



## EC-3300 Crecimiento y ciclos económicos

**Elaborado por:** Laura C. Blanco y Jorge Alfaro.

**Revisado y actualizado por:** Laura C. Blanco

I-2023

### Cuaderno de ejercicios

#### Práctica sobre el modelo de Solow y el modelo de capital humano

- Suponga que en el modelo de Solow, la función de producción está dada por  $Y_t(K_t, E_t L_t) = (K_t^\rho + (E_t L_t)^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$  con  $\rho < 1$ ,  $K_t$  es el stock de capital, y  $E_t$  es la eficiencia asociada a la mano de obra  $L_t$ . Además, se produce sujeto a una restricción dada por la inversión neta de la depreciación ( $\delta$ ), tal que: que  $K_{t+1} - K_t = sY_t - \delta K_t$ , donde  $s$  es la propensión marginal a ahorrar. Se está en una economía cerrada en la cual se alcanza el equilibrio de fondos prestables según la Ley de Say. El parámetro de eficiencia crece a una tasa  $g$  y la mano de obra, a una tasa  $n$ . Defínase:  $1+z=(1+g)(1+n)$  y  $k_t^E$  como el capital por unidad efectiva de trabajo.
  - Encuentre la senda de inversión,  $\Delta k_t^E$ , en términos de unidades efectivas de trabajo.
  - Halle las expresiones correspondientes al estado estacionario  $\bar{k}^E, \bar{y}^E, \bar{c}^E$  como función de los parámetros  $s, z, \delta$  y  $\rho$ . Explique qué significan estas variables del estado estacionario.
  - ¿Cuál es el valor de la regla de oro de  $\bar{k}^E$  que optimiza el nivel de consumo?
  - ¿Cuál es la tasa de ahorro necesaria para que se cumpla la regla de oro del stock de capital?
  - Repita todos los incisos anteriores, pero con una función de producción de la siguiente forma:  $Y_t(K_t, E_t L_t) = K_t^\alpha (E_t L_t)^{1-\alpha}$  con  $0 < \alpha < 1$ .
- Asuma una economía cerrada que cumple con todos los supuestos del modelo de Solow. Dicha economía se encuentra en equilibrio. Explique qué ocurriría en la economía con el capital, la inversión, el producto, el ahorro y el consumo por unidad efectiva de trabajo en cada uno de los siguientes casos, así como el producto *per capita* y producto de la economía y sus respectivas tasas de crecimiento:
  - Se da una erupción volcánica que provoca lluvia ácida y acelera la corrosión de materiales.
  - Se anuncia en Francia que el Reactor Termonuclear Experimental Internacional (ITER) ha sido exitoso y se procederá a establecer estaciones de producción de energía en los 35 países colaboradores del proyecto.



- c) Se aprueba una ley que le traslada a la Caja Costarricense de Seguro Social los fondos del segundo pilar de la Ley de Protección al Trabajador (i.e., el régimen de pensión complementario obligatorio) con el propósito de aliviar la crisis en el pilar de reparto.
  - d) Se aprueba una ley que obliga a la población asalariada a ahorrar una proporción mayor de su ingreso para un fondo de pensiones.
  - e) Se aprueba una reforma tributaria que reduce el déficit fiscal en 1%.
  - f) Ocurre una epidemia en la economía, la enfermedad no es mortal, pero causa problemas de esterilidad en las personas que la sufrieron.
  - g) Se da un aumento de la participación del capital en la producción.
  - h) Ocurre un cataclismo que destruye el capital en la sociedad.
  - i) La fracción de Restauración Nacional y Nueva República son exitosas en establecer una teocracia (<https://www.nacion.com/el-pais/politica/rony-chaves-apostol-y-sombra-de-fabricio-alvarado/3VCFXSJIWZD47DYRXM5I2DZU6A/story/>) que elimina toda forma de anticoncepción en el país.
  - j) La administración es exitosa en implementar la neutralidad del carbono gracias a la clausura de industrias que producen dióxido de carbono.
  - k) La administración es exitosa en implementar la neutralidad del carbono gracias a un aumento en la inversión extranjera directa en formas de producción limpias y el desarrollo de investigación y desarrollo que acelera la producción de nuevas fuentes de energía (<https://www.nytimes.com/es/2019/03/12/costa-rica-carbono/>).
3. En el modelo de Solow, identifique el estado estacionario y explique sus características. ¿Qué asegura estas características? ¿Por qué es esto importante, proveen estas características respuesta a la pregunta que Solow deseaba responder? Explique.
4. En el modelo de Solow, suponga que la función de producción es  $Y_t = K_t^{\frac{3}{5}}(L_tE_t)^{\frac{2}{5}}$ . La tasa de ahorro de esta sociedad es de 30% del producto de cada año, la tasa de depreciación ( $\delta$ ) del capital es del 8% anual, la tasa de crecimiento anual de la población ( $n$ ) es de 2% y el nivel de tecnología ( $E_t$ ) es 1.
- a) Halle la ecuación fundamental de Solow con los valores dados en términos *per capita*.
  - b) Si se define  $x_t = \frac{X_t}{L_t}$ , donde  $X_t \in \{K_t, Y_t, C_t\}$ , encuentre el valor de estado estacionario para  $\bar{k}, \bar{y}, \bar{c}$ .
  - c) Repita los dos incisos anteriores, pero ahora suponga que la función de producción a la que se enfrenta la economía es  $Y_t = K_t^{\frac{3}{4}}(L_tE_t)^{\frac{1}{4}}$ , la tasa de ahorro es de 35%, la tasa a la que se deprecia el capital es de 11%, la tasa de crecimiento de la población es de 1% y el nivel de tecnología en la población es constante e igual a 8.
5. A partir del escenario en 4a y 4b, suponga que la tasa de depreciación del capital disminuye de 8% a 5%. Muestre gráfica, analítica y numéricamente lo que le ocurre a la economía ante esta perturbación. Además, explique qué ocurre con el capital, el producto y el consumo por persona trabajadora.



6. Encuentre el capital *per capita*, consumo *per capita* y producción *per capita* de equilibrio si se tiene una función Cobb-Douglas y los siguientes parámetros:
- Tasa de ahorro ( $s$ ) igual a 15%.
  - Tasa de depreciación ( $\delta$ ) igual a 2%.
  - Tasa de crecimiento anual de la población ( $n$ ) de 1.5%.
  - Participación del capital en la función de producción ( $\alpha$ ) igual a 30%.
  - Valor del índice tecnológico igual a 60 ( $E_t$ ).
  - Crecimiento tecnológico igual a 3% anual.
7. Utilizando los datos del ejercicio anterior, y suponiendo que el stock de capital *per capita* inicial es igual a 100, represente gráficamente la evolución de las variables *per capita* (capital, consumo y producción) en su trayectoria hacia el estado estacionario.
8. Considere una economía que tiene la siguiente función de producción  $Y = K^{2/3} L^{1/3}$ . En esta economía la tasa de ahorro es 30%, la tasa de crecimiento de la población es 2% y la tasa de depreciación es 13%. Suponga que la población está normalizada en  $L$ . Encuentre los valores del estado estacionario del capital *per capita*, el PIB *per capita* y la inversión *per capita* en cada uno de los siguientes escenarios iniciales. Además, grafique el capital, producto, ahorro, costo de reposición, inversión y tasa de crecimiento de las variables en términos *per capita*, así como la evolución de la población, el producto y la tasa de crecimiento del producto en Excel y determine en cuántos períodos logra alcanzar el estado estacionario si parte de un nivel inicial de capital igual a los siguientes valores:
- a)  $k_0 = 2$ ;
  - b)  $k_0 = 5$ ;
  - c)  $k_0 = 8$ ;
  - d)  $k_0 = 10$ ;
  - e) ¿Cómo varía la tasa de crecimiento del producto en cada caso? Compare.
  - f) Suponga ahora que la función de producción está dada por  $Y_t = K_t^{2/3} (L_t E_t)^{1/3}$ ,  $E_t = 0.25$  y crece a un 5% anual. Repita el ejercicio anterior y grafique la evolución de las variables en términos de unidad efectiva de trabajo, *per capita* y a nivel nacional. Compare sus resultados.
9. Considere dos economías cuyas funciones de producción son las siguientes:

Economía A	$Y = K^{1/3} L^{2/3}$
Economía B	$Y = K^{3/2} L^{1/2}$

Analice si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y explique en cada caso:

- a) Si sólo se incrementa el capital, la producción de la economía B crecerá más que la producción de la economía A.
- b) Si se duplican ambos factores de producción, el producto de la economía A crecerá menos que el de la economía B.



