



# Основы разработки на C++: красный пояс

## Неделя 2

Принципы оптимизации кода, сложность алгоритмов и эффективное использование ввода/вывода



# Оглавление

<b>Принципы оптимизации кода, сложность алгоритмов и эффективное использование ввода/вывода</b>	<b>2</b>
2.1 Принципы оптимизации кода . . . . .	2
2.1.1 Первое правило оптимизации кода . . . . .	2
2.1.2 Второе правило оптимизации кода . . . . .	2
2.1.3 Разработка своего профайлера . . . . .	4
2.1.4 Совершенствование своего профайлера . . . . .	6
2.2 Эффективное использование потоков ввода/вывода . . . . .	8
2.2.1 Буферизация в выходных потоках . . . . .	8
2.2.2 Когда нужно использовать <code>endl</code> , а когда – <code>'\n'</code> . . . . .	9
2.2.3 Связанность потоков . . . . .	10
2.3 Сложность алгоритмов . . . . .	12
2.3.1 Введение . . . . .	13
2.3.2 Оценка сложности . . . . .	15
2.3.3 Практические применения . . . . .	16
2.3.4 Амортизированная сложность . . . . .	20

# Принципы оптимизации кода, сложность алгоритмов и эффективное использование ввода/вывода

## 2.1. Принципы оптимизации кода

### 2.1.1. Первое правило оптимизации кода

**Избегайте преждевременной оптимизации.** Преждевременная оптимизация – это упор на производительность в ущерб простоте, дизайну, понятности, поддерживаемости и так далее. В соответствии с принципом Парето 80% работы программы тратится на исполнение 20% кода. Эти 20% и нужно оптимизировать, но для начала их нужно найти. Делать максимально быстрым весь код тяжело, время на это будет уходить впустую. Преждевременная оптимизация приводит к необоснованному усложнению кода, затруднению поддержки и замедлению разработки. Как правило код надо стараться сделать правильным, простым, а только потом быстрым. Это не значит, что о производительности вообще не надо думать.

### 2.1.2. Второе правило оптимизации кода

Код не может быть просто быстрым или медленным. Он может быть достаточно или не достаточно быстрым для задачи, которую он решает. Рассмотрим пример.

```
vector<string> GenerateBigVector() {  
    vector<string> result;  
    for (int i = 0; i < 28000; ++i) {  
        result.insert(begin(result), to_string(i));  
    }  
    return result;  
}
```

```
}

int main() {
    cout << GenerateBigVector().size() << endl;
    return 0;
}
```

Функция `GenerateBigVector` генерирует вектор из 28000 элементов, программа выводит размер этого вектора. Замерим время работы программы. Программа работает 4.337 секунды. Понятно, что для данной задачи это медленно.

Мы можем бороться с проблемой интуитивно. Создадим версию `GenerateBigVector`, которая будет принимать вектор по ссылке, тогда не возникнет лишнего копирования и предположительно программа станет работать быстрее. Сделаем вектор из 32000 элементов.

```
void GenerateBigVector(vector<string>& result) {
    for (int i = 0; i < 32000; ++i) {
        result.insert(begin(result), to_string(i));
    }
}
```

Запустим программу с такой версией функции `GenerateBigVector` и замерим время работы. Программа отработала за 5.638 секунды. Это говорит о том, что интуиция нас подвела. Таким образом, мы приходим ко второму правилу оптимизации, которое звучит просто: **замеряйте!**

Интуиция часто даёт неверные результаты, а измерения объективны, они позволяют найти то место программы, из-за которой она работает медленно.

Замерим, сколько работает программа, а также замерим, сколько работает цикл по формированию вектора.

```
vector<string> GenerateBigVector() {
    vector<string> result;
    auto start = steady_clock::now();
    for (int i = 0; i < 28000; ++i) {
        result.insert(begin(result), to_string(i));
    }
    auto finish = steady_clock::now();
    auto duration = finish - start;
    cerr << "Cycle: "
         << duration_cast<milliseconds>(duration).count()
```

```
        << endl;
    return result;
}

int main() {
    auto start = steady_clock::now();
    cout << GenerateBigVector().size() << endl;
    auto finish = steady_clock::now();
    auto duration = finish - start;
    cerr << "Total: "
        << duration_cast<milliseconds>(duration).count()
        << endl;
    return 0;
}
```

