элементов без повторений также называют *k-размещением без повторений*. При этом n-размещение без повторений называется *перестановкой*.

Теорема

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Сочетания без повторений

Определение

Множество элементов, из которых составлен объект (то же множество, перестановка или размещение), называется *набором* или же *сочетанием*.

Определение

Числом C_n^k называется количество способов выбрать k элементов из множества n элементов так, что при этом нам **не важен** порядок выбора и мы **не допускаем** повторения элементов. (То есть количество различных наборов размера k, которые можно получить из n элементного множества).

Замечание

Читается как «C из n по k».

Замечание

Сочетание из k элементов без повторений также называют k*-сочетанием без повторений*.

Теорема

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Сочетания с повторениями

Определение

Числом $\bar{C}_n^k$ называется количество способов выбрать k элементов из множества n элементов так, что при этом нам **не важен** порядок выбора и мы **допускаем** повторения элементов. (Количество различных k-сочетаний с повторениями).

Теорема

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Доказательство. Поймём, что любой набор с повторениями определяется числами вхождений каждого элемента в данный набор. Для определённости будем считать, что мы работаем с множеством A:

$$A = \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Обозначим как u_i — число вхождений a_i в данный набор. Тогда сразу следует равенство

$$u_1 + \dots + u_n = k.$$

Теперь построим последовательность нулей и единиц, которая однозначно задаст нам набор:

$$\underbrace{1 \dots 1}_{u_1 \text{ раз}} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{u_2 \text{ раз}} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{u_n \text{ раз}}.$$

То есть мы записываем между нулями-разделителями столько единиц, сколько у нас имеется a_i в наборе.

- Сколько всего нулей? Ответ: $n-1$.
- Сколько всего единиц? Ответ: k.
- Какова длина всей последовательности? Ответ: $n+k-1$.

При этом длина последовательности всегда одинакова. Давайте просто выберем k позиций среди $n+k-1$ в ней, куда мы поставим единицы, а в остальных местах будут нули. Тогда мы получим какую-то последовательность, которая точно описывает какой-то из наборов. Отсюда

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

□

Принцип Дирихле

Определение

Пусть у нас есть $n+1$ кролик и n клеток для них. Тогда абсолютно очевидно, что если мы заполним все клетки, то в одной из них будет 2 кролика. Это и называется *принципом Дирихле*. Более формально ещё можно сказать так:

Если у нас есть $nk+1$ объект и n ящиков, то в каком-нибудь ящике окажется не менее $k+1$ объектов.

Пример: У нас есть квадрат со стороной 2. Если мы выберем 5 произвольных точек на его границах или внутри него, то хотя бы 2 из них будут на расстоянии не более $\sqrt{2}$.

Доказательство. Разделим квадрат на 4 меньших со стороной 1. Тогда, по принципу Дирихле хотя бы в одном из таких квадратов будет 2 точки, а наибольшее расстояние между точками в квадрате — это его диагональ, то есть $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ □

2. Множества. Круги Эйлера, операции на множествах. Формула включений и исключений. Примеры.

Формула включений и исключений

Множества

Определение

Множеством называется совокупность каких-либо объектов.

Замечание

Если говорить чуть точнее, то множество считается неопределяемым понятием, так как его определение даётся через синонимичные слова, что является замкнутым кругом.

Замечание

В рамках стандартной модели (так мы будем называть наивную теорию множеств, ибо будем работать по большому счёту только с ней) объектом может быть что угодно, в том числе и множество.

Свойства множества

1. Каждый объект входит в множество ровно один раз, то есть множество хранит *уникальные* объекты. Если мы рассматриваем множества без этого свойства, то они называются *мультимножествами*.
2. Множество не обладает порядком. Если порядок объектов в множестве важен, то такое множество называется *кортежом*, или же *упорядоченным множеством*.
3. Запись $x \in Y$ означает, что объект x принадлежит множеству Y.

Замечание

Еще вводится обозначение $x \notin Y$, что по определению означает $\neg(x \in Y)$.

Определение

Элементом множества называется объект, который принадлежит этому множеству.

Определение

Выражение $X \subset Y$ означает, что множество X является *подмножеством* Y. Формально записывается так:

$$X \subset Y \,)\, (\forall x \in X \,)\, x \in Y).$$

Равенство множеств

Определение

$X = Y$, если $(X \subset Y) \wedge (Y \subset X)$, или же $\forall z \in X \,)\, z \in Y$ и $\forall z \in Y \,)\, z \in X$.

Свойства равенства множеств

1. $X \subset X$ (рефлексивность).
2. $(X \subset Y) \wedge (Y \subset X) \,)\, (X = Y)$ (антисимметричность).
3. $(X \subset Y) \wedge (Y \subset Z) \,)\, (X \subset Z)$ (транзитивность).

Замечание

При этом стоит отметить, что принадлежность не обладает транзитивностью. Контрпримером служит выражение:

$$1 \in \{1\} \in \{2, 3, \{1\}\},$$

но при этом $1 \notin \{2, 3, \{1\}\}$.

Способы описания множеств

1. Прямое перечисление элементов: $X = \{1, 2, 3\}$.
2. Генератор множества (set builder notation) $X = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$.

Парадокс Рассела

Если множество может быть элементом множества, то существует ли множество всех множеств? С этим вопросом мы приходим быстро к противоречию.

Утв

> Рассмотрим $M = \{x \mid x \notin x\}$. Верно ли утверждение $M \in M$?

Доказательство. Имеем 2 случая:

1. $M \in M$. Но из определения $\forall x \in M\ )\ x \notin x$, мы получаем противоречие.

2. $M \notin M$. Но из определения $x \notin x\ )\ x \in M$. Снова противоречие.

Таким образом, множества всех множеств не существует. □

Замечание

Выше мы говорили о равенстве множеств. Как известно, мы определяем равенство как отношение эквивалентности на некотором множестве, но так как мы показали, что множества всех множеств не существует, то мы не можем назвать равенство между множествами отношением эквивалентности.

Пустое множество

Определение

> *Пустым множеством* называется такое множество, в котором нету элементов. Обозначается обычно так: $\varnothing$.

Свойства пустого множества

1. Пустое множество единственно.

2. Пустое множество вложено в любое другое множество: $\forall X\ )\ \varnothing \subset X$.

Различие между принадлежностью и подмножеством

Рассмотрим X - некоторое конечное множество, содержащее n элементов.

Сколько подмножеств у такого множества? Ответ: 2^n.

- $n = 0\ )\ \varnothing$ — 1 подмножество, 0 элементов.
- $n = 1\ )\ \varnothing, \{a\}$ — 2 подмножества, 1 элемент.
- $n = 2\ )\ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ — 4 подмножества, 2 элемента.

Универсальное множество

Определение

> *Универсальным множеством* называется такое множество, для которого в конкретно задаче считается верным, что для любого множества A выполнены два свойства:
>
> - $A \cap U = A$,
> - $A \cup U = U$.

Операции над множествами

1. Объединение: $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

2. Пересечение: $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.

3. Разность: $A \backslash B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.

