DOLD, A.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 25—35 (1956)

Erzeugende der Thomschen Algebra $\mathfrak{N}$

Von
ALBRECHT DOLD

Einleitung. In [8] hat R. THOM eine Äquivalenzrelation zwischen kompakten (nicht notwendig zusammenhängenden) differenzierbaren Mannigfaltigkeiten eingeführt, die sich, grob gesprochen, folgendermaßen beschreiben läßt: Zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind genau dann äquivalent („cobordantes"), wenn sie zusammen den Rand einer berandeten differenzierbaren Mannigfaltigkeit bilden. (Für eine präzise Definition und für das Folgende vgl. [8], Chap. IV.)

Die Äquivalenzklassen können in natürlicher Weise addiert und multipliziert werden und bilden einen Ring bezüglich dieser Verknüpfungen. Man erhält verschiedene Äquivalenzklassenmengen und verschiedene Ringe Ω oder $\mathfrak{N}$, je nachdem ob man orientierte oder nicht-orientierte Mannigfaltigkeiten betrachtet. Die topologische Dimension der Mannigfaltigkeiten definiert eine Graduierung der Ringe Ω und $\mathfrak{N}$: $\Omega=\sum_{k=0}^{\infty}\Omega^k$, $\mathfrak{N}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathfrak{N}^k$.

Die Struktur von $\mathfrak{N}$ ist verhältnismäßig einfach: $\mathfrak{N}$ ist ein Polynomring in abzählbar vielen Variablen x_i über dem Primkörper der Charakteristik 2; x_i wird repräsentiert durch eine geeignet gewählte i-dimensionale Mannigfaltigkeit $P(i)$; i durchläuft alle natürlichen Zahlen, die nicht von der Form 2^l-1 sind.

In [8] hat THOM für alle geraden i und für $i=5$ Mannigfaltigkeiten $P(i)$ angegeben, die die (nicht eindeutig festgelegten) Variablen x_i repräsentieren. In der vorliegenden Arbeit geschieht dies für die verbleibenden Fälle, d.h. für alle ungeraden $i\neq 2^l-1$, $i>5$ (s. Satz 3).

Die angegebenen Mannigfaltigkeiten $P(i)$, i ungerade $\neq 2^l-1$, sind orientierbar. Sie definieren daher Elemente von Ω (und zwar von der Ordnung 2; s. H), die bei der natürlichen Abbildung $\Omega\to\mathfrak{N}$ in x_i übergehen. Dies liefert Aussagen über die nur teilweise bekannte Struktur (s. [8], S. 81) von Ω; z.B. ergibt sich: Ω^k ist nicht trivial für $k\geqq 8$, d.h. in jeder Dimension $k\geqq 8$ gibt es nicht-berandende orientierbare kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten (s. H). —

Wir definieren und untersuchen nun zunächst eine Klasse von Mannigfaltigkeiten $\{P(m,n)\}$, unter denen die in der vorstehenden Einleitung genannten Mannigfaltigkeiten $P(i)$ vorkommen.

A. Definition und erste Eigenschaften von $P(m,n)$. S^m, $m\geqq 0$, sei die Einheitssphäre des $(m+1)$-dimensionalen euklidischen Raumes mit den Koordinaten $x_0, x_1, \ldots, x_m$. $PC(n)$, $n\geqq 0$, sei der komplexe projektive Raum von n komplexen Dimensionen; wir beschreiben ihn durch homogene Koordinaten $z_0, z_1, \ldots, z_n$.

Der topologische Raum $P(m, n)$ [1]) entsteht aus dem topologischen Produkt $S^m \times PC(n)$ durch die Identifikation $(x, z) = (-x, \bar{z})$. Dabei bezeichnet $-x$ den Diametralpunkt von $x \in S^m$ und $\bar{z}$ ist derjenige Punkt aus $PC(n)$, dessen Koordinaten konjugiert komplex zu denen von $z \in PC(n)$ sind.

Bezüglich der Identifikationsabbildung $\Phi: S^m \times PC(n) \to P(m, n)$ ist $S^m \times PC(n)$ zweiblättrige Überlagerung von $P(m, n)$; die nicht-triviale Deckbewegung φ ist durch

(1) $$\varphi(x, z) = (-x, \bar{z}), \qquad x \in S^m, \ z \in PC(n)$$

gegeben.

$S^m \times PC(n)$ kann — in der üblichen Weise — als (reell) analytische Mannigfaltigkeit aufgefaßt werden; φ ist dann eine analytische Abbildung. Vermöge der Abbildung Φ wird daher auch $P(m, n)$ zur (reell) analytischen Mannigfaltigkeit, und Φ selbst ist analytisch.

Die Abbildung $(x, z) \to x$ von $S^m \times PC(n)$ auf S^m geht bei der Identifikation Φ in eine Abbildung p: $P(m, n) \to PR(m)$ ($= m$-dimensionaler reeller projektiver Raum) über. p ist Projektion eines (analytischen) Faserraumes $\{P(m, n), p, PR(m), PC(n), Z_2\}$ [2]) (s. [*3*], § 2); das nicht-triviale Element der Strukturgruppe Z_2 ist die Selbstabbildung $z \to \bar{z}$ von $PC(n)$.

B. Zellenzerlegung und Homologie mod 2 von $P(m, n)$. Wir geben bekannte Zellenzerlegungen von S^m und $PC(n)$ an und gewinnen mit ihrer Hilfe eine Zellenzerlegung von $P(m, n)$.