- c) Si sólo se incrementa el trabajo, la producción de la economía B crecerá menos que la producción de la economía A.
- d) La economía A se caracteriza por tener rendimientos constantes a escala, mientras que la economía B presenta rendimientos decrecientes a escala.
10. Derive el modelo de Solow en tiempo continuo. Para ello considere lo siguiente:
- El capital por unidad efectiva de trabajo corresponde a:  $k(t) = \frac{K(t)}{E(t)L(t)}$
  - Las tasas de crecimientos de la población y la tecnología están dadas por  $n = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}$  y  $g = \frac{\dot{E}(t)}{E(t)}$ , respectivamente.
  - La ecuación que describe el equilibrio en el mercado de fondos prestables está dada por:  
 $K(t) = sF(K(t), L(t)E(t)) - \delta K(t)$ .
11. Suponga que las personas en la economía descrita en el ejercicio anterior se organizan para formar un gobierno. Este grava el ingreso de los hogares mediante una tasa impositiva  $\tau$  y tiene un gasto exógeno  $G_t$ :
- Plantee la ecuación de equilibrio para la economía.
  - Normalice dicha ecuación en términos de unidades efectivas de trabajo y obtenga la ecuación que describe la trayectoria de inversión por unidad efectiva de trabajo.
  - Encuentre el estado estacionario de esta economía. ¿Se cumple la existencia de un único estado estacionario? Demuestre y explique su respuesta.
12. Explique qué ocurriría con el capital, producto, ahorro y consumo de la economía del inciso anterior en los siguientes escenarios si inicialmente el gobierno mantiene un gasto equilibrado. Identifique la perturbación, explique el proceso de ajuste e identifique el nuevo estado estacionario relacionando su respuesta a un gráfico:
- El gobierno decide aumentar su gasto para implementar mayores políticas sociales.
  - El gobierno decide disminuir la tasa impositiva  $\tau$  y mantener un presupuesto equilibrado.
  - El gobierno decide incrementar el ahorro público.
13. Utilice la regla de Taylor para aproximar la senda de inversión del modelo de Solow como una función lineal (polinomio de grado 1) alrededor del estado estacionario. Demuestre que el ritmo de convergencia hacia el estado estacionario es igual a:

$$\mu = \frac{z + \delta}{1 + z} (\alpha_k (\bar{k}^E) - 1)$$

Recuerde que una función  $f(x)$  continua y  $n$ -veces derivable en el intervalo  $[a, b]$  puede aproximarse alrededor de un valor  $X_0$  como:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \text{ donde: } P_n(x) = \sum_{K=0}^n \frac{f^{(K)}(X_0)}{K!} (X - X_0)^K$$



14. Sean  $n=0.05$ ,  $g=0.03$ ,  $\delta=0.01$  y  $\alpha_k(k^E) = 0.2$ :
- Encuentre la tasa a la que se cierra la brecha entre  $k_t^E$  y  $\bar{k}^E$ .
  - Sea  $k_0^E$  el capital por unidad efectiva de trabajo inicial y  $\bar{k}^E$  su nivel de estado estacionario, ¿cuántos períodos tarda el capital en duplicarse, cuántos en triplicarse?
  - Si  $k_0^E = 12.5$  y  $\bar{k}^E = 16$ , ¿cuál sería el valor de  $\Delta k_1^E$ ?
  - Suponga que la tasa de crecimiento de la tecnología se incrementa a 0.07. Recalcule los incisos anteriores tomando en cuenta este cambio. ¿Qué implicaciones económicas tiene esta circunstancia?
15. Demuestre que en el modelo de Solow el ingreso *per capita* crece a un ritmo constante e igual a  $g$  cuando el nivel de capital por unidad efectiva de trabajo se encuentra en estado estacionario.
16. Demuestre el cumplimiento de las condiciones de Uzawa para el modelo de Solow en tiempo continuo.
17. En cada caso, encuentre los estados estacionarios de la función  $y$ , para cada uno de ellos, analice si son estables o no:
- $x(t+1) = \sqrt[3]{3x(t)^2 + 13x(t) - 15}$
  - $x(t+1) = x(t)^3 - x(t)^2 - 4x(t) - 3$
  - $x(t+1) = x(t)^2 + x(t) + \frac{1}{4}$
  - $x(t+1) = 4x(t)^3 + \frac{4}{3}x(t)^2 - \frac{1}{3}$
18. El 23 de junio del 2016 el Reino Unido votó por salir de la Unión Europea. Al día siguiente, el FTSE 250, el índice de valores que representa una gran cantidad de empresas británicas, se redujo en un 7.18%, desde 12236.7 a 11357.47 puntos. El tipo de cambio se redujo de 1.3072 euros por libra a 1.2320, lo que representa una caída del 5.8%. El 27 de junio del mismo año Standard and Poor's redujo la calificación para el Reino Unido de AAA a AA. Bloomberg acaba de contratarle a usted como parte del grupo de asesoría económica. Utilice el modelo de Solow para explicar qué ocurrirá con el producto, consumo y capital por unidad efectiva de trabajo de largo plazo. Explique en qué consiste la perturbación: para cada parámetro del modelo, explique si este se ve afectado, cómo y por qué. Explique detalladamente el proceso de ajuste y encuentre el nuevo nivel de equilibrio. Dibuje el diagrama correspondiente y relaciónelo con su respuesta.
19. Lea las siguientes notas periodísticas: <https://www.nytimes.com/2019/02/11/business/brexit-economy-europe-britain-netherlands.html>, <https://www.nytimes.com/2022/11/22/world/europe/uk-brexit-regret.html>. ¿Se ven reflejadas sus predicciones sobre la economía británica del ejercicio anterior en el artículo? Explique.
20. Se estima que, a julio de 2020, China tendrá casi mil cuatrocientos millones de personas. Esta población se caracteriza por ser joven, con una media de edad de 38.4 años. De hecho, apenas 12.3% de la población actual tiene una edad superior a los 64 años. Su tasa de crecimiento



poblacional actual es de 0.32% y la tasa de fertilidad es de 1.6 infantes por mujer. Su esperanza de vida es de 76 años. En 1979, China contaba con una población de novecientos sesenta y nueve millones de personas y su tasa de fertilidad era de 2.7 infantes por mujer. El ingreso *per capita* de entonces ascendía a \$184, mientras que, en los países más ricos, este ingreso era de \$8 646. China planifica su economía a través de sus planes quinquenales. Después de 1978, el sucesor de Mao, Deng Xiaoping, lideró una serie de reformas graduales para desarrollar una economía de mercado. Las reformas económicas del plan quinquenal de finales de los setenta incluían: la reducción progresiva de la agricultura colectiva, una expansión de la industrialización con un fuerte componente sobre el uso del capital que se complementaba con la mano de obra existente, la liberación gradual de precios, la descentralización fiscal, una mayor autonomía para las empresas estatales, crecimiento del sector privado, el desarrollo de mercados accionarios y sistemas bancarios para hacer más atractiva la captura de fondos para inversión, la apertura comercial y de su cuenta corriente y un incremento moderado en la transferencia de innovación y desarrollo. Asimismo, se introdujo una ley que restringió el tamaño de las familias, de forma que cada pareja debía reproducirse como máximo una única vez, so pena de una penalización monetaria considerable.

- 20.1. Si las ecuaciones que rigen el modelo de Solow están dadas por:  $Y(t)=F(K(t),E(t)L(t))$ ,  $\dot{K}(t) = sF(K(t),E(t)L(t)) - \delta K(t)$ ,  $L(t)=L(0)e^{nt}$ ,  $E(t)=E(0)e^{gt}$  y  $\dot{k}^E(t) = sf(k^E(t)) - (z + \delta)k^E(t)$ , donde  $k^E(t) = \frac{K(t)}{E(t)L(t)}$  y  $f(k^E(t)) = F\left(\frac{K(t)}{E(t)L(t)}, 1\right)$ ,  $s$  denota la propensión marginal a ahorrar,  $K(t)$  representa el capital en el momento  $t$ ;  $L(t)$ , la mano de obra en el momento  $t$ , que crece a una tasa  $n$  y  $E(t)$ , la tecnología, la cual crece a un ritmo  $g$ , donde  $z=n+g$ , explique, utilizando el modelo de Solow, los efectos de las reformas implementadas en el plan quinquenal de Deng Xiaoping. Para ello, suponga que China se encontraba con un nivel de capital por unidad efectiva de trabajo en estado estacionario e identifique la o las perturbaciones introducidas por las reformas, incluyendo, cómo se ve afectado cada parámetro del modelo, *i.e.*,  $s$ ,  $n$ ,  $g$  y  $\delta$ . Debe explicar la relación entre las reformas y cada perturbación que usted identifique en el modelo. Explique el proceso de ajuste e identifique el nuevo estado estacionario. Relacione su respuesta con un gráfico. Compare qué ocurre con el capital, el ingreso y el consumo en el nuevo estado estacionario en relación con el estado estacionario inicial.
- 20.2. Explique qué ocurre con el nivel de salario, la relación entre los salarios y los ingresos de capital y el empleo en el nuevo estado estacionario en comparación con el estado estacionario inicial.
- 20.3. Susanita es una gran crítica de China y ha declarado que el modelo chino es un rotundo fracaso económico porque actualmente su ingreso *per capita* es de apenas \$9 771 mientras que los países desarrollados tienen un ingreso de \$44 786, por lo que una persona en China apenas recibe una quinta parte de lo que recibe alguien en los países más ricos. Che, en cambio, aboga por el modelo chino porque este ha logrado tasas de crecimiento mayores a las de los países ricos y continuará creciendo siempre a esas tasas mayores. Analice, utilizando únicamente el modelo de Solow, los problemas en los argumentos de Susanita y Che. Explique su respuesta.



