TUGAS BESAR 1

IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Sistem Persamaan Linier, Determinan, dan Aplikasinya

Dipersiapkan oleh:

Kelompok 13 (BismillahKelarAmin)

Nama	NIM
Muhammad Fajar Ramadhan	13520026
Taufan Fajarama Putrawansyah R	13520031
Addin Nabilal Huda	13520045

PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA
SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

2021

DAFTAR ISI

BAB 1: DESKRIPSI MASALAH

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Dalam mata kuliah IF2123 Aljaber Linier dan Geometri, kita sudah mempelajari berbagai metode untuk menyelesaikan SPL, termasuk menghitung determinan matriks. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}b$), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Di dalam Tugas Besar 1 ini, kita diminta untuk membuat satu atau lebih *library* aljabar linier dalam Bahasa Java. Library tersebut berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Selanjutnya, *library* tersebut kita gunakan di dalam program Java untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi.

BAB 2: TEORI SINGKAT

2.1 Metode Eliminasi Gauss

Metode eliminasi gauss merupakan proses eliminasi dengan menerapkan operasi baris elementer pada matriks augmented yang akan menghasilkan matriks dalam bentuk eselon baris. Pada matriks eselon baris tersebut kemudian dilakukan substitusi balik untuk menyelesaikan suatu SPL.

2.2 Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan adalah proses eliminasi dengan menerapkan operasi baris elementer pada matriks augmented yang akan menghasilkan matriks dalam bentuk eselon baris teresuksi. Metode ini merupakan pengembangan dari metode eliminasi Gauss. Terdapat dua fase pada metode ini, yaitu fase maju atau fase eliminasi Gauss dan fase mundur. Pada fase maju, diterapkan OBE hingga menghasilkan nilai-nilai 0 di bawah 1 utama. Kemudian, pada fase mundur diterapkan OBE hingga menghasilkan matriks dengan nilai-nilai 0 di atas 1 utama. Pada metode ini, tidak diperlukan substitusi mundur untuk memperoleh nilai-nilai variabel karena nilai variabel dapat langsung diperoleh dari matriks augmented akhir.

2.3 Determinan

Determinan merupakan nilai yang dihitung dari unsur-unsur sebuah matriks persegi. Pada matriks 1x1, nilai determinannya merupakan satu-satunya elemen yang terdapat pada matriks tersebut. Pada matriks 2x2 yang direpresentasikan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

nilai determinannya dapat dihitung sebagai det(A) = $a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$
Pada matriks 3x3, yang direpresentasikan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

dapat diterapkan metode sarrus sehingga nilai determinannya dapat dihitung sebagai
det(A) = $a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{12}\, a_{21}\, a_{31} - a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - (a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33})$
Secara umum, determinan matriks segitiga berukuran nxn dapat dihitung sebagai det(A) = $a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots\, a_{nn}$.
Determinan matriks dapat diperoleh dengan melakukan operasi baris elementer hingga diperoleh matriks segitiga (segitiga bawah atau atas). Selain itu, determinan matriks juga dapat diperoleh dengan ekspansi kofaktor (dijelaskan pada 2.5). Dengan menggunakan kofaktor, determinan matriks yang direpresentasikan sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dapat dihitung dengan salah satu dari persamaan berikut:

Secara baris

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \cdots + a_{1n}c_{1n}$$
$$\det(A) = a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + \cdots + a_{2n}c_{2n}$$
$$\vdots$$
$$\det(A) = a_{n1}c_{n1} + a_{n2}c_{n2} + \cdots + a_{nn}c_{nn}$$

Secara kolom

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + \cdots + a_{n1}c_{n1}$$
$$\det(A) = a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22} + \cdots + a_{n2}c_{n2}$$
$$\vdots$$
$$\det(A) = a_{1n}c_{1n} + a_{2n}c_{2n} + \cdots + a_{nn}c_{nn}$$

2.4 Matriks Balikan

Matriks balikan atau matriks invers adalah matriks yang bila dikalikan dengan matriks asalnya, akan menghasilkan matriks identitas. Sebuah matriks memiliki balikan(matriks nonsingular) bila determinan matriks tersebut tidak sama dengan nol. Salah satu metode mencari matriks balikan adalah dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan. Misalkan A adalah matriks persegi berukuran n x n. Balikan matriks A adalah A^{-1} sedemikian sehingga $AA^{-1}=I$. Maka, metode eliminasi Gauss Jordan dapat digunakan untuk memperoleh matriks balikan sebagai berikut:

$$[A|I] \overset{\text{Gauss-Jordan}}{\sim} [I|A^{-1}]$$

Matriks balikan juga dapat diperoleh dengan menggunakan metode matriks adjoin(dijelaskan pada 2.6) dengan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

2.5 Matriks Kofaktor

Misalkan kofaktor adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan kofaktor dari kofaktor-kofaktor matriks itu sendiri. Sementara, kofaktor merupakan hasil perkalian minor dengan suatu angka yang mengikuti aturan $(-1)^{i+j}$ dengan i merupakan baris ke-i dan j merupakan baris ke-j. Kofaktor suatu elemen baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dilambangkan dengan C_{ij} dan dapat dihitung sebagai:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

2.6 Matriks Adjoin

Matriks adjoin merupakan hasil transpose dari matriks kofaktor. Sementara, operasi transpose merupakan operasi pertukaran elemen pada baris menjadi kolom atau kolom menjadi matriks.