4. Симметрическая разность: $A \triangle B = \{x \mid (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$.

5. Отрицание (дополнение): $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$.

Дистрибутивность

Утв

> Для любых множеств A, B и C верно, что
>
> $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Доказательство. Пусть $x \in A \cap (B \cup C)$, тогда:

$$(x \in A) \wedge (x \in (B \cup C)).$$

Имеем 2 случая:

1. $(x \in A) \wedge (x \in B)\ )\ x \in (A \cap B)$.

2. $(x \in A) \wedge (x \in C)\ )\ x \in (A \cap C)$.

Фактически означает, что $x \in (A{\cap}B){\cup}(A{\cap}C)\ )\ A{\cap}(B{\cup}C) \subset (A{\cap}B){\cup}(A{\cap}C)$. Теперь покажем обратное. Рассмотрим $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Возникает снова 2 случая:

1. $x \in (A \cap B)\ )\ (x \in A) \wedge (x \in B)\ )\ (x \in A) \wedge (x \in (B \cup C))\ )\ x \in A \cap (B \cup C)$.

2. $x \in (A \cap C)\ )\ (x \in A) \wedge (x \in C)\ )\ (x \in A) \wedge (x \in (B \cup C))\ )\ x \in A \cap (B \cup C)$.

Отсюда по определению равенства $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. □

Законы де Моргана

Законы де Моргана на множествах имеют ровно такие же аналоги, как и в логике:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Упорядоченные пары и кортежи

Определение

Неупорядоченной парой называется мультимножество из 2х элементов. Обозначается как и просто множество: $\{a, b\}$.

Определение

Упорядоченной парой называется неупорядоченная пара, у которой зафиксирован первый элемент. Обозначается через круглые скобки: (a, b). Упорядоченная пара может быть выражена через мультимножество по определению Куратовского:

- упрощенное определение Куратовского $\{a, \{a, b\}\}$,
- полное определение Куратовского $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Пусть есть N элементов. Обозначим $N(\alpha_i)$ — количество элементов, обладающих свойством α_i. $N(\alpha_i')$ — количество элементов, не обладающих свойством α_i. Ну и понятно, что $N(\alpha_i, \alpha_j')$ — количество элементов, обладающих свойством α_i **и** не обладающих свойством α_j.

Теорема

Если мы рассмотрим n свойств, которые мы можем приписать N объектам, то имеет место *формула включений и исключений*:

$$N(\alpha_1', \dots, \alpha_n') = N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_n) +$$
$$+ N(\alpha_1, \alpha_2) + \dots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) - \dots + (-1)^n N(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Доказательство. Воспользуемся математической индукцией

- База $n = 1$:
$$N(\alpha_1') = N - N(\alpha_1)$$
верность очевидна.

- Предположение индукции: формула включений и исключений верна **для любых N объектов и для любых n свойств**. Докажем, что она также верна и в случае $(n+1)$-го свойства для данного N.

Применим предположение индукции для N объектов и свойствам $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$N(\alpha_1', \dots, \alpha_n') = N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_n) +$$
$$+ N(\alpha_1, \alpha_2) + \dots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) - \dots + (-1)^n N(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Теперь сделаем то же самое для $M \leqslant N$ объектов, которые точно обладают свойством α_{n+1}, и свойств $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

$$M(\alpha_1', \dots, \alpha_n') = M - M(\alpha_1) - \dots - M(\alpha_n) +$$
$$M(\alpha_1, \alpha_2) + \dots + M(\alpha_{n-1}, \alpha_n) - \dots + (-1)^n M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

В силу определения M также верно, что $M := N(\alpha_{n+1})$. То есть можно переписать последнее выражение в виде

$$N(\alpha_1', \dots, \alpha_n', \alpha_{n+1}) = N(\alpha_{n+1}) - N(\alpha_1, \alpha_{n+1}) - \dots - N(\alpha_n, \alpha_{n+1}) +$$
$$N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{n+1}) + \dots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}) - \dots + (-1)^n N(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}).$$

Теперь вычтем полученное выражение из того, что было для всех N объектов:

$$N(\alpha_1', \dots, \alpha_n', \alpha_{n+1}') = N(\alpha_1', \dots, \alpha_n') - N(\alpha_1', \dots, \alpha_n', \alpha_{n+1}') =$$
$$= N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_n) - N(\alpha_{n+1}) +$$
$$+ N(\alpha_1, \alpha_2) + \dots + N(\alpha_n, \alpha_{n+1}) - \dots + (-1)^n N(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}).$$

□

Замечание

По понятным причинам слагаемых, содержащих ровно k свойств, будет C_n^k.

Следствие: Пусть у нас есть множество $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Рассмотрим все возможные m-размещения с повторениями из этого множества, при этом $m < n$. их $N := n^m$ штук. Положим их объектами для формулы включений и исключений и скажем, что $N(\alpha_i)$ — это все размещения, в которые **не** входит элемент a_i. Тогда, верны следующие утверждения:

$$N(\alpha_i) = (n-1)^m,$$
$$N(\alpha_i, \alpha_j) = (n-2)^m,$$
$$N(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (n-n)^m = 0,$$
$$N(\alpha_1', \dots, \alpha_n') = 0, \text{ так как } m < n.$$

По формуле включений и исключений имеем:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot C_n^k \cdot (n-k)^m = 0.$$

3. Сочетания. Размещения, перестановки и сочетания. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля. Сочетания с повторениями.

Бином Ньютона

Определение

Биномом Ньютона называется выражение

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Доказательство. n-ю степень суммы можно записать в виде

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n \text{ раз}}.$$

Чтобы получить слагаемое в сумме, мы должны последовательно выбрать из каждой скобки a или b. Любое слагаемое точно будет иметь вид

$$a^k \cdot b^{n-k}.$$

Более того, чтобы определить слагаемое, нам необходимо и достаточно знать, сколько a мы выбрали. При этом выбирать его можно в любых скобках, а это можно сделать C_n^k способами. Отсюда и формула

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

□

Свойства биномиальных коэффициентов

Теорема

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$;
2. $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$;
3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$;
4. $\left(C_n^0\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$;
5. $C_{n+m-1}^{n-1} + \ldots + C_{n-1}^{n-1} = C_{n+m}^n = C_{n+m}^m, \ m \geqslant 0$.

Доказательство.

1. Выбрать k объектов из n - это то же самое, что оставить $n-k$ объектов из n.

2. Количество способов выбрать k-набор из n элементного множества уже известно: C_n^k. Заметим, что каждый набор либо содержит n-й элемент, либо нет. То есть все наборы можно разбить на 2 группы:

   (a) Все наборы, которые содержат n-й элемент. Помимо него в них ещё надо выбрать $k-1$ элемент, а стало быть, их всего C_{n-1}^{k-1} штук.

   (b) Все наборы, которые не содержат n-й элемент. То есть набор выбирается только из первых $n-1$ элементов. Отсюда их C_{n-1}^k штук.