S^m: Die durch $x_{i+1} = x_{i+2} = \cdots = x_m = 0$, $x_i > 0$ ($x_i < 0$) definierte Punktmenge von S^m ist eine offene i-Zelle C_i^+ (C_i^-). Die Zellen $C_i^\pm$, $i = 0, 1, \ldots, m$, bilden eine Zellenzerlegung von S^m (CW-Komplex im Sinne von J. H. C. WHITEHEAD [*10*]) und genügen bei geeigneter Orientierung den Berandungsrelationen $\partial C_i^+ = C_{i-1}^+ + C_{i-1}^-$, $\partial C_i^- = -(C_{i-1}^+ + C_{i-1}^-)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Im folgenden seien die Zellen $C_i^\pm$ ein für alle Male mit einer festen Orientierung dieser Art ausgestattet.

Die Diametralpunktvertauschung $x \to -x$, $x \in S^m$, ist eine Selbstabbildung der m-Sphäre, die die Orientierung erhält oder umkehrt, je nachdem ob m ungerade oder gerade ist. Bezüglich der Zellenzerlegung $\{C_i^\pm\}$ ist sie eine Zellenabbildung und führt $C_i^\pm$ in $(-1)^{i+1} C_i^\mp$ über.

$PC(n)$: Die durch $z_j = 1$, $z_{j+1} = z_{j+2} = \cdots = z_n = 0$ definierte Punktmenge von $PC(n)$ ist eine offene $2j$-Zelle D_j. Die Zellen D_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, die wir uns mit einer festen Orientierung versehen denken, bilden eine Zellenzerlegung (CW-Komplex) von $PC(n)$ und genügen den Berandungsrelationen $\partial D_j = 0$.

---

[1]) $P(1, 2)$ ist die von WU in [*12*], Nr. 3c betrachtete Mannigfaltigkeit.

[2]) Dies sieht man leicht ein — wir werden es im folgenden nicht benutzen — wenn man beachtet, daß Φ jede offene Menge von der Form $U \times PC(n)$ topologisch abbildet, wo U eine offene Menge aus S^m ist, die keine Diametralpunkte enthält.

Die Selbstabbildungen $z \to \bar{z}$ von $PC(n)$ erhält die Orientierung oder kehrt sie um, je nachdem ob n gerade oder ungerade ist. [Dies erkennt man leicht, wenn man inhomogene Koordinaten $z_1 z_0^{-1}, z_2 z_0^{-1}, \ldots, z_n z_0^{-1}$ benutzt; die Funktionaldeterminante in einem „eigentlichen" Punkt $z_0 \neq 0$ ist $(-1)^n$.] Bezüglich der Zellenzerlegung $\{D_j\}$ ist sie eine Zellenabbildung und führt D_j in $(-1)^j D_j$ über.

$\boldsymbol{S^m \times PC(n)}$: Die Produktzellen $C_i^{\pm} \times D_j$ bilden eine Zellenzerlegung von $S^m \times PC(n)$ und genügen den Berandungsrelationen

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \partial(C_i^{\pm} \times D_j) = \pm\,(C_{i-1}^{+} \times D_j + C_{i-1}^{-} \times D_j) \\ \partial(C_0 \times D_j) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 0, 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Die Selbstabbildung φ [s. (1)] von $S^m \times PC(n)$ ist eine Zellenabbildung und es gilt

$$\text{(3)} \qquad \varphi(C_i^{\pm} \times D_j) = (-1)^{i+j+1}\,(C_i^{\mp} \times D_j).$$

$\boldsymbol{P(m,n)}$: Die Abbildung Φ: $S^m \times PC(n) \to P(m, n)$ bildet die Zellen $C_i^{\mp} \times D_j$ topologisch ab (vgl. Fußnote 2). Die Zellen $\Phi(C_i^{+} \times D_j)$ — wir bezeichnen sie mit (C_i, D_j) — bilden daher und wegen (3) eine Zellenzerlegung von $P(m, n)$, und Φ ist eine Zellenabbildung. Aus (2) erhält man durch Anwenden von Φ wegen (3) die Berandungsrelationen

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \partial(C_i, D_j) = \left(1 + (-1)^{i+j}\right)(C_{i-1}, D_j) \\ \partial(C_0, D_j) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 0, 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Es bezeichne $H(m, n) = \sum\limits_{\nu} H_\nu(m, n)$ die direkte Summe der Homologiegruppen mod 2, $H^*(m, n) = \sum\limits_{\nu} H^\nu(m, n)$ den Kohomologiering mod 2 von $P(m, n)$. Nach (4) sind alle Zellen (C_i, D_j) Zyklen mod 2. Ihre Homologieklassen $[C_i, D_j]$ bilden daher eine Basis von $H(m, n)$.

$H^*(m, n)$ ist seiner additiven Struktur nach nichts anderes als der Modul der Homomorphismen von $H(m, n)$ in den Primkörper K der Charakteristik 2; $\langle k, h\rangle$ bezeichne den Wert der Kohomologieklasse k auf der Homologieklasse h. Die durch

$$\text{(5)} \qquad \langle (c^i, d^j), [C_\mu, D_\nu]\rangle = \delta^i_\mu \cdot \delta^j_\nu, \quad i, \mu = 0, 1, \ldots, m, \quad j, \nu = 0, 1, \ldots, n,$$

definierten Kohomologieklassen (c^j, d^j) bilden eine Basis der additiven Struktur von $H^*(m, n)$.