2.7 Kaidah Cramer

Kaidah cramer adalah metode yang digunakan untuk menyelesaikan SPL dengan menggunakan determinan dari matriks yang terbentuk dari koefisien dan konstanta masing-masing persamaan di sistem tersebut. Untuk menerapkan kaidah cramer, matriks koefisien dari SPL harus merupakan matriks persegi dengan determinan tidak sama dengan nol. Misalkan suatu sistem persamaan linear Ax=B yang terdiri dengan n variabel sedemikian sehingga det(A) tidak sama dengan nol, maka SPL tersebut memiliki solusi unik yaitu:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

$$\ldots$$

$$x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

2.8 Interpolasi Polinom

Interpolasi polinom merupakan metode interpolasi dengan mengasumsikan pola data yang dimiliki mengikuti pola polinomial, baik berderajat satu(linier) atau berderajat tinggi. Metode ini dilakukan dengan membentuk persamaan polinomial yang selanjutnya digunakan untuk melakukan prediksi suatu nilai tertentu. Polinom interpolasi berderajat n yang menginterpolasi titik-titik $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$ adalah titik-titik berbentuk $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Dengan mensubstitusikan (x_i, y_i) ke dalam persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, akan diperoleh n buah sistem persamaan linier dalam $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ seebagai berikut:

$$\begin{array}{c} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^{\,2} + \ldots + a_n\,x_0^{\,n} = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^{\,2} + \ldots + a_n\,x_1^{\,n} = y_1 \\ \ldots \qquad\qquad \ldots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^{\,2} + \ldots + a_n\,x_n^{\,n} = y_n \end{array}$$

Penyelesaian SPL tersebut akan menghasilkan nilai $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ yang dapat disubsitusikan ke persamaan polinom $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Selanjutnya, suatu nilai x tertentu dapat ditaksir dengan mensubstitusikan x ke dalam persamaan polinom tersebut.

2.9 Regresi Linier Berganda

Regresi linier merupakan salah satu metode untuk mempredeksi nilai. Regresi linier berganda adalah salah satu bentuk analisis regresi linier dengan variabel bebas lebih dari satu. Rumus umum untuk regresi linier berganda dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mendapatkan nilai dari setiap β, digunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* sebagai berikut:

$$\begin{array}{lllll} nb_0 + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i} & + & \cdots + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ b_0\sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} & + & \cdots + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_0\sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{1i} & + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{ki}x_{2i} & + & \cdots + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = \sum_{i=1}^{n} x_{ki}y_i \end{array}$$

Setelah diperoleh persamaan regresi linier, nilai-nilai x_k dapat disubstitusikan ke persamaan tersebu untuk menaksir hasil y.

BAB 3: IMPLEMENTASI

3.1 Class Matrix

Attribute

Nama	Tipe	Deskripsi
M	double[][]	Kontainer berisi elemen-elemen matriks
rows	int	Jumlah baris
cols	int	Jumlah kolom
spl	String	String untuk menyimpan solusi

Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
Matrix	Constructor	Int rows Int cols	Membuat Matrix baru dengan jumlah baris=rows dan jumlah kolom=cols
Matrix	Constructor	double[][] M	Membuat matrix baru yang berisi elemen-elemen pada M
Matrix	Constructor	Int a	Membuat Matrix baru dengan menerima input dari user, Bila a==1, menerima matrix n x m Bila a==2, menerima matrix n x n Bila a==3, menerima matrix untuk interpolasi Bila a==3, menerima matrix dalam bentuk file
toInterpolasi	Matrix	Matrix A	Digunakan untuk mengubah input matriks dari file untuk membentuk matriks interpolasi
cramer	void	Matrix A	Prosedur untuk menyelesaikan SPL dengan metode cramer
replaceColumn	Matrix	Matrix A Int col	Mengganti elemen-elemen kolom col pada Matrix A dengan elemen-elemen pada elemen di sebelah kanan ”=”, digunakan untuk perhitungan cramer
identity	Matrix		Membuat Matrix identitas
splBalikan	void	Matrix A	Prosedur untuk menyelesaikan SPL dengan metode matriks balikan
regresi	void		Prosedur untuk melakukan regresi linear berganda
interpolasi	void	Matrix A	Prosedur untuk melakukan perhitungan interpolasi

display	void	Matrix A	Prosedur untuk menampilkan matrix ke layar

3.2 Class Operasi

Attribute

Nama	Tipe	Deskripsi
-	-	-

Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
scaleRow	void	Matrix m Int i Double k	Mengalikan baris i pada Matrix m dengan konstanta k
swapRow	void	Matrix m Int i1 Int i2	Menukar baris i1 dengan baris i2 pada Matrix m
replaceRow	void	Matrix m Int i1 Int i2 Double k	Menambahkan baris i2 dengan hasil kali i1 dengan suatu konstanta k
DetGauss	float	Matrix m	Menghitung determinan dengan reduksi baris
DetCofactor	float	Matrix m	Menghitung determinan dengan metode kofaktor
inverse	Matrix	Matrix m	Mencari matriks balikan menggunakan reduksi baris dan matriks identitas
InvAdj	Matrix	Matrix M	Mencari matriks balikan menggunakan metode matriks adjoin
SaveFile	void	Matrix M	Prosedur untuk menulis Matrix ke suatu file dan menyimpannya
SaveFile	void	float M	Prosedur untuk menulis nilai float ke suatu file dan menyimpannya
SaveFile	void	String name	Prosedur untuk menyimpan string ke suatu file dan menyimpannya
isColsZero	boolean	Matrix m Int j	Menentukan apakah kolom i berisi 0 semua atau tidak
getIdxRowLeadingNum	int	Matrix A Int i	Menentukan leading number dari sebuah baris
isSPLRowZero	boolean	Matrix m Int i	Menentukan apakah baris i berisi 0 semua atau tidak

gaussSPLParametrik	String[]	Matrix A	Menentukan solusi parametrik dari suatu SPL

3.3 Class Gauss

Attribute

Nama	Tipe	Deskripsi
-	-	-

4

Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
eselonBaris	Matrix	Matrix A	Membuat Matrix eselon baris
eselonBarisRed	Matrix	Matrix A	Membuat Matrix eselon baris tereduksi
printSPL	void	Matrix A	Prosedur untuk menampilkan solusi SPL ke layar
gaussSPL	Double[]	Matrix A	Mencari solusi SPL yang memiliki solusi unik