21. En 2020, la esperanza de vida en Costa Rica era de 80,6 años, pero debido al COVID-19, se espera que esta disminuya, dado que la tasa de mortalidad ha aumentado 10%. A la vez, la cantidad de matrimonios inscritos a acelerado su tendencia a la baja y los nacimientos registrados en 2020 ascendieron a 57 848, mientras que en 2019 los nacimientos registrados fueron 64 274, lo cual refleja la acentuación de una tendencia. Explique, utilizando el modelo de Solow, la perturbación, el ajuste y el nuevo estado estacionario. Explique, además, que ocurre con el ingreso por persona trabajadora en esta economía en el largo plazo.
22. Si las ecuaciones que rigen el modelo de Solow están dadas por:  $Y(t)=F(K(t),E(t)L(t))$ ,  $\dot{K}(t) = sF(K(t),E(t)L(t)) - \delta K(t)$ ,  $L(t)=L(0)e^{nt}$ ,  $E(t)=E(0)e^{gt}$  y  $\dot{k}^E(t) = sf(k^E(t)) - (z + \delta)k^E(t)$ , donde  $k^E(t) = \frac{K(t)}{E(t)L(t)}$  y  $y^E(t) = f(k^E(t)) = F\left(\frac{K(t)}{E(t)L(t)}, 1\right)$ ,  $s$  denota la propensión marginal a ahorrar,  $K(t)$  representa el capital en el momento  $t$ ;  $L(t)$ , la mano de obra en el momento  $t$ , que crece a una tasa  $n$  y  $E(t)$ , la tecnología, la cual crece a un ritmo  $g$ , donde  $z=n+g$ ,
- 22.1. Explique qué ocurriría en una economía si, debido a la pandemia y los efectos del cambio climático, las mujeres deciden reproducirse menos. Identifique la perturbación, explique el proceso de ajuste e identifique el nuevo estado estacionario. Relacione su respuesta con un gráfico. Compare qué ocurre con el capital, el ingreso y el consumo por unidad efectiva de trabajo en el nuevo estado estacionario en relación con el estado estacionario inicial.
- 22.2. Grafique el comportamiento de  $y^E(t)$ ,  $\frac{y^E(t)}{y^E(t)}$ ,  $y(t)$ ,  $\frac{y(t)}{y(t)}$  a lo largo del tiempo, si  $y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)}$ . Explique los gráficos y por qué difieren entre sí.
- 22.3. Encuentre el efecto de un cambio en la tasa de crecimiento poblacional sobre el producto de largo plazo, i.e., exprese la elasticidad correspondiente si, además se sabe que la elasticidad del producto respecto al capital en el estado estacionario está dada por:  $\alpha_k(\bar{k}^E)$ .
- 22.4. Suponga dos economías A y B, en A la elasticidad del producto respecto al capital es 0.7 y en B, 0.25. Además, en ambas economías la población crece al 1% anual, la tecnología, al 2% y tienen una tasa de depreciación del 12%. Estime la variación porcentual en el producto de largo plazo para cada una de estas economías si la tasa de crecimiento poblacional disminuye en 10% y explique por qué difieren o no estos resultados.
23. Explique y contextualice en qué consiste el modelo de promoción de exportaciones, según Robles (2000). Explique cuatro características de este modelo y explique, para cada una de estas características, cómo se relaciona con los resultados del modelo de Solow (1956) y de Barro (1991).
24. Explique, teórica y empíricamente, cómo afecta la movilidad de capitales la tasa de convergencia del producto per capita entre regiones y países. ¿En qué consiste el dilema de Feldstein-Horioka y cómo afecta este las tasas de convergencia? ¿Cómo se vería afectada la convergencia si el nivel tecnológico variase entre países ricos y pobres con movilidad de capitales? Explique.
25. Explique, según Alfaro y Vindas (2015), cuál ha sido la evolución de la productividad del sector servicio en Costa Rica y su peso relativo en el empleo a partir de 1950 y hasta la fecha. Explique cómo se relaciona esto con los resultados encontrados en Robles (2000 y 2019) y Cordero y Paus





(2008). Si a usted se le contratase para asesorar al presidente de la República, mencione tres políticas que le recomendaría implementar para mejorar el ingreso de las personas. Explique si estas políticas son de corto o largo plazo y fundamente su sugerencia.

26. Para cada una de las lecturas asignadas realice una guía de lectura (ficha o esquema) que identifique los siguientes puntos:

- Autores.
- Año de publicación.
- Interlocutores o audiencia a la que se dirige el artículo, ¿a quién se le habla?
- Relevancia del problema tratado.
- Tesis central.
- Argumentos que sustentan la tesis central.
- Argumentos básicos del modelo teórico.
- Metodología aplicada para estimar el modelo empírico.
- Evidencia empírica que apoya la tesis central.
- Conclusiones más relevantes.

27. Se le recomienda realizar como ejercicio la derivación de los modelos y demostraciones tanto en tiempo continuo como discreto.

### Práctica sobre el modelo de Solow con capital humano y capital humano

28. Suponga que en el modelo de Mankiw-Romer-Weil, la función de producción está dada por  $Y_t(K_t, E_t L_t, H_t) = (K_t^\rho + (E_t L_t)^\rho + H_t^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ , con  $\rho < 1$ , donde  $K_t$  es el stock de capital,  $H_t$  el stock de capital humano y  $E_t$  es la eficiencia asociada a la mano de obra  $L_t$ . Además, se produce sujeto a restricciones dadas por las inversiones netas de la depreciación ( $\delta$ ), tal que:  $K_{t+1} - K_t = s_K Y_t - \delta K_t$  y  $H_{t+1} - H_t = s_H Y_t - \delta H_t$ . Se está en una economía cerrada en la cual se alcanza el equilibrio de fondos prestables según la Ley de Say. El parámetro de eficiencia crece a una tasa  $g$ , y la mano de obra, a una tasa  $n$ . Defínase:  $(1+z)=(1+n)(1+g)$ :

- Encuentre las sendas de  $\Delta k_t^E$  y  $\Delta h_t^E$ , en términos de unidades efectivas de trabajo.
- Halle las expresiones correspondientes al estado estacionario  $\bar{k}^E$  y  $\bar{h}^E$ .
- Dibuje el diagrama de fase correspondiente.

29. Considere la economía de capital humano de Mankiw-Romer-Weil (1992). Suponga que la economía está en estado estacionario. Identifique la perturbación, analice el proceso de ajuste, encuentre el nuevo nivel de estado estacionario para el capital y producto por unidad efectiva de trabajo y explique qué ocurre con el ingreso *per capita* y el ingreso de la economía en el nuevo equilibrio en cada uno de los siguientes escenarios:

- Se da un incremento permanente en la tasa de crecimiento de la población.





- b) Se da una entrada significativa de familias venezolanas de clase media y alta que traen consigo capital humano y físico superior al de la economía que les otorga el asilo.
- c) Se da una entrada masiva de inmigrantes provenientes de países menos desarrollados, particularmente de Haití y África, que huyen de la pobreza extrema que enfrentan en sus países.
- d) Compare sus respuestas en b y c. ¿Difieren entre sí? De hacerlo, ¿cuál es la razón de esto? Explique.
- e) El gobierno decide incrementar impuestos para financiar una reforma que aumente la inversión pública en capital humano.
- f) El gobierno decide recomponer su gasto público para mantener un presupuesto equilibrado que le permita aumentar la inversión en capital humano a costa de sacrificar inversión en capital físico.
- g) Compare sus resultados en e y f. ¿Difieren entre sí, por qué? Explique qué relación existe entre la inversión en capital humano y capital físico. ¿Quién se beneficia más de esta reforma, las personas dueñas de capital físico o las dueñas del capital humano?
- h) Explique la relación existente entre la tasa de crecimiento del producto y la tasa de crecimiento del capital físico y humano en esta economía.

30. Suponga que la función de producción de un país,  $Y_t$ , está dada por  $Y_t = \left[ \alpha \bar{M}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta K_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \right.$

$$\left. \gamma H_t^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (1 - \alpha - \beta - \gamma)(E_t L_t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}, \text{ donde: } \bar{M} \text{ representa el acervo de recursos naturales}$$

del país, los cuales están asignados mediante lotería;  $K_t$  representa el capital físico,  $H_t$ , el capital humano,  $L_t$ , la mano de obra y  $E_t$ , es un parámetro exógeno asociado a la tecnología. Suponga, además, que el capital físico y el capital humano se deprecian a una tasa  $\delta$  y que la población y tecnología evolucionan mediante las siguientes ecuaciones respetivamente:  $L_{t+1} = (1 + n)L_t$  y  $E_{t+1} = (1 + g)E_t$ . Los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son los correspondientes parámetros de participación de cada insumo en la producción, mientras que  $\sigma$  es la elasticidad de sustitución. Finalmente, se destina una fracción constante del ahorro  $s_K$  para invertir en capital físico y una fracción  $s_H$  para invertir en capital humano.