   Так как эти две группы в сумме составляют все возможные наборы, то и очевиден ответ

   $$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

3. Сколько существует подмножеств у множества n элементов? — 2^n. С другой стороны, каждое из этих подмножеств характеризуется своей мощностью, а число подмножеств, чья мощность i, равно C_n^i. Отсюда

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n.$$

4. Рассмотрим всевозможные n-наборы из $2n$ элементного множества. Их C_{2n}^n штук. С другой стороны, пусть $i \in [0, \dots, n]$ — количество элементов для набора, которые мы возьмём из первой части исходного множества. Тогда из второй части мы выберем $n - i$ элементов. В итоге, получим сумму

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i \cdot C_n^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \left(C_n^i\right)^2 = C_{2n}^n.$$

5. Давайте рассмотрим всевозможные m-сочетания с повторениями в множестве $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$. Их $\bar{C}_{n+1}^m = C_{n+1+m-1}^m = C_{n+m}^m = C_{n+m}^n$ штук. С другой стороны, каждое сочетание принадлежит группе наборов, которые содержат $i \in [0, \dots, m]$ элементов a_1. Отсюда

$$C_{n+m}^n = \sum_{i=0}^{m} \bar{C}_n^{m-i} = \sum_{i=0}^{m} C_{n+m-i-1}^{m-i} =$$
$$= \sum_{i=0}^{m} C_{n+m-i-1}^{(n+m-i-1)-(m-i)} = \sum_{i=0}^{m} C_{n+m-1-i}^{n-1}.$$

□

4. Графы: неориентированные, ориентированные, простые графы, мультиграфы и псевдографы. Изоморфизм графов. Некоторые стандартные классы графов: полные, двудольные, цепи, циклы, деревья. Критерий двудольности графа.

Определение

Графом называется пара *множества вершин* и *множества рёбер*.

Определение

Граф $G = (V, E)$ называется *обыкновенным (простым)*, если выполнены следующие условия:

1. Нет «петель», то есть

$$\forall x \in V \ \nexists (x, x) \in E$$

2. Нет ориентации, то есть

$$\forall x, y \in V \ (x, y) = (y, x)$$

3. Нет кратных рёбер, то есть

$$E \subseteq C_V^2$$

Замечание

C_V^2 обозначает множество пар вершин из V без повторений наборов в них.

Замечание

В дальнейшем, если мы говорим о графе без каких-либо оговорок, то подразумевается именно простой граф.

Определение

Если мы отказываемся в определении обыкновенного графа от **первого** свойства, то он называется *псевдографом*.

Определение

Если мы отказываемся в определении обыкновенного графа от **второго** свойства, то он называется *орграфом (ориентированным графом)*.

Определение

Если мы отказываемся в определении обыкновенного графа от **третьего** свойства, то он называется *мультиграфом* (не путать с гиперграфом!!!).

Замечание

Естественно, определения можно комбинировать.

Определение

Граф $K_n = (V, E)$, $|V| = n$ называется *полным*, если у него есть все возможные рёбра. То есть $|E| = C_n^2$

Пример: Сколько существует графов на $V = \{1, \dots, n\}$ вершинах?

У нас C_n^2 рёбер и каждое мы можем либо включить, либо не брать в наш граф. Отсюда их $2^{C_n^2}$ штук.

Определение

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются *изоморфными*, если существует биекция, удовлетворяющая следующему условию:

$$\phi : V_1 \to V_2 : \ \forall e = (x, y) \ \ e \in E_1 \ , (\phi(x), \phi(y)) \in E_2$$

Определение

Степенью вершины $v \in V$ называется количество рёбер, инцидентных ей. Обозначается как $\deg v$

Определение

Входящей степенью $\operatorname{indeg} v$ называется число рёбер, инцидентных данной вершине, в которых v стоит на **втором** месте:

$$\operatorname{indeg} v = |\{y : \ (y, v) \in E\}|$$

Определение

Исходящей степенью $\operatorname{outdeg} v$ называется число рёбер, инцидентных данной вершине, в которых v стоит на **первом** месте:

$$\operatorname{outdeg} v = |\{y : \ (v, y) \in E\}|$$

Замечание

Для простого графа $\forall v \in V$ $\operatorname{indeg} v = \operatorname{outdeg} v$. Определения, данные выше, получают смысл для орграфов.

Определение

Говорят, что в графе вершина $v \in V$ *инцидентна* ребру $\boldsymbol{e} \in E$ (или ребро $\boldsymbol{e}$ инцидентно вершине v), если $\boldsymbol{e}$ содержит в себе эту вершину.

Лемма: (О рукопожатиях)

В графе любого типа $G = (V, E)$ верно утверждение:

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$

Доказательство. Давайте мысленно зафиксируемся на каком-то из рёбер, и начнём суммировать степени вершин. Наше ребро может быть учтено лишь тогда, когда мы будем считать вершины ему инцидентные, коих всего 2. Отсюда и получается равенство. □

Определение

Граф называется *регулярным*, если степени всех вершин одинаковы.

Определение

Маршрутом в графе $G = (V, E)$ будем называть чередующуюся последовательность вершин и рёбер, которая начинается и заканчивается на вершинах.

$$v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_n v_{n+1}, \quad \forall e_i \ \ e_i = (v_i, v_{i+1})$$

Замечание

Определение маршрута, естественно, допускает возможность появления одинаковых рёбер и вершин в последовательности.

Определение

Маршрут называется *замкнутым*, если $v_1 = v_{n+1}$

Определение

Если в замкнутом маршруте все рёбра разные, то он называется *циклом*

Лемма

В замкнутом маршруте можно найти цикл. То есть из замкнутого маршрута получить корректный маршрут цикла.

Доказательство. Пусть есть замкнутый маршрут. Возможно 2 ситуации:

1. Все рёбра замкнутого маршрута оказались разными. Тогда он будет циклом по определению.

2. Нашлось хотя бы 2 одинаковых ребра. В силу конечности маршрута, мы можем рассмотреть такие 2 одинаковых ребра $e = (v, u)$, что между ними в маршруте стоят только разные рёбра. Возможно снова 2 ситуации:

   (a) В маршруте по ребру e мы прошли с разных сторон.

   Если мы прошли $v \to u$, а потом $u \to v$, то мы нашли цикл, у которого начало и конец будут на вершине u. Как маршрут это бы означало следующее:

   $$veu \dots uev \mapsto u \dots u$$

   (b) В маршруте по ребру e мы прошли с одной и той же стороны.

   То есть вначале могло быть $u \to v$, но и потом вышло так же $u \to v$. Снова нашли цикл, который начинается и заканчивается в вершине u.

   $$uev \dots uev \mapsto uev \dots u$$

□

Определение

Цикл называется *простым*, если помимо разных рёбер, у него все промежуточные вершины тоже разные (то есть кроме v_1 и v_{n+1}).

Определение

Если маршрут не замкнут и все его рёбра разные, то он называется *путём (или же цепью)*.

Определение

Путь называется *простым*, если все его вершины разные.

Определение

Граф $G = (V, E)$ *связен*, если для любой пары вершин $x, y \in V$ существует маршрут, начинающийся в x и заканчивающийся в y.