3.4 Class Main

Attribute

Nama	Tipe	Deskripsi
-	-	-

5

Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
printmenu	void		Menampilkan menu utama pada layar
printmenuspl	void		Menampilkan submenu SPL pada layar
printmenuinverse	void		Menampilkan submenu pencarian matriks inverse pada layar

BAB 4: EKSPERIMEN

4.1

a)

```
1 1 -1 -1 1
2 5 -7 -5 -2
2 -1 1 3 4
5 2 -4 2 6
```

Matriks augmented pada studi kasus 1.a

```
Solusi SPL tidak ada.
```

Hasil perhitungan studi kasus 1.a menggunakan Gauss dan Gauss Jordan

```
1 1 -1 -1 1
2 5 -7 -5 -2
2 -1 1 3 4
5 2 -4 2 6
Determinan matriks koefisien = 0, matriks koefisien tidak memiliki balikan. Metode matriks balik
an tidak dapat diterapkan pada SPL ini.
```

Studi kasus 1.a dengan menggunakan metode matriks balikan

```
1 1 -1 -1 1
2 5 -7 -5 -2
2 -1 1 3 4
5 2 -4 2 6
Determinan matriks koefisien = 0. Metode cramer tidak dapat diterapkan pada SPL ini.
```

Studi kasus 1.a dengan menggunakan metode cramer

Penyelesaian SPL ini tidak bisa dilakukan dengan menerapkan metode matriks balikan dan cramer karena determinan matriks koefisien pada SPL ini bernilai 0. Hal ini dikarenakan salah satu syarat berlakunya metode cramer dan matriks balikan adalah determinan matriks koefisien tidak sama dengan 0. Alternatifnya, perhitungan dapat dilakukan menggunakan metode gauss dan gauss jordan dan menghasilkan solusi unik.

b)

```
src > test1b.txt
1 -1 0 0 1 3
1 1 0 -3 0 6
2 -1 0 1 -1 5
-1 2 0 -2 -1 -1
```

Matriks augmented pada studi kasus 1.b

```
1 -1 0 0 1 3
1 1 0 -3 0 6
2 -1 0 1 -1 5
-1 2 0 -2 -1 -1
x[1] = null
x[2] = b
x[3] = c
x[4] = d
x[5] = e
```

Hasil perhitungan studi kasus 1.c dengan metode gauss (masih belum sesuai)

```
test1b.txt
Jumlah equation tidak sama dengan jumlah variabel (jumlah baris dan kolom pada matriks koefisien tidak
sama). Metode matriks balikan tidak dapat diterapkan pada SPL ini.
```

Studi kasus 1.b dengan menggunakan metode matriks balikan

```
test1b.txt
Jumlah equation tidak sama dengan jumlah variabel (jumlah baris dan kolom pada matriks koefisien tidak
sama). Metode cramer tidak dapat diterapkan pada SPL ini.
```

Studi kasus 1.b dengan menggunakan metode cramer

Matriks koefisien pada SPL di atas memiliki jumlah baris 4 dan kolom 5. Penyelesaian SPL ini tidak bisa dilakukan dengan menerapkan metode matriks balikan dan cramer karena jumlah persamaan tidak sama dengan jumlah variabel yang akan dicari, yaitu ketika jumlah baris dan kolom pada matriks koefisien tidak sama (bukan matriks persegi). Hal ini dikarenakan salah satu syarat berlakunya metode cramer dan matriks balikan adalah matriks koefisien dari SPL harus ada. Sedangkan matriks bukan persegi tidak memiliki determinan.

Sebagai alternatif, dapat digunakan metode eliminasi Gauss atau Gauss-Jordan dan akan menghasilkan SPL dengan solusi banyak. Namun, pengerjaan solusi parametrik kelompok kami belum sepenuhnya selesai.

c)

```
src > test1c.txt
0 1 0 0 1 0 2
0 0 0 1 1 0 -1
0 1 0 0 0 1 1
```

Matriks augmented pada studi kasus 1.c

```
x[1] = null
x[2] = b
x[3] = c
x[4] = d
x[5] = e
```

Hasil perhitungan studi kasus 1.c dengan metode gauss (masih belum sesuai)

```
test1c.txt
Jumlah equation tidak sama dengan jumlah variabel (jumlah baris dan kolom pada matriks koefisien tidak
sama). Metode matriks balikan tidak dapat diterapkan pada SPL ini.
```

Studi kasus 1.c dengan menggunakan metode matriks balikan

```
test1c.txt
Jumlah equation tidak sama dengan jumlah variabel (jumlah baris dan kolom pada matriks koefisien tidak
sama). Metode cramer tidak dapat diterapkan pada SPL ini.
```

Studi kasus 1.c dengan menggunakan metode cramer

Matriks koefisien pada SPL di atas memiliki jumlah baris 3 dan kolom 6. Penyelesaian SPL ini tidak bisa dilakukan dengan menerapkan metode matriks balikan dan cramer karena jumlah persamaan tidak sama dengan jumlah variabel yang akan dicari, yaitu ketika jumlah baris dan kolom pada matriks koefisien tidak sama (bukan matriks persegi). Hal ini dikarenakan salah satu syarat berlakunya metode cramer dan matriks balikan adalah matriks koefisien dari SPL harus ada. Sedangkan matriks bukan persegi tidak memiliki determinan.