- 30.1. Demuestre que la función de producción es homogénea de grado 1 respecto a los recursos naturales, el capital físico, el capital humano y la mano de obra.
- 30.2. Si se define  $k_t^E = \frac{K_t}{E_t L_t}$ ;  $h_t^E = \frac{H_t}{E_t L_t}$  y  $m_t^E = \frac{M_t}{E_t L_t}$  como las unidades de capital físico, capital humano y recursos naturales por unidad efectiva de trabajo respectivamente y  $(1+z)=(1+n)(1+g)$ , obtenga la función de producción por unidad efectiva de trabajo.
- 30.3. Inspeccione matemáticamente el comportamiento de la productividad marginal del capital físico por unidad efectiva de trabajo. Debe mostrar sus cálculos de la primera y segunda derivada de la función de producción y explicar el resultado. No puede imponer condiciones ni supuestos adicionales. Análogamente, obtenga las derivadas de esta función de producción respecto al capital humano por unidad efectiva de trabajo y explique.
- 30.4. Plantee y explique las ecuaciones de equilibrio para la economía y normalice en términos de unidad efectiva de trabajo para encontrar las ecuaciones de  $\Delta k_t^E$  y  $\Delta h_t^E$ .



- 30.5. Obtenga las ecuaciones de  $\Delta k_t^E = 0$  y  $\Delta h_t^E = 0$ . Calcule  $\frac{dh_t^E}{dk_t^E}$  y  $\frac{d^2 h_t^E}{dk_t^{E^2}}$  para ambas ecuaciones e inspeccione qué signo tienen. Muestre sus resultados y explique qué forma tienen las ecuaciones  $\Delta k_t^E = 0$  y  $\Delta h_t^E = 0$ . Dibuje el diagrama de fase correspondiente, con  $k_t^E$  en el eje de las abscisas e interprételo.
- 30.6. Suponga que la economía se encuentra inicialmente en un punto A en donde se ha descuidado su inversión en capital físico y humano por debajo de su nivel de estado estacionario. Explique qué ocurre en esta economía si encuentran yacimientos de petróleo. Identifique y explique la perturbación, explique el proceso de ajuste y qué ocurre con el nivel de consumo, capital físico, capital humano e ingreso por unidad efectiva de trabajo de estado estacionario. Utilice un diagrama de fase para explicar su respuesta.
31. Del artículo de Mankiw-Romer-Weil (1992), ¿Cuáles son las principales diferencias que se encuentran en las regresiones y resultados del modelo de Solow y el del capital humano?; ¿cuál es la relevancia del capital humano para explicar el crecimiento económico?
32. ¿Podría el modelo de Mankiw-Romer-Weil (1992) utilizarse para explicar el crecimiento económico costarricense? Utilizando los indicadores sobre educación de <https://databank.worldbank.org/data/home.aspx>, ¿qué podría concluir usted sobre las expectativas de crecimiento económico para Costa Rica?
33. Según la lectura de Barro (1991), ¿qué implica tener un alto nivel de stock de capital humano? Explique qué pasa con la fertilidad en el período analizado.
34. ¿Cuáles son las conclusiones más relevantes del artículo de Barro (1991), con respecto al capital humano? ¿Qué se concluye sobre África y América Latina?
35. Empíricamente, explique cuáles son las conclusiones generales respecto a las tasas de convergencia que se observan entre países y a lo interno de los mismos. ¿Existe la convergencia? Explique su respuesta.
36. Suponga que usted labora en el departamento de recursos humanos de una empresa, explique utilizando el modelo de capital humano, cuál es la decisión más eficiente para la empresa ante las siguientes disyuntivas:
- a) Se encuentran en un período recesivo y debe decidir despedir a una persona de su personal. ¿A quién despide?
  - b) La empresa constantemente invierte en capacitaciones para el personal, pero su competidora suele robarse a las personas más productivas, ¿qué le sugeriría a la gerente para resolver este problema?
  - c) Debe enviar a capacitar a una persona por un período de dos años y debe decidir entre enviar a Luisa, una mujer en edad fértil (26 años) que desde que entró a trabajar a su empresa hace un año tiene la mayor productividad del departamento, a Luis, que tiene 5 años de trabajar en su



empresa, 25 años y tiene una productividad menor a la de Luisa pero superior al promedio o a Pedro que es de baja productividad pero se ha dedicado 30 años a su empresa. ¿A quién envía y por qué?

37. Autor, Dorn & Hanson (2019) When work disappears: manufacturing decline and the falling marriage market value of young men, *AER: Insights*, 1(2), 161–178 encuentran que la competencia internacional en manufactura en el período 1990-2014 redujo el empleo y el ingreso de los hombres adultos jóvenes en Estados Unidos. Dado que, en promedio, las mujeres tienden a especializarse en labores domésticas y los hombres en el mercado laboral, esto repercutió en una reducción de las tasas de matrimonio y fertilidad y un aumento del ocio y las tasas de mortalidad masculinas, así como de la proporción de menores viviendo en condiciones de pobreza y hogares jefeados por una persona.
- a) Utilice el modelo de Solow con capital humano para explicar qué ocurrirá con el crecimiento del producto de Estados Unidos. Identifique las perturbaciones asociadas a este fenómeno, el proceso de ajuste y el nuevo equilibrio.
  - b) Utilice el modelo de Solow con capital humano para explicar qué ocurre con el ingreso por persona trabajadora en aquellos países receptores de la industria de manufactura que abandonan sus fábricas en Estados Unidos.

### Práctica sobre los modelos de inversión de capital

38. Considere una economía que cumple todos los supuestos del modelo neoclásico de inversión. Explique cómo serían los ajustes que se deben dar en esta economía debido a los siguientes shocks:
- a) Ocurre un aumento en la fuerza laboral.
  - b) Aumenta la tasa de depreciación del capital.
  - c) Se incrementa la demanda por los bienes finales producidos.
  - d) Se desarrollan formas de producción más eficientes.
  - e) Se adopta una tecnología más intensiva en el uso de la mano de obra.
  - f) Se cobra una tasa impositiva  $\tau$  sobre las utilidades de las empresas.
  - g) Se cobra una tasa impositiva  $\tau$  sobre el valor del capital de las empresas.
  - h) Se introduce una deducción  $\chi$  sobre la tasa impositiva  $\tau$  para incentivar la inversión en capital.
39. Encuentre las condiciones que maximizan la utilidad de una empresa que produce el bien final  $Y_t = F(K_t, E_t L_t)$ , si es dueña del capital  $K_t$ , contrata mano de obra a un salario  $w_t$  y vende el bien final en un mercado competitivo a un precio  $P_t$ .
40. ¿Cuáles son las principales críticas que existen en torno al modelo neoclásico de inversión?
41. Suponga una empresa que produce bienes empleando una combinación Cobb-Douglas de capital y trabajo:  $Y = K^\alpha L^{1-\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Supongamos asimismo que el precio del bien está



dado en el corto plazo. Así pues, tanto el precio del producto,  $P$ , como la cantidad producida,  $Y$ , constituyen datos para la empresa. Por último, los mercados de factores son competitivos, de modo que los salarios,  $w$ , y el precio de alquiler del capital,  $r_K$ , son también variables dadas.

- a) ¿Qué nivel de  $L$  elegiría la empresa, dados  $P$ ,  $Y$ ,  $w$  y  $K$ ?
  - b) Dado el nivel elegido de  $L$ , ¿cuáles serían sus beneficios, expresados en función de  $P$ ,  $Y$ ,  $w$  y  $K$ ?
  - c) Halle la condición de primer orden para la optimización de  $K$ . ¿Se satisface la condición de segundo orden?
42. Utilice el modelo neoclásico de inversión para explicar el impacto de cada una de las siguientes perturbaciones sobre el precio de alquiler del capital, el costo del capital y la inversión:
- a) Una política monetaria anti-inflacionaria aumenta la tasa de interés real.
  - b) Un terremoto destruye parte del acervo de capital.
  - c) La inmigración de personas extranjeras incrementa el tamaño de la fuerza laboral.
43. Suponga que en una economía hay diez empresas productoras de bienes finales. Estas empresas son idénticas y tienen una función de producción dada por:  $Y_{i,t} = 10K_{i,t}^{1/2}$ , donde  $K_{i,t}$  es el capital que alquila la empresa  $i$  a las empresas dueñas de capital para producir en el período  $t$ . Por otra parte, Las empresas dueñas de capital ofrecen el alquiler de su capital a una tasa de mercado  $r_{K,t}$ . La tenencia del capital está asociado a una tasa de depreciación del 5%, ganancias de capital de -1% y un costo de oportunidad, dado por la tasa de interés en el mercado de fondos prestables, del 3%. Además, el precio de cada unidad de capital es de 50.
- a) Encuentre la función de demanda de capital para la empresa  $i$ .
  - b) Encuentre la función de demanda en el mercado, dado que  $K_t = \sum K_{i,t}$ .
  - c) Encuentre la tasa de alquiler de capital del equilibrio de largo plazo.
  - d) Encuentre la cantidad de capital de equilibrio correspondiente.
  - e) Suponga ahora que las empresas se vuelven más productivas, tal que  $Y_{i,t} = 20K_{i,t}^{1/2}$ .
  - f) Encuentre la tasa  $r_{K,t}$  de equilibrio en el período en que ocurre la perturbación.
  - g) Encuentre el nivel de capital de equilibrio que ofrecerán las empresas dueñas de capital en el largo plazo.
44. Una empresa desea maximizar el valor presente de sus flujos de utilidad futura. Para eso, debe decidir para todo  $t \in [0, +\infty[$  cuánto capital utilizar y cuánto invertir. Suponemos una función de producción  $y_t = f(k_t)$  que sólo utiliza capital y que cumple las condiciones  $f'_k > 0$ ,  $f''_k < 0$ . Por otro lado, la empresa se ve sujeta a costos de inversión; en particular observa una función de costos  $c(I_t)$ , la cual cumple que  $c' > 0$  y  $c'' > 0$ . Además,  $c'(0) = 0$ . Por último, la tasa de depreciación del capital período a período es  $\delta$ , y la tasa de descuento relevante es  $r$  (constante).
- a) ¿Cómo se interpretan las condiciones sobre la función  $c(\cdot)$ ?
  - b) Plantee el problema de maximización que enfrenta la empresa. ¿Cuántas restricciones existen?
  - c) Plantee el lagrangeano del problema.