Замечание

Есть между двумя вершинами в графе есть маршрут, то есть и простой путь. Действительно, давайте как-нибудь «выкинем» из маршрута части между двумя одинаковыми промежуточными вершинами так, чтобы больше одинаковых промежуточных вершин не осталось.

Замечание

Отношение существования пути между вершинами является отношением эквивалентности на множестве V.

Определение

Граф называется *ациклическим*, если в нём не содержится циклов.

Определение

Граф $G = (V, E)$ называется *деревом*, если он является связным ациклическим графом.

Теорема

Для графа $G = (V, E)$ следующие 4 утверждения эквивалентны:

1. G - дерево

2. В G любые 2 вершины соединены единственной простой цепью

3. G связен и если $|V| = n$, то $|E| = n - 1$

4. G ацикличен и если $|V| = n$, то $|E| = n - 1$

Доказательство. Построим цикл утверждений:

- 1) 2 В силу определения дерева G, между двумя вершинами будет существовать простой путь. Если их как минимум 2, то на них можно найти цикл, что противоречит ацикличности дерева.

- 2) 3 Связность очевидна. Для доказательства второго факта, воспользуемся индукцией по n:

  - База $n = 1$ тривиальна.

  - Переход $n > 1$.

    У всех вершин не может быть степень, равная 1, ибо тогда отсутствует связность (граф имеет вид пар вершин, инцидентных своему ребру). При этом не может быть и степень, больше либо равная 2: выберем произвольную вершину и будем просто идти по рёбрам, пока можем. В силу конечности графа мы обязательно придём в вершину, из которой либо нету ребра (то есть её степень равна 1, а такого быть не может), либо мы в ней оказались второй раз и нашли цикл (то есть какие-то 2 вершины соединены не единственным путём), противоречие.

    Теперь, доказав наличие вершины степени 1 в нашем графе, выберем её и рассмотрим граф G' без неё и инцидентного ей ребра. Тогда, к G' применимо предположение индукции и $|V'| = n-1, |E'| = n-2$. Для графа G это означает, что $|V| = |V'| + 1 = n, |E| = |E'| + 1 = n - 1$.

- 3) 4 Нужно проверить только ацикличность. Снова воспользуемся индукцией

  - База $n = 1$ тривиальна

  - Переход $n > 1$. Предположим, что это не так и есть цикл. Тогда у всех вершин цикла степень $\geqslant 2$. По лемме о рукопожатиях

    $$\sum_{v\in V} \deg v = 2|E| = 2n - 2$$

    Отсюда в частности следует, что $\exists v_0 \in V : \deg v_0 = 1$, так как если у всех вершин степень $\geqslant 2$, то сумма степеней $\geqslant 2n$, а если меньше или равна единице, то сумма $\leqslant n$. Более того, из сказанного выше эта вершина не лежит на цикле. Значит, мы можем её и инцидентное ребро убрать из графа, применить предположение индукции и получить противоречие.

- 4) 1 Снова индукция по n (проблема только со связностью).

□

Пример: Пусть t_n - число деревьев на n вершинах. Попробуем заметить некоторую закономерность

$$\begin{aligned} &t_1 = 1 \\ &t_2 = 1 = 2^{2-2} \\ &t_3 = 3 = 3^{3-2} \\ &t_4 = 16 = 4^{4-2} \\ &t_5 = 125 = 5^{5-2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Теорема: (Формула Кэли, 1857г.)

$$t_n = n^{n-2}$$

Доказательство. Приведём идею с *кодами Прюфера*: из формулы логично предположить, что мы можем каждому дереву на n вершинах сопоставить размещение $n-2$ чисел из множества $\{1, \dots, n\}$ с повторениями. Покажем явно алгоритмы, один из которых будет по графу находить код, а другой по нему восстанавливать его.

- Алгоритм, который по графу возвращает код.

  1. Выберем вершину степени 1 с наименьшим номером. Допишем справа в уже имеющийся код номер вершины, которая связана с нашей при помощи ребра.
  2. Удалим из графа выбранную вершину и инцидентное ей ребро.
  3. Повторим итерацию, пока не останется дерево на 2х вершинах.

- Алгоритм, который по коду возвращает граф. Выпишем последовательность $\{1, \dots, n\}$, а под ней код, полученный из графа.

1. Выберем самое малое число из верхнего ряда, которого нет в нижнем.
2. Сделаем пару-ребро (u, v), где u - выбранная на предыдущем этапе вершина, v - первая вершина в нижнем ряде.
3. Удалим найденные вершины из рядов.
4. Повторим итерацию, пока не закончится нижний ряд. Сверху останется всего 2 вершины, и они тоже будут образовывать ребро.

Остаётся обосновать, что полученная функция сопоставления графу его кода - биекция.

- Инъективность
- Сюръективность

□

Определение

Унициклическим графом (одноцикловым) называется связный граф с ровно одним циклом.

Замечание

Из того, что в унициклическом графе всего 1 цикл следует, что этот цикл простой. Более того, унициклический граф на n вершинах - это такой, в котором $|V| = |E| = n$.

Теорема

$F(n, k) = k \cdot n^{n-1-k}$

Замечание

Если положить за $C(n, n+k)$ - количество связных графов на n вершинах и с $n+k$ рёбрами, то верно следующее:

- $$t_n = C(n, n-1) = n^{n-2}$$
- $$U_n = C(n, n) \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} n^{n-\frac{1}{2}}$$
- $$C(n, n+1) \sim \frac{5}{24} n^{n+1}$$
- $$C(n, n+k) \sim \gamma(k) \cdot n^{n+\frac{3k-1}{2}}$$

5. Деревья. Связь между количеством вершин и рёбер. Эквивалентные определения класса деревьев. Формула Кэли для числа деревьев на фиксированном множестве вершин.

В предыдущем всё

6. Кликовое число, число независимости, хроматическое число; связь между этими числами. Жадный алгоритм раскраски графа, пример его неоптимальности.

Компьютерные науки

1. Регулярные выражения. Теорема Клини об эквивалентности регулярных выражений и конечных автоматов.

Определение

Алфавит $\sum$ - любое конечное множество.

Определение

Слово - конечная последовательность символов из алфавита.

Определение

Конкатенация - операция сцепки. Пусть w, v - слова, где $w = aba$, а $v = bb$, тогда конкатенация этих слов: $w \circ v = ababb$

Определение

$\sum^*$ - множество всех слов над алфавитом $\sum$

Определение

Язык L - подмножество множества всех слов $\sum^*$.

Определение

Пусть $u = ababb$, тогда $u[i]$ - это **i-тая буква** в слове u. $u[1] = a$, $u[i, j] = u[i] \circ u[i + +1] \circ \ldots \circ u[j]$, например $u[1, 4] = abab$

Определение

Длина слова $|w|$ - количество символов в слове w.

