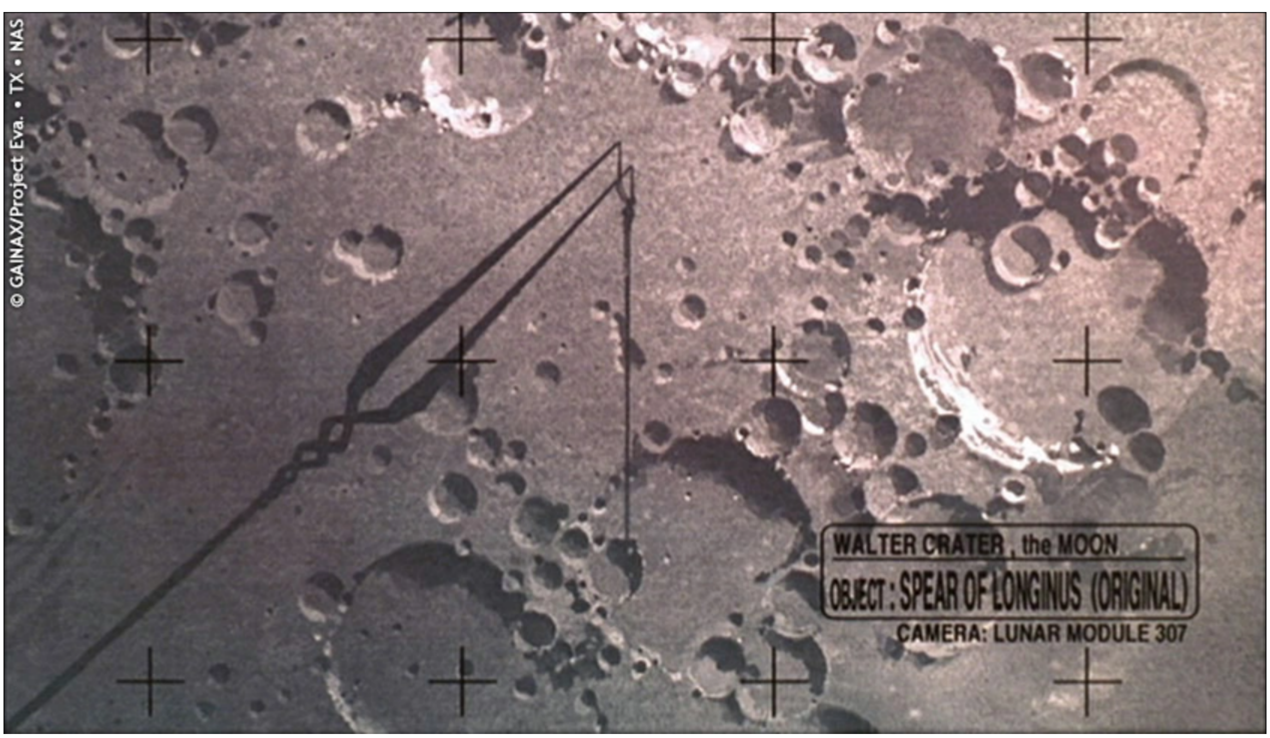
Ecuaciones diferenciales

MA-1005 I-2025

Notas de clases

Autor:
Gerardo Acosta Campos



Índice

Introducción

El siguiente documento incluye la teoría que se estudia el curso de ecuaciones diferenciales, MA-1005 del $I-$ciclo del 2025 en la Universidad de Costa Rica, pero sobre todo es un compendio de ejercicios resueltos para que los estudiantes puedan consultar.

Preliminares

Esta sección es un repaso sobre temas varios que son de importancia en el curso, si lo considera oportuno puede leer lo temas que no recuerde, pero pueden omitir esta sección, sobre todo si tiene un buen dominio del álgebra, integrales y derivadas.

0.1. Álgebra básica

En esta sección vamos a realizar un repaso rápido sobre los conocimientos de otros cursos anteriores que debemos dominar para un buen desarrollo del curso, y no corresponde directamente al curso de 1005. Si usted como estudiante tiene falencias sobre conceptos previos se insta a que lea (**Y SOBRE TODO PRACTIQUE**) sobre los temas acá estudiados.

Iniciemos con una propiedad básica, la distribución, o dicho con otro nombre mas familiar, el factor común.

Teorema 0.1.1. Sea $a, b, c \in \mathbb{R}$ números reales, entonces se cumple

$$a(b + c) = ab + ac$$

si vemos la igualdad como $ab + ac = a(b + c)$ tenemos como ya se menciono, el factor común, debe ser claro que lo anterior se cumple para una cantidad indeterminada de sumas.

Ejemplo 0.1.1. Encuentre el factor común de $x^2yz^2 + xy^2 + xz^3y$

Para encontrar el factor común, debemos encontrar el término que se repite en todas nuestras sumas, note que este término es xy, pues nuestras 3 sumas lo contienen, entonces tenemos

$$x^2yz^2 + xy^2 + xz^3y = xy(xz^2 + y + z^3)$$

Algo importante de mencionar es que debe estar seguro de que todos sus términos comparten un factor en común antes de poder factorizar, ahora, aunque no todos los términos tengan el mismo factor común, podemos agrupar los que si compartan factor común, un método de factorización que usa eso es el método de **agrupación**

Ejemplo 0.1.2. Considere $f(x) = xy^2 + y^2 - x - 1$, utilice el método de agrupación para factorizar lo anterior. Para iniciar podemos ver que podemos agrupar de dos formas diferentes pues varios sumandos comparten factor, por ejemplo xy^2 y y^2 comparten factor y^2, mientras que xy^2 y $-x$ comparten factor x, es indiferente con cual iniciar la agrupación, entonces agrupemos xy^2 y y^2.

$$(xy^2 + y^2) - x - 1 = y^2(x+1) + [-x-1] = y^2(x+1) - [x+1]$$

entonces de la primera agrupación sacamos a factor el y^2, los otros dos términos restantes los agrupamos y aprovechamos para sacar a factor común el negativo, ahora tenemos dos sumas, observe que ambas tiene por factor común $(x+1)$, entonces

$$y^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(y^2 - 1)$$

Como practica puede realizar el mismo ejercicio pero agrupando xy^2 con x.

Las formulas notables también es algo que debemos manejar, tenemos

Teorema 0.1.2. Sea $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Probablemente usted conozca dos casos de la formula notable, dependiendo de si es $(a+b)^2$ o $(a-b)^2$ para $b > 0$, pero observe que el teorema anterior cubre ambos casos (Pues estamos tomando $b \in R$, para el caso $(a-b)^2$ solo tome b negativo). De igual manera no existe ningún inconveniente en tratar lo anterior como dos formulas separadas.

La fórmula notable la tenemos tan interiorizada que en ocasiones olvidamos como se obtiene, que es a partir de un sencillo calculo

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Otra herramienta de utilizada es la diferencia de cuadrados

Teorema 0.1.3. Sea $a, b \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Esto se puede demostrar de manera algebraica con un calculo directo.

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ba + b^2 = a^2 - b^2$$

Para finalizar con los conocimientos algebraicos básicos veamos la cancelación de términos en fracciones, para esto considere el siguiente teorema

Teorema 0.1.4. Sea $a, b, c \in R$, tal que $a \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces

$$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$$

las condiciones $a \neq 0$ y $c \neq 0$ son solo para evitar indeterminaciones en las igualdades de arriba.

algo importante es que para poder cancelar algo en una fracción se debe estar seguro que el termino a cancelar sea factor tanto en el denominador como el numerador, veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo 0.1.3. Considere la fracción

$$\frac{xy + x^2y + xz}{x^2y}$$

vea que tanto en el numerador como el denominador tenemos como factor común x, entonces

$$\frac{x(y + xy + z)}{x(xy)} = \frac{y + xy + z}{xy}$$

Ahora estudiemos el álgebra de los exponentes y radicales

Teorema 0.1.5. Sean $a, b, n \in \mathbb{R}$

1. $(ab)^n = a^n b^n$
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ siempre que $b \neq 0$

La anterior también aplica para radicales, sea $n \in R$ distinto de cero

1. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
2. $\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

para finalizar con la parte de álgebra básica, hablemos algunas cosas que también nos van a ayudar a escribir y entender mejor las matemáticas

- ▷ El orden, escriba de manera ordenada y legible, de manera que el ejercicio siga un sentido lógico, no que solo aparezcan cálculos inconexos.
- ▷ Al manipular expresiones, simplifique, es más fácil trabajar los términos, se reduce las posibilidades de errores y es más sencillo identificar los pasos a seguir.

- ▷ A la otra de escribir términos se recomienda seguir el orden de primero escalares, y luego las variables en orden alfabético, por ejemplos $z^2y(3)x$ es más familiar al escribirlo como $3xyz^2$

0.2. Exponencial y logaritmo

Estas funciones serán recurrentes en el curso, por lo que es importante tener un manejo algebraico de las mismas.

Definicion 0.2.1. Sea $a > 0$ un número real, entonces se tiene que la función exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ y logaritmo $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ se definen como

$$f(x) = a^x \quad g(x) = \log_a(x)$$

Para el caso del curso, nos interesa principalmente cuando $a = e$. En estas notas usaremos la notación $\log_e(x) = \ln(x)$, pero también puede encontrar, sobre todo en referencias actuales que se escribe $\log_e(x) = \log(x)$.