- d) Obtenga las condiciones de primer orden. ¿Por qué difieren de las obtenidas en el modelo visto en clase? Explique.
- e) Si se asume que  $\lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^T q_T = 0$ , se cumple que  $q = \frac{VPIMg}{CMg}$ , ¿qué significa esta ecuación?
- f) Basándose en la primera condición de primer orden, muestre que la inversión es positiva si  $q_t > 1$  y negativa cuando  $q_t < 1$ .
- g) Encuentre los valores de estado estacionario  $\Delta q = 0$  y  $\Delta k = 0$ .
- h) Explique gráfica e intuitivamente cómo un aumento permanente e inesperado del producto marginal del capital provoca que la inversión se eleve temporalmente.
- i) Explique gráfica e intuitivamente cómo afecta la aplicación sorpresiva de un impuesto transitorio al nivel del capital y su precio sombra.
45. Suponga ahora que la función de producción está dada por  $Y_t = F(K_t, L_t)$ , los costos de instalación del capital están dados por  $C_t = C(I_t, K_t)$  y son crecientes respecto a la inversión y decrecientes respecto al capital:
- a) En este modelo la  $q$  de Tobin converge al equilibrio de largo plazo. Explique claramente el rol que cumplen en dicha convergencia las productividades marginales decrecientes del capital.
- b) Explique en qué consiste la condición de transversalidad en el modelo de inversión y qué puede decirse si no se cumple.
- c) Explique gráfica e intuitivamente qué ocurre con la inversión y el precio sombra del capital si se anuncia anticipadamente un impuesto permanente a la producción.
- d) ¿Cómo cambia su respuesta si el impuesto anunciado es transitorio?
- e) Si en lugar de gravarse un impuesto a la producción se impone un impuesto a las utilidades de la empresa, ¿cómo se modifica su respuesta? Explique.
- f) Explique gráfica e intuitivamente qué ocurre con la inversión y el precio sombra si se anuncia una caída en la tasa de interés para el próximo semestre.
46. El 27 de abril de 2017, Donald Trump amenazó al primer ministro canadiense, Justin Trudeau, y al presidente mexicano, Enrique Peña Nieto con eliminar el Tratado de Libre Comercio de Norte América (NAFTA, por sus siglas en inglés).
- a) Explique, a partir del modelo de la  $q$  de Tobin, qué ocurre con la inversión y el precio sombra del capital mexicano y canadiense ante dicho anuncio.
- b) ¿Puede este anuncio generar inestabilidad o especulación en los mercados accionarios, por qué?
47. El siguiente es un artículo de Anora Gaudiano publicado en URL: <https://www.marketwatch.com/story/stock-market-continues-to-ignore-threats-from-trade-war-2018-07-21> el 21 de julio de 2018:

*Stock market continues to ignore threats from trade war*

A recent survey by Bank of America Merrill Lynch found that more than 80% of professional fund managers say that a trade war is their biggest concern, yet you wouldn't notice it by the



performance of the U.S. equity markets. The S&P 500 index SPX, +0.33% is trading near its all-time high levels set in January, having risen 3% over the past three weeks. The Nasdaq Composite COMP, +0.13% and Russell 2000 RUT, +0.43% set intraday records last week, and have booked double-digit returns so far this year. Such optimism about technology and small-cap stocks is largely due to a perception that they are insulated from potential trade wars. Admittedly, relative optimism on Wall Street could be explained by positive earnings reports that are on track to show 20% growth in the second quarter. According to FactSet's Senior Earnings analyst John Butters, 17% of the S&P 500 companies have reported so far, with 87% of them beating profit estimates and 77% beating revenue forecasts. Meanwhile, economic data have also been positive, showing healthy job gains and inflation rates in line with Federal Reserve's desired target of 2%. Yet, the threat of full blown trade war is looming large, whether people are noticing it or not, according to Kristina Hooper, chief global market strategist at Invesco. "There will be a lot of collateral damage from tariffs and some of the negative impact is already showing up in sentiment or soft data, even if we don't see it in hard data yet," Hooper said. The Federal Reserve's Beige Book survey of businesses found that companies are having a hard time expanding businesses due to higher costs of raw materials—largely thanks to tariffs on steel and lumber. "Businesses are delaying new projects or new capital expenditures because they are concerned about tariffs. But it isn't just businesses, consumers are now facing higher prices for certain items—something that will only continue if they can't find substitutes for cheap imported goods from China," Hooper said. On Friday, President Trump said he was ready to place tariffs on \$500 billion in Chinese products. Both U.S. and China already imposed 25% reciprocal tariffs on \$34 billion goods. It is only a matter of time before higher prices on consumer goods starts showing up in inflation data. The latest reading on yearly core inflation was at 2.3%—still considered benign even though it has been creeping higher. Federal Reserve Chairman Jerome Powell during his two-day congressional testimony said that countries that embrace low tariffs and free trade have better economic outcomes, though declining to forecast actual impact from Trump administration's policies. In yet another unprecedented move, Trump criticized the Fed's rate increase policy saying higher interest rates would undo the effect of tax cuts. Investors largely shrugged off such meddling from the president, with only the dollar selling off modestly after the comments. One of the possible explanations for seeming investor complacency is the fact that our knowledge of trade wars is based on history going back nearly 100 years. "We haven't experienced a full blown trade war in recent history so have no point of reference. The last time we had protectionist policies was in 1920s and 1930s," Hooper said. Investors, meanwhile continue to bet that trades issues will be ultimately resolved before inflicting serious pain. Helping boost such attitudes are positive earnings and economic data. Next week, 174 S&P 500 companies are expected to report their financials, including 11 Dow components. Among reporting next week companies are Amazon.com AMZN, -0.06% Alphabet Inc. GOOG, +0.00% Facebook Inc. FB, -0.18% and Intel Corp INTC, +0.11%. On the economic calendar, existing- and new-home sales are due on Monday and Wednesday at 10 a.m. Eastern, respectively. Numbers on durable goods order as well as international trade are due on Thursday at 8:30 a.m. But the most important data next week comes on Friday at 8:30 a.m. Eastern, with investors finding out just how fast the U.S. economy has



been growing in the spring. Atlanta Fed's GDPNow estimate is at 4.5%. Consensus forecast by economists surveyed by MarketWatch is at 4%.

- a) Explique, a partir del modelo de la q de Tobin, qué es lo que se esperaría que haya ocurrido con el precio sombra y la inversión tras el anuncio.
- b) Explique, utilizando el mismo modelo qué es lo que ocurrió.
- c) ¿Difiere su respuesta de lo observado, por qué? ¿Qué relevancia, si alguna, tienen las expectativas y la credibilidad del anuncio sobre el comportamiento de los agentes?
- d) Según el artículo, ¿cuáles son los indicadores en los que se fijan los agentes para decidir sus inversiones?, ¿qué relación tiene esto con las enseñanzas del modelo de la Q de Tobin?
- e) ¿Cómo se relacionan las decisiones de inversión con las expectativas de crecimiento del país? Relacione su respuesta con el modelo de Solow.

48. Para el modelo de la q de Tobin dibuje el diagrama de fase si:

- a) Sabe que la función de producción está dada por  $Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$  y  $0 < \alpha < 1$ .
- b) Sabe que la función de producción está dada por  $Y_t = 5K_t^2 + 4L_t$  y los costos de instalación del capital están dados por  $C_t = \frac{I_t}{K_t}$ .
- c) Sabe que los costos de instalación del capital están dados por  $C_t = \varphi \frac{I_t^2}{K_t}$ , con  $\varphi > 0$ .
- d) ¿Por qué difieren entre sí estos diagramas de fase? Explique.

49. La pandemia del COVID-19 fue un suceso inesperado que, se espera, debe ser superado cuando se encuentre una vacuna contra el virus que la originó. Esta pandemia generó una interrupción de los mecanismos de producción a nivel global. Para contrarrestar esta perturbación, los bancos modificaron las tasas de interés a la baja. Sin embargo, esta política no ha sido suficiente para contrarrestar el golpe inicial. Explique, a partir del modelo de la q de Tobin lo que ha ocurrido y ocurrirá con la inversión, el capital y su precio sombra a partir de la perturbación, analice el proceso de ajuste y el nuevo estado estacionario al que se llegaría si se parte de un estado estacionario inicial. Relacione su respuesta con un diagrama de fase y obtenga las ecuaciones necesarias para ello.