$P(m, n)$ hat also mod 2 dieselben Homologiegruppen wie $PR(m) \times PC(n)$. In D werden wir sehen, daß auch die Kohomologieringe mod 2 dieser beiden Räume übereinstimmen.

C. *$P(m, n)$ ist genau dann orientierbar, wenn $m \neq n\,(2)$ oder $m = 0$ ist.* Denn genau dann ist nach (4) die einzige höchstdimensionale Zelle (C_m, D_n) ein Zykel.

D. Der Kohomologiering mod 2 von $\boldsymbol{P(m,n)}$. Für $m' \leq m$ und $n' \leq n$ identifizieren wir $S^{m'} \times PC(n')$ mit der analytischen Untermannigfaltigkeit

$x_{m'+1}=x_{m'+2}=\cdots=x_m=0$, $z_{n'+1}=z_{n'+2}=\cdots=z_n=0$ von $S^m\times PC(n)$ und $P(m', n')$ mit der analytischen Untermannigfaltigkeit $\Phi\left(S^{m'}\times PC(n')\right)$ von $P(m, n)$ (s. A). $P(m', n')$ repräsentiert die Homologieklasse $[C_{m'}, D_{n'}]\in H(m, n)$ (s. B). Wir werden, um den Schnitt der Homologieklassen $[C_i, D_j]$ und $[C_{i'}, D_{j'}]$, $i, i'\leqq m$, $j, j'\leqq n$; zu bestimmen, die Mannigfaltigkeit $P(i', j')$ in eine andere analytische Untermannigfaltigkeit von $P(m, n)$ deformieren, die sich in allgemeiner Lage relativ zu $P(i, j)$ befindet.

Es seien σ bzw. τ Permutationen der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, m$, bzw. $0, 1, 2, \ldots, n$. Durch

$$x_0\rightarrow \operatorname{sign}(\sigma)\, x_{\sigma(0)}, \quad x_\mu\rightarrow x_{\sigma(\mu)}, \quad \mu>0, \tag{6}$$

$$z_0\rightarrow \operatorname{sign}(\tau)\, z_{\tau(0)}, \quad z_\nu\rightarrow z_{\tau(\nu)}, \quad \nu>0, \tag{7}$$

ist eine analytische Selbstabbildung $(\sigma\times\tau)$ von $S^m\times PC(n)$ gegeben, die mit φ [s. (1)] vertauschbar ist; $(\sigma\times\tau)$ induziert daher eine analytische Selbstabbildung (σ, τ) von $P(m, n)$. Wir verbinden die Matrix der (in den Variablen x_i bzw. z_j linearen) Abbildung (6) bzw. (7) durch eine stetige Schar reeller orthogonaler Matrizen $0(t)$ bzw. $0'(t)$ mit der Einheitsmatrix. $0(t)$ und $0'(t)$ definieren dann eine Schar mit φ vertauschbarer Selbstabbildungen von $S^m\times PC(n)$ und damit eine Schar von Selbstabbildungen von $P(m, n)$, die mit (σ, τ) beginnt und mit der Identität endet. (σ, τ) ist also in die Identität deformierbar und induziert daher den identischen Automorphismus der Homologiegruppe $H(m, n)$.

Um den Schnitt $[C_i, D_j]\circ[C_{i'}, D_{j'}]$ zu bestimmen, betrachten wir die Permutationen

$$\begin{cases} \sigma\colon\ i'+\mu\rightarrow i+1-\mu; \\ \tau\colon\ j'+\nu\rightarrow j+1-\nu, \quad \mu=0,1,\ldots,m, \quad \nu=0,1,\ldots,n. \end{cases} \tag{8}$$

(Falls die in (8) auftretenden Zahlen nicht im Intervall $[0, m]$ bzw. $[0, n]$ liegen, sind sie $\bmod m+1$ bzw. $\bmod n+1$ abzuändern.)

Die Mannigfaltigkeit $(\sigma\times\tau)\left(S^{i'}\times PC(j')\right)$ wird durch die Gleichungen $x_{i+1-\mu}=0$, $z_{j+1-\nu}=0$, $\mu=1, 2, \ldots, m-i'$, $\nu=1, 2, \ldots, n-j'$, beschrieben. Sie befindet sich relativ zu $S^i\times PC(j)$ in allgemeiner Lage (im Sinne von [*1*], Ch. VIII, § 2, Nr. 11) und ihr Durchschnitt mit $S^i\times PC(j)$ ist durch $x_{i+i'-m+1}=x_{i+i'-m+2}=\cdots=x_m=0$, $z_{j+j'-n+1}=z_{j+j'-n+2}=\cdots=z_n=0$, gegeben, d.h.