Замерив время, мы понимаем, что общее время работы программы и время формирования вектора совпадает. Большая часть времени уходит на работу в цикле.

```
result.insert(begin(result), to_string(i));
```

Здесь мы вставляем каждый следующий элемент в начало вектора. Чтобы вставить элемент в начало, нужно сдвинуть текущее содержимое вектора вправо. Изменим программу и будем вставлять каждый новый элемент не в начало вектора, а в конец.

```
result.push_back(to_string(i));
```

Такая программа отработает всего за 6 миллисекунд.

Прежде чем ускорять код, замерьте, сколько он работает. Если это недостаточно быстро, то начинайте искать узкие места. Интуиция не работает – замеряйте!

### 2.1.3. Разработка своего профайлера

На практике для нахождения медленно работающего места в программе используются специальные инструменты, которые называются профайлерами. Некоторые из них:

- gperftools (Linux, Mac OS);

- perf (Linux);
- VTune (Windows, Linux).

Мы сделаем свой простой профайлер и будем им пользоваться.

Замерять время работы с помощью способа из предыдущего пункта громоздко. Напишем специальный класс.

```
class LogDuration {
public:
    LogDuration()
        : start(steady_clock::now())
    {
    }

    ~LogDuration() {
        auto finish = steady_clock::now();
        auto dur = finish - start;
        cerr << duration_cast<milliseconds>(dur).count()
              << " ms" << endl;
    }
private:
    steady_clock::time_point start;
};
```

`start` – это момент начала измерений. В конструкторе мы записываем в это поле `steady_clock::now()`. В деструкторе мы запоминаем момент окончания работы. Вычисляем длительность работы (разность). Выводим длительность в миллисекундах.

Теперь для измерения длительности работы блока кода мы пишем перед ним `LogDuration input;` и оборачиваем конструкцию в фигурные скобки:

```
{
    LogDuration input;
    for (int i = 0; i < element_count; ++i) {
        int x;
        cin >> x;
        elements.insert(x);
    }
}
```

Улучшим читаемость результатов работы программы.

```
class LogDuration {
public:
    explicit LogDuration(const string& msg = "")
        : message(msg + ": ")
        , start(steady_clock::now())
    {
    }

    ~LogDuration() {
        auto finish = steady_clock::now();
        auto dur = finish - start;
        cerr << message
            << duration_cast<milliseconds>(dur).count()
            << " ms" << endl;
    }
private:
    string message;
    steady_clock::time_point start;
};
```

Теперь мы можем добавлять сообщение, например:

```
{
    LogDuration input("Input");
    for (int i = 0; i < element_count; ++i) {
        int x;
        cin >> x;
        elements.insert(x);
    }
}
// Input: 113 ms
```

## 2.1.4. Совершенствование своего профайлера

Посмотрим, как мы пользуемся классом LogDuration.

```
{
    LogDuration input("Input");
    ...
}
```

Мы объявляем переменную с именем `input` и в качестве сообщения тоже используем `"Input"`. Имена переменных нам не нужны, мы не обращаемся к ним в коде. Нам нужен способ, который позволит объявлять объекты класса `LogDuration`, но избавит от необходимости придумывать имя для переменных. Тут нам помогут макросы.

```
#define LOG_DURATION(message) \
    LogDuration UNIQ_ID(__LINE__){message};
```

Макрос `UNIQ_ID` имеет следующее устройство (не будем останавливаться на том, как оно получилось):

```
#define UNIQ_ID_IMPL(lineno) _a_local_var_##lineno
#define UNIQ_ID(lineno) UNIQ_ID_IMPL(lineno)
```

Просто поверьте на слово: конструкция `UNIQ_ID(__LINE__)` позволяет объявить уникальный идентификатор в пределах заданного `.cpp`-файла.

Теперь мы можем замерять время с помощью конструкции

```
{
    LOG_DURATION("Input");
    ...
}
```

Наша программа работает. Ввод длится 102 миллисекунды, обработка запросов – 76, вся программа – 181. При этом мы добились желаемого удобства. Нам больше не нужно придумывать имя для объекта, мы просто пишем `LOG_DURATION` и сообщение и получаем в стандартный поток ошибок длительность работы соответствующего блока `count`. Это действительно удобно.