Sebagai alternatif, dapat digunakan metode eliminasi Gauss atau Gauss-Jordan dan akan menghasilkan SPL dengan solusi banyak. Namun, pengerjaan solusi parametrik kelompok kami belum sepenuhnya selesai.

d

```
test > test1d6.txt
1 0.5 0.33333 0.25 0.2 0.16667 1
0.5 0.33333 0.25 0.2 0.16667 0.14286 0
0.33333 0.25 0.2 0.16667 0.14286 0.125 0
0.25 0.2 0.16667 0.14286 0.125 0.11111 0
0.2 0.16667 0.14286 0.125 0.11111 0.1 0
0.16667 0.14286 0.125 0.11111 0.1 0.09091 0
```

Matriks augmented pada studi kasus 1.d dengan n=6

```
D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\Semester 3\Aljabar Linier dan Geometri\Tubes Algeo\Algeo01-20026\
test\test1d6.txt
x[1] = 31.658301
x[2] = -462.958969
x[3] = 2101.724643
x[4] = -4111.774565
x[5] = 3641.329725
x[6] = -1200.389964
```

Studi kasus 1.d pada n=6 dengan menggunakan metode eliminasi gauss

```
D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\Semester 3\Aljabar Linier dan Geometri\Tubes Algeo\Algeo01-20026\
test\test1d6.txt
x[1] = 31.658301
x[2] = -462.958969
x[3] = 2101.724643
x[4] = -4111.774565
x[5] = 3641.329725
x[6] = -1200.389964
```

Studi kasus 1.d pada n=6 dengan menggunakan metode matriks balikan

```
D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\Semester 3\Aljabar Linier dan Geometri\Tubes Algeo\Algeo01-20026\
test\test1d6.txt
x[1] = 31.658305
x[2] = -462.958973
x[3] = 2101.724670
x[4] = -4111.774748
x[5] = 3641.329734
x[6] = -1200.389997
```

Studi kasus 1.d pada n=6 dengan menggunakan metode cramer

Pada penyelesaian SPL matriks hilbert dengan n=6, penerapan metode Gauss, Gauss-Jordan, matriks balikan, dan cramer menghasilkan nilai yang sama dan berupa solusi unik. Metode matriks balikan dan cramer dapat diterapkan pada SPL ini karena SPL tersebut memiliki matriks koefisien, yaitu matriks Hilbert, dengan jumlah kolom dan baris yang sama (matriks persegi), yaitu 6 dan determinan dari matriks Hilbert tersebut tidak sama dengan 0.

```
test > test1d10.txt
1 0.5 0.33333 0.25 0.2 0.16667 0.14286 0.125 0.11111 0.1 1
0.5 0.33333 0.25 0.2 0.16667 0.14286 0.125 0.11111 0.1 0.09091 0
0.33333 0.25 0.2 0.16667 0.14286 0.125 0.11111 0.1 0.09091 0.08333 0
0.25 0.2 0.16667 0.14286 0.125 0.11111 0.1 0.09091 0.08333 0.076923 0
0.2 0.16667 0.14286 0.125 0.11111 0.1 0.09091 0.08333 0.076923 0.071429 0
0.16667 0.14286 0.125 0.11111 0.1 0.09091 0.08333 0.076923 0.071429 0.06667 0
0.14286 0.125 0.11111 0.1 0.09091 0.08333 0.076923 0.071429 0.06667 0.0625 0
0.125 0.11111 0.1 0.09091 0.08333 0.076923 0.071429 0.06667 0.0625 0.05882 0
0.11111 0.1 0.09091 0.08333 0.076923 0.071429 0.06667 0.0625 0.05882 0.05555 0
0.1 0.09091 0.08333 0.076923 0.071429 0.06667 0.0625 0.05882 0.05555 0.05263 0
```

Matriks augmented pada studi kasus 1.d dengan n=10

```
D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\Semester 3\Aljabar Linier dan Geometri\Tubes Algeo\Algeo01-20026\
test\test1d10.txt
x[1] = 17.840876
x[2] = -152.379841
x[3] = 357.005956
x[4] = -305.954061
x[5] = 145.224481
x[6] = 227.006400
x[7] = -742.657733
x[8] = 29.623082
x[9] = 864.812604
x[10] = -437.394186
```

Studi kasus 1.d pada n=10 dengan menggunakan metode eliminasi gauss

```
D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\Semester 3\Aljabar Linier dan Geometri\Tubes Algeo\Algeo01-20026\
test\test1d10.txt
x[1] = 17.840876
x[2] = -152.379841
x[3] = 357.005956
x[4] = -305.954061
x[5] = 145.224481
x[6] = 227.006400
x[7] = -742.657733
x[8] = 29.623082
x[9] = 864.812604
x[10] = -437.394186
```

Studi kasus 1.d pada n=10 dengan menggunakan metode matriks balikan

```
D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\Semester 3\Aljabar Linier dan Geometri\Tubes Algeo\Algeo01-20026\
test\test1d10.txt
x[1] = 17.840876
x[2] = -152.379841
x[3] = 357.005956
x[4] = -305.954061
x[5] = 145.224481
x[6] = 227.006400
x[7] = -742.657733
x[8] = 29.623082
x[9] = 864.812604
x[10] = -437.394186
```

Studi kasus 1.d pada n=10 dengan menggunakan metode cramer

Pada penyelesaian SPL matriks hilbert dengan n=10, penerapan metode Gauss, Gauss-Jordan, matriks balikan, dan cramer menghasilkan nilai yang sama dan berupa solusi unik. Metode matriks balikan dan cramer dapat diterapkan pada SPL ini karena SPL tersebut memiliki matriks koefisien, yaitu matriks Hilbert, dengan jumlah kolom dan baris yang sama (matriks persegi), yaitu 10 dan determinan dari matriks Hilbert tersebut tidak sama dengan 0.