$$(\sigma\times\tau)\left(S^{i'}\times PC(j')\right)\cap S^i\times PC(j) = \begin{cases} S^{i+i'-m}\times PC(j+j'-n) & \text{für } i+i'\geqq m,\ j+j'\geqq n \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da Φ eine analytische Überlagerung ist, befindet sich auch $(\sigma, \tau)\left(P(i', j')\right)$ in allgemeiner Lage relativ zu $P(i, j)$, und es ist

$$(\sigma, \tau)\left(P(i', j')\right)\cap P(i, j) = \begin{cases} P(i+i'-m, j+j'-n) & \text{für } i+i'\geqq m,\ j+j'\geqq n \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Schnitt ihrer Homologieklassen gilt daher (s. [*1*], Ch. VIII, § 2, Nr. 11)

$$(9)\qquad [C_{i'}, D_{j'}] \circ [C_i, D_j] = \begin{cases} [C_{i+i'-m}, D_{j+j'-n}] & \text{für } i+i' \geqq m,\ j+j' \geqq n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Übergang zum Dualen erhalten wir nun aus (9) die multiplikative Struktur des Kohomologieringes $H^*(m, n)$. Der Wert der zu $[C_{m-i}, D_{n-j}]$ dualen Kohomologieklasse $\Delta[C_{m-i}, D_{n-j}]$ auf $[C_\mu, D_\nu]$, $i, \mu = 0, 1, \ldots, m$, $j, \nu = 0, 1, \ldots, n$, ist gleich der Schnittzahl von $[C_\mu, D_\nu]$ mit $[C_{m-i}, D_{n-j}]$ ($=0$ für $\mu + 2\nu \neq i + 2j$). Daher folgt aus (5) und (9)

$$(10)\qquad \Delta[C_{m-i}, D_{n-j}] = (c^i, d^j), \qquad i = 0, 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, \ldots, n.$$

Satz 1. *Der Kohomologiering* mod 2 *von* $P(m, n)$, $H^*(m, n)$, *wird von den 1- bzw. 2-dimensionalen Klassen* $c = (c^1, d^0)$ *und* $d = (c^0, d^1)$ [s. (5)] *erzeugt. Es bestehen die definierenden Relationen* $c^{m+1} = 0$, $d^{n+1} = 0$.

Bezeichnen c' und d' die entsprechend definierten Erzeugenden von $H^*(m', n')$, ist $m' \leqq m$, $n' \leqq n$ und $f^*: H^*(m, n) \to H^*(m', n')$ der durch die Injektion $P(m', n') \to P(m, n)$ (s. D) *induzierte Homomorphismus, so gilt $f^*(c) = c'$, $f^*(d) = d'$.*

Der erste Teil von Satz 1 folgt aus (9) und (10), weil beim Übergang zum Dualen, Δ, die Schnittbildung in $H(m, n)$ in das $\cup$-Produkt in $H^*(m, n)$ übergeht.

Für den zweiten Teil hat man zu beachten, daß $P(m', n')$ nichts anderes ist als die Vereinigung derjenigen Zellen (C_i, D_j) (s. B) von $P(m, n)$, für die $i \leqq m'$ und $j \leqq n'$ ist; die Behauptung folgt dann aus der Definition von c, c', d, d'.

Bemerkung. Satz 1 läßt sich auch mit Hilfe der spektralen Kohomologiefolge des Faserraums $\{P(m, n), p, PR(m), PC(n), Z_2\}$ (s. A) gewinnen: Man kann die Kohomologie von Basis und Faser als bekannt voraussetzen. Es läßt sich unschwer zeigen, daß die spektrale Kohomologiefolge mod 2 von $P(m, n)$ trivial ist, d.h. daß die Faser mod 2 total nicht nullhomolog ist (s. [*2*], Chap. III, 7). Dann erhält man die Struktur von $H^*(m, n)$ vermöge [*2*], Chap. III, Prop. 9.

E. Die „squares" in $P(m, n)$. Die Steenrodschen Sq^i-Kohomologieoperationen[3]) in $H^*(m, n)$ können wegen Satz 1 und wegen der Cartanschen Produktformel $Sq^i(xy) = \sum_{\nu+\mu=i} Sq^\nu x\, Sq^\mu y$ durch die $Sq^\nu c$ und $Sq^\nu d$ ausgedrückt werden. Es gilt

$$(11)\qquad Sq^0 c = c, \quad Sq^1 c = c^2, \quad Sq^i c = 0 \qquad \text{für } i > 1.$$

$$(12)\qquad Sq^0 d = d, \quad Sq^1 d = cd, \quad Sq^2 d = d^2, \quad Sq^j d = 0 \qquad \text{für } j > 2.$$

Während der Kohomologiering mod 2 von $P(m, n)$ nach Satz 1 mit dem von $PR(m) \times PC(n)$ übereinstimmt, fallen die Sq^i nach (12) verschieden aus:

[3]) Mit Sq^i bezeichnen wir diejenige „square"-Operation, mod 2 (s. [*4*] oder [*5*]), die die Dimension um i erhöht.

In $PR(m) \times PC(n)$ ist $Sq^1 x = 0$ für jede 2-dimensionale Kohomologieklasse x, in $P(m, n)$ ist $Sq^1 d = cd \neq 0$ für $m, n \geq 1$. Diese Gleichung, $Sq^1 d = cd$, ist die einzige unter den Gln. (11) und (12), die wir beweisen müssen; die anderen sind bekannt (s. [*4*] oder [*5*]). Die Kohomologieoperation Sq^1 in $H^*(m, n)$ ist nach [*5*], Nr. 3 und 4 der zur exakten Folge $0 \to Z_2 \xrightarrow{2} Z_4 \to Z_2 \to 0$ gehörige BOCKSTEIN-Homomorphismus δ^*: $H^*(m, n) \to H^*(m, n)$; Z_r bezeichnet die zyklische Gruppe der Ordnung r. Nach (4) ist $\partial(C_1, D_1) = 2(C_0, D_1)$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, und im Rand anderer Zellen als (C_1, D_1) kommt (C_0, D_1) nicht vor. Daraus folgt: $\delta^*(c^0, d^1) = (c^1, d^1)$ [s. (5)], d.h. aber $Sq^1 d = (c^1, d^1) = cd$, letzteres wegen (9) und (10). Diese Gleichung ist auch noch richtig für $m = 0$ oder $n = 0$; beide Seiten sind dann 0 [für $m = 0$, weil dann $H^3(m, n)$ trivial ist].