Ahora, estas funciones están relaciones entre si, pues uno es inverso de la otra, es decir, si $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln(x)$ entonces

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x$$
$$e^{\ln(x)} = \ln(e^x) = x$$

Ejemplo 0.2.1.

$$e^{\ln(x^2+5)} = x^2 + 5$$

Ejemplo 0.2.2. Considere $e^{-3\ln(x+1)}$, se puede simplificar a

$$e^{-3\ln(x+1)} = \left(e^{\ln(x+1)}\right)^{-3} = (x+1))^{-3} = \frac{1}{(x+1)^3}$$

0.3. Derivadas e integrales

Sobre integrales en este repaso solo recordaremos tener presentes métodos de integración como fracciones parciales, sustitución o por partes. También recordar la diferencia entre una integral definida y una indefinida, para esto considere dos funciones $f(x), F(x)$, en donde $F'(x) = f(x)$, entonces la integral indefinida es

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

en donde C se llama la constante de integración y la integral definida para a, b reales se escribe como, usando el Teorema fundamental del calculo

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

En cuanto a derivadas iniciemos con la notación, sea $y(x)$ una función, denotamos su derivada por

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x)$$

para simplificar la notación se suele omitir la dependencia de la funciones cuando esta es clara, entonces escribimos

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

Además recordar las reglas de derivación

Teorema 0.3.1. Regla del producto. Sea $f(x), g(x)$ dos funciones, entonces tenemos que

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)]g(x) + f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Ejemplo 0.3.1. Considere $f(x) = x\ln(x)$, entonces tenemos que

$$f'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

Teorema 0.3.2. Regla del cociente. Sea $f(x), g(x)$ dos funciones, entonces para $x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \neq 0$ tenemos

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Ejemplo 0.3.2. Considere $f(x) = \tan(x)$, determine $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\sin(x)^2} \\ &= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\sin(x)^2} = \frac{1}{\sin(x)^2} = \sec(x)^2 \end{aligned}$$

donde se uso la el hecho de que $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

El ultimo teorema de derivación que tenemos es la regla de la cadena, que nos permite obtener la derivada de composición de funciones

Teorema 0.3.3. Sea $f(x), g(x)$ dos funciones, entonces tenemos

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

Ejemplo 0.3.3. Sea $f(x) = \arctan\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, determine $f'(x)$. Tenemos una composición de funciones, primero debemos derivar el arcotangente y evaluarlo en la fracción, para luego multiplicar por la derivada de la fracción que esta dentro del arcotangente, como $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ tenemos

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2}\left[\frac{x+2}{x-1}\right]'$$

calculando

$$\left[\frac{x+2}{x-1}\right]' = \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

entonces sustituyendo y simplificando tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2}\left[\frac{-3}{(x-1)^2}\right] = \frac{1}{1 + \frac{(x+2)^2}{(x-1)^2}}\left[\frac{-3}{(x-1)^2}\right] \\ &= -3\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + (x+2)^2}\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{2x^2 + 2x + 5} \end{aligned}$$

0.4. Derivadas parciales e integrales en dos variables

Sin ponernos muy técnicos en la definición, podemos definir las derivas parciales de una función como.

Definicion 0.4.1. Sea $f(x, y)$ una función en dos variables, entonces

1. Se define $\frac{df}{dx} = f_x$ como derivar f tomando a x como variable y y como constante.

2. Se define $\dfrac{df}{dy} = f_y$ como derivar f tomando a y como variable y x como constante.

Ejemplo 0.4.1. Considere $f(x,y) = xy + 2x^2 + \operatorname{sen}(y)$, entonces tenemos

$$f_x = y + 4x + 0 = y + 4x$$
$$f_y = x + 0 + \cos(y) = x + \cos(y)$$

Las reglas de derivación como regla del producto y la cadena se deben seguir aplicando

Ejemplo 0.4.2. Considere $g(x,y) = x \operatorname{sen}(\ln(x)y)$

al derivar con respecto a x observamos que tenemos un producto de dos términos que dependen de x, además tenemos una composición de un seno con un logaritmo por lo que debemos aplicar regla de la cadena, tenemos

$$g_x = \operatorname{sen}(\ln(x)y) + x\left(\cos(\ln(x)y)\frac{y}{x}\right) = \operatorname{sen}(\ln(x)y) + y\cos(\ln(x)y)$$

la derivada con respecto a y es más sencilla, tomando la variable x como constante obtenemos

$$g_y = x\cos(\ln(x)y)\ln(x)$$

A la hora de integrar una función en dos variables con respecto a un diferencial, se usa la misma idea de la derivada parcial, se toma la otra variable como constante y solo se integra la variable del diferencial

Ejemplo 0.4.3. Sea $h(x,y) = xy^2 + \cos(y)e^{2x}$, entonces

$$\int \left(xy^2 + \cos(y)e^{2x}\right) dx = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{1}{2}\cos(y)e^{2x}$$
$$\int \left(xy^2 + \cos(y)e^{2x}\right) dy = \frac{xy^3}{3} + \operatorname{sen}(y)e^{2x}$$

0.5. Completar cuadrados

Considere el polinomio de grado 2

$$x^2 + bx + c$$

podemos completar el cuadrado usando

$$d = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

sumando y restando d y aplicando inspección tenemos

$$x^2 + bx + c = \left(x + \left[\frac{b}{2}\right]^2\right)^2 + c - \frac{b}{2}^2$$

Ejemplo 0.5.1. Considere

$$x^2 + 10x - 10$$

en este caso, si completamos cuadrados tenemos que

$$d = \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$$

entonces

$$x^2 + 10x - 10 = x^2 + 10x - 10 + 25 - 25 = (x^2 + 10x + 25) - 35 = (x+5)^2 - 35$$

Ejemplo 0.5.2. Completando cuadrados para

$$x^2 - 7x + 25$$

tenemos que

$$d = \left(\frac{-7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$

entonces

$$x^2 - 7x + 25 + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} = \left(x^2 - 7x + \frac{49}{4}\right) + 25 - \frac{49}{4}$$
$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{51}{4}$$

en el caso de que el polinomio sea de la forma $ax^2 + bx + c$, se debe sacar a factor común el a antes de aplicar el proceso

Ejemplo 0.5.3. Considere

$$2x^2 + 4x + 1$$

sacando a factor común el 2, tenemos

$$2\left(x^2+2x+\frac{1}{2}\right)$$

entonces el cuadrado lo completa

$$\left(\frac{2}{2}\right)^2=1$$

entonces

$$2\left(x^2+2x+\frac{1}{2}\right)=2\left(\left[x^2+2x+1\right]-1+\frac{1}{2}\right)=$$
$$2\left((x+1)^2-\frac{1}{2}\right)=2(x+1)^2-1$$

0.6. División de polinomios y fracciones parciales

En esta sección vamos a recordar como trabajar con expresiones de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

en donde $P(x)$ es un polinomio de grado n y $Q(x)$ es un polinomio de grado m, estas expresiones suelen aparecer en integrales y también la veremos con frecuencias cuando estudiemos la transformadas de Laplace, y se llaman funciones **racionales**.

En el caso de que $n \leq m$, es decir, el grado del numerador es **mayor o igual** al grado del denominador, procedemos por división de polinomios, la división de polinomios es similar a la división de números racionales que conocemos, veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo 0.6.1. Calcule la siguiente fracción

$$\frac{x^4+3x^3-2x^2+x-1}{x^2+x-1}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
\big(& x^4+3x^3-2x^2 & +x-1\big) : \left(x^2+x-1\right) = x^2+2x-3+\dfrac{6x-4}{x^2+x-1} \\
 & -x^4 \quad -x^3 \quad +x^2 & \\
\hline
 & 2x^3 \quad -x^2 \quad +x & \\
 & -2x^3-2x^2+2x & \\
\hline
 & -3x^2+3x-1 & \\
 & 3x^2+3x-3 & \\
\hline
 & 6x-4 &
\end{array}$$

En la división anterior el dividendo es $x^4+3x^3-2x^2+x-1$, el divisor es x^2+x-1, el cociente es x^2+2x-3 y el residuo es $6x-4$, por eso se concluye que

$$\frac{x^4+3x^3-2x^2+x-1}{x^2+x-1} = x^2+2x-3+\frac{6x-4}{x^2+x-1}$$

No siempre es necesario aplicar todo el procedimiento, si el denominador es similar al numerador, podemos separar la fracción de tal forma que obtenemos la división del polinomio de manera más rápida, veamos esto con un ejemplo en una integral

Ejemplo 0.6.2. Calcule la siguiente integral

$$\int \frac{x^2+3}{x^2+1}dx$$

Como el denominar y numerador se parecen, solo difieren por una constante, podemos hacer lo siguientes

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+3}{x^2+1}dx &= \int \frac{x^2+1+2}{x^2+1}dx = \int \cancel{\frac{x^2+1}{x^2+1}}dx + \int \frac{2}{x^2+1}dx \\ &= \int dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}dx = x+2\arctan(x)+C\end{aligned}$$

Ahora vamos a enfocarnos en la parte que más nos interesa de esta sección, las fracciones parciales, en este caso ocupamos que el grado del polinomio del numerador sea **menor estricto** al grado del polinomio del denominador.