50. Lea la siguiente nota periodística: <https://www.reuters.com/article/uk-britain-eu-netherlands-companies-idUSKBN2AI0DR> Explique, a partir del modelo de la q de Tobin lo que ha ocurrido y ocurrirá con la inversión, el capital y su precio sombra en Amsterdam, analice el proceso de ajuste y el nuevo estado estacionario al que se llegaría si se parte de un estado estacionario inicial. Relacione su respuesta con un diagrama de fase y obtenga las ecuaciones necesarias para ello.

51. Suponga que una empresa se enfrenta al siguiente problema de optimización:

$$\max U(t) = \max_{K(t), I(t)} \int_0^{+\infty} e^{-rt} [Y(t) - I(t) - \phi(I(t))] dt, \text{ s.a.}$$

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t),$$





donde:

$Y(t) = F(K(t))$ , con  $Y'(t) > 0$  y  $Y''(t) < 0$ ,

$K(t)$ : stock de capital en el momento  $t$ ,

$I(t)$ : inversión bruta en capital en el momento  $t$ ,

$r$ : tasa de interés real,

$\phi(I(t))$ : costos de instalación del capital t.q.  $\phi'(I(t)) > 0$  y  $\phi''(I(t)) < 0$ , y

los precios están normalizados, t.q. el capital puede transformarse en una unidad de producto a razón 1:1.

- a) Plantee el hamiltoniano e identifique las variables de estado, control y co-estado, así como la ecuación de estado. ¿Qué condiciones debe imponerse para que el problema tenga solución?
  - b) Obtenga el resultado para este problema de optimización, i.e., encuentre  $\dot{I}(t)$  y  $\dot{K}(t)$  que maximizan la utilidad. Analice qué ocurre con los niveles de capital e inversión en estado estacionario.
  - c) Obtenga el diagrama de fase para  $I(t)$  (en el eje vertical) y  $K(t)$  (en el eje horizontal), si se sabe que  $\dot{I}(t)$  alrededor del estado estacionario tiene pendiente negativa.
  - d) Suponga que hay una disminución permanente e inesperada de la tasa de depreciación. Identifique el shock, explique el ajuste y el nuevo nivel de equilibrio.
52. Una forma alternativa de resolver hamiltonianos cuando el problema a optimizar incluye una tasa de descuento, de la forma:  $\max_{y(t) \in \Omega(t)} \int_0^T e^{-\gamma t} F(x(t), y(t), t) dt + S(x(T))$  s.a.  $\dot{x}(t) = f(x(t), y(t), t)$ ;  $x(0) = x_0$  es plantear el hamiltoniano corriente (sin el valor presente):  $H(x(t), y(t), \lambda(t), t) = F(x(t), y(t), t) + \lambda(t)f(x(t), y(t), t)$ , resolver optimizando respecto a las variables de control (i.e.,  $H_y = 0$ ) y obtener  $H_x = \gamma\lambda(t) - \dot{\lambda}(t)$ . Suponga que debe optimizar el siguiente problema:  $\max_{K(t), L(t), I(t)} \Pi = \max \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} [F(K(t), L(t)) - C(I(t), K(t)) - w(t)L(t) - I(t)] dt$  s.a.  $\dot{K}(t) = I(t)$ ; donde se mantiene la notación utilizada en clase e  $I(t)$  representa la inversión neta en capital.
- a) Solucione el problema planteado utilizando un hamiltoniano corriente.
  - b) Interprete las ecuaciones para la inversión y el precio sombra. Compárelas con las obtenidas en el modelo de tiempo discreto.
  - c) Analice qué ocurriría ante un incremento anticipado y permanente del factor de descuento. Explique.
53. Explique, a partir del modelo de la q de Tobin lo que ocurrirá con la inversión, el capital y el precio sombra de una empresa si inesperadamente se impone un impuesto transitorio  $\tau$  sobre el precio del capital para financiar un seguro de desempleo a quienes hayan quedado sin trabajo debido a la pandemia. Identifique la perturbación, analice el proceso de ajuste y el nuevo estado estacionario al que se llegaría si se parte de un estado estacionario inicial.
54. El 19 de julio de 2021 el presidente Biden acusó a China de promover una red de subcontratistas para robar constantemente información sensible, tecnologías críticas y propiedad intelectual de empresas estadounidenses y europeas. Entre las empresas jaqueadas se encuentran Microsoft



y algunas contratistas militares. Aunque se denunció a algunos oficiales de inteligencia china, la administración no impuso ningún tipo de sanciones contra este país. Explique utilizando el modelo de la  $q$  de Tobin lo que ocurriría con el precio de las acciones, la inversión y el capital de las empresas chinas en las bolsas internacionales si el presidente Biden hubiese anunciado sanciones económicas temporales contra estas empresas.



**Práctica sobre modelos neoclásicos de crecimiento económico**

55. Utilizando el hamiltoniano corriente, demuestre que si parte de  $\max \int_0^T e^{-\rho t} u(c(t)) dt$  s.a.  $\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t)$  con  $k(0)=k_0$  y  $k(T)=k_T$  el resultado está dado por:

$$\frac{-u''(c(t))\dot{c}(t)}{u'(c(t))} = f'(k(t)) - \rho$$

56. Suponga que tiene  $y_{t+1} = 2y_t - y_t^2$ .
- De existir, obtenga los puntos fijos de la función.
  - Determine si estos puntos son estables.
  - Grafique la función y superponga la función identidad. Señale gráficamente los puntos fijos e indique con flechas el movimiento en el tiempo.
  - Repita el ejercicio si  $y_{t+1} = 3.2y_t - 0.8y_t^2$ .
57. Suponga que tiene el sistema de ecuaciones:  $\dot{x}(t) = x(t) - 3y(t)$  y  $\dot{y}(t) = -2x(t) + y(t)$ . Dibuje y explique el diagrama de fase.
58. ¿Cómo cambia su respuesta si el sistema de ecuaciones está dado por:  $\dot{x}(t) = -3x(t) + y(t)$  y  $\dot{y}(t) = x(t) - 3y(t)$ ?
59. Suponga que un agente se enfrenta al siguiente problema de optimización:

$$\max_{c_t, b_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \text{ sujeto a } c_t + b_t = (1 + r_t)b_{t-1} + w_t,$$

donde:

$c_t$ : es el consumo,

$r_t$ : es la tasa de interés real,

$w_t$ : es el salario,

$b_t$ : representa los activos financieros y  $b_0=0$

Encuentre la solución a este problema de programación dinámica en términos de los parámetros.

60. ¿Cuáles son las críticas que se establecen cuando se utiliza el supuesto del agente representativo?
61. Suponga una economía de dotaciones en la que se cuenta con dos períodos. La tasa de interés vigente es del 5%. La función de utilidad de la persona  $i$  está dada por  $u(c_t) = c_t^{2/3} c_{t+1}^{1/3}$  y la dotación de ingresos en cada período es la que se muestra en la tabla siguiente.

Persona	Ingreso en $t$	Ingreso en $t+1$
Lucía	100	120
Arturo	60	50
Isabel	75	75
Felipe	150	80



- Obtenga la planeación de consumo que maximiza la utilidad para cada una de estas personas.
- A partir de los resultados anteriores, determine la planeación de consumo del agente representativo para ambos períodos.
- Suponga ahora que Martina y Juan se mudan a esta economía al inicio del período  $t+1$ . Sus ingresos en  $t$  y  $t+1$  están dados por  $(90, 100)$  y  $(100, 100)$ , respectivamente. ¿Cuál es el consumo efectivo del agente representativo en cada período?, ¿difiere del planeado?, ¿cómo afecta esto el consumo de Lucía?
- Suponga ahora que en lugar de personas, la tabla anterior representa familias con 1, 2, 3 y 4 miembros respectivamente y que la función de utilidad es unitaria para el hogar. Calcule la planeación de consumo para una persona promedio en esta economía para ambos períodos.

62. Suponga que Francisca y Josefina tienen las siguientes características:

Persona	Utilidad	Ingreso en $t$	Ingreso en $t+1$
Francisca	$u(c_t)$ $= c_t^{3/4} c_{t+1}^{1/4}$	50	100
Josefina	$u(c_t)$ $= c_t^{1/3} c_{t+1}^{2/3}$	100	50

- ¿Cuál es la tasa de interés de equilibrio si Francisca y Josefina sólo pueden financiarse entre ellas?
- Obtenga los niveles de consumo que optimizan la utilidad de Francisca y Josefina a esta tasa de interés.
- Obtenga los niveles de consumo e ingreso del agente representativo.
- A partir de estos resultados, determine la función de utilidad del agente representativo. Compare con las de Francisca y Josefina, ¿a quién representa más?

63. Demuestre que la función de utilidad instantánea  $u(c(t)) = \ln(c(t))$  es también una función CES.

64. ¿Cuáles son las limitaciones del modelo RCK?

65. Asuma una economía cerrada, que cumple con todos los supuestos del modelo de RCK. Dicha economía se encuentra en equilibrio. A partir de esto la economía podría enfrentarse a alguno de los siguientes shocks. Explique qué ocurriría en la economía con el capital, producto, ahorro y consumo por unidad efectiva de trabajo después de que se alcanza un nuevo equilibrio. Explique detalladamente lo que ocurre con el shock, el proceso de ajuste y el equilibrio en la economía. Relacione su respuesta con un gráfico, suponiendo que se parte de un punto donde no hay equilibrio. Las situaciones son las siguientes:

- En la economía empieza a escasear el silicio, factor importantísimo en la producción de micro procesadores. Las industrias deben, por tanto, buscar otras alternativas en la forma en que producen sus bienes para sustituir el uso de este factor. Esto a su vez provoca que las industrias



de telecomunicaciones, electrónica, entre otras se vean en grandes aprietos para introducir nuevas innovaciones.