Допустим, мы захотим померить, сколько работает одна итерация нашего цикла. Мы просто пишем `LOG_DURATION("Iter " + to_string(i))`.

Остался один штрих, чтобы сделать класс `LogDuration` переиспользуемым. Давайте его вынесем в отдельный файл. Заведём заголовочный файл в нашем проекте. Назовем его `profile.h` и вынесем сюда класс `LogDuration` и необходимые `include`'ы. Это `#include <chrono>`, `using`



`namespace std;`, `using namespace std::chrono;`. И так как мы выводим в `cerr`, нам понадобится ещё `<iostream>`.

Подведём итоги. Мы смогли разработать класс `LogDuration`, который можно использовать для замера времени работы программы и отдельных её блоков, а также сделали специальный макрос `LOG_DURATION`, который нас избавляет от придумывания ненужных идентификаторов и упрощает работу с этим профайлером.

## 2.2. Эффективное использование потоков ввода/вывода

В этом модуле мы посмотрим, какие проблемы могут возникнуть при использовании потоков ввода/вывода и как эти проблемы решаются.

### 2.2.1. Буферизация в выходных потоках

Файловый поток `ofstream` не сразу пишет выводимые в него данные в файл, а накапливает их в промежуточном буфере и сбрасывает его в файл, когда он наполнился. Поток вывода `cout` ведет себя точно так же. Манипулятор `endl` не только выводит перевод строки, но и сбрасывает буфер потока в файл.

Сравним производительность потоков. Будем измерять, за какое время выведутся в файл 15000 строк при использовании `endl` и при использовании `'\n'`. Будем использовать профайлер `profile.h`.

```
int main() {
    {
        LOG_DURATION("endl");
        ofstream out("output.txt");
        for (int i = 0; i < 15000; ++i) {
            out << "London is the capital of Great Britain. "
                << "I am travelling down the river"
                << endl;
        }
    }
    {
        LOG_DURATION("'\\n'");
        ofstream out("output2.txt");
```

```
for (int i = 0; i < 15000; ++i) {
    out << "London is the capital of Great Britain. "
        << "I am travelling down the river"
        << '\n';
}
}
}
// endl: 137 ms
// '\n': 16 ms
```

Пусть теперь выводится в 10 раз больше строчек, снова выполним наш код, и увидим поразительную огромную разницу: `endl` – 530 миллисекунд, `'\n'` – 168 миллисекунд.

Тот факт, что `endl` сбрасывает буфер потока, имеет значительное влияние на производительность. Дело в том, что при использовании `endl` мы пишем в файл каждый раз, а при использовании `'\n'` – только когда буфер заполнился.

Таким образом, использование `endl` может приводить к снижению скорости вывода в файл или `cout`.

### 2.2.2. Когда нужно использовать `endl`, а когда – `'\n'`

Возникает вопрос: зачем использовать `endl`? Он нужен в ситуациях, когда нам не важна скорость вывода всей информации, а важно увидеть последнее выведенное сообщение, как только оно было выведено в выходной поток. Самый простой пример – отладка программы с использованием отладочного вывода в консоль. Использовать буферизованный вывод в данном случае неудобно, потому что вероятна ситуация, когда вы выводите отладочное сообщение, а на следующей команде программа падает. Таким образом, есть вероятность, что это сообщение не будет выведено в консоль, хотя оно может содержать важную информацию об ошибке.

Рассмотрим пример с классом `LogDuration`. Эта программа состоит из двух функций. Тела функций `CouldBeSlowOne` и `CouldBeSlowTwo` скрыты, потому что сейчас они не важны. Одна из них работает медленно, мы не знаем, какая. Чтобы узнать это, мы оборачиваем их в `LOG_DURATION`.

```
int main() {
    {
        LOG_DURATION("One");
```

```
    CouldBeSlowOne();  
}  
{  
    LOG_DURATION("Two");  
    CouldBeSlowTwo();  
}  
}  
// One: 9 ms  
// Two: 7093 ms
```

Если мы реализуем `LOG_DURATION` с помощью `'\n'`, то оба сообщения выведутся в конце работы программы, ждать придётся долго. Если же в реализации использовать `endl`, то первое сообщение выведется сразу после завершения работы первой функции. Это удобнее, мы можем не ждать выполнения второй функции.