Para iniciar debemos factorizar al máximo el polinomio del denominador, las fracciones parciales van a depender del grado de los polinomios presentes en el denominador, veamos los casos que nos interesan

- **Caso 1**: El denominador solo tiene polinomios de grado 1 que no se repiten. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$, n números reales distintos, entonces para todo polinomio $P(x)$ de grado $n-1$ o menor

$$\frac{P(x)}{(x-p_1)(x-p_2)\cdots(x-p_n)} = \frac{a_1}{(x-p_1)} + \frac{a_2}{(x-p_1)} + \cdots + \frac{a_n}{(x-p_1)}$$

para ciertas constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

Ejemplo 0.6.3. Encuentre la expresión en fracción parcial de

$$\frac{-8x-8}{x^3-4x}$$

para inicial debemos factorizar al máximo el denominador, con lo que obtenemos

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$$

donde en la última igualdad se uso diferencias de cuadrados, entonces tenemos 3 polinomios de grado 1 distintos, por lo que

$$\frac{-8x-8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$$

enviando el denominador del lado izquierdo a multiplicar obtenemos

$$-8x - 8 = [x(x-2)(x+2)]\left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}\right)$$
$$-8x - 8 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2) \tag{0.1}$$

existen diversas maneras para obtener el valor de las constantes, en este caso de polinomios de grado 1 todos diferentes la manera mas sencillas es proponer valores de x que sean las raíces del denominador de la fracción original, es decir las raíces de $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$, cuyas raíces son $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$, el motivo de tomar estos valores es que al sustituir en 0.1, solo va a quedar una constante que se puede despejar de manera directa, iniciemos tomando $x = 0$

$$-8 * 0 - 8 = A(0-2)(0+2) + B * 0 * (0+2) + C * 0 * (0-2)$$
$$-8 = -4A \Longrightarrow A = 2$$

tomando $x = 2$ tenemos

$$-8 * 2 - 8 = A(2-2)(2+2) + B * 2 * (2+2) + C * 2 * (2-2)$$
$$-24 = 8B \Longrightarrow B = -3$$

y tomando $x = -2$ tenemos que

$$-8 * (-2) - 8 = A(-2-2)(-2+2) + B * (-2) * (-2+2) + C * (-2) * (-2-2)$$
$$8 = 8C \Longrightarrow C = 1$$

por lo que tenemos

$$\frac{-8x-8}{x^3-4x} = \frac{2}{x} - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+2}$$

▷ **Caso 2** El denominador se puede factorizar como polinomios de grado 1, pero algunos se pueden repetir. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}$, n números reales distintos y $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{N}$ números naturales (no tiene porque ser distintos), entonces para todo polinomio $P(x)$ de grado menor a $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ tenemos

$$\frac{P(x)}{(x-p_1)^{r_1}(x-p_2)^{r_2}\cdots(x-p_n)^{r_n}} = \frac{A_{1,1}}{x-p_1} + \frac{A_{1,2}}{(x-p_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1,r_1}}{(x-p_1)^{r_1}}$$
$$+\frac{A_{2,1}}{x-p_2} + \ldots + \frac{A_{2,r_2}}{(x-p_2)^{r_2}} + \cdots + \frac{A_{n,1}}{(x-p_n)} + \cdots + \frac{A_{n,r_n}}{(x-p_n)^{r_n}}$$

En donde $A_{i,j}$ son números reales.

El caso anterior se puede ver muy extenso, pero es bastante sencillo de memorizar, si un polinomio de grado 1 se repite m veces, se debe proponer m fracciones, que en el numerador tiene una constante y el denominador el polinomio de grado 1 que cada vez va aumenta su exponente hasta llegar a m.

Observe que este caso contiene al anterior si se toma $r_1 = r_2 = \cdot = r_n = 1$

Ejemplo 0.6.4. Determine la fracción parcial de

$$\frac{2x^2+4x+3}{(x-1)(x+2)^2}$$

Vea que $x+2$ es un polinomio de grado 1 que se repite dos veces, entonces tenemos.

$$\frac{2x^2+4x+3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

para determinar el valor de las constantes podemos el método anterior de dar 3 valores para x, el problema es que el denominador solo tiene 2 raíces (el denominador es $(x-1)(x+2)$), que son $x = 1$ y $x = -2$, por lo que debemos tomar otro valor de x, se recomienda tomar valores bajos, por ejemplo $x = 0$, pero vamos a proceder para este ejemplo de otra manera.

Enviando el denominador del lado izquierdo a dividir obtenemos

$$2x^2+4x+3 = A(x+2)^2 + B(x+2)(x-1) + C(x-1)$$

desarrollando el lado derecho obtenemos que

$$2x^2+4x+3 = Ax^2+4Ax+4A+Bx^2+Bx-2B+Cx-C$$

ahora, agrupando los términos con x^2, x y constantes obtenemos

$$2x^2+4x+3 = x^2(A+B) + x(4A+B+C) + [4A-2B-C]$$

Lo que vamos a hacer ahora se realiza en varias partes del curso, por lo que una justificación más formar se realizara en los capítulos dedicados al curso y no de repaso, pero se basa en el concepto de independencia lineal y que el conjunto $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, son bases del espacio vectorial de los polinomios de grado n.

Lo anterior quiere decir que para que la igualdad anterior sea verdadera se debe cumplir el siguiente sistemas de ecuaciones.

$$\begin{cases} A & +B & & = 2 \\ 4A & +B & +C & = 4 \\ 4A & -2B & -C & = 3 \end{cases}$$

de donde se obtiene que $A = B = 1$ y $C = -1$, por lo que

$$\frac{2x^2 + 4x + 3}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}$$

El último caso que veremos es de fracciones parciales con un polinomio de grado 2 irreducible.

▷ Caso 3. Polinomio de grado 3 irreducible. En el caso de que existe un polinomio de grado 2 irreducible $P(x)$ en el denominador, este se escribirá en la fracción parcial como

$$\frac{Ax + B}{P(x)}$$

o dicho de otra forma, en lugar de solo poner una constante como en los polinomios de grado 1, agregamos un polinomio de grado 1 con sus coeficientes por determinar.

Ejemplo 0.6.5. Determina la fracción parcial de

$$\frac{2x^2 + 6x + 7}{(x+1)(x^2 + x + 1)}$$

el polinomio $x^2 + x + 1$ es irreducible, una forma de verificar esto es ver que el discriminaste de este polinomio es menor a 0, pero como nadie recuerda la forma del discriminaste una manera más sencilla es corroborar con la calculadora que las raíces son complejas.

Entonces la fracción parcial planteada es

$$\frac{2x^2 + 6x + 7}{(x+1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

$$\Longrightarrow 2x^2 + 6x + 7 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x + 2)$$

$$\Longrightarrow 2x^2 + 6x + 7 = Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C$$

$$\Longrightarrow 2x^2 + 6x + 7 = x^2(A + B) + x(A + 2B + C) + A + 2C$$

de donde se obtiene el sistema

$$\begin{cases} A \quad +B \qquad\quad = 2 \\ A \quad +2B \quad +C \quad = 6 \\ A \qquad\qquad +2C \quad = 7 \end{cases}$$

resolviendo tenemos que $A = B = 1$ y $C = 3$, por lo que

$$\frac{2x^2+6x+7}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+2} + \frac{x+3}{x^2+x+1}$$

1. Introducción a las ecuaciones diferenciales

En el siglo $XVII$, de forma independiente Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz desarrollaron el cálculo infinitesimal, Leibniz aporto la notación de diferenciales dx, dy, que llevo a la notación moderna $y' = \dfrac{dy}{dx}$, mientras que Newton en su libro Method of Fluxions (1736) introdujo 3 clases de ecuaciones diferenciales:

1. $\frac{dy}{dx} = f(x)$
2. $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$
3. $x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} = y$

estas 3 tipos de ecuaciones están adaptados a la notación moderna, en el siglo $XVII$ no existía la definido formal de limite y derivada, las fluxiones (fluxions) es el término que uso Newton para lo que actualmente llamamos derivadas.

Las ecuaciones diferenciales esta muy ligado a la física, aunque no es la única área donde se utilizan, en esencia una ecuación diferencial es una relación (ecuación) entre una función, sus derivadas y las variables independientes.

La derivada es la razón de cambio de una función, por lo que la solución de una ecuación diferencial es una función que satisface una relación con respecto a sus derivadas, por ejemplo la primera clase de ecuaciones diferenciales que presento Newton tiene por solución la integral de $f(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Longrightarrow dy = f(x)dx \Longrightarrow \int dy = y = \int f(x)dx$$

estas se llama ecuaciones diferenciales directamente integrables, por lo que al integrar lo que estamos encontrando los las funciones cuyas derivadas son la función que estamos integrando.

1.1. Definición de ecuación diferencial ordinaria de orden n

Iniciemos con la idea de lo que es una ecuación diferencial.

Definicion 1.1.1. Una ecuación diferencial es una ecuación que que involucra variables independientes, y una función desconocida junto con sus derivadas.

Nos vamos a centrar en dos tipos de ecuaciones diferenciales, las ordinarias y en derivadas parciales. Hasta el final del curso estudiaremos un poco de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, y la gran parte del curso nos centraremos en ecuaciones diferenciales ordinarias.

La palabra ordinaria hace referencia a que las derivadas son ordinarias (las estudiadas en cálculo I), la notación de prima usada es

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

esta notación presenta inconvenientes para derivadas de orden grande, para eso tenemos la siguiente notación

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

donde usamos el paréntesis para representar derivadas, por lo que $y^n \neq y^{(n)}$, la primera es elevar y a la n, la segunda es derivar n veces y.

Ya con esta notación podemos ver la definición de una ecuación diferencial ordinaria.