F. Die STIEFEL-WHITNEYsche Klasse von $P(m, n)$. Ist $\mathfrak{B} = \{B, p, P, S^{r-1}, 0_r\}$ ein Faserraum mit einem Polyeder P als Basis, der $(r-1)$-Sphäre als Faser und der orthogonalen Gruppe 0_r als Strukturgruppe, so bezeichnet $W_j(\mathfrak{B})$ die mod 2 reduzierte j-te STIEFEL-WHITNEYsche Klasse von $\mathfrak{B}$, $j = 0, 1, \ldots, r$ (s. [*3*], § 38). $W(\mathfrak{B}) = \sum_{j=0}^{r} W_j(\mathfrak{B})$ bezeichnen wir als die STIEFEL-WHITNEYsche Klasse von $\mathfrak{B}$ schlechthin.

Ist insbesondere $P = P(m, n)$ (s. A) und $\mathfrak{B}$ der Faserraum der Tangenteneinheitsvektoren (bezüglich irgendeiner RIEMANNschen Metrik) so schreiben wir $W_j(m, n)$ statt $W_j(\mathfrak{B})$ und $W(m, n)$ statt $W(\mathfrak{B})$.

Satz 2. *Die* STIEFEL-WHITNEY*sche Klasse von $P(m, n)$ ist gegeben durch*

$$W(m, n) = (1 + c)^m (1 + c + d)^{n+1}.$$ [4]

[*Definition von $P(m, n)$ s.* A, *von c und d s. Satz 1.*]

Beweis durch Induktion nach m und n: Satz 2 ist richtig für $m = n = 0$. Sei nun $m > 0$ oder $n > 0$.

Für $n > 0$ ist $P(m, n-1)$ bezüglich der in D definierten Injektion eine analytische Untermannigfaltigkeit von $P(m, n)$ und repräsentiert die Homologieklasse $[C_m, D_{n-1}] \in H(m, n)$. Die hierzu duale Kohomologieklasse ist $d = (c^0, d^1)$ [s. (10)]. N sei der Faserraum der zu $P(m, n-1)$ normalen Einheitsvektoren von $P(m, n)$. Nach THOM (s. [*7*] oder [*9*], Chap. III, Nr. II) gilt

$$\psi^*(W_j(N)) = Sq^j d. \tag{13}$$

Dabei ist ψ^*: $H^*(m, n-1) \to H^*(m, n)$ der zur Injektion $P(m, n-1) \to P(m, n)$ gehörige „Umkehrhomomorphismus"; er genügt der Beziehung (s. [*9*], Introduct. VI)

$$\psi^*(f^*(y)) = y\, d, \quad y \in H^*(m, n); \tag{14}$$

[4]) Den Satz 2 und damit einen gegenüber dem ursprünglichen erheblich vereinfachten Beweis von Satz 3 verdanke ich Herrn D. PUPPE, der $W(m, n)$ mit der Methode von WU [*12*] berechnet hat.

$f^*: H^*(m, n) \to H^*(m, n-1)$ der durch die Injektion induzierte Homomorphismus.

f^* ist eine Abbildung *auf* (Satz 1); wir wählen $W_i \in H^*(m, n)$ so, daß $f^*(W_i) = W_i(N)$ ist. Aus (13) und (14) folgt dann $W_i d = Sq^i d$. Hieraus und aus (12) $W_0 \equiv 1$, $W_1 \equiv c$, $W_2 \equiv d \bmod d^n$ und somit

$$W(N) = f^*(1 + c + d). \tag{15}$$

Ist T der Faserraum der Tangenteneinheitsvektoren von $P(m, n)$, T' der über $P(m, n-1)$ gelegene Teil von T, so gilt (s. [*3*], 35.7)

$$W(T') = f^* W(T) = f^* W(m, n). \tag{16}$$

Nach der WHITNEYschen Dualitätsformel (s. [*11*], § 3) ist

$$W(T') = W(m, n-1)\, W(N). \tag{17}$$

Die Induktionsvoraussetzung über $W(m, n-1)$ besagt wegen Satz 1

$$W(m, n-1) = f^*\big((1+c)^m (1+c+d)^n\big). \tag{18}$$

Einsetzen von (15), (16) und (18) in (17) ergibt

$$f^* W(m, n) = f^*\big((1+c)^m (1+c+d)^{n+1}\big),$$

d.h.

$$W(m, n) \equiv (1+c)^m (1+c+d)^{n+1} \bmod d^n. \tag{19}$$

Diese Formel ist trivialerweise auch richtig für $n = 0$.

Als Zweites betrachten wir die Injektion $P(m-1, n) \to P(m, n)$, falls $m > 0$. $P(m-1, n)$ repräsentiert die Homologieklasse $[C_{m-1}, D_n] \in H(m, n)$ (s. D); hierzu dual ist die Kohomologieklasse $c = (c^1, d^0)$ [s. (10)]. Eine zur vorangehenden genau analoge Betrachtung ergibt nun

$$W(M) = f^*(1+c) \tag{15'}$$

und

$$W(m, n) \equiv (1+c)^m (1+c+d)^{n+1} \bmod c^m. \tag{19'}$$

Dabei bezeichnet $f^*: H^*(m, n) \to H^*(m-1, n)$ wieder den durch die Injektion induzierten Homomorphismus und M ist der Faserraum der auf $P(m-1, n)$ normalen Einheitsvektoren von $P(m, n)$.