4.2

a)

```
src > test2a.txt
1 -1 2 -1 -1
2 1 -2 -2 -2
-1 2 -4 1 1
3 0 0 -3 -2
```

Matriks augmented pada studi kasus 2.a

```
test2a.txt
Determinan matriks koefisien = 0, matriks koefisien tidak memiliki balikan. Metode matriks balikan tida
k dapat diterapkan pada SPL ini.
```

Studi kasus 2.a dengan menggunakan metode matriks balikan

```
test2a.txt
Determinan matriks koefisien = 0. Metode cramer tidak dapat diterapkan pada SPL ini.
```

Studi kasus 2.a dengan menggunakan metode cramer

Penyelesaian SPL ini tidak bisa dilakukan dengan menerapkan metode matriks balikan dan cramer karena determinan matriks koefisien pada SPL ini bernilai 0. Hal ini dikarenakan salah satu syarat berlakunya metode cramer dan matriks balikan adalah determinan matriks koefisien tidak sama dengan 0.

b)

```
src > test2b.txt
2 0 8 0 8
0 1 0 4 6
-4 0 6 0 6
0 -2 0 3 -1
2 0 -4 0 -4
0 1 0 -2 0
```

Matriks augmented pada studi kasus 2.b

```
D:\OneDrive - Inst
x[1] = 0.000000
x[2] = 2.000000
x[3] = 1.000000
x[4] = 1.000000
```

Hasil penyelesaian studi kasus 2.b dengan menggunakan metode Gauss dan Gauss-Jordan

```
test2b.txt
Jumlah equation tidak sama dengan jumlah variabel (jumlah baris dan kolom pada matriks koefisien tidak
sama). Metode matriks balikan tidak dapat diterapkan pada SPL ini.
```

Studi kasus 2.b dengan menggunakan metode matriks balikan

```
test2b.txt
Jumlah equation tidak sama dengan jumlah variabel (jumlah baris dan kolom pada matriks koefisien tidak
sama). Metode cramer tidak dapat diterapkan pada SPL ini.
```

Studi kasus 2.b dengan menggunakan metode cramer

Matriks koefisien pada SPL di atas memiliki jumlah baris 6 dan kolom 4. Penyelesaian SPL ini tidak bisa dilakukan dengan menerapkan metode matriks balikan dan cramer karena jumlah persamaan tidak sama dengan jumlah variabel yang akan dicari, yaitu ketika jumlah baris dan kolom pada matriks koefisien tidak sama (bukan matriks persegi). Hal ini dikarenakan salah satu syarat berlakunya metode cramer dan matriks balikan adalah matriks koefisien dari SPL harus ada. Sedangkan matriks bukan persegi tidak memiliki determinan. Alternatifnya, digunakan metode Gauss atau Gauss Jordan yang memberikan solusi unik.

4.3

a)

```
src > test3a.txt
8 1 3 2 0
2 9 -1 -2 1
1 3 2 -1 2
1 0 6 4 3
```

Matriks augmented studi kasus 3.a

```
test3a.txt
x[1] = -0.224324
x[2] = 0.182432
x[3] = 0.709459
x[4] = -0.258108
```

Solusi studi kasus 3.a dengan menggunakan keempat metode menghasilkan hasil yang sama

Karena memiliki solusi unik, penyelesaian matriks dengan keempat metode menghasilkan hasil yang sama.

b)

```
test > test3b.txt
0 0 0 0 0 0 1 1 1 13
0 0 0 1 1 1 0 0 0 15
1 1 1 0 0 0 0 0 0 8
0 0 0.04289 0 0.04289 0.75 0.04289 0.75 0.61396 14.79
0 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0 14.31
0 0.75 0.04289 0.75 0.04289 0 0.04289 0 0 3.81
0 0 1 0 0 1 0 0 1 18
0 1 0 0 1 0 0 1 0 12
1 0 0 1 0 0 1 0 0 6
0.04289 0.75 0.61396 0 0.04289 0.75 0 0 0.04289 10.51
0.91421 0.25 0 0.25 0.91421 0.25 0 0.25 0.91421 16.13
0.04289 0 0 0.75 0.04289 0 0.61396 0.75 0.04289 7.04
```

Matriks augmented pada studi kasus 3.b

```
Solusi SPL tidak ada.
```

Studi kasus 3.b dengan menggunakan metode matriks gauss jordan

```
test3b.txt
Jumlah equation tidak sama dengan jumlah variabel (jumlah baris dan kolom pada matriks koefisien tidak
sama). Metode matriks balikan tidak dapat diterapkan pada SPL ini.
```