Определение

Пустое слово ε - специальное слово, для которого выполняется:

1. $\forall w \in \sum^* \implies w \circ \varepsilon = \varepsilon \circ w = w$
2. $|\varepsilon| = 0$

Определение

Пусть $x \in \sum^*$, тогда $x^n = \underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{n}$, нулевая степень: $x^0 = \varepsilon$

Определение

Слово u называется **подсловом** слова w, если существуют такие слова x и z, что $w = x \circ u \circ z$

Определение

Пусть $w, u \in \sum^*$, тогда $|w|_u$ - **количество различных вхождений** слова u в слово w как подслова

Например, пусть $w = ababa$, а $u = aba$, тогда $|w|_u = |w|_{aba} = 2$

Операции на языках

1. **Конкатенация**: $X \circ Y = \{x \circ y | x \in X, y \in Y\}$
2. **Возведение в степень:** $X^n = \underbrace{X \circ X \circ \ldots \circ X}_{n}$, при $n \geqslant 1$, если же $n = 0$ и $X \neq \varnothing$, то $X^0 = \varepsilon$. Пустое множество возводить в нулевую степень **нельзя**.
3. **Объединение:** $X | Y = X + Y = X \cup Y$
4. **Итерация** или **звёздочка Клини**: $X^* = \varepsilon + X + X^2 + X^3 + \ldots + X^n + \ldots$
5. $X^+ = X \circ X^*$

P.S. Язык состоящий из одного слова отождествляется со словом, ровно как и слово состоящие из одного символа является буквой алфавита.

Определение

Класс регулярных языков REG:

1. $\varnothing \in REG$
2. $\forall \sigma \in \sum \implies \{\sigma\} \in REG$
3. $\forall X, Y \in REG : X \circ Y, X | Y, X^* \in REG$

Регулярные языки и только они могут быть заданы при помощи регулярных выражений, например выражение $a(a|bb)$ задаёт регулярный язык $L = \{aa, abb\}$.

Конечные автоматы

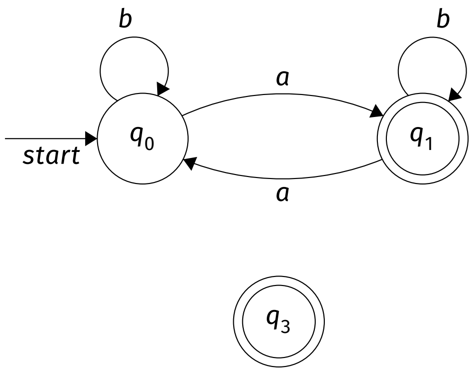
Определение

Конечный автомат $\mathcal{A}$ — устройство, описываемое набором
$\langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F\rangle$:

1. **Q** - конечное множество состояний автомата;
2. Σ - алфавит, слова над которым обрабатывает автомат;
3. q_0 - начальное состояние автомата;
4. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$ - функция переходов
5. $F \subset Q$ - множество принимающих состояний.

Напомним, что 2^Q - множество всех подмножеств Q (булеан). Запись $f : A \to B$ означает, что функция определена на всех элементах множества A. Мы считаем, что если $\delta(q, \sigma) = \varnothing$, то переход из состояния q по символу $\sigma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ не определен.

Пример 1. Диаграмма Мура



Автоматы удобно представлять не набором множеств, а автоматом (Диаграмма Мура).

Каждое состояние обозначаем отдельным кругом (внутри впишем название состояния). Двойной кружок - принимающее состояние. Входная стрелка у начального состояние. Определим переходы: переход из состояния из q_0 в q_1 по символу a обозначим стрелкой. Впишем обратный переход. Петля будет вести из данного состояния в него же.

Автомат принимает слово с точки зрения графов - есть путь из начального состояния в принимающее, если автомат ДКА, то это путь определенном однозначно, для НКА не обязательно путь должен быть определен однозначно, и вдоль этого пути написано наше слово, принадлежность которого мы проверяем.

Распишем формально наш автомат.

1. **Q** - $\{q_0, q_1, q_3\}$
2. Σ - $\{a, b\}$;
3. q_0 -q_0
4. $\delta : (\{q_0, b, q_0\}, \{q_0, a, q_1\}, \{q_1, b, q_1\}, \{q_1, a, q_0\})$
5. $F \subset Q$ - $\{q_1, q_3\}$

Конфигурация автомата Конфигурацией конечного автомата называется $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, q_s, F, \delta\rangle$ называется элемент множества $Conf(\mathcal{A}) = Q \times \Sigma^*$

Отношение достижимости Зададим следующее отношение $\vdash^* \subset Conf(\mathcal{A})^2$:

- $\forall q \in Q, w \in \Sigma^* : (q, w) \vdash^* (q, w)$
- $(q_1, xay) \vdash^* (q_2, ay) \vee (q_2, a, q_3) \in \delta \Rightarrow (q_1, xay) \vdash^* (q_3, y)$.

Если $\forall x : (p, wx) \vdash^* (q, x)$, то будем писать $p \xrightarrow{w} q$.

Слово принимаемое автоматом Будем говорить что слово w принимается автоматом если для некоторого $q_f \in F$ верно $(q_s, w) \vdash^* (q_f, \varepsilon)$. Иначе говоря, если «идя по стрелочкам» в автомате по этому слову и правильно выбирая путь можно дойти до финального состояния.

Язык принимаемый автоматом Язык автомата $\mathcal{A}$ — это множество $L(\mathcal{A})$ всех слов принимаемых автоматом. Будем говорить, что конечный автомат принимает язык B если $B = L(\mathcal{A})$. Будем говорить что два автомата $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ эквивалентны, если $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

Автоматный язык Язык называется автоматным если он принимается каким-либо конечным автоматом.

Теорема Клини Класс автоматных языков и класс регулярных языков совпадают.

Определение

$FollowPos(i\sigma)$ - i σ': i σ' может идти в слове после $i\sigma$

Будем строить ДКА по следующему РВ с помощью вспомогательного множества — $FollowPos$

$$R = \underset{0}{\triangleright}(\underset{1}{a}\underset{2}{a}|\underset{3}{b})^*\underset{4}{b}(\underset{5}{a}|\underset{6}{b})^*\underset{7}{a}\underset{8}{\triangleleft}.$$

Чтобы вычислить множество $FollowPos$, нам понадобится представление формулы в виде графа, который называется синтаксическим деревом:

Как же с помощью него вычислять функцию $FollowPos$? На самом деле одного синтаксического дерева недостаточно, нам придется ввести ещё три специальных атрибута. Пусть u - узел синтаксического дерева, тогда:

Определение: С

мволом f_u будем обозначать значение атрибута $FirstPos(u)$ — множество номеров позиций, с которых может начинаться слово из R_u, где (R_u - регулярное выражение, задаваемое вершиной u)

Определение: С

мволом l_u будем обозначать значение атрибута $LastPos(u)$ — множество номеров позиций, в которых может заканчиваться слово из R_u, где (R_u - регулярное выражение, задаваемое вершиной u)

Определение: А

рибут $nullable(u)$ показывает содержит ли R_u пустое слово (T и F)

Эти атрибуты вычисляются снизу вверх: зная атрибуты дочерних узлов, вычисляются атрибуты родителя.