Nach (19) und (19') ist $W(m, n) \equiv (1+c)^m (1+c+d)^{n+1} \bmod c^m d^n$. Der homogene Bestandteil vom Grade $m + 2n$ auf der rechten Seite dieser Kongruenz ist $(m+1)(n+1) c^m d^n$. Andererseits ist (s. [*3*], 39.7) $W_{m+2n}(m,n) = N(m, n) c^m d^n$, wenn $N(m, n)$ die EULERsche Charakteristik von $P(m, n)$ bezeichnet. Der Beweis des Satzes 2 ist also vollendet, wenn wir noch gezeigt haben, daß $N(m, n) \equiv (m+1)(n+1) \bmod 2$ ist. Aus der Struktur von $H^*(m, n)$ (s. Satz 1) ergibt sich aber durch einfache Rechnung

$$N(m, n) = \tfrac{1}{2}\big(1 + (-1)^m\big)(n+1) \equiv (m+1)(n+1) \bmod 2.$$

G. Die Erzeugenden von $\mathfrak{N}$.

Satz 3. *Für jede natürliche Zahl i, die nicht von der Form $2^l - 1$ ist, seien die ganzen Zahlen r und s durch $i+1 = 2^r(2s+1)$ erklärt. Es sei*

$$P(i) = \begin{cases} P(i,0) = PR(i) & \text{für gerades } i \\ P(2^r - 1, s2^r) & \text{für ungerades } i \text{ (s. A)}. \end{cases}$$

$P(i)$ ist eine i-dimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit; x_i bezeichne ihre Klasse in der Algebra $\mathfrak{N}$ (s. [8], Chap. IV).

$\mathfrak{N}$ kann aufgefaßt werden als Polynomalgebra $K[x_2, x_4, x_5, \ldots]$ in den Variablen x_i, $i = 2, 4, 5, 6, 8, \ldots$ über dem Primkörper K der Charakteristik 2.

NB. Satz 3 geht nur insofern über das Ergebnis von THOM (s. [8], S. 79ff.) hinaus, als auch für die ungeraden Dimensionen $i > 5$ explizit repräsentierende Mannigfaltigkeiten für die Variablen x_i angegeben werden.

Beweis. Es seien $K[\iota]$ der Ring der Polynome über K in den Variablen $t_1, t_2, \ldots, t_\iota$, $S[\iota] \subset K[\iota]$ die Unteralgebra der symmetrischen Polynome, $S_j(\iota)$ die j-te elementarsymmetrische Funktion der t_ν, $j = 0, 1, \ldots, \iota$, und $S^h(\iota) = \sum_{\nu=1}^{\iota} t_\nu^h$, $h = 0, 1, \ldots$.

Für jedes $\iota \geqq i$ definieren wir einen gradtreuen Homomorphismus $\Psi_{i,\iota}$: $S[\iota] \to H^*(i)$ durch

$$\Psi_{i,\iota}(S_j(\iota)) = \begin{cases} W_j(i) & \text{für } j \leqq i \\ 0 & \text{für } j > i. \end{cases} \tag{20}$$

Dabei bezeichnet $H^*(i)$ den Kohomologiering mod 2 und $W_j(i)$ die j-te STIEFEL-WHITNEYsche Klasse von $P(i)$.

$\Psi_{i,\iota}$ führt $\prod_{\nu=1}^{\iota}(1+t_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\iota} S_\nu(\iota)$ in $W(i) = \sum_{\nu=0}^{i} W_\nu(i)$ über und ist unter den gradtreuen Homomorphismen $S[\iota] \to H^*(i)$ dadurch charakterisiert.

Für den Beweis des Satzes 3 genügt es nach [8], Chap. IV, Nr. 7 zu zeigen, daß $\Psi_{i,i}(S^i(i)) \neq 0$ ist; wiederum nach [8] können wir uns dabei auf ungerades i beschränken. Wir beweisen nun zunächst die Gleichung

$$\Psi_{i,\iota}(S^h(\iota)) = \Psi_{i,i}(S^h(i)), \quad \iota \geqq i \tag{21}$$

und zeigen dann $\Psi_{i,i+2}(S^i(i+2)) \neq 0$.

Um (21) zu erhalten, definieren wir einen gradtreuen Homomorphismus $p_{i,\iota}$: $K[\iota] \to K[i]$ durch $p_{i,\iota}(t_\nu) = \begin{cases} t_\nu & \text{für } \nu \leqq i \\ 0 & \text{für } \nu > i \end{cases}$. Man bestätigt leicht, daß

$$p_{i,\iota}(S_j(\iota)) = \begin{cases} S_j(i) & \text{für } j \leqq i \\ 0 & \text{für } j > i \end{cases} \tag{22}$$

und

$$p_{i,\iota}(S^h(\iota)) = S^h(i) \tag{23}$$

ist. Aus (22) und (20) folgt $\Psi_{i,i} \circ p_{i,\iota}(S_j(\iota)) = \Psi_{i,\iota}(S_j(\iota))$, $j = 0, 1, \ldots, \iota$, also $\Psi_{i,i} \circ (p_{i,\iota} | S[\iota]) = \Psi_{i,\iota}$. Wendet man auf (23) $\Psi_{i,i}$ an, so folgt hieraus (21).