- b) Los cambios culturales que se han dado en la economía llevan a que el agente representativo tenga una necesidad imperante de vivir el presente.
- c) Se logra descubrir un método para utilizar el germanio como sustituto del silicio que no sólo brinda mayores facilidades a la hora de generar desarrollo tecnológico, sino que produce un cambio radical en la forma en que la economía producía los bienes, ya que permite que cada unidad adicional de capital sea más productiva.
- d) El cambio climático hace que las personas sean más aversas al riesgo y deseen reproducirse menos.

66. Asuma una economía cerrada que en lo único que difiere a la anterior es que la población no crece.

- a) Derive el modelo de RCK tomando en cuenta esta circunstancia (derívelo en tiempo discreto).
- b) Explique qué pasaría con las principales variables económicas del modelo si la población disminuyera, sea detallista con la explicación del proceso de ajuste.

67. Derive el modelo de RCK en el marco de una función de producción Cobb-Douglas. Explique qué pasaría si ocurre una erupción volcánica que hace que la ceniza corra el equipo y la infraestructura.

68. Derive el modelo de RCK teniendo en cuenta que la tasa de crecimiento anual de la población es de 6% y la de la tecnología, 4%. Además, la función de producción a la que se enfrenta la economía es  $Y_t(K_t, L_t E_t) = (K_t^{\frac{1}{3}} + (L_t E_t)^{\frac{1}{3}})^3$ . Y, la función de utilidad de los agentes está dada por:

$$U_t = L_t \sum_{s=t}^{\infty} \beta^{s-t} (1+n)^{s-t} \ln c_t$$

69. Explique, partiendo de un estado estacionario inicial y utilizando el modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, qué ocurriría en una economía con el ingreso, capital y consumo por unidad efectiva de trabajo si las personas se vuelven más impacientes.

70. Asuma una economía cerrada que cumple con todos los supuestos del modelo de generaciones traslapadas. Dicha economía se encuentra en equilibrio. A partir de esto la economía podría enfrentarse a alguno de las siguientes perturbaciones. Explique qué ocurriría en la economía con el capital, producto, ahorro y consumo después de que se alcanza un nuevo equilibrio. Explique lo que ocurre con la perturbación, el proceso de ajuste y el equilibrio en la economía. Relacione su respuesta con un gráfico. Las situaciones son las siguientes:

- a) Ocurre una epidemia en la economía, la enfermedad no es mortal, pero causa problemas de esterilidad en las personas que la sufrieron.
- b) Ante el calentamiento climático las personas se vuelven más precavidas con lo que tratan de gestionar mejor sus recursos con miras al futuro.
- c) Un huracán destruye parte importante de la infraestructura del país.



- d) La inequidad en el ingreso continúa acrecentándose, de forma tal que a las nuevas generaciones cada vez les cuesta más acumular capital.
  - e) Las familias más numerosas y pobres se reproducen a tasas más altas.
  - f) Se reduce la tasa a la que se reproducen las familias más pobres.
71. Suponga que se tiene las siguientes dos ecuaciones que rigen un modelo de crecimiento: (1)  $c_{t+1} = (1 + f'(k_{t+1}))[\beta c_t - n(1 - \beta)k_{t+1}]$ , y la restricción presupuestaria tal que se cumple la Ley de Say: (2)  $k_{t+1} - k_t = \frac{1}{1+n}(f(k_t) - c_t - nk_t)$ , donde  $\beta$  es la tasa de paciencia. Además, la producción se rige por la ecuación:  $y_t = f(k_t) = \gamma k_t$ , donde  $\gamma > 1$  y  $\beta > \frac{1}{2}$ .
- a) Obtenga las ecuaciones de  $\Delta c = 0$  y  $\Delta k = 0$ . Dibuje el diagrama de fase e indique por qué difiere del diagrama del modelo de generaciones traslapadas. ¿Tiene esto lógica económica?
  - b) Suponga ahora, en el contexto del modelo de generaciones traslapadas, que ocurre una epidemia tal que muere parte importante de la población y genera problemas hereditarios de esterilidad en la población, afectando la tasa de reproducción, dibuje el diagrama de fase y explique qué ocurre con el ingreso, consumo y capital per capita; así como el proceso de ajuste hacia el nuevo estado estacionario.
72. El Fondo de Población de las Naciones Unidas anunció el 11 de marzo de 2021 que, debido a las interrupciones en los servicios de salud, alrededor de doce millones de mujeres han visto interrumpido el acceso a la anticoncepción, lo que ha resultado en aproximadamente un millón cuatrocientos mil embarazos no deseados (<https://news.un.org/en/story/2021/03/1087082>). Utilice el modelo de generaciones traslapadas para explicar cómo esto afecta el crecimiento de largo plazo de la Tierra. Identifique la perturbación, dibuje el diagrama de fase y explique qué ocurre con el ingreso, consumo y capital per capita; así como el proceso de ajuste hacia el nuevo estado estacionario.
73. No olvide hacer las guías de lectura para los artículos asignados. Compare las diferencias más importantes de estos artículos con los modelos simplificados vistos en clase.

### Práctica sobre crecimiento endógeno

74. Asuma una economía cerrada que cumple con todos los supuestos del modelo de acumulación de capital. Dicha economía se encuentra en equilibrio. A partir de esto la economía podría enfrentarse a alguno de las siguientes perturbaciones. Explique qué ocurriría en la economía con el capital, producto, ahorro y consumo después de que se alcanza un nuevo equilibrio. Explique detalladamente lo que ocurre con la perturbación, el proceso de ajuste y el equilibrio en la economía. Relacione su respuesta con un gráfico. Las situaciones son las siguientes:
- a) Se recibe una transferencia tecnológica del exterior.
  - b) China realiza una donación al gobierno que incrementa la infraestructura pública en un 10%.
  - c) Se introduce el uso de las computadoras como herramientas en el proceso productivo que aumentan la productividad del capital.
  - d) El gobierno decide desinvertir en infraestructura pública para hacerle frente al déficit fiscal.



- e) Se observa un cambio en los patrones de consumo debido a que la generación Millennial ahorra menos que las generaciones pasadas.
75. Demuestre que en el modelo de acumulación de capital la tasa de crecimiento del consumo es igual a la tasa de crecimiento del producto.
76. En el marco del modelo de acumulación de capital, explique qué pasaría si se aumenta la tasa de ahorro.
77. En el marco del modelo de acumulación de capital, comente en qué difiere el modelo con los modelos antes vistos como el de Solow, RCK y generaciones traslapadas.
78. Utilizando el modelo de ciclo de vida, demuestre que, si el ingreso crece a un ritmo  $g$ , el consumo crecerá también a ese mismo ritmo.
79. Asuma una economía cerrada que cumple con todos los supuestos del modelo de crecimiento endógeno de innovación tecnológica. Dicha economía se encuentra en equilibrio. A partir de esto la economía podría enfrentarse a alguna de las siguientes perturbaciones. Explique qué ocurriría en la economía con el capital, producto, ahorro y consumo después de que se alcanza un nuevo equilibrio. Explique detalladamente lo que ocurre con la perturbación, el proceso de ajuste y el equilibrio en la economía. Relacione su respuesta con un gráfico. Las situaciones son las siguientes:
- Se da un aumento de productividad del capital en la producción de bienes y servicios finales.
  - Las personas se vuelven más austeras ya que les preocupa más su porvenir.
  - El parámetro de cambio de productividad aumenta.
  - Una enfermedad acaba con el 20% de la población.
  - Aumenta la productividad de la mano de obra en la producción de bienes finales.
80. En el modelo de crecimiento endógeno de Romer con cinco mercados: de bienes finales, capital, conocimiento, laboral y fondos prestables, el equilibrio tecnológico está dado por:  $(1 + r) = \alpha[\theta L - (1 + \bar{g})] + (1 + \alpha)$ . Esta ecuación describe la determinación de la tasa de interés  $r$  a partir de las productividades marginales del capital, la participación del capital ( $\alpha$ ), la innovación tecnológica ( $\bar{g}$ ), la mano de obra  $L$ , y el parámetro del cambio de productividad  $\theta$ . La innovación tecnológica está determinada por la siguiente ecuación:  $\frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} = \theta L_{E,t}$  donde  $E$  es el nivel de tecnología (conocimiento en la economía) y  $L_{E,t}$  es la mano de obra que trabaja en la generación de conocimiento. Si los agentes viven infinitamente y tienen una utilidad dada por:

$$U_t = \sum_{s=t}^{+\infty} \beta^{s-t} \frac{c_s^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1 - \frac{1}{\sigma}}, \text{ sujeto a la restricción } c_t = w_t + rk_t - (k_{t+1} - k_t)$$