Теперь давайте посмотрим на `TestRunner` из предыдущего курса (курс "[Основы разработки на C++: жёлтый пояс](#)"), давайте посмотрим на `class TestRunner` и его метод `RunTest`. `endl` здесь используется во всех сообщениях. Когда тест выполнен успешно, выводится `OK` и `endl`. И когда случилось падение теста, мы тоже выводим его имя, говорим, что он упал, сообщение из исключения и `endl`.

Если здесь заменить `endl` на символ перевода строки, то мы не будем видеть сразу результат выполнения тестов. Конечно, когда у нас простые юнит-тесты, они все отрабатывают очень быстро, и нам не важно, что эти сообщения буферизируются и потом выводятся целиком. Но если у нас есть юнит-тесты, которые занимают заметное время, то нам лучше сразу же получать информацию о том, прошли они или нет.

Перевод строки можно использовать, когда вам важна скорость вывода. Например, если вы пишете консольное приложение, которое превращает данные из стандартного ввода в какие-то другие данные и выводит их в стандартный вывод.

### 2.2.3. Связанность потоков

Итак, теперь мы с вами знаем, что замена `endl` на символ перевода строки может ускорять вывод программ на C++. Рассмотрим пример:

```
int main() {  
    for (int i = 0; i < 100000; ++i) {
```

```
int x;  
cin >> x;  
cout << x << endl;  
}  
}
```

В цикле 100000 раз из стандартного ввода считывается число и 100000 раз записывается в стандартный вывод. Логично ожидать, что при замене `endl` на `'\n'` программа заработает быстрее. Однако стоит проверить это и сделать измерения.

```
int main() {  
    {  
        LOG_DURATION("endl");  
        for (int i = 0; i < 100000; ++i) {  
            int x;  
            cin >> x;  
            cout << x << endl;  
        }  
    }  
    {  
        LOG_DURATION("'\\n'");  
        for (int i = 0; i < 100000; ++i) {  
            int x;  
            cin >> x;  
            cout << x << endl;  
        }  
    }  
}  
// endl: 387 ms  
// '\\n': 373 ms
```

Реализация с `'\n'` работает немного быстрее, однако мы ожидали, что она отработает в разы быстрее реализации с `endl`. Рассмотрим другой пример:

```
cout << "Enter two integers: ";  
for (;;) {  
}  
//
```

Данный код не выведет на экран ничего, потому что передаваемое сообщение попало в буфер и остаётся там на протяжении бесконечного цикла.

```
cout << "Enter two integers: ";
int x, y;
cin >> x >> y;
for (;;) {
}
// Enter two integers:
```

Такой код выводит `Enter two integers: .` Получается, произошёл сброс внутреннего буфера `cout`. Этот пример нам показывает, что по умолчанию поток `cout` связан с потоком `cin`. Это специально сделано для интерактивных приложений вроде нашего калькулятора. Этим же объясняется неожиданно медленная работа реализации с `'\n'` из прошлого примера. Мы можем разорвать связь между `cout` и `cin`:

```
cin.tie(nullptr);
cout << "Enter two integers: ";
int x, y;
cin >> x >> y;
for (;;) {
}
```

Что такое `nullptr`, будет рассказано далее в модуле «Модели памяти».

Ещё больше ускорить работу программ можно, если прописать строку:

```
ios_base::sync_with_stdio(false);
```

Что это за команда? Это выходит за рамки нашего курса. Важно помнить, что вызывать её надо до первой операции ввода/вывода.

## 2.3. Сложность алгоритмов

Мы научились замерять время работы кода. В частности, сравнивать два алгоритма по времени работы. Уже в предыдущем курсе возникали ситуации, когда один алгоритм заведомо эффективнее другого. Например, мы проходили контейнер `deque`. Чем он был лучше, чем вектор?