Für die Berechnung von $\Psi_{i,i+2}(S^i(i+2))$ benötigen wir die Darstellung von $S^h(2)$ als Polynom in $S_1(2)$ und $S_2(2)$. Die bekannte Identität

$$\sum_{j=0}^{\iota} S_j(\iota)\, S^{h-j}(\iota) = 0, \quad h \geqq \iota \tag{24}$$

[Beweis: Das Polynom $\prod_{\nu=1}^{\iota}(1+t t_\nu) = \sum_{j=0}^{\iota} S_j(\iota) t^j$ über $K[\iota]$ hat die Nullstellen t_ν^{-1}, $\nu = 1, 2, \ldots, \iota$. Man erhält also, wenn man t_ν^{-1} in dieses Polynom einsetzt und mit t_ν^h multipliziert: $0 = \sum_{j=0}^{\iota} S_j(\iota)\, t_\nu^{h-j}$ und hieraus durch Summation über ν die Gl. (24).]

ergibt für $\iota = 2$

$$S^h(2) = S_1(2)\, S^{h-1}(2) + S_2(2)\, S^{h-2}(2), \quad h \geqq 2. \tag{25}$$

Hieraus folgt durch Induktion nach h

$$S^h(2) = \sum_{p+2q=h} b(p+q-1, q)\, (S_1(2))^p\, (S_2(2))^q, \quad h = 1, 2, \ldots. \tag{26}$$

Dabei ist $b(p+q-1, q)$ der Binomialkoeffizient $\binom{p+q-1}{q} \bmod 2$ ($=1$ für $q=0$, $=0$ für $q<0$ oder $p<q \neq 0$), und es wird über alle nicht negativen ganzen p, q mit $p+2q=h$ summiert.

(26) ist richtig für $h = 1, 2$, denn $S^1(2) = S_1(2)$ und $S^2(2) = (S_1(2))^2$. Für $h > 2$ ergeben (25) und die Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} S^h(2) &= \sum_{p+2q=h-1} b(p+q-1, q)\, (S_1(2))^{p+1}\, (S_2(2))^q + \\ &\quad + \sum_{p+2q=h-2} b(p+q-1, q)\, (S_1(2))^p\, (S_2(2))^{q+1} \\ &= \sum_{p+2q=h} \big(b(p+q-2, q) + b(p+q-2, q-1)\big)\, \big((S_1(2))^p\, (S_2(2))^q \\ &= \sum_{p+2q=h} b(p+q-1, q)\, \big((S_1(2))^p\, (S_2(2))^q, \end{aligned}$$

letzteres wegen der bekannten Additionsformel für Binomialkoeffizienten.

Durch die Festsetzungen

$$\left.\begin{aligned} \Psi(t_{2\nu-1} + t_{2\nu}) &= c \\ \Psi(t_{2\nu-1}\, t_{2\nu}) &= d \\ \Psi(t_{2n+2+\mu}) &= c \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\nu = 1, 2, \ldots, n+1, \quad \mu = 1, 2, \ldots, m, \\ &n = s 2^r, \quad m = 2^r - 1 \quad \text{(s. Satz 3)} \end{aligned}$$

definieren wir einen gradtreuen Homomorphismus der von den $(t_{2\nu-1} + t_{2\nu})$, $(t_{2\nu-1} t_{2\nu})$ und $t_{2n+2+\mu}$ erzeugten Unteralgebra von $K[i+2]$ in $H^*(i) = H^*(m, n)$. Ψ führt das Polynom

$$\begin{aligned} \prod_{\varrho=1}^{i+2} (1 + t_\varrho) &= \prod_{\nu=1}^{n+1} (1 + t_{2\nu-1})\, (1 + t_{2\nu}) \prod_{\mu=1}^{m} (1 + t_{2n+2+\mu}) \\ &= \prod_{\nu=1}^{n+1} \big(1 + (t_{2\nu-1} + t_{2\nu}) + t_{2\nu-1} t_{2\nu}\big) \cdot \prod_{\mu=1}^{m} (1 + t_{2n+2+\mu}) \end{aligned}$$

in $(1+c+d)^{n+1}(1+c)^m = W(m, n) = W(i)$ über. Die Einschränkung von Ψ auf $S[i+2]$ stimmt also mit $\Psi_{i,i+2}$ überein. Daher ist

$$\begin{aligned}\Psi_{i,i}(S^i(i)) &= \Psi_{i,i+2}(S^i(i+2)) = \Psi(S^i(i+2)) = \Psi\Big(\sum_{\varrho=1}^{i+2} t_\varrho^i\Big)\\ &= (n+1)\,\Psi(t_1^i+t_2^i) + m\,\Psi(t_{i+2}^i) = (n+1)\,\Psi(S^i(2)) + m\,\Psi(t_{i+2}^i)\\ &= (n+1)\,\Psi\Big(\sum_{p+2q=i} b(p+q-1, q)\,(S_1(2))^p (S_2(2))^q\Big) + m\,\Psi(t_{i+2}^i)\\ &= (n+1)\sum_{p+2q=i} b(p+q-1, q)\,c^p d^q + m c^i.\end{aligned}$$

Wegen $i>m$ ist $c^i=0$ (s. Satz 1). Ferner ist $c^p d^q$ für $p+2q=i$ nur dann von 0 verschieden, wenn $p=m$ und $q=n$ ist (Satz 1). Beachtet man noch, daß $n+1\equiv 1(2)$ ist, so ergibt sich $\Psi_{i,i}(S^i(i)) = b(m+n-1, n)\,c^m d^n$. Nun ist $m+n-1 = s2^r + (2^r-2)$ und $n = s2^r$. Daraus geht hervor, daß die dyadische Entwicklung von n in der von $m+n-1$ enthalten ist, d.h. (s. [6], Lemma 2.2), daß $b(m+n-1, n)=1$ und $\Psi_{i,i}(S^i(i)) = c^m d^n \neq 0$ ist, w.z.b.w.