- a) Encuentre las condiciones de primer orden que maximizan la utilidad sujeta a la restricción dada en términos de los parámetros, la tasa de interés y el ritmo de crecimiento de la innovación tecnológica.
  - b) Si  $\sigma=1$ , encuentre la tasa de crecimiento y la tasa de interés de equilibrio.
  - c) Interprete el resultado obtenido en b sobre el ritmo de crecimiento de la economía. ¿Qué limitaciones tiene esta condición de equilibrio?
  - d) En general, este modelo tiene dos fuentes de ineficiencias de los mercados que pueden justificar la existencia de una política pública. ¿En qué consisten estas dos fuentes de ineficiencia? Explique, ¿por qué podrían ser deseables o no? y, ¿cómo debería orientarse la política de Estado, según la teoría económica?
81. Explique detalladamente qué ocurre en el modelo endógeno de innovación y crecimiento si los espíritus animales hacen que la gente acorte su expectativa de vida y decidan valorar y vivir mejor en el presente. Explique el proceso de ajuste, el encadenamiento entre los mercados, qué ocurre con la cantidad y precio de equilibrio en cada uno de los cinco mercados y con el equilibrio general de la economía. Utilice las condiciones de primer orden y el diagrama del equilibrio general para justificar su respuesta. No olvide interpretar sus resultados.
82. Según Kristov (<https://www.nytimes.com/2021/02/13/opinion/sunday/working-class-dignity.html>), las políticas a favor de las empresas y el debilitamiento del sindicalismo a partir de los ochenta en Estados Unidos hizo que el salario semanal promedio de una persona trabajadora en la industria pasara de \$902 (a precio de 2021) en diciembre de 1972 a \$860 en diciembre de 2020. Utilice el modelo de innovación y crecimiento para explicar lo que ocurre con el ingreso promedio en esta economía. Analice qué ocurre en cada mercado y qué sucede con la relación de los ingresos de las personas dueñas de capital y trabajo en este escenario.
83. Suponga que los esfuerzos actuales por fortalecer el movimiento sindical en Estados Unidos, que cuentan con el apoyo del presidente Biden, son efectivos y la sindicalización se incrementa, tomando como primera bandera de lucha el aumento del salario mínimo por hora de \$7.5 a \$15 (<https://www.nytimes.com/2021/03/02/business/amazon-union-bessemer-alabama.html>). Explique qué ocurriría en este caso. Analice qué ocurre en cada mercado y qué sucede con la relación de los ingresos de las personas dueñas de capital y trabajo en este escenario.
84. El 19 de julio el presidente Biden acusó a China de promover una red de subcontratistas para robar constantemente información sensible, tecnologías críticas y propiedad intelectual de empresas estadounidenses y europeas. Entre las empresas jaqueadas se encuentran Microsoft y algunas contratistas militares. Aunque se denunció a algunos oficiales de inteligencia china, la administración no impuso ningún tipo de sanciones contra este país. A partir del modelo de crecimiento endógeno con innovación de Romer, explique detalladamente qué implicaciones tiene esta política china sobre el equilibrio de largo plazo de sus tasas brutas de crecimiento y costo del capital. Explique el proceso de ajuste, el encadenamiento entre los mercados, qué ocurre con la cantidad y precio de equilibrio en cada uno de ellos y con el equilibrio general de la economía. Utilice el diagrama del equilibrio general para justificar su respuesta.



**Práctica sobre ciclos económicos**

85. ¿Qué es un ciclo económico? ¿Qué han establecido los diferentes autores acerca de la duración de un ciclo económico?
86. Según Keynes, ¿cuáles son las fuentes que desencadenan las fluctuaciones del producto? Explique en qué consiste ese mecanismo de interacción entre las variables macroeconómicas.
87. ¿Por qué es importante el estudio de los ciclos económicos?
88. Explique en qué consiste la teoría cuantitativa del dinero, su relevancia en los modelos de crecimiento económico y en los de ciclos económicos. ¿En qué modelos se cumple la dicotomía clásica y en cuáles no, por qué es esto importante?
89. ¿En qué se diferencia el estudio de los ciclos económicos del estudio del crecimiento económico?
90. Explique en qué consiste el modelo de ciclo puro de inventarios.
91. Explique en qué consiste el modelo acelerador-multiplicador.
92. ¿Qué explicación ofrecen Friedman y Schwartz sobre el origen de los ciclos?, ¿por qué es relevante su análisis histórico?
93. ¿Cuáles son las explicaciones neokeynesianas sobre la existencia de precios rígidos en una economía?
94. Explique cuál es la explicación que hace Lucas para las fluctuaciones del producto: ¿qué rol tienen la oferta y la demanda para explicar el origen de las fluctuaciones, cuál es la causa de que el producto fluctúe? ¿Cómo es la trayectoria hacia el equilibrio una vez que se ha generado una perturbación?
95. ¿Cuál es la fuente principal de fluctuaciones en el modelo de ciclos económicos reales? Explique cuáles son los mecanismos de transmisión de la perturbación en este modelo. ¿Cómo se vincula este modelo con los modelos neoclásicos de crecimiento vistos en clase?
96. ¿Cuáles son las mayores diferencias entre las teorías keynesianas y neoclásicas respecto a la explicación de los ciclos económicos?
97. Lea la siguiente noticia sobre la recesión provocada a raíz de la pandemia del COVID-19: Emanuel, E.J., Ellenberg, S. & Levy, M. (2020) The Coronavirus is here to stay, so what happens next? *New York Times*, March 17th, 2020. URL: <https://www.nytimes.com/2020/03/17/opinion/coronavirus-social-distancing-effect.html> Si



de ahora en adelante la humanidad va a requerir de períodos intermitentes de distanciamiento social, explique:

- a) ¿Qué modelo escogería para explicar lo que ocurriría con el producto de corto y mediano plazo de la economía mundial? Explique por qué escogió ese modelo.
  - b) Explique, según el modelo escogido, qué ocurriría con el producto de corto y largo plazo. Identifique la perturbación dentro del modelo y el proceso de ajuste. ¿Qué ocurre con las principales variables macroeconómicas durante este proceso y en el nuevo equilibrio?
  - c) ¿Utilizaría el mismo modelo para explicar lo que ocurriría en el largo plazo? Explique por qué si o por qué no. ¿Cuál es el modelo óptimo para comprender lo que ocurriría con el crecimiento de la economía mundial en el largo plazo? Explique.
98. Lea el siguiente artículo de opinión: Sharma, R. (2020) This is how the Coronavirus will destroy the economy. *New York Times*, March 16th, 2020. URL: <https://www.nytimes.com/2020/03/16/opinion/coronavirus-economy-debt.html>
- a) Utilice el modelo de la q de Tobin para explicar lo que ocurre en los mercados bursátiles. Identifique la perturbación, el proceso de ajuste y el nuevo estado estacionario. Relacione su respuesta con un diagrama de fase.
  - b) A partir de su respuesta anterior, vincule el comportamiento de los mercados bursátiles con el comportamiento del producto. ¿Qué modelo utilizaría para explicar estas fluctuaciones del producto de corto plazo? Explique qué ocurriría con el producto y las principales variables macroeconómicas.
99. Lea el siguiente artículo: Goodman, P. (2020) Europe's leaders ditch austerity and fight pandemic with cash. *New York Times*, March 16th, 2020. URL: <https://www.nytimes.com/2020/03/26/business/europe-economy-coronavirus.html>
- a) Explique por qué Odendahl no refuta el modelo keynesiano sino que más bien dice ser consistente con él. Utilizando este modelo, explique cómo se ven afectados y el producto y el empleo por la pandemia y por las medidas tomadas por los diferentes países europeos.
  - b) En Costa Rica, personajes de opinión y políticos libertarios como Eli Feinzaig proponen recortes al gasto público, disminución del déficit fiscal y un aumento de impuestos al trabajo. ¿Son estas medidas acertadas, por qué?
  - c) Compare las medidas tomadas por los países europeos contra las propuestas de los columnistas costarricenses y explique cuáles medidas adoptaría usted para hacerle frente a la crisis económica.
100. El COVID-19 y las políticas adoptadas para contrarrestarlo, generaron una contracción en la economía costarricense. Las entidades financieras se quejan porque no están colocando préstamos. El Banco Central anunció un conjunto de medidas que incluyen la reducción de la tasa de política monetaria de 5.25% a 2.75% y la reducción del encaje mínimo legal de 15% a 12%.
- a) Explique, utilizando el modelo de Lucas (1976), si estas medidas serán efectivas para estimular el producto.



- b) Explique, a partir de la lectura de Keynes originalmente publicada en 1936, si estas medidas serán efectivas para estimular el producto. Detalle qué ocurre con las principales variables macroeconómicas durante este proceso. De jugar algún papel, ¿qué papel juega la preferencia por la liquidez en este escenario, según la lectura? Según el autor, ¿es esta una política infalible para estimular la economía? Explique.
  - c) Explique tres críticas de Lucas a la teoría keynesiana y explique por qué difieren sus respuestas en el inciso 1 y 2. En su criterio, ¿cuál de los dos modelos mejor explica el problema planteado? Justifique su respuesta.
101. Comente cinco de las capacidades que la persona necesita para asegurar su dignidad como ser humano según Nussbaum.
102. No olvide hacer las guías de lectura para los artículos asignados. Compare las diferencias más importantes de estos artículos con los modelos simplificados vistos en clase.