### 2.3.1. Введение

Рассмотрим пример. Попробуем вставлять элементы в начало вектора и в начало `deque`. Вспомним, что вставлять в начало вектора гораздо менее эффективно, чем вставлять в начало `deque`.

```
{
    LOG_DURATION("vector");
    vector<int> v;
    for (int i = 0; i < 100000; ++i) {
        v.insert(begin(v), i);
    }
}
{
    LOG_DURATION("deque");
    deque<int> v;
    for (int i = 0; i < 100000; ++i) {
        v.insert(begin(v), i);
    }
}
// vector: 1661 ms
// deque: 9 ms
```

Рассмотрим ещё один пример. Продемонстрируем, что метод `lower_bound` эффективнее, чем одноимённая функция на примере множества.

```
set<int> numbers;
for (int i = 0; i < 3000000; ++i) {
    numbers.insert(i);
}
const int x = 1000000;

{
    LOG_DURATION("global_lower_bound");
    cout << *lower_bound(begin(numbers), end(numbers), x);
}
{
    LOG_DURATION("lower_bound_method");
    cout << *numbers.lower_bound(x);
}
// global lower_bound: 944 ms
// lower_bound method: 0 ms
```

Рассмотрим третий пример. Сравним функции `lower_bound` и функции `find_if`. Функция `lower_bound` делает бинарный поиск, в то время как функция `find_if` запускает цикл `for`. `lower_bound` заведомо эффективнее, проверим это.

```
const int NUMBER_COUNT = 1000000;
const int NUMBER = 7654321;
const int QUERY_COUNT = 10;

int main() {
    vector<int> v;
    for (int i = 0; i < NUMBER_COUNT; ++i) {
        v.push_back(i * 10);
    }

    {
        LOG_DURATION("lower_bound");
        for (int i = 0; i < QUERY_COUNT; ++i) {
            lower_bound(begin(v), end(v), NUMBER);
        }
    }

    {
        LOG_DURATION("find_if");
        for (int i = 0; i < QUERY_COUNT; ++i) {
            find_if(begin(v), end(v)),
                [NUMBER](int y) { return y >= NUMBER});
        }
    }

    return 0;
}
// lower_bound: 0 ms
// find_if: 123 ms
```

`lower_bound` быстрее, об этом мы и так заранее знали.

Чтобы понять, будет ли эффективен алгоритм, не обязательно его программировать и замерять. Иногда можно заранее знать, какой алгоритм больше подходит.

### 2.3.2. Оценка сложности

Обозначим за  $N$  размер диапазона. Нам известно, что `lower_bound` работает за время порядка  $\log N$ , а `find_if` в худшем случае работает за  $N$ . Не будем учитывать множители при  $\log N$  и  $N$ , так как при достаточно большом  $N$ ,  $N$  будет больше  $\log N$  при любом константном множителе при них. В частности, будем считать, что логарифм двоичный.

Рассмотрим более сложный пример. В цикле пройдемся по контейнеру `numbers_to_find` и для каждого элемента этого контейнера вызовем `lower_bound`. Поищем это число в другом контейнере. Затем выполним простую операцию, например,  $x$  умножим на 2.

```
for (int& x : numbers_to_find) {
    lower_bound(begin(v), end(v), x);
    x *= 2;
}
```

Внешний цикл делает столько итераций, каков размер контейнера `numbers_to_find`. Дальше в каждой из итераций мы запускаем `lower_bound`, который работает  $\log N$  времени, потом еще одна операция тратится на умножение  $x$  на 2. Получаем выражение для грубой оценки количества операций.

```
numbers_to_find.size() * (log(v.size()) + 1)
```

Это оценка для худшего случая. В реальности она может не достигаться.

Выполним программу для `NUMBER = 1` и `QUERY_COUNT = 1000000`.

```
// lower_bound: 701 ms
// find_if: 81 ms
```

`lower_bound` выполнял логарифм операций, в то время как `find_if` сходилась практически сразу, выполнив всего несколько операций.

Обсудим сложность алгоритмов.

- **Константная** (1): арифметические операции, обращение к элементу вектора;
- **Логарифмическая** ( $\log N$ ): двоичный поиск (`lower_bound` и пр.), поиск в `set` или `map`;
- **Линейная** ( $N$ ): цикл `for` (с лёгкими итерациями), алгоритмы `find_if`, `min_element` и пр.;



- $N \log N$ : алгоритм `sort` (с лёгкими сравнениями).