Bemerkung. Die in Satz 3 getroffene Auswahl der Erzeugenden von $\mathfrak{N}$ unter den Mannigfaltigkeiten $P(m, n)$ ist nicht eindeutig festgelegt. Aus dem Beweis geht hervor, daß man z.B. in der Dimension 6 auch $P(2, 2)$ statt $P(6, 0)$ und in der Dimension 9 $P(5, 2)$ statt $P(1, 4)$ hätte nehmen können.

H. Anwendung auf die Algebra Ω. Für ungerades $i \neq 2^l - 1$ ist die Mannigfaltigkeit $P(i)$ (s. Satz 3) orientierbar (s. C). Versehen wir sie mit einer festen Orientierung, so definiert sie ein Element $v_i \in \Omega^i$ (s. Einleitung oder [8], Chap. IV, 1), das beim natürlichen Homomorphismus $\Omega \to \mathfrak{N}$ in x_i übergeht. v_i ist also sicher nicht Null. Es gilt aber: *Die Ordnung von $v_i \in \Omega^i$ ist* 2.

Es gibt nämlich eine differenzierbare, orientierungsumkehrende Involution von $P(i)$. Um dies einzusehen, betrachten wir das Produkt $S^m \times PC(n)$ mit $m = 2^r - 1$, $n = s2^r$ (s. Satz 3). Ist $x = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$ ein Punkt aus S^m, so bezeichne $\tilde{x}$ den Punkt $(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, -x_m)$ aus S^m. Durch $\tilde{I}(x, z) = (\tilde{x}, z)$, $x \in S^m$, $z \in PC(n)$, definieren wir eine differenzierbare Involution von $S^m \times PC(n)$ vom Grade -1. $\tilde{I}$ ist mit der Deckbewegung φ [s. (1)] vertauschbar und induziert daher eine differenzierbare Involution I von $P(m, n)$; I kann durch die Gleichung $I \circ \Phi = \Phi \circ \tilde{I}$ definiert werden. Φ hat als zweiblättrige Überlagerung den Grad ± 2, also I wegen $I \circ \Phi = \Phi \circ \tilde{I}$ den Grad -1.

Hieraus folgt nun: *Beim natürlichen Homomorphismus $\Omega \to \mathfrak{N}$ ist die von den x_i (s. Satz 3) mit ungeradem $i \neq 2^l - 1$ erzeugte Unteralgebra von $\mathfrak{N}$ isomorphes Bild der von den v_i erzeugten Unteralgebra von Ω.* Insbesondere ergibt sich, daß die Gruppen Ω^k nicht zu „klein" sein können; z.B. gilt: *Für $k \geq 8$ ist Ω^k nicht trivial,* d.h. in jeder Dimension $k \geq 8$ gibt es nicht-berandende kompakte orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

Zum Beweis genügt es (nach dem eben Gesagten und nach [8], Chap. IV, Nr. 8), ein Produkt von Räumen $P(i)$, i ungerade $\neq 2^l - 1$, und komplexen projektiven Räumen $PC(2j)$ gerader komplexer Dimension anzugeben, das die Gesamtdimension k hat; d.h. wir haben eine Partition von k in ungerade natürliche Zahlen $\neq 2^l - 1$ und durch 4 teilbare natürliche Zahlen anzugeben. Für $k \equiv 3\,(4)$, $k \geq 11$, ist $k = 11 + (k - 11)$, für $k \equiv 2\,(4)$, $k \geq 10$, ist $k = 5 + 5 + (k - 10)$ und in allen anderen Fällen ist $k = k$ eine solche Partition.

Literatur

[1] LEFSCHETZ, S.: Topology. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **12** (1930). — [2] SERRE, J. P.: Homologie singulière des espaces fibrés; applications. Ann. of Math. **54**, 425—505 (1951). — [3] STEENROD, N.: The topology of fibre bundles. Princeton Math. Ser. 14. — [4] STEENROD, N.: Products of cocycles and extensions of mappings. Ann. of Math. **48**, 290—320 (1947). — [5] STEENROD, N.: Homology groups of symmetric groups and reduced power operations; cyclic reduced powers of cohomology classes. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 213—223 (1953). — [6] STEENROD, N., and J. H. C. WHITEHEAD: Vector fields on the n-sphere. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37**, 58—63 (1951). — [7] THOM, R.: Variétés plongées et i-carrés. C. R. Acad. Sci. Paris **230**, 507—508 (1950). — [8] THOM, R.: Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comment. Math. Helv. **28**, 17—87 (1954). — [9] THOM, R.: Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod. Ann. Ecole norm. sup. (3) **69**, 109—182 (1952). — [10] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial Homotopy. I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213—245 (1949). — [11] WU, WEN-TSÜN: On the product of sphere-bundles and the duality theorem mod 2. Ann. of Math. **49**, 641—653 (1948). — [12] WU, WEN-TSÜN: Classes caractéristiques et i-carrés. C. R. Acad. Sci. Paris **230**, 508—511 (1950).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 22. November 1955)