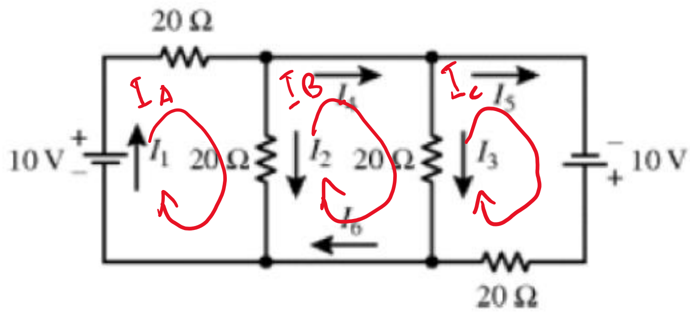
Studi kasus 3.b dengan menggunakan metode matriks balikan

```
test3b.txt
Jumlah equation tidak sama dengan jumlah variabel (jumlah baris dan kolom pada matriks koefisien tidak
sama). Metode cramer tidak dapat diterapkan pada SPL ini.
```

Studi kasus 3.b dengan menggunakan metode cramer

Matriks koefisien pada SPL di atas memiliki jumlah baris 12 dan kolom 9. Penyelesaian SPL ini tidak bisa dilakukan dengan menerapkan metode matriks balikan dan cramer karena jumlah persamaan tidak sama dengan jumlah variabel yang akan dicari, yaitu ketika jumlah baris dan kolom pada matriks koefisien tidak sama (bukan matriks persegi). Hal ini dikarenakan salah satu syarat berlakunya metode cramer dan matriks balikan adalah matriks koefisien dari SPL harus ada. Sedangkan matriks bukan persegi tidak memiliki determinan. Alternatifnya, digunakan metode Gauss atau Gauss Jordan yang tidak menghasilkan solusi.

4.4



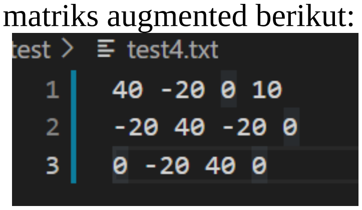
Buat 3 mesh dengan memisalkan arus yang melewati mesh 1: I_A, mesh 2: I_B, mesh 3: I_C
Dengan menerapkan KVL dan KCL, diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut:

$$Mesh\ 1: 20I_A + 20I_A - 20I_B - 10 = 0$$
$$Mesh\ 2: 20I_B - 20I_C + 20I_B - 20I_A = 0$$
$$Mesh\ 3: -10 + 20I_C + 20I_C - 20I_B = 0$$

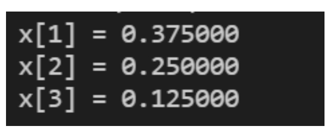
Setelah itu, dilakukan pemindahan ruas pada persamaan-persamaan tersebut:

$$Mesh\ 1: 40I_A - 20I_B = 10$$
$$Mesh\ 2: -20I_A + 40I_B - 20I_C = 0$$
$$Mesh\ 3: -20I_B + 40I_C = 10$$

SPL tersebut dapat ditulis sebagai matriks augmented berikut:



Matriks augmented pada studi kasus 4

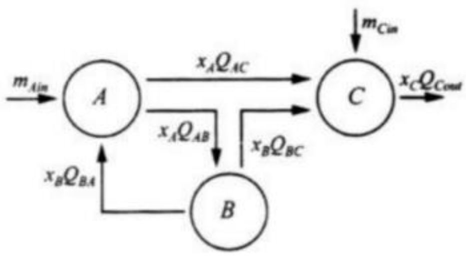


Hasil perhitungan pada studi kasus 4

Dengan melakukan substitusi pada persamaan-persamaan dari gambar soal, didapat hasil:

$$I_1 = I_A = 0.375$$
$$I_2 = I_A - I_B = 0.375 - 0.25 = 0.125$$
$$I_3 = I_B - I_C = 0.25 - 0.125 = 0.125$$
$$I_4 = I_B = 0.25$$
$$I_5 = I_C = 0.125$$
$$I_6 = I_B = 0.25$$

4.5



Konservasi massa pada tiap inti reaktor dengan koefisien seperti yang disebut dalam soal dapat ditulis sebagai berikut:

$$A: 1300 + 60x_B - 40x_A - 80x_A = 0$$
$$B: 40x_A - 60x_B - 20x_B = 0$$
$$C: 200 + 80x_A + 20x_B - 150x_C = 0$$

Dengan melakukan pemindahan ruas dan operasi pada persamaan A,B, dan C diperoleh SPL sebagai berikut:

$$A: 60x_B - 120x_A = -1300$$
$$B: 40x_A - 80x_B = 0$$
$$C: 80x_A + 20x_B - 150x_C = -200$$

SPL tersebut dapat ditulis sebagai matriks augmented berikut:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{-120} & 60 & 0 & -1300 \\ 40 & -80 & 0 & 0 \\ 80 & 20 & -150 & -200 \end{array}\right)$$

```
test > test5.txt
-120 60 0 -1300
40 -80 0 0
80 20 -150 -200
```

Matriks augmented pada studi kasus 5

```
D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\Semester 3\Aljabar Linier dan Geometri\Tubes Algeo\Algeo01-20026\test\t
est5.txt
x[1] = 14.444444
x[2] = 7.222222
x[3] = 10.000000
```

Hasil studi kasus 5

Solusi pada SPL tersebut memiliki solusi yang unik.