В примере на рисунке 2 левый узел имеет атрибут $nullable$ равный $True$, а значит конкатенация (корень данного поддерева) может начинаться как с f_u, так и с f_v. С другой стороны итоговая конкатенация может заканчиваться только с f_v, так как правый узел имеет атрибут $nullable$ равный $False$. Атрибут $nullable$ итоговой конкатенации тоже будет равен $False$, так как мы конкатенируем слова, одно из которых точно не может оказаться пустым.

После нескольких итераций вычислений таких атрибутов мы получаем готовое синтаксическое дерево:

Теперь, используя рисунок, мы можем найти необходимое множество $FollowPos$ по следующему алгоритму:

1. Положим сначала $FollowPos(i) = \varnothing$ для каждого номера i
2. Для каждой вершины-конкатенации $u \cdot v$, для каждого $i \in LastPos(u)$ добавим к $FollowPos(i)$ множество $FirstPos(v)$.
3. Для каждой вершины-итерации u^*, для каждого $i \in LastPos(u)$ добавим к $FollowPos(i)$ множество $FirstPos(u)$.

Построим таблицу множества $FirstPos$ для нашего регулярного выражения:

Теперь с помощью таблицы с $FirsPos$ мы можем построить следующий ДКА:

Начальное состояние автомата — это корень синтаксического дерева, поскольку атрибут $FirstPos$(Корень) как раз и будет указывать нам $FollowPos$ в самом начале. Далее проходим по таблице и строим итоговый автомат.

$\delta(S, b) = \bigcup followpos(\bigcup b)$

Проблема данного алгоритма в том, что если вы возьмете РВ и построите по нему ДКА, то оно окажется очень большим. Из-за экспоненциального роста возникают проблемы с памятью. Чтобы решить данную проблему зачастую используют НКА.

Алгоритм построения НКА мы рассмотрим на следующей лекции, а сейчас давайте построим НКА использую такой же формализм, что и выше.

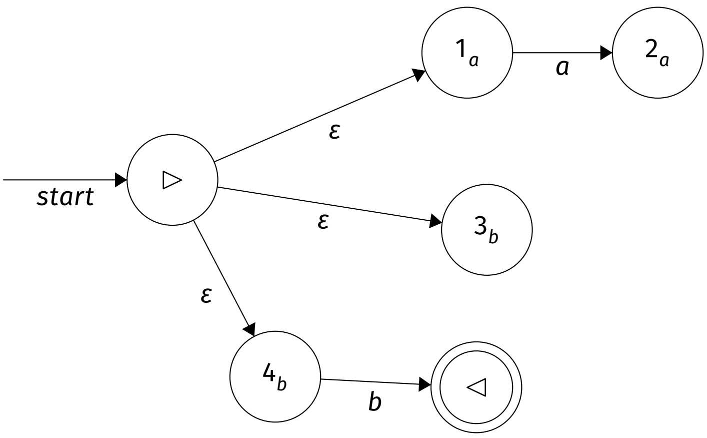
Начальное состояние - нулевая позиция. Из него будеь переход по ε во все позиции, с которых слово может начинается.

Дальше для каждого отдельного символа и для каждой отдельной позиции будет просто переходы во все позиции по $followpos$. Мы уже знаем, что по символу a идет переход в позицию $2a$. Из кружка, в котором написан символ позиции, идет переход во все кружки с $followpos$ от этой позиции и на переходе будет написан этот символ. Но всюду придется заменить маркер начала слова на пустое слово, и в конце добавляем новую вершину - маркер конца слова, и это состояние сделаем принимающим.

Еще раз алгоритм построения:

1. Множество состояний это множество позиций
2. Из позиции есть переход во все позиции из множества $followpos$ этот переход должен быть именно по символу из $followpos$
3. Принимающее состояние единственное - маркер конца слова

4. Все выходы из принимающего состояния - эпсилон переходы



Очевидно, регулярность будет сохраняться для любых композиций приведенных выше операций. Поэтому регулярным языком будет результат любой операции, которую можно, так сказать, ”выразить в элементарных функциях”.
Например, симметрическая разность двух регулярных языков:

$$X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (Y \cap X)$$

будет регулярным языком.
Разность двух регулярных языков также будет регулярна, так как

$$X \setminus Y = X \cap \overline{Y}$$

2. Контекстно-свободные грамматики. Автоматы с магазинной памятью. Эквивалентность автоматов с магазинной памятью и контекстно-свободных грамматик.

3. Архитектура Фон-Неймана. Принципы однородности памяти, адресности и программного управления. Гарвардская архитектура, отличия от архитектуры Фон- Неймана. Примеры реализаций.

4. Абстрактные структуры данных: списка, вектора, деревья поиска. Их асимптотики для операций поиска элемента и вставки новых элементов в середину или конец. Примеры реализаций.

5. Целочисленная арифметика в представлении компьютера. Знаковые и беззнаковые значения, способы представления отрицательных значений. Целочисленное переполнение и его контроль. Длинная целочисленная арифметика.

6. Вещественная арифметика. Представления с фиксированной и плавающей точкой. Стандарт IEEE754. Специальные вещественные значения, определенные стандартом IEEE754 и операции над ними.

7. Устройство виртуального адресного пространства процесса. Стек и куча. Динамическая загрузка библиотек. Механизм трансляции адресов из виртуального в физическое адресное пространство.

8. Операционные системы и их компоненты. Ядро операционных систем. Системные вызовы и их отличия от обычных библиотечных функций. Способы реализации системных вызовов (прерывания, SYSENTER, SYSCALL).

Компоненты операционной системы

Определение

Ядро — программа, которая запускается самой первой. Имеет привилегированное положение на процессоре и может взаимодействовать с «железом» напрямую.

Определение

Базовые библиотеки: зачастую входят в состав операционной системы, потому что привязаны к определенному ядру (версии ядра), чтобы максимально использовать его функциональность.

Определение

Служебные сервисы — ведение логов, обработка сетевых соединения, и т.д.

Определение

Минимальная пользовательская оболочка — чтобы пользователь мог взаимодействовать с системой.

Процессы

Определение

Процесс — любой экземпляр программы, работающей в операционной системе.

Примеры:

- Приложения
- Фоновые сервисы (демоны)
- Команды в терминале

Главные команды для мониторинга процессов:

- ps -A – список процессов
- pstree – иерархия процессов
- top

UNIX программы

Программы:

- **Бинарные исполняемые файлы.**
- **Текстовый файл, начинающийся с #!.** После #! указывается путь к интерпретатору (например, #!/bin/bash). Это могут быть скрипты на Python/Perl/Escript или Shell скрипт.

Название файла и его расширение не имеет значения. Любой файл, имеющий атрибут «исполняемый» является программой.

UNIX пользователи

Единственные привилегированный пользователь: root (UID = 0).

Непривилегерованные пользователи:

- Реальные пользователи, которые могут войти в систему (UID ⩾ 1000)
- Фейковые пользователи, привязанные к сервисам (UID < 1000).