Definicion 1.1.2. Una ecuación diferencial ordinaria (que llamaremos **EDO**) de orden n es una ecuación de la forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}y(x), y^{(n)}(x), y(x)) = 0$$

en donde $F : \mathbb{R}^{n+2} \to R$

Cuando decimos que $F : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$, es que F tiene $n + 2$ entradas reales y devuelve un único valor real, x es la variable independiente, $y(x)$ es una función que depende de x. En la practica saber quien es F es irrelevante. A groso modo una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación que involucra una variable independiente x, una función desconocida $y(x)$ y sus derivadas (ordinarias).

Ejemplo 1.1.1. Un ejemplo de ecuación diferencial ordinario es

$$y''(x) + x^2 = \sin(y(x))^2$$

un segundo ejemplo de EDO es

$$y' + 2y = x^2$$

En esta segunda EDO dejamos de escribir la dependencia de $y = y(x)$ para simplificar.

El uso de x, y para la variable independiente y dependiente respectivamente se puede cambiar, en el fondo son variables mudas.

Ejemplo 1.1.2. Las siguientes son ecuaciones diferenciales.

1. $(w'(t))^2 + 2w(t)^2 = \sin(2t) + t + 1$
2. $\frac{d^2z}{dx^2} + 3\frac{dz}{dx} = 0$

Dentro de las ecuaciones diferenciales ordinarias existe una categoría de ecuaciones de suma importancia, las ecuaciones diferenciales lineales, estás se ven de esta forma

Definicion 1.1.3. Una ecuación diferencial lineal de orden n tiene la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

en donde $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ son funciones que depende de x.

Una forma de identificar una ecuación lineal es que siempre que tenemos un término $y(x) = y$ o alguna de sus derivadas, este no puede estar multiplicado por algún otro término de $y(x)$ ni elevado a otra potencia distinta de 1.

Ejemplo 1.1.3. Una lista de clasificación de ecuaciones diferenciales

1. $y'' + y' + y = 0$ es una ecuación diferencial lineal de orden 2
2. $4x^2y^{(3)} - \ln(x)y' + 4y = \sin(x)$ es una ecuación diferencial lineal de orden 3.
3. $3(y'')^3 + 4y' + y = x^2 + e^x$ **NO** es una ecuación diferencial ordinaria lineal, pues la segunda derivada de y esta elevada a la 3, es solo una EDO de orden 2
4. $\sin(x)y' + \tan(x)y = 4$ es una ecuación diferencial lineal de orden 1.
5. $\sin(y'') - 2(y')^2 + e^x y = \dfrac{1}{1+x^2}$ **NO** es una ecuación diferencial ordinaria lineal, pues se segunda derivada de y esta evaluada dentro de un seno, es solo una EDO de orden 2.

Para finalizar esta sección, vamos a definir las ecuación diferencial en derivadas parciales.

Definicion 1.1.4. Una ecuación diferencial en derivadas parciales es una ecuación que involucra una función de varias variables y las derivadas parciales de esta función junto con las variables independientes.

Para simplificar la notación de derivadas parciales escribiremos

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = f_{x_i}$$

Ejemplo 1.1.4. Las siguientes son ejemplos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

1. $u(x, y)_x + u(x, y)_y = (x + y)^2$
2. $u(x, y, z)_{zy} = u(x, y, z)$
3. $u(x, y)_{xx} + u(x, y)_{yy} = 0$

1.2. Solución de una ecuación diferencial

La solución de una ecuación normal que hemos estudiado en cursos de precálculo o colegio es una serie de puntos que satisfacen la igualdad de la ecuación, en el caso de una ecuación diferencial la soluciona es algo similar pero pero en cambio de ser un conjunto de puntos, obtenemos un conjunto de funciones.

Definicion 1.2.1. La **solución** de una ecuación diferencial sobre algún intervalo I es una función $y = f(x)$ tal que esta y sus derivadas satisfacen la igualdad de la ecuación diferencial.

Entonces una forma de corroborar que una función es solución es una EDO sustituir esta en la ecuación diferencial y corroborar que se cumple la igualdad.

Ejemplo 1.2.1. Considere la ecuación diferencial $xy'' + y' = 0$, demuestre que $y = \ln(x)$ es solución de dicha ecuación.

Como la ecuación diferencial es de orden dos, requerimos la segunda derivada de y, de donde obtenemos que

$$y' = \frac{1}{x}$$
$$y'' = \frac{-1}{x^2}$$

ahora, sustituyendo en la ecuación diferencial

$$xy'' + y' = 0 \Longrightarrow x\frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{-1}{x} + \frac{1}{x} = 0$$

donde la última igualdad es verdadera.

La solución de una ecuación diferencial no suele ser única, sino una familia de funciones bajo una cantidad de parámetros, estos parámetros también los solemos llamar constantes arbitrarias.

Ejemplo 1.2.2. Considere la ecuación $y' = -5y$, podemos corroborar que tomando $y = Ce^{-5x}$ es solución de la ecuación diferencial donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante, para ver esto observe que $y' = -5Ce^{-5x}$, y sustituyendo en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} y' &= -5y \\ -5Ce^{-5x} &= -5Ce^{-5x} \end{aligned}$$

obteniendo la igualdad.

Más adelante cuando resolvamos las EDO veremos que estas constantes arbitrarias son las constantes de integración que se obtiene al realizar una integral indefinida.

Ejemplo 1.2.3. Considere la ecuación diferencial $y'' - 2y' = 4x$, se puede corroborar que tiene por solución $y = C_1e^{2x} + C_2 - x^2 - x$ donde C_1, C_2 son constante reales arbitrarias, para poder ver esto derivamos y

$$\begin{aligned} y' &= 2C_1e^{2x} - 2x - 1 \\ y'' &= 4C_1e^{2x} - 2 \end{aligned}$$

entonces sustituyendo

$$\begin{aligned} y'' - 2y' = 4x &\Longrightarrow (4C_1e^{2x} - 2) - 2(2C_1e^{2x} - 2x - 1) = 4x \\ &\Longrightarrow 4C_1e^{2x} - 2 - 4C_1e^{2x} + 4x + 2 = 4x \Longrightarrow 4x = 4x \end{aligned}$$

donde la última igualdad es verdadera.

Los ejemplos que hemos estudiamos son soluciones explicitas, es decir que podemos expresar y únicamente en términos de la variable independiente x ($y = f(x)$), pero también podemos tener casos donde la solución es explicita ($f(x, y) = 0$), como veremos a continuación

Ejemplo 1.2.4. La ecuación $y^3 + 3x + 7 = 6y$ define a y como función de x de manera implícita, esta función es solución de la ecuación diferencial $y'' - 2y(y')^3 = 0$.

Para verificar esto observamos que la ecuación diferencial es de orden 2, por lo que ocupamos conocer la segunda derivada de nuestra función, para esto primero derivamos de manera implícita la ecuación, es importante recordar que y es una función que depende de x, por lo que si derivada es y', a diferencia de la variable x cuya derivada es 1.

También debemos recordar la regla de la cadena, pues por ejemplo al derivar y^3, obtendremos $3y^2y'$, donde el y' se obtiene al aplicar la regla de la cadena al derivar y, entonces derivando la ecuación obtenemos

$$3y^2y' + 3 = 6y' \Longrightarrow 3y^2y' - 6y' = -3 \Longrightarrow y'(3y^2 - 6) = -3$$
$$\Longrightarrow y' = \frac{-3}{3y^2 - 6} = \frac{1}{2 - y^2}$$

Con esto obtenemos y', volviendo a derivar

$$y'' = -\frac{-2y}{(2 - y^2)^2} y' = \frac{2y}{(2 - y^2)^3}$$

donde la última igualdad se obtiene sustituyendo y' obtenido anteriormente, entonces sustituyendo y', y'' en la ecuación diferencial obtenemos

$$y'' - 2y(y')^3 = 0 \Longrightarrow \frac{2y}{(2 - y^2)^3} - 2y\left(\frac{1}{(2 - y^2)}\right)^3 = 0$$
$$\frac{2y}{(2 - y^2)^3} - \frac{2y}{(2 - y^2)^3} = 0 \Longrightarrow 0 = 0$$

con esto se concluye que es solución.

En el siguiente ejemplo se usa la notación de diferencias $dy/dx = y'$

Ejemplo 1.2.5. Demuestre que la función $y^3 = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^3}$ es solución de $3xy^2dy + 3y^3dx = \frac{2}{x}dx$

para iniciar, dividiendo toda la ecuación entre dx obtenemos

$$3xy^2\frac{dy}{dx} + 3y^3 = \frac{2}{x} \Longrightarrow 3xy^2y' + 3y^3 = \frac{2}{x}$$

como es una ecuación diferencial de orden 1 ocupamos saber la primera derivada de nuestra función, entonces derivando obtenemos

$$3y^2y' = \frac{-1}{x^2} - \frac{3C}{x^4}$$

sustituyendo esto en la ecuación diferencial

$$3y^2y'x + 3y^3 = \frac{2}{x} \Longrightarrow \left(\frac{-1}{x^2} - \frac{3C}{x^4}\right)x + 3\left(\frac{1}{x} + \frac{C}{x^3}\right) = \frac{2}{x}$$
$$\frac{-1}{x} - \frac{3C}{x^3} + \frac{3C}{x^3} + \frac{3}{x} = \frac{1}{2x} \Longrightarrow \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}$$

Concluyendo que es solución

Otro tipo de ejemplo clásico es dada una función que depende de una parámetro, determinar para cuales valores de ese parámetro la función es solución de una ecuación diferencial.