Часто используют  $O$ -символику. Например,  $O(\log N)$  означает, что алгоритм выполняет не больше, чем  $\log N$  операций с точностью до константы. « $O$  большое» означает оценку сверху. В принципе она может не достигаться вообще никогда.

Как узнать сложность работы незнакомого алгоритма? Можно вычислить самостоятельно, если известны детали работы алгоритма. Также сложность можно посмотреть в документации.

### 2.3.3. Практические применения

Скорость алгоритмов стоит сравнивать по следующему несложному правилу:

$$1 < \log N < N < N \log N < N^2 < \dots$$

При сложении большее поглощает меньшее:

$$O(N) + O(\log N) = O(N)$$

$O(5N)$  и  $O(8N)$  надо сравнивать измерениями.

Как оценить, подходит ли алгоритм под заданные ограничения? Нужно рассматривать худший случай, брать сложность алгоритма и подставлять туда худшие значения входных данных. Так получается количество операций алгоритма. Далее нужно примерно прикинуть константу, умножить количество операций на неё. В результате получается грубая оценка количества элементарных операций. Далее можно прикинуть время работы алгоритма, если учесть, что на хороших процессорах за секунду можно успеть сделать миллиард простых операций.

Рассмотрим примеры.

**Задача «Синонимы»:**

Поступает три типа запросов.

- `ADD word1 word2`: добавить пару синонимов (`word1`, `word2`);

- COUNT word: узнать количество синонимов слова word;
- CHECK word1 word2: узнать, являются ли слова word1 и word2 синонимами.

В задаче приходит 70000 запросов, слова имеют длину не более 100 символов, решить задачу надо за 1 секунду.

```
int main() {
    int q;
    cin >> q;
    map<string, set<string>> synonyms; // для каждого слова запоминаем множество его
                                      // синонимов
    for (int i = 0; i < q; ++i) { // обрабатываем Q запросов (будет Q итераций)
        string operation_code;
        cin >> operation_code;
        if (operation_code == "ADD") {
            string first_word, second_word;
            cin >> first_word >> second_word; // если слова длины не более чем L, то
                                                // считываем их за L простейших операций
            synonyms[first_word].insert(second_word); // поиск в словаре конкретного
                                                        // ключа работает за логарифм от
                                                        // размера словаря. Он в худшем
                                                        // случае равен количеству слов,
                                                        // которые уже туда вставили.
                                                        // Сложность равна количеству
                                                        // запросов, умноженная на
                                                        // стоимость сравнения двух строк
                                                        // длины не более L.
                                                        // итоговая сложность: L logQ

            synonyms[second_word].insert(first_word);
            // O(L) + O(L logQ) = O(L logQ)
        } else if (operation_code == "COUNT") {
            string word;
            cin >> word;
            cout << synonyms[word].size() << endl;
            // поиск в словаре занимает L logQ. Итоговая сложность: O(L logQ)
        } else if (operation_code == "CHECK") {
            string first_word, second_word;
            cin >> first_word >> second_word;
            if (synonyms[first_word].count(second_word) == 1) {
                cout << "YES" << endl;
            }
        }
    }
}
```

```

    } else {
        cout << "NO" << endl;
    }
    // считываем два слова, ищем их в словаре, потом во множестве
    //  $O(L \log Q)$ 
}
}

// обрабатываем Q запросов за  $L \log Q$ 
// суммарная сложность программы:  $O(Q L \log Q)$ 
return 0;
}

```

### Задача «Имена и фамилии – 1»:

- `ChangeFirstName(year, first_name)`: добавить факт изменения имени на `first_name` в год `year`;
- `ChangeLastName(year, last_name)`: добавить факт изменения фамилии на `last_name` в год `year`;
- `GetFullName(year)`: получить имя и фамилию по состоянию на конец года `year`;

Были следующие ограничения: 100 запросов, слова длины 10, на выполнение дана одна секунда.

```

string FindNameByYear(const map<int, string>& names, int year) {
    string name; // изначально имя неизвестно
    for (const auto& item : names) { //  $O(Q)$  итераций
        if (item.first <= year) { // сравниваем два числа за  $O(1)$ 
            name = item.second; // присвоить одну строку в другую стоит столько же
                               // операций, как длина строки:  $O(L)$ 
        } else {
            // иначе пора остановиться, так как эта запись и все последующие относятся к
            // будущему
            break;
        }
    }
    return name;
    //  $O(QL)$  операций
}