Зачем сервисам нужны фейковые пользователи? Допустим, у вас есть веб-сервер и сервер баз данных. Теоретически какой-то пользователь может подключиться к веб-серверу и найти там уязвимость. Для того, чтобы минимизировать возможный ущерб от уязвимости в одном из процессов, процессы запускаются под разными пользователями и не имеют права общаться друг с другом.

Непривилегерованные пользователи могут временно получить дополнительные привилегии:

- su - запускает терминал от имени root
- sudo - запускает любую программу от имени root
- Запустить программу с атрибутом SUID и владельцем root. SUID атрибут означает, что при запуске программа исполняется от того пользователя, кто является владельцем файла. Кстати, так и работает команда sudo, владелец sudo - root, а также у sudo проставлен атрибут SUID.
- Запустить программу с «capabilities» флагами. Эти флаги позволяют тонко настроить, что можно делать программе, а что - нельзя.

UNIX межпроцессорное взаимодействие

Процессы работают изолированно друг от друга. Единственный способ взаимодействовать друг с другом — использовать методы межпроцессорного взаимодействия ядра (Inter-Process Communication, IPC):

- Сигналы для коротких сообщений
- Каналы и сокеты для последовательных данных
- Разделяемая память, в которой хранятся большие куски данных

Процесс запуска

1. Загрузчик с диска или UEFI материнской платы выполняется в привилегированном режиме
2. Загрузчик запускает ядро, тоже в привилегированном режиме.
3. Ядро запускает первый непривелигерованный процесс: init или systemd.

Сервисы ("Демоны")

Определение

Сервисы — это специальные системные службы, которые работают в фоновом режиме.

Минимальный сет во многих системах:

- **dhclient** – держит активным полученный IP адрес в сети
- **getty** – переключение между графическим/консольным входом в систему
- **sshd** – подключение по ssh
- **ntpd или chronyd** – синхронизация времени
- **syslogd** – системный лог

#!/bin/sh

В терминале вы работаете в интерпретаторе `shell`. `shell` предоставляет возможность выполнять команды и последовательности команд.

Бывают разные интерпретаторы `shell`:

- самодостаточный `shell` program: **FreeBSD**
- основной в `Linux`: **bash**
- debian: **dash**
- alpine: **busybox**
- maxOS X: **zsh**

Системный демон (systemd)

Определение

Процесс, который управляет всеми остальными процессами. При этом сам является обычным процессом. `Systemd` пришел на замену INIT-процессу.

Чем systemd лучше?

- Устранение интерпретации `shell` скриптов.
- Запуск сервисов параллельно

Концепты systemd

- Сервисы
- Цели:
  - *Стандартные цели*. Например, уровни `init` в System-V:
    * poweroff.target (init 0)
    * rescue.target (init 1)
    * multi-user.target (init 3)
    * graphical.target (init 5)
    * reboot.target (init 6)
    * sleep.target и hibertate.target (не присутствуют в System-V)
  - *Специальные цели*

Фоновые задачи

- **Нет привязанного к задаче терминала.** Для того, чтобы сигнал `SIGHUP` не останавливал исполнение задачи используется команда `nohup`.
- **Пишут в лог.** Иногда пишут данные в какую-то старинную локальную почтовую систему.
- **Запускается в единственном экземпляре.** Обычно это достигается с помощью file lock.

Дистрибутивы `Linux`

Ядро называется Linux. Базовая система — минимальная юзабельная система.

Дистрибутив:

- Ядро
- Базовая система
- GUI оболочка
- Программное обеспечение

Какие есть дистрибутивы?

Общего назначения:

- OpenSUSE
- Fedora
- Debian
- Ubuntu

Специфические дистрибутивы:

- Alpine Linux — очень легковесный, поэтому его хорошо ставить на виртуальную машину.
- Kali Linux — используется для тестов на безопасность.

Определение

Прерывание — это сигнал от программного или аппаратного обеспечения, сообщающий процессору о наступлении какого-либо события, требующего немедленного внимания.

Обработка прерывания в x86

- Каждое устройство имеет свой собственный номер прерывания (IRQ).
- Процессор получает сигнал INT и прекращает исполнение текущекого контекста.
- Каждое прерывание имеет свой адрес в векторе прерываний.
- Прерывания бывают не только аппаратные. Его можно сымитировать, вызвав прерывание программно.

Маска прерывания

Иногда хочется запретить прерывания в каком-то месте. Для этого существует маска прерываний.

Номера прерываний

- 0 — нажатие на кнопку включения или Reset
- 1...15 — Аппаратные прерывания. Тут задействованы реальные железяки.
- 16+ — программные прерывания, вызванные через int.

Базовый вектор прерываний

Кто прописывает нам функции, которые будут вызваны при прерывании?

- BIOS — содержит весь минимальный набор функций, нужный после включения.
- Обработка железяк (клавиатура, ...).
- Функции для обращения к данным на диске и загрузки операционной системы.

Обработка прерываний

- Сохранить EIF на стек
- Проставить 1 в флаг IF
- Перейти на инструкцию по адресу IDTR + offset

Перед вызовом обработчика прерывания:

- Сбросить флаги
- Переключить текущее адресное пространство
- Заменяется стек

Выполнение функции обработчика прерывания:

- Сохранить текущее значение регистров и флагов
- что-то поделать...
- бернуть состояние регистров и флагов обратно

Ядро

При запуске операционной системы есть одна программа - ядро. Она может делать все что угодно.

Режимы исполнения (x86)

Обычный режим:

- Процесс имеет доступ только к своей собственной памяти.
- Виртуальное адресное пространство каждого процесса начинается с адреса 0.
- Процесс не может взаимодействовать с устройствами.

Превилегированный режим:

- Полный доступ к физической (не виртуальной) памяти.
- Полный доступ к портам ввода/вывода.
- Некоторые дополнительные команды, не доступные в обычном режиме исполнения.

Определение

Системный вызов — механизм для взаимодействия обычных процессов с ядром. Он позволяет обратиться к функциональности ядра, чтобы сделать недоступные в обычном режиме операции.

Ядро

- Обычный ELF файл.
- Запускается в привилегированном режиме.
- Отвечает за взаимодействие с железом.

Запуск ядра

- Проинициализировать устройства.
- Проинициализировать вектор прерываний.
- Найти, загрузить и запустить все драйвера.
- Понизить привилегии процессора.
- Запустить первый пользовательский процесс — init.

Взаимодействие с ядром (x86)

- Все процессы непривилегированы.
- Единственный способ получить доступ к железу — переключиться в режим ядра.
- Все прерывания переключают процессор в привилегированный режим.
- Используйте int для того, чтобы получить доступ к системным вызовам.

Типы архитектуры ядер

- **Монолитные ядра.** Одна большая программа, которая исполняется в привилегированном режиме. Примеры: Linux.
- **Микроядерная.** Только небольшая часть ядра запускается в привилегированном режиме. Большая часть подсистем работает как пользовательские процессы. Примеры: Minix3.
- **Гибридная.** Модульная, но не одна большая программа, запускаемая в привилегированном режиме. Примеры: Windows, Mac, BSD или Linux.