Ejemplo 1.2.6. Considere la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$, determine para que valores de k la función $y = e^{kx}$ es solución

calculando las derivadas de y

$$\begin{aligned} y' &= ke^{kx} \\ y'' &= k^2 e^{kx} \end{aligned}$$

entonces sustituyendo en la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \Longrightarrow k^2 e^{kx} - 5ke^{kx} + 6e^{kx} = 0 \Longrightarrow e^{kx}(k^2 - 5k + 6) = 0$$

$$\begin{cases} e^{kx} &= 0 \\ k^2 - 5k + 6 &= 0 \end{cases}$$

el caso donde $e^{kx} = 0$ no tiene solución (en los números reales), para el caso $k^2 - 5k + 6 = 0$ se puede factorizar como $(k-3)(k-2) = 0$, de donde se obtiene que $k = 3$ y $k = 2$ son los valores ya que $y = e^{kx}$ es solución es la ecuación diferencial.

Ejemplo 1.2.7. Considere la ecuación diferencian $y'' - 6y' + 9y = 0$, determine los valores de k tal que la función $y = xe^{kx}$ es solución de dicha ecuación.

Iniciamos determinando las derivadas de la función

$$\begin{aligned} y' &= e^{kx} + kxe^{kx} = e^{kx}(1 + kx) \\ y'' &= ke^{kx}(1 + kx) + e^{kx}k = e^{kx}\left(2k + k^2 x\right) \end{aligned}$$

sustituyendo

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 9y = 0 \Longleftrightarrow e^{kx}\left(2k + k^2 x\right) - 6e^{kx}(1 + kx) + 9xe^{kx} = 0 \\ e^{kx}\left(2k + k^2 x - 6 - 6kx + 9x\right) = 0 \end{aligned}$$

agrupando

$$e^{x}\left[\left(k^2 x - 6kx + 9x\right) + (2k - 6)\right] = 0$$

Para $kx^2 - 6kx + 9x$ se puede aplicar inspección y ver que es equivalente a $(kx - 3x)(k - 3)$, para el otro paréntesis sacamos a factor común un 2, obtenemos

$$e^{kx}\left[((kx - 3x)(k - 3)) + 2\left((k - 3)\right)\right] = 0 \Longleftrightarrow e^{kx}(k - 3)\left(kx - 3x + 2\right) = 0$$

entonces

$$\begin{cases} e^{kx} &= 0 \\ k-3 &= 0 \\ kx - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

de donde solo se puede cumplir que $k - 3 = 0$, por lo tanto el valor buscado es $k = 3$

Hasta el momento hemos visto soluciones según nuestra definición de 1.2.1, ahora vamos a dar definiciones mas especificas sobre algunos tipos de soluciones.

Definicion 1.2.2. La **solución general** de una EDO de orden n, es la familia de funciones de n parámetros que se obtiene al resolver la EDO.

La definición anterior depende de algo que aún no hemos realizado, que es resolver EDO, pero lo importante es que los métodos que desarrollaremos nos darán directamente la solución general de la EDO.

Ejemplo 1.2.8. Considere la ecuación diferencial $y'' - y = 0$, tiene por solución general

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

observe que la ecuación diferencial es de orden 2, por lo que la solución general dependerá de dos parámetros $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, el verificar que esta función es realmente solución se deja como ejercicio.

La solución general podemos extraer soluciones al asignarle valores a los parámetros, a estas soluciones las llamamos soluciones particulares

Definicion 1.2.3. Una solución que se obtiene al asignar valores a los parámetros de una solución general se llama **solución particular**

Ejemplo 1.2.9. Usando la ecuación del ejemplo 1.2.8, una solución particular es $y = e^x + e^{-x}$ tomando $C_1 = C_2 = 1$, otro ejemplo de solución particular es $y = 5e^x - 3e^{-x}$ tomando $C_1 = 5, C_2 = -3$ o $y = 0$, tomando $C_1 = C_2 = 0$.

El ultimo tipo de solución relevante es la solución singular, que son aquellas que no se obtiene de la solución general, estas no son de mucho interés y no existe un método sistemático para encontrarlas.

Definicion 1.2.4. Una solución de una ecuación diferencial que no se puede obtener de asignar valores a los parámetros de la solución general se llama **solución singular**

Ejemplo 1.2.10. Considere la ecuación diferencial $y = xy' + (y')^2$ tiene por solución general $y = Cx + C^2$, para ver esto observe que $y' = C$, entonces sustituyendo

$$y = xy' + (y')^2 \iff Cx + C^2 = xC + (C)^2$$

donde es clara la igualdad, un ejemplo de solución particular es $y = 3x + 9$ dando un valor de $C = 3$, pero $y = \dfrac{-x^2}{4}$ es solución de la ecuación diferencial que no se puede obtener de la solución general, por lo que esta es una solución singular, para corroborar que es solución tenemos que $y' = \dfrac{-x}{2}$, entonces

$$y = xy' + (y')^2 \iff \frac{-x^2}{4} = x\left(\frac{-x}{2}\right) + \left(\frac{-x}{2}\right)^2$$
$$\iff \frac{-x^2}{4} = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \iff \frac{-x^2}{4} = \frac{-x^2}{4}$$

por lo que es solución.

1.3. Problemas de Cauchy o de valores iniciales

Los problemas de valores iniciales o problema de valores iniciales es encontrar una solución particular de una ecuación diferencial que cumpla condiciones dadas, esto se hace asignado valores a las variables arbitrarias.

Veamos un ejemplo que física, si tenemos una partícula que se mueve en una dimensión, donde $x(t)$ es una función que representa la posición de la partícula en un tiempo t, tenemos que la velocidad de la partícula viene dada por

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Esta es una ecuación diferencial de orden 1, y resolverlo es sencillo pues es una ecuación diferencial directamente integrable, entonces

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \iff x(t) = \int v(t)dt$$

Ejemplo 1.3.1. Considere una partícula cuya velocidad es $v(t) = 6t^2 + \cos(t)$, determine la posición de la partícula si se sabe que $x(0) = 10$.

Como se menciono arriba, solo debemos integrar la velocidad, pero al hacer esto aparece la constante de integración

$$x(t) = \int (6t^2 + cos(t))dt = 2t^3 + \sin(t) + C$$

entonces lo que tenemos son infinitas funciones que representan la posición de una partícula cuya velocidad es $v(t) = 6t^2 + \cos(t)$, solamente que todas (para distintos valores de C) representan posiciones diferentes.

Para determinar exactamente cual es la función que modela la posición de nuestra partícula debemos usar que $x(0) = 10$, esto quiere decir que cuando $t = 0$, la partícula se encuentra en la posición $x = 10$, sustituyendo los valores

$$10 = 2 * 0^3 + \sin(0) + C \Longrightarrow 10 = C$$

entonces la posición de nuestra partícula es

$$x(t) = 2t^3 + \sin(t) + 10$$

Ahora veamos la definición de un problema de valores iniciales, también se puede hacer referencia a estos como un problema de fronteras o un problema de valores iniciales, si bien formalmente los 3 nombres que acabamos de dar realmente no definen lo mismo, la diferencia que tienen es ciertos tecnicismos en su definición, por lo que los trataremos lo mismo.

Definicion 1.3.1. Considere la ecuación diferencial $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ de orden n, un problema de valores iniciales es

$$\begin{cases} f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n)}(x_n) = y_n \end{cases}$$

La solución al problema de valores iniciales es una solución particular que cumpla las condiciones requeridas, observe que si la EDO es de orden n se requieren de n condiciones para poder resolver el problema de valores iniciales.

Ejemplo 1.3.2. Considere la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ que tiene por solución general $y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$, se desea resolver el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(\pi) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

observe que como la ecuación diferencial es de orden 2, requerimos 2 condiciones de frontera para poder determinar la solución particular, ya conocemos la solución general dada por $y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$, usando que $y(\pi) = 1$ obtenemos

$$y(\pi) = C_1 \cancelto{-1}{\cos(\pi)} + C_2 \cancelto{0}{\sin(\pi)} \Longleftrightarrow -1 = C_1$$

para poder determinar el valor de C_2 debemos usar la segunda condición de frontera, pero esta nos da información sobre la derivada de y, por lo que debemos derivar nuestra solución general para obtener

$$y' = -C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$$

ahora usando que $y'(0) = 2$ obtenemos

$$y'(0) = -C_1 \cancelto{0}{\sin(0)} + C_2 \cancelto{1}{\cos(0)} \Longleftrightarrow 2 = C_2$$

por lo que la solución al problema de valores iniciales es

$$y = -\cos(x) + 2\sin(x)$$

En el ejemplo anterior el despeje de las variables es sencillo ya que al sustituir cada uno de las condiciones se obtiene el valor de una de las constantes, pero esto no siempre es así, y en ocasiones tendremos que resolver un sistema de ecuaciones.