4.6

a)

```
test > test6a.txt
0.1 0.003
0.3 0.067
0.5 0.148
0.7 0.248
0.9 0.370
1.1 0.518
1.3 0.697
```

Titik-titik masukan pada studi kasus 6.a

```
D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\Semester 3\Aljabar Linier dan Geometri\Tubes Algeo\Algeo01-20026\
test\test6a.txt
Masukkan nilai x yang akan ditaksir nilainya: 0.2
p(x) =  -0.022977 + 0.240000x^1 + 0.197396x^2 + -0.000000x^3 + 0.026042x^4 + -0.000000x^5 + 0.000000x^6
p(0.200000) = 0.032961
```

Pengujian hasil interpolasi pada nilai x=0.2

```
D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\Semester 3\Aljabar Linier dan Geometri\Tubes Algeo\Algeo01-20026\
test\test6a.txt
Masukkan nilai x yang akan ditaksir nilainya: 0.55
p(x) =  -0.022977 + 0.240000x^1 + 0.197396x^2 + -0.000000x^3 + 0.026042x^4 + -0.000000x^5 + 0.000000x^6
p(0.550000) = 0.171119
```

Pengujian hasil interpolasi pada nilai x=0.55

```
D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\Semester 3\Aljabar Linier dan Geometri\Tubes Algeo\Algeo01-20026\
test\test6a.txt
Masukkan nilai x yang akan ditaksir nilainya: 0.85
p(x) =  -0.022977 + 0.240000x^1 + 0.197396x^2 + -0.000000x^3 + 0.026042x^4 + -0.000000x^5 + 0.000000x^6
p(0.850000) = 0.337236
```

Pengujian hasil interpolasi pada nilai x=0.85

```
D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\Semester 3\Aljabar Linier dan Geometri\Tubes Algeo\Algeo01-20026\
test\test6a.txt
Masukkan nilai x yang akan ditaksir nilainya: 1.28
p(x) =  -0.022977 + 0.240000x^1 + 0.197396x^2 + -0.000000x^3 + 0.026042x^4 + -0.000000x^5 + 0.000000x^6
p(1.280000) = 0.677542
```

Pengujian hasil interpolasi pada nilai x=1.28

Hasil taksiran nilai-nilai tersebut masuk akal. Misalnya, untuk x=0.2, dengan interpolasi diperoleh hasil 0.032961. Nilai ini berada di antara hasil 0.1 yaitu0.003 dan 0.5 yaitu 0.067. Begitu juga dengan hasil-hasil lainnya.

b)

```
test > test6b.txt
1   6.567 12.624
2   7 21.807
3   7.258 38.391
4   7.451 54.517
5   7.548 51.952
6   7.839 28.228
7   8.161 35.764
8   8.484 20.813
9   8.709 12.408
10  9 10.534
```

Titik-titik masukan pada studi kasus 6.b

```
bes Algeo\Algeo01-20026\test\test6b.txt
Masukkan nilai x yang akan ditaksir nilainya: 7.516
p(x) =  7186951536.383102 -9346847842.425283x^1 + 5334121917.414812x^2 -1756783947.445268x^3 + 368545389.50981
3x^4 -51131135.593569x^5 + 4695739.094849x^6 -275470.640167x^7 + 9372.717920x^8 -140.991755x^9
p(7.516000) = 53.537676
```

Pengujian hasil interpolasi pada tanggal 16/07/2021 atau dalam bentuk desimal x=7.516

```
D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\Semester 3\Aljabar Linier dan Geometri\Tubes Algeo\Algeo01-20026\test
\test6b.txt
Masukkan nilai x yang akan ditaksir nilainya: 8.323
p(x) =  7186951536.383102 -9346847842.425283x^1 + 5334121917.414812x^2 -1756783947.445268x^3 + 368545389.50981
3x^4 -51131135.593569x^5 + 4695739.094849x^6 -275470.640167x^7 + 9372.717920x^8 -140.991755x^9
p(8.323000) = 36.294498
```

Pengujian hasil interpolasi pada tanggal 10/08/2021atau dalam bentuk desimal x=8.323

```
D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\Semester 3\Aljabar Linier dan Geometri\Tubes Algeo\Algeo01-20026\test
\test6b.txt
Masukkan nilai x yang akan ditaksir nilainya: 9.167
p(x) =  7186951536.383102 -9346847842.425283x^1 + 5334121917.414812x^2 -1756783947.445268x^3 + 368545389.50981
3x^4 -51131135.593569x^5 + 4695739.094849x^6 -275470.640167x^7 + 9372.717920x^8 -140.991755x^9
p(9.167000) = -667.686218
```

Pengujian hasil interpolasi pada tanggal 05/09/2021 atau dalam bentuk desimal x=9.167

```
7.667
p(x) =  7189658216.475976 -9350004058.995613x^1 + 5335755560.850792x^2 -1757276563.260854x^3 + 368640760.97
1068x^4 -51143429.292714x^5 + 4696794.214320x^6 -275528.781138x^7 + 9374.584419x^8 -141.018353x^9
p(7.667000) = 42.015966
```

Pengujian hasil interpolasi pada tanggal 20/07/2021 atau dalam bentuk desimal x=7.667

Perhitungan pada 5 September 2021 menghasilkan angka negatif. Hal ini dikarenakan pada data terjadi penurunan yang cukup tajam seiring bertambahnya hari. Maka, sangat mungkin bila suatu saat akan mencapai nilai negatif. Pada pengujian tanggal 20 Juli 2021, diperoleh angka 42.015966. Angka ini masuk akal karena dari data, kasus di bulan Juli masih cukup tinggi, tetapi cenderung mengalami penurunan dari tanggal sebelumnya.

c)

```
test > test6c.txt
0 0
0.4 0.41889
0.8 0.50716
1.2 0.56092
1.6 0.58369
2 0.57665
```

Titik-titik input x dan f(x) pada studi kasus 6.c

```
Masukkan nilai x yang akan ditaksir nilainya: 1
p(x) = + 2.035252x^1  -3.552539x^2 + 3.236803x^3  -1.421045x^4 + 0.236206x^5
p(1.000000) = 0.534678
```

Hasil interpolasi pada studi kasus 6.c (ambil contoh nilai taksiran x=1)

Penyederhanaan fungsi bisa dilakukan dengan menggunakan interpolasi. Penyederhanaan fungsi di studi kasus 6.c benar karena ketika dilakukan perandingan perhitungan antara menggunakan polinom interpolasi dengan fungsi asal, hasilnya sama.