Системные вызовы

Системный вызов можно осуществить с помощью:

- int 0x80 (Linux, BSD)
- sysenter/sysleave инструкции (Intel)
- syscall/sysret инструкции (AMD64/x86_64)

INT 0x80

- В eax сохраняется номер системного вызова
- Параметры сохраняются в ebx, ecx, ...
- Возвращаемое значение сохраняется в eax
- Конвенции вызовов отличаются от принятых в языке C!

9. Процессы и потоки. Сходства и различия между ними. Реализация многозадачности и алгоритмы планирование задач в операционных системах.

Что такое процесс?

Определение

Процесс — это экземпляр программы в одном из состояний выполнения. Каждый из процессов выполняется в своем изолированном адресном пространстве.

Аттрибуты процесса

Память:

- Значения регистров процессора.
- Таблицы и каталоги страниц виртуального адресного пространства.
- Private и Shared страницы памяти.
- Отображение файлов в память.
- Отдельный стек в ядре для обработки системных вызовов.

Файловая система:

- Таблица файловых дескрипторов.
- Текущий каталог.
- Корневой каталог.
- Маска аттрибутов создания нового файла umask.

Другие аттрибуты:

- Переменные окружения
- Лимиты
- Счетчики ресурсов
- Идентификаторы пользователя и группы

Информация о процессах

Команда **ps** показывает список процессов, **top** — потребление ресурсов.

Жизненный цикл процессов

- Выполняется (Running)
- Остановлен (Stopped)
- Временно приостановлен
  - Suspended — может быть завершен
  - Disk Suspended — не может быть завершен
- Исследуется (Tracing)
- Зомби (Zombie)

Как устроен планировщик заданий?

Round Robin

Windows 9x, старые UNIX

Аппаратный таймер время от времени генерирует прерывание, после чего планировщик выбирает, какой процесс будет выполняться дальше.

Приоритет

Определение

Приоритет процесс — это численное значение от -20 до 19. Оно обозначает то, сколько раз пропустить планировщиком заданий.

- Значение от
- Численное значение —

Многоуровневая очередь

Linux, xBSD, Mac, Windows

Эта схема отталкивается от того, что есть два типа процессов:

- Не очень активно взаимодействующие с внешним миром (что-то вычисляют). Им надо просто не мешать выполняться.
- Много взаимодействующие с пользователем. Их надо переключать быстро.

Есть набор очередей, уровней, которые расположены по увеличению времени переключения. При переключении очереди, если процесс освободил процессор до следующего события, он перемещается в следующую очередь (более редко переключаемую), иначе — в предыдущую.

Ничегонеделание

while (1)   // Так делать очень плохо, потому что вы загружаете процессор

while (1) sched_yield(); // Передаем управление другому процессу

Создание процесса

Системный вызов fork().

Копия процесса

При fork создается полная копия процесса. Память, регистры, ... — точная копия.

Не копируются:

- eax, rax
- Сигналы, ожидающие доставки
- Таймеры
- Блокировки файлов

В связи с копированием всего адресного пространства может возникать необычное поведение. Например, буфер ввода и вывода тоже копируется. Поэтому если не сделать fflush, один и тот же текст может продублироваться.

Ограничения

/proc/sys/kernel/pid_max — максимальное число одновременно запущенных процессов. /proc/sys/kernel/threads_max — максимальное число одновременно выполняющихся потоков (каждый процесс — уже один поток).

Дерево процессов

- Процесс с номером 1 — systemd
- У каждого процесса кроме systemd есть свой родитель
- Если родитель процесса умирает, то его родителем становится systemd.
- Если ребенок умирает, про это узнает его родитель.

Завершение работы процесса

- Системный вызов _exit(int)
- Функция exit(int)
- Оператор return в main

Ожидание завершения процесса

Системный вызов waitpid.

Zombie процессы

Удалением зомби из таблицы процессов занимается родитель — вызовом wait или waitpid.

exec

Системный вызом exec позволяет заместить тело процесса другой программой.

Аттрибуты процесса, сохраняемые exec

- Открытые файловые дескрипторы
- Текущий каталог
- Лимиты процесса
- UID, GID
- Корневой каталог — root.

10. Проблема многопоточной синхронизации. Атомарные переменные и объекты блокировки. Неблокирующие структуры данных и их реализация.

11. Интерконнект в вычислительном кластере. Отличие интерконнекта от глобальных компьютерных сетей. Основные характеристики интерконнекта. Топологии соединений узлов в вычислительном кластере, характеристики топологий.

12. Понятие ускорения и масштабируемости параллельных программ. Закон Амдала. Оценка эффективности параллельных программ. Ярусно-параллельная форма программы.

13. Параллельные и распределённые вычислительные системы. Парадигма Map-Reduce. Примеры, отличия. Распределенные файловые системы. Особенности хранения файлов в них. Репликация.

Основы анализа данных

1. Основные понятия машинного обучения. Основные постановки задач. Примеры прикладных задач.

2. Линейные пространства. Векторы и матрицы. Линейная независимость. Обратная матрица.

3. Производная и градиент функции. Градиентный спуск. Выпуклые функции.

4. Случайные величины. Дискретные и непрерывные распределения. Примеры.

5. Оценивание параметров распределений, метод максимального правдоподобия. Бутстрэппинг.

6. Линейные методы классификации и регрессии: функционалы качества, методы настройки, особенности применения.

7. Метрики качества алгоритм регрессии и классификации.

8. Оценивание качества алгоритмов. Отложенная выборка, ее недостатки. Оценка полного скользящего контроля. Кросс-валидация. Leave-one-out.

9. Деревья решений. Методы построения деревьев. Их регуляризация.

10. Композиции алгоритмов. Разложение ошибки на смещение и разброс.

11. Случайный лес, его особенности. Методы поиска выбросов в данных. Методы восстановления пропусков в данных. Работа с несбалансированными выборками.

12. Нейронные сети: перцептрон, многослойный перцептрон. Автоэнкодеры и рекуррентные нейронные сети.

13. Задача кластеризации. Алгоритм K-Means. Оценки качества кластеризации. Литература

Теория управления и эксперные системы

1. Собственные числа и собственные векторы матриц.

2. Квадратичные формы. Свойства положительно полуопределенных и положительно определенных матриц.

3. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Устойчивость по Ляпунову динамических систем.

5. Логика исчисления предикатов первого порядка. Дайте определения понятиям терм, предикат, формула. Перечислите основные отличия логики предикатов от логики высказываний. Синтаксис и семантика языка первого порядка. Примеры.

6. Преобразование Фурье. Понятие о прямом и обратном преобразовании Фурье. Свойства преобразования Фурье.

7. Вейвлет-преобразование и анализ временных рядов. Непрерывное, дискретное и быстрое вейвлет-преобразования. Основные понятия теории принятия решений, задача принятия решения, процесс принятия решения. Способы оценки, сравнения и выбора варианта. Описание подходов к решению задач коллективного выбора.

8. Математические методы в экспертных системах. Основные компоненты экспертных систем. Этапы разработки. Инструменты разработки. Инженерия знаний.