Ejemplo 1.3.3. Considere la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2y = 18$ que tiene por solución general $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 9$, se desea resolver el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 18 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Usando la primer condición de frontera $y(0) = 1$ obtenemos

$$y(0) = C_1 e^0 + C_2 e^{2*0} + 9 \Longleftrightarrow 1 = C_1 + C_2 + 9 \Longleftrightarrow C_1 + C_2 = -8$$

esta ecuación no es suficiente para obtener el valor de alguna de los parámetros, continuamos usando ahora que $y'(0) = -1$, con lo que primero vea que

$$y' = C1e^x + 2C_2 e^{2x}$$

entonces

$$y'(0) = C1e^0 + 2C_2 e^{2*0} \Longleftrightarrow C_1 + 2C_2 = -1$$

por lo que debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -8 \\ C_1 + 2C_2 = -1 \end{cases}$$

este sistema se puede resolver con calculadora, pero igual vamos a resolverlo mediante sustitución, para esto vea que de la primera ecuación se obtiene al despejar $C_1 = -8 - C_2$, sustituyendo esto en la segunda ecuación

$$C_1 + 2C_2 = -1 \iff -8 - C_2 + 2C_2 = -1 \iff C_2 = 7$$

y sustituyendo el valor de C_2 en el despeje que realizamos a la primera ecuación

$$C_1 = -8 - C_2 = -8 - 7 = -15$$

con lo que la solución del problema de valores iniciales es

$$y = -15e^x + 7e^{2x} + 9$$

1.4. Ejercicios

1. Compruebe que $y = Cxe^{2x} + 2x - 3$ donde $C \in \mathbb{R}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 4y = 8x - 20$.

2. Pruebe que $y = 3x^2 + Ce^{-2x}$ es solución de $y' + 2y = 6x + 6x^2$

3. Pruebe que $C_1xe^{-x} + C_2e^{-x} + \sin(3x)$ es solución de $y'' + 2y' + y = 6\cos(3x) - 8\sin(3x)$

4. Sea y una función implícita definida como $x^2 - Cy^2 = 1$, demuestre que y es solución de $y'(x^2 - 1) = xy$

5. Considere la ecuación diferencial $y'' - 4y' = x$, demuestre que $y = C_1 + C_2e^{4x}$ es solución de la ecuación diferencial, además resuelva el siguiente problema de valor inicial suponiendo que la solución anterior es la solución general.

$$\begin{cases} y'' - 4y' = x \\ y(0) = 20 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

6. En cada caso determine el valor k tal que $y = e^{kx}$ es solución de

   a) $3y' - 2y = 0$

   b) $y'' - 10y' + 25y = 0$

   c) $y'' + y' - 42y = 0$

   d) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$

7. Considere la ecuación diferencial $y' = \dfrac{y}{x} + 1$, pruebe que tiene por solución $y = Cx + x\ln(x)$ y luego resuelva

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} + 1 \\ y(e) = 3e \end{cases}$$

para esto considere que la solución dada arriba es la solución general.

8. Considere la ecuación diferencial $y'' - y' + e^{2x}y = 0$, verifique que $y = sin(e^x)$ es solución.
9. Determine el valor de k tal que $y = x^k$ es solución de $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
10. Corrobore que

$$P = \frac{c_1e^t}{1 + c_1e^t}$$

es solución de

$$\frac{dP}{dt} = P(1 - P)$$

11. Corrobore que

$$y = 2x^2 - 1 + c_1e^{-2x^2}$$

es solución de

$$\frac{dy}{dx} + 4xy = 8x^3$$

12. Verifique si las funciones dadas son solución de las ecuaciones diferenciales

a)
$$\frac{dy}{dx} - 3xy = 1, \quad y = e^{3x}\int_1^x \frac{e^{-3t}}{t}dt$$

b)
$$2x\frac{dy}{dx} - y = 2x\cos x, \quad y = \sqrt{x}\int_4^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$$

c)
$$x^2\frac{dy}{dx} + xy = 10\operatorname{sen} x, \quad y = \frac{5}{x} + \frac{10}{x}\int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$$

d)
$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 1, \quad y = e^{-x^2} + e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$$

13. Muestre que la función

$$y = 1 + e^{-x} \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$$

es solución de

$$\begin{cases} y' + y = 1 + e^{-x+\sqrt{x}} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. EDO de orden 1

En esta sección iniciaremos con la resolución de ecuaciones diferenciales de orden 1, veremos distintos métodos de resolución por lo que parte importante es saber identificar correctamente las clases de EDO.

2.1. EDO de variables separables

El primer tipo de ecuación diferencial que vamos a estudiar es aquella en que cada variable se puede separar junto con su diferencial a cada lado del igual, de esta forma podemos integrar ambos lados para obtener el resultado.

Definicion 2.1.1. Considere una EDO de orden 1 $f(x, y, y') = 0$, se dice de variables separables si es posible escribirla de la forma

$$f(x)dx = g(y)dy \tag{2.1}$$

Para resolver una EDO de variables separables primero debemos escribir la EDO en su forma de 2.1, ahora, como cada diferencial está con su respectiva variable podemos integrar ambos lados manteniendo la igualdad, entonces

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy \Longleftrightarrow F(x) + C_1 = G(y) + C_2$$

en donde $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ y $\dfrac{dG(y)}{dy} = g(y)$ y $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ son las constantes de integración, una por cada integral, pero realmente podemos tomar ambas y 'fusionarlas" en una sola, para esto considere $C_1 - C_2 = C$ y entonces

$$F(x) + C_1 = G(y) + C_2 \Longleftrightarrow F(x) + C_1 - C_2 = G(y) \Longleftrightarrow F(x) + C = G(y)$$

por lo que solo debemos agregar una constante de integración, usualmente esta se suele colocar del lado de la variable independiente.

Ejemplo 2.1.1. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x+2}{y+1}$$

encuentre la solución general de dicha ED sujeta a la condición inicial $y(1) = 2$

Con un despeje directo obtenemos que

$$(y+1)dy = (6x+2)dx$$

por lo que es una ED de variable separables, integrando

$$\int (y+1)dy = \int (6x+2)dx \iff \frac{y^2}{2} + y = 3x^2 + 2x + C$$

Donde la última igualdad es la define a y como función implícita de x, de tal forma que y es la solución de la ecuación diferencial. Ahora, usando que $y(1) = 2$ obtenemos

$$\frac{2^2}{2} + 2 = 3(1)^2 + 2(1) + C \iff 4 = 5 + C \iff C = -1$$

por lo que la solución particular buscada es

$$\frac{y^2}{2} + y = 3x^3 + 2x - 1$$

Ejemplo 2.1.2. Considere la ED

$$y' = y^2 - 4$$

Usando que $y' = \dfrac{dy}{dx}$, y realizando el despeje se obtiene que

$$\frac{dy}{y^2 - 4} = dx \tag{2.2}$$

en donde el dominador del lado izquierdo es una diferencia de cuadrados que se puede escribir como $y^2 - 4 = (y+2)(y-2)$, entonces aplicando fracciones parciales a

$$\frac{1}{(y+2)(y-2)} = \frac{A}{y+2} + \frac{B}{y-2} \Longrightarrow 1 = A(y-2) + B(y+2)$$

si en la última igualdad se da el valor de $y = 2$ se obtiene que $B = \dfrac{1}{4}$, mientras que si se toma $y = -2$ se obtiene que $A = -\dfrac{1}{4}$, con esto sustituyendo en 2.2 e integrando tenemos

$$\int \left(\frac{-1}{4(y+2)} + \frac{1}{4(y-2)} \right) dy = \int dx \Longrightarrow \frac{1}{4} \ln(y-2) - \ln(y+1) = x + C$$

de la igualdad anterior es posible despejar y, usando la propiedad de logaritmos que dice $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$$\ln\left(\frac{y-2}{y+2}\right) = 4x + 4C = 4x + K$$

en donde $K = 4C$, continuando

$$\ln\left(\frac{y-2}{y+2}\right) = 4x + K \Longrightarrow \frac{y-2}{y+2} = e^{4x+K} \Longrightarrow \frac{y-2}{y+2} = De^{4x}$$

en donde $D = e^K$, continuando

$$\Longrightarrow y - 2 = D(y+2)e^{4x} = Dye^{4x} + 2De^{4x}$$

$$\Longrightarrow y - Dye^{4x} = 2De^{4x} + 2 \Longrightarrow y\left(1 - De^{4x}\right) = 2(1 + De^{4x})$$

$$\Longrightarrow y = 2\frac{1 + De^{4x}}{1 - De^{4x}}$$

Ejemplo 2.1.3. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{ds}{dr} = 2sr$$

En este caso no estamos trabajando con las variables usuales, pero de igual forma podemos ver que la ED anterior se puede despejar como

$$\frac{ds}{s} = 2rdr \Longleftrightarrow \int \frac{ds}{s} = \int 2rdr \Longleftrightarrow \ln(s) = r^2 + C$$

$$\Longleftrightarrow s = e^{r^2+C} = e^{r^2}e^C = Ke^{r^2}$$

en donde $K = e^C$, por lo que la solución de la ED es $s = Ke^{r^2}$

Ejemplo 2.1.4. Resuelva la ecuación diferencial

$$y' = xy^2 - y^2 + x - 1$$

La anterior es una ED de variables separables, para resolverla debemos recurrir a la agrupación, iniciamos sacando a factor común el y^2

$$y' = xy^2 - y^2 + x - 1 = y^2(x-1) + x - 1$$

entonces tenemos como factor común $x - 1$

$$y' = y^2(x-1) + (x-1) = (y^2+1)(x-1)$$

escribiendo $y' = \dfrac{dy}{dx}$ y despejando tenemos

$$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)(x-1) \Longrightarrow \frac{dy}{1+y^2} = (x-1)dx$$

integrando

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int (x-1)dx \Longrightarrow \arctan(y) = \frac{x^2}{2} - x + C$$

para poder despejar y del arctan, usamos la función tangente para obtener que

$$y = \tan\left(\frac{x^2}{2} - x + C\right)$$

Ejemplo 2.1.5. Resuelva la siguiente ecuación diferencial con algún método adecuado

$$y(1+x^3)dy - x^2dx = 0$$

como por el momento solo sabemos resolver EDO de variables separables, corroboremos a ver si esta EDO es de este tipo, para eso haciendo los despejes.

$$ydy = \frac{x^2}{1+x^3}dx \tag{2.3}$$

el lado derecho de la igualdad es la integral más complicada, para resolverla tome $u = 1 + x^3$, de donde $du = 3x^2dx$, equivalente a que $\frac{du}{3} = x^2dx$, entonces

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}dx = \int \frac{du}{3u} = \frac{1}{3}\ln(u) + C = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + C$$

entonces integrando ambos lados de 2.3 tenemos

$$\int ydy = \int \frac{x^2}{1+x^3}dx \Longrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + C$$

donde esta es la solución de forma implícita.