4.7

```
test > test7.txt
72.4 76.3 29.18 0.90
41.6 70.3 29.35 0.91
34.3 77.1 29.24 0.96
35.1 68.0 29.27 0.89
10.7 79.0 29.78 1.00
12.9 67.4 29.39 1.10
8.3 66.8 29.69 1.15
20.1 76.9 29.48 1.03
72.2 77.7 29.09 0.77
24.0 67.7 29.60 1.07
23.2 76.8 29.38 1.07
47.4 86.6 29.35 0.94
31.5 76.9 29.63 1.10
10.6 86.3 29.56 1.10
11.2 86.0 29.48 1.10
73.3 76.3 29.40 0.91
75.4 77.9 29.28 0.87
96.6 78.7 29.29 0.78
107.4 86.8 29.03 0.82
54.9 70.9 29.37 0.95
```

Titik-titik input pada studi kasus 7

```
D:\OneDrive - Institut Teknologi Bandung\Semester 3\Aljabar Linier dan Geometri\Tubes Algeo\Algeo01-20026\test\t
est7.txt
Masukkan nilai xk[1] yang akan ditaksir nilainya: 50
Masukkan nilai xk[2] yang akan ditaksir nilainya: 76
Masukkan nilai xk[3] yang akan ditaksir nilainya: 29.30
y(x) =  -3.507778  -0.002625x^1 + 0.000799x^2 + 0.154155x^3
y = 0.938434
```

Hasil regresi studi kasus 7

Dengan menerapkan regresi linear berganda pada data tersebut, diperoleh hasil regresi y(x)= -3.507778 – 0.002626x + 0.000799 x^2 + 0.154155 x^3 . Hasil ini sesuai dengan bila kita memasukkan data teresebut dan memeriksanya pada kalkulator regresi linear online. Setelah itu, untuk menaksir nilai x, nilai x dimasukkan ke hasil regresi dan diperoleh y=0.938434.

BAB 5: PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Permasalahan sistem persamaan linear dapat diselesaikan dengan berbagai metode. Metode yang dapat digunakan antara lain metode eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah cramer. Namun, ada metode-metode yang memiliki syarat tertentu untuk bisa digunakan, seperti metode penyelesaian SPL menggunakan metode invers balikan dan kaidah cramer. Kedua metode tersebut dapat digunakan bila SPL memiliki matriks koefisien berbentuk persegi dengan determinan yang tidak sama dengan nol. Bila kemudian ada kasus yang tidak memenuhi syarat tersebut, alternatif penyelesaian SPL bisa dilakukan menggunakan metode Gauss atau Gauss-Jordan.

Untuk menghitung determinan sebuah matriks persegi, dapat digunakan beberapa cara, di antaranya metode eliminasi gauss dan kofaktor. Hasil perhitungan determinan digunakan untuk melakukan operasi matriks lain, seperti mencari invers matriks dengan menggunakan metode adjoin. Determinan juga digunakan dalam penyelesaian SPL menggunakan kaidah cramer.

Solusi SPL memiliki beberapa bentuk, di antaranya solusi unik(tunggal), solusi banyak(tak berhingga), dan tidak memiliki solusi. Pada SPL dengan solusi unik, contoh penyelesaiannya adalah pada studi kasus 3a. Sementara, SPL dengan solusi banyak solusinya diberikan dalam bentuk parameter, misalnya pada studi kasus 1b. SPL yang tidak memiliki solusi ditunjukkan pada studi kasus 1a.

Aplikasi SPL di kehidupan sehari-hari sangat beragam, contohnya untuk melakukan taksiran/prediksi nilai. Metode yang digunakan untuk menaksir nilai di antaranya adalah dengan interpolasi dan regresi linear berganda. Contohnya, interpolasi dapat digunakan untuk menaksir jumlah kasus baru covid pada tanggal tertentu bila diberikan beberapa buah data tanggal beserta jumlah kasus baru pertanggal seperti pada studi kasus 6b. Regresi linear berganda dapat digunakan untuk menaksir nilai dari beberapa variabel peubah, misalnya untuk menghitung kadar Nitrous Oxide dengan kombinasi humidity, temperature, dan pressure yang berbeda-beda seperti pada studi kasus nomor 7.

5.2 Saran

Sebaiknya, pada setiap studi kasus diberikan solusi untuk mempermudah pengecekan karena berdasarkan pengalaman kami, kami cukup kesulitan ketika memeriksa beberapa studi kasus, seperti pada matriks Hilbert dan interpolasi.

5.3 Refleksi

Untuk tugas besar selanjutnya yang lebih baik, kami merasa harus melakukan test case dari jauh-jauh hari. Berdasrkan pengalaman kami, ada beberapa eror yang terjadi saat dilakukan test case dan cukup menguras waktu untuk membenarkannya.

LAMPIRAN

Referensi

https://www.madematika.net/2017/08/pengertian-minor-kofaktor-matriks.html
https://www.statmat.net/regresi-linier-berganda-dengan-spss/
https://www.geeksforgeeks.org/double-compare-method-in-java-with-examples/
https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_elimination