LA METRO

- **WMMSB Dérivation**

- La dérivation des updates du CVB nous donne l'update dé suivant :

$$q(z_{i\to\gamma}=k,\ z_{i\leftarrow\gamma}=k') = \gamma_{i\gamma kk'}$$
$$\propto \exp\left(E_{q(z^{-i\gamma})}\left[\log P(Y, z^{-i\gamma}, z_{ij,ji}=k,k')\right]\right)$$
$$\propto \exp\left(E_{q(z^{-i\gamma})}\left[\log \boxed{CGS}\right]\right)$$

- Cette relation montre le lien entre l'update CVB et CGS.

- Nous dérivons ici l'update CGS pour WMMSB :

$$P(z_{i\to\gamma}=k,\ z_{i\leftarrow\gamma}=k' \mid Y, z^{-i\gamma}) \propto P(y_{i\gamma} \mid Y^{-i\gamma}, z^{-i\gamma}, z_{ij}=k, z_{ji}=k')$$
$$\cdot\, P(z_{i\gamma}=k, z_{\gamma i}=k' \mid z^{-i\gamma}).$$

- L'update concernant les z est le même que pour MMSB.

- Calculons donc l'autre :

$$P(y_{i\gamma} \mid Y^{-i\gamma}, z^{-i\gamma}, z_{ij}=k, z_{ji}=k') = \frac{P(y_{i\gamma}, Y^{-i\gamma}, z^{-i\gamma}, z_{ij}=k, z_{ji}=k')}{P(Y^{-i\gamma}, z^{-i\gamma}, z_{ij}=k, z_{ji}=k')}$$

- Considérons le numérateur, en commençant par rappeler le modèle concerné :

likelihood : $P(y_{i\gamma} \mid \phi_{kk'}) = \text{Poisson}(y_{i\gamma}; \phi_{kk'}) = \dfrac{\phi_{kk'}^{y_{i\gamma}}\, e^{-\phi_{kk'}}}{y_{i\gamma}!}$

conjugate prior : $P(\phi_{kk'}) = \text{Gamma}(\phi_{kk'}; \eta, \theta) = \left(\dfrac{\theta^{\eta}}{\Gamma(\eta)}\right) \phi_{kk'}^{\eta-1}\, e^{-\theta\phi_{kk'}}.$

Reprenons le ~~dénominateur~~ numérateur : $P(y_{ij}, y^{-ij}, z^{-ij}, z_{ij}=h \dots) =$

(je note ϕ au lieu et place de $\phi_{hh'}$ pour simplifier)

$$\int_\phi P(y_{ij}|\phi)\, P(y^{-ij}|z^{-ij}, \phi)\, P(\phi)\, d\phi$$

$$= \int_\phi P(y_{ij}|\phi) \prod_{i'j' \neq ij \,:\, z_{i'j'}=h,\, z_{j'i'}=h'} P(y_{i'j'}|\phi) \,.\, \cancel{P\left(y^{\ulcorner z_{ij}=h, z_{ji}=h} \,\middle|\, z^{\ulcorner z_{ij}=h, z_{ji}=h}\right)}\, P(\phi)\, d\phi$$

L'idée ici est de séparer les liens sont tiré au sein de la classe (h, h') et tout les autres. Il se trouve que la partie qui ne dépend du couple (h, h') peut être supprimé :

$$\propto \int_\phi \frac{\phi^{n^y_{hh'}}\, e^{-n^\phi_{\cdot hh'}\phi}}{\prod_{ij}(y_{ij}!)} \,.\, P(\phi)\, d\phi \;\propto\; \frac{1}{\prod_{ij}(y_{ij}!)} \int_\phi \phi^{n^y_{h}+\eta-1}\, e^{-(n^\phi_{\cdot h}+\theta)\phi}\, d\phi$$

$$\propto \frac{\Gamma(n^y_{hh'}+\eta)}{(n^\phi_{\cdot hh'}+\theta)^{n^y_{hh'}+\eta}} \cdot \frac{1}{\prod_{ij}(y_{ij}!)} \,.$$

En remarquant que le dénominateur est la même équation mais avec y_{ij} qui est absent, on trouve en faisant le rapport :

[je rappel les identités suivantes : $\begin{cases} \Gamma(y_{ij}+1) = y_{ij}! \\ \binom{a}{b} = \Gamma(a+1) \cdot \dfrac{1}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)} \end{cases}$

2)

Le rappat de l'update initiale CGS, nous donne finalement :

$$\propto \binom{m_{kk'}^{y,\cdot} + \eta - 1}{y_{\cdot i\gamma}} \frac{1}{\left(N_{kk'}^{\phi-i\gamma} + \theta + 1\right)^{y_{i\gamma}}} \left(1 - \frac{1}{N^{\phi-i\gamma} + \theta + 1}\right)^{m_{kk'}^{y-i\gamma} + \eta}$$

$$= \text{NegativeBinomial}\left(y_{i\gamma}; r, p\right)$$

avec

$$r = m_{kk'}^{y\cdot i\gamma} + \eta$$

$$p = \frac{1}{N_{kk'}^{\phi\cdot i\gamma} + \theta + 1}$$

Pour completer le CVB on effectue une Taylor Expansion :

$$\exp E_q[\log X] \simeq E_q[X] .$$

Dans un deuxième temps les cas espérance sur q sont approximé par le theorème central limite, en posant :

$$E_q[X] \simeq \sum_i E_q[X_i] \quad \ldots$$