Ejemplo 2.1.6. Resuelva la siguiente ecuación diferencial.

$$\operatorname{sen}(2x)dx + \cos(y)dy$$

realizando el despeje e integrando

$$\int \operatorname{sen}(2x)dx = -\int \cos(y)dy \Longrightarrow \frac{-cos(2x)}{2} + C = -\sin(y)$$

para poder despejar y cancelamos los menos a ambos lados de la igualdad y aplicamos la función de seno inverso para obtener

$$y = \arcsin\left(\frac{cos(2x)}{2} + C\right)$$

en el ejemplo anterior para resolver $\int \sin(2x)dx$ se realiza el cambio de variable $u = 2x$, el estar realizando estos cambios de variables es algo que podemos omitir y directamente podemos usar que

$$\int \cos(ax)dx = \frac{\sin(ax)}{a} + C$$
$$\int \sin(ax)dx = \frac{-\cos(ax)}{a} + C$$

Ejemplo 2.1.7. Resuelva si siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = e^{2x+3y} \\ y(0) = \ln(2) \end{cases}$$

Los primero que ocupamos es recordar la propiedad de que $a^{b+c} = a^b a^c$, entonces nuestra ED se transforma en

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}e^{3y} \Longleftrightarrow \frac{dy}{e^{3y}} = e^{2x}dx \Longleftrightarrow e^{-3y}dy = e^{2x}dx$$

integrando

$$\int e^{-3y}dy = \int e^{2x}dx \Longleftrightarrow -\frac{e^{-3y}}{3} = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

antes de despejar y valor a determinar el valor de C usando de $y(0) = \ln(2)$

$$-\frac{e^{-3\ln(2)}}{3}=\frac{e^{2*0}}{2}+C\Longrightarrow -\frac{2^{-3}}{3}=\frac{1}{2}+C\Longrightarrow C=-\frac{2^{-3}}{3}-\frac{1}{2}=\frac{-13}{24}$$

entonces la solución general implícita es

$$-\frac{e^{-3y}}{3}=\frac{e^{2x}}{2}-\frac{13}{24}$$

en el ejemplo anterior se omitió el cambio de variable que se realizo para integrar e^{-3y} y e^{2x}, en general podemos usar que

$$\int e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}+C$$

Ejemplo 2.1.8. Resuelva la siguiente EDO

$$\frac{y}{\ln(x)}\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y+1}{x}\right)^2$$

Usando propiedades de los exponentes tenemos

$$\frac{y}{\ln(x)}\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y+1}{x}\right)^2=\frac{(y+1)^2}{x^2}$$

ahora, separando variables

$$\frac{y}{(y+1)^2}dy=\frac{\ln(x)}{x^2}dx$$

para la integral $\displaystyle\int\frac{y}{(y+1)^2}dy$ se puede aplicar fracciones parciales, se tiene un polinomio de grado 1 repetido dos veces, pero veamos otra manera mas directa. El problema es el denominador que tiene una suma, entonces tome $u=y+1$, esto implica que $y=u-1$ y derivando $dy=du$, entonces tenemos

$$\int\frac{y}{(y+1)^2}dy=\int\frac{u-1}{u^2}du=\int\left(\frac{1}{u}-u^{-2}\right)du$$
$$=\ln(u)+u^{-1}=\ln(y+1)+\frac{1}{y+1}$$

Para la otra integral procedemos por partes, tome

$$u=\ln(x)\qquad du=\frac{1}{x}$$

$$dv = \frac{dx}{x^2}dx \qquad v = -\frac{1}{x}$$

Entonces nuestra integral se transforma en

$$uv - \int vdu = -\frac{ln(x)}{x} - \int \Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big(\frac{1}{x}\Big)dx$$
$$= -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{\ln(x)+1}{x} + C$$

con lo que retomando la EDO de variables separables

$$\int \frac{y}{(y+1)^2}dy = \int \frac{\ln(x)}{x^2}dx$$
$$\ln(y+1) + \frac{1}{y+1} = -\frac{\ln(x)+1}{x} + C$$

la cual define a y como solución implícita de la EDO.

2.2. EDO por cambio de variable

Los cambios de variable, de manera general en matemáticas nos permite transformar un problema que es complicado o imposible de resolver con las herramientas conocidas a otro problema más sencillo y accesible para resolver.

En ecuaciones diferenciales haremos un cambio de la variable dependiente $y(x)$ por una nueva variable $v(x) = f(y(x), x)$, también se puede hacer el cambio de variable sobre la variable independiente pero es menos común (un ejemplo son las ecuaciones de Cauchy-Euler). Ahora, se debe tomar el cambio de variable para obtener $y'(x)$ en términos de x y $v'(x)$, en donde $y'(x) = dy/dx$ y $v'(x) = dv/dx$.

Ejemplo 2.2.1. Considere la siguiente ecuación diferencial

$$(2\sqrt{xy} - y + xy)dx - xdy = 0$$

Use el cambio de variable $u^2 = xy$ para resolver la EDO dada la condición $y(\ln(4)) = 0$

Antes de empezar, debemos tener cuidado con el cambio de variable, no es recomendado escribir $u = \sqrt{xy}$, primero, porque es falso, pues el despeje realmente es $u = \pm\sqrt{xy}$, y segundo, aún tomando lo anterior en consideración es más complicado que proceder por este camino en comparación al que se presenta a continuación:

Tomando $u^2 = xy$, al derivar obtenemos

$$2uu' = y + xy' \Longrightarrow xy' = 2uu' - y$$

recuerde que $y(x), u(x)$ depende de x, por lo que al derivarlas, por regla de la cadena aparecen el y', u' respectivamente, al hacer el cambio de variable se espera sustituir todos los valores de $y := y(x)$ y sus derivadas por $v := v(x)$, para esto vea que $y = u^2/x$, pero para este ejercicio en particular las $y(x)$ se van a cancelar, por eso no las vamos a sustituir

$$(2\sqrt{xy} - y + xy)dx - xdy = 0 \overset{\text{div entre } dx}{\Longrightarrow} (2\sqrt{xy} - y + xy) - xy' = 0$$

$$2u - y + u^2 - (2uu' - y) = 0$$

$$2u - y + u^2 - 2uu' + y = 0$$

$$2u + u^2 - 2uu' = 0$$

$$u' = 1 + \frac{u}{2}$$

$$u' = \frac{u+2}{2}$$

$$\frac{du}{u+2} = \frac{dx}{2} \Longrightarrow \ln(u+2) = \frac{x}{2} + C$$

$$u = Ke^{\frac{x}{2}} - 2 \Longrightarrow u^2 = (Ke^{\frac{x}{2}} - 2)^2$$

$$xy = (Ke^{\frac{x}{2}} - 2)^2$$

Ahora usando que $y(\ln(4)) = 0$ obtenemos

$$0 = (Ke^{\ln(4)/2} - 2)^2 \Longrightarrow 0 = 2K - 2 \Longrightarrow k = 1$$

por lo que la solución es

$$y = \frac{(e^{\frac{x}{2}} - 2)^2}{x}$$

Ejemplo 2.2.2. Resuelva la EDO

$$y' = \tan^2(x+y)$$

El problema es el $\tan(x+y)$, tenemos dos variables dentro del tangente, entonces tomando $u = x + y$, y al derivar $u' = 1 + y'$, equivalente $y' = u' - 1$, sustituyendo

$$y' = \tan^2(x+y) \Longrightarrow u' - 1 = \tan^2(u) \Longrightarrow u' = \tan^2(u) + 1$$

usando la propiedad de que $tan^2(u) + 1 = \sec^2(u)$, por lo que

$$\frac{du}{dx} = \sec^2(u) \Longrightarrow \cos^2(u)du = dx$$

usando que $\cos^2(u) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos(2x)}{2}$, se tiene que

$$\int \cos^2(u)du = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2u)}{2}\right)du = \frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}$$

con esto, regresando a la EDO

$$\int \cos^2(u)du = \int dx$$

$$\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4} = x + c$$

y regresando a la variable original

$$\frac{x+y}{2} + \frac{\sin(2[x+y])}{4} = x + c$$

que define a $y(x)$ como solución implícita de la EDO.

Algo que se puede preguntar es como saber cuando se debe realizar un cambio de variable, y en dicho caso cual cambio de variable aplicar, en general no es sencillo de saber cual cambio de variable es apropiado, por lo que se suele indicar en los ejercicios cual tomar. Pero existen ecuaciones diferenciales que vamos a ver que un cambio de variable especifico las transforma en ecuaciones que sabemos resolver (por el momento solo sabemos resolver de variables separables).