```

```

class Person {
public:
    void ChangeFirstName(int year, const string& first_name) {
        first_names[year] = first_name; // ищем year как ключ в словаре и сохраняем
                                         // туда строчку
    } //  $O(\log Q + L)$ 
    void ChangeLastName(int year, const string& last_name) {
        last_names[year] = last_name;
    } //  $O(\log Q + L)$ 
    string GetFullName(int year) {
        const string first_name = FindNameByYear(first_names, year);
        const string last_name = FindNameByYear(last_names, year);

        if (first_name.empty() && last_name.empty()) {
            return "Incognito";
        } else if (first_name.empty()) {
            return last_name + " with unknown first name";
        } else if (last_name.empty()) {
            return first_name + " with unknown last name";
        } else {
            return first_name + " " + last_name;
        }
        // сложность  $O(L)$ , которая тратится на сложение строк. Также тут вызывается
        // FindNameByYear. Итоговая сложность:  $O(L) + O(QL)$ 
    }

private:
    map<int, string> first_names;
    map<int, string> last_names;
};
// итоговая сложность программы:  $O(Q * Q * L)$ 

```

В задаче «Имена и фамилии – 4» оптимизирована функция FindNameByYear. В ней теперь вызывается метод upper\_bound, которая работает за логарифм от размера контейнера, то есть за  $\log Q$ . Тогда суммарная сложность будет  $O(\log Q + L)$ . Метод GetFullName также отработает за  $O(\log Q + L)$ . Получаем суммарную сложность  $O(Q(L + \log Q))$ .

### 2.3.4. Амортизированная сложность

Рассмотрим задачу. К нам приходят события с временными метками. Нужно уметь добавлять событие с временной меткой и находить, сколько событий случилось за последние пять минут. Для решения задачи напомним класс:

```
class EventManager {  
public:  
    void Add(uint64_t time);  
    int Count(uint64_t time);  
}
```

Метод `Add` добавляет события, метод `Count` узнаёт количество событий за последние пять минут. Задачу можно решать с помощью очереди. Подключим `<queue>`.

```
private:  
    queue<uint64_t> events;
```

В очередь мы будем добавлять новые события и удалять старые:

```
void Add(uint64_t time) {  
    events.push(time);  
}  
int Count(uint64_t time) {  
    return events.size();  
}
```

Добавим в `private` метод `Adjust`, который принимает новые временные метки и удаляет старые.

```
void Adjust(uint64_t time) {  
    while (!events.empty() && events.front() <= time - 300) {  
        events.pop();  
    }  
}
```

Удалять старые события нужно и при добавлении в очередь, и при вычислении количества событий в ней.

```
void Add(uint64_t time) {  
    Adjust(time);  
    events.push(time);  
}
```

```
int Count(uint64_t time) {  
    Adjust(time);  
    return events.size();  
}
```

Попробуем оценить сложность каждого запроса.

```
class EventManager {  
public:  
    void Add(uint64_t time) { // O(Q)  
        Adjust(time);  
        events.push(time); // O(1)  
    }  
    int Count(uint64_t time) { // O(Q)  
        Adjust(time);  
        return events.size(); // O(1)  
    }  
private:  
    queue<uint64_t> events;  
    void Adjust(uint64_t time) { // O(Q)  
        while (!events.empty() && events.front() <= time - 300) { // в худшем  
                                                                    // случае O(Q)  
            events.pop(); // O(1)  
        }  
    }  
}
```

Получается, суммарная сложность будет квадратичной? Дело в том, что это верхняя оценка и она достигаться не будет. Каждый конкретный вызов `Adjust`, `Add` или `Count` может работать долго. Суммарно все эти события будут работать за  $O(Q)$ , а не за  $O(Q * Q)$ . В таком случае говорят, что сложность `Add`, `Count`, `Adjust` не  $O(Q)$ , а *amortized*  $O(1)$ , то есть в среднем каждый метод работает как  $O(1)$ .