El ejemplo anterior es un caso particular de ecuaciones de la forma $y' = f(x+y)$, donde $f = arctan(x)$, para estas ecuaciones el cambio de variable $u = x+y$ las transforma en variables separables, en efecto se tiene que $u' = 1 + y'$, entonces

$$y' = f(x+y) \Longrightarrow u' - 1 = f(u) \Longrightarrow \frac{du}{f(u)+1} = dx$$

de manera mas general, una ecuación diferencial de la forma $y' = f(ax + by + c)$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ se transforma en una ejecución diferencial de variables separables con el cambio de variable $u = ax + by + c$, ejemplos de estos son los siguientes.

Ejemplo 2.2.3. Resuelva

$$y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$$

Si intentamos separar variables, la raíz no nos lo permite, pues no podemos separar los sumandos que están en ella, entonces tomemos $u = y - 2x + 3$, derivando $u' = y' - 2$, del cual despejamos $y' = u' + 2$, sustituyendo

$$y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3} \Longrightarrow u' + 2 = 2 + \sqrt{u}$$

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{u} \Longrightarrow u^{-1/2}du = dx$$
$$2\sqrt{u} = x + c$$

y regresando a las variables originales

$$2\sqrt{y - 2x + 3} = x + c$$

que define a $y(x)$ como solución implícita de la EDO.

Ejemplo 2.2.4. Considere la EDO de la forma

$$y' = ax + by + c$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, se puede resolver al tomar $u = ax + by + c$, y derivando $u' = a + by'$, de donde despejamos $y' = \frac{u' - a}{b}$, sustituyendo tenemos

$$y' = ax + by + c \Longrightarrow \frac{u' - a}{b} = u \Longrightarrow u' = bu + a \Longrightarrow \frac{du}{bu + a} = dx$$
$$\int \frac{du}{bu + a} = \int dx$$

la primera integral se resuelve tomando $z = bu + a$ y $dz = bdu$, se omiten los detalles, para obtener

$$\frac{1}{b}\ln(bu + a) = x + D$$

donde $D \in \mathbb{R}$ es la constante de integración. Finalmente, regresando a las variables originales tenemos

$$\frac{1}{b}\ln(b[ax + by + c] + a) = x + D$$

que define a $y(x)$ como solución implícita de la EDO.

2.3. Ecuaciones diferenciales homogéneas

En esta sección vamos a ver un tipo de ecuación diferencial que mediante un cambio de variable la podemos transformar en una de variables separables. Para iniciar requerimos la definición de una función homogénea en dos variables.

Definicion 2.3.1. Una función de dos variables $f(x, y)$ se dice homogénea de grado n si cumple para todo $t \in \mathbb{R}$

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Ejemplo 2.3.1. Considere la función $f(x, y) = x^3 + xy^2$, observe que

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + (tx)(ty)^2 = t^3x^3 + t^3xy^2 = t^2(x^3 + xy^2) = t^3 f(x, y)$$

por lo que la función es homogénea de grado 3.

Ya con esto, podemos dar la definición de una EDO homogénea.

Definicion 2.3.2. Una ED que se puede escribir de la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ se dice una ED homogénea si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas de mismo grado.

Ejemplo 2.3.2. Verifique que la siguiente EDO es homogénea

$$x\frac{dy}{dx} = y + 4xe^{-2y/x}$$

para iniciar vamos a escribir la EDO en la forma del teorema 2.3.2, entonces tenemos

$$-[y + 4xe^{-2y/x}]dx + xdy = 0$$

Tenemos que, $M(x, y) = -y - 4xe^{-2y/x}$, entonces

$$\begin{aligned}(tx, ty) = -(ty) - 4(tx)e^{-2(ty)/(tx)} &= -ty - 4txe^{-2y/x} \\ &= t(-y - 4xe^{-2y/x}) = tM(x, y)\end{aligned}$$

la cual es una función homogénea de grado 1, por otro lado tenemos que $N(x, y) = x$ y $N(yx, ty) = tx = tN(x, y)$, que también es una función homogénea de grado 1, y por lo tanto la EDO es homogénea.

Usando la definiciones anteriores, se puede obtener el siguiente resultado que facilita identificar las EDO homogéneas

Teorema 2.3.1. Una EDO de orden 1 se dice homogénea si es posible escribirla de la forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.4}$$

Recuerde que $y' = \frac{dy}{dx}$, continuando con el ejemplo 2.3.2, tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 4e^{-2y/x}$$

donde podemos escribir $y' = f(y/x)$, es saber quien es f no es realmente importante, lo importante es que todas sus variables estén de la forma y/x.

Para poder resolver este tipo de EDO se realiza el cambio de variable $v(x) = \dfrac{y(x)}{x}$, que vamos a escribir como $v = \dfrac{y}{x}$, omitiendo la dependencia de x, para derivar es más sencillo usar $ux = y$, con esto se obtiene

$$y' = xv' + v$$

entonces reemplazando en 2.4 se sigue que

$$xv' + v = f(v) \Longrightarrow x\frac{dv}{dx} + v = f(v) \Longrightarrow \frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

la cual es una EDO de variable separables.

Continuemos con el ejemplo 2.3.2.

Ejemplo 2.3.3. Resuelva la EDO

$$x\frac{dy}{dx} = y + 4xe^{-2y/x}$$

Ya vimos que se puede escribir como

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + 4e^{-2y/x}$$

realizando el cambio de variable $vx = y$, y además $y' = v'x + v$ obtenemos al sustituir

$$\begin{gathered} y' = \frac{y}{x} + 4e^{-2y/x} \\ v'x + v = \frac{vx}{x} + 4e^{-2vx/x} \\ v'x + v = v + 4e^{-2v} \Longrightarrow v'x = 4e^{-2v} \end{gathered}$$

escribiendo $v' = \dfrac{dv}{dx}$ y separando variables obtenemos

$$x\frac{dv}{dx} = 4e^{-2u} \Longrightarrow e^{2u}dv = 4\frac{dx}{x}$$

de que lado colocamos el 4 es indiferente, pues al ser una constante no afecta las integrales, entonces obtenemos

$$\int e^{2u}dv = \int 4\frac{dx}{x} \Longrightarrow \frac{e^{2u}}{2} = 4\ln(x) + C$$

de donde

$$e^{2u} = 8\ln(x) + D$$

donde $D = 2C$, despejando u y regresando el cambio de variable

$$2u = ln(8\ln(x) + D) \Longrightarrow 2\frac{y}{x} = \ln(8\ln(x) + D) \Longrightarrow$$
$$y = \frac{x}{2}\ln(8\ln(x) + D)$$

Si en nuestra EDO solo involucran términos de la forma $x^n y^m$, una manera rápida de verificar que la EDO es homogénea es que en todos los términos la suma $n + m$ sea constante, en el fondo $n + m$ es el grado de las funciones homogéneas involucradas en la EDO.

Ejemplo 2.3.4. Resuelva

$$y' = \frac{y^3 + x^3 + xy^2}{xy^2}$$

Usando lo mencionado anteriormente, podemos ver que es homogénea pues hay cuatro términos, tres en el denominador y uno en el numerador, y la suma de los exponentes de todos es 3.

Sabiendo que es una EDO homogénea ahora realizamos el cambio de variable $y = vx$ y $y' = v'x + v$

$$y' = \frac{y^3 + x^3 + xy^2}{xy^2} \Longleftrightarrow v'x + v = \frac{(vx)^3 + x^3 + x(vx)^2}{x(vx)^2}$$

factorizando x^3 en el denominador

$$v'x + v = \frac{x^3v^3 + x^3 + x^3v^2}{x^3v^2} = \frac{x^3(v^3 + 1 + v^2)}{x^3v^2} = \frac{v^3 + 1 + v^2}{v^2}$$

enviado a restar del v que tenemos al lado derecho y homogeneizando

$$v'x = \frac{v^3 + 1 + v^2}{v^2} - v = \frac{v^3 + 1 + v^2 - v^3}{v^2} = \frac{1 + v^2}{v^2}$$

ahora, usando que $v' = \frac{dv}{dx}$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{v^2} \Longleftrightarrow \frac{v^2}{1 + v^2}dv = \frac{dx}{x} \tag{2.5}$$

la fracción de la derecha tiene un polinomio de grado 2 tanto en el denominador como en el numerador, para los casos en donde el grado de los polinomios coincide no aplica el uso de fracciones parciales, una forma de continuar es usar división de polinomios pero una forma más sencilla de resolver la integral es

$$\int \frac{v^2}{1+v^2}dv = \int \frac{v^2+1-1}{1+v^2}dv$$

en donde sumamos y restamos 1, por lo que realmente estamos sumando 0 por lo que no estamos cambiando la expresión, con el objetivo de obtener un término en el numerador igual al denominador, entonces

$$\int \frac{1+v^2-1}{1+v^2}dv = \int \left(\frac{1+v^2}{1+v^2} - \frac{1}{1+v^2}\right)dv = \int \left(1 - \frac{1}{1+v^2}\right)dv = v - \arctan(v)$$

entonces integrando 2.5 tenemos

$$\int \frac{v^2}{1+v^2} = \frac{dx}{x} \Longleftrightarrow v + \arctan(v) = ln(x) + C$$

finalmente debemos regresar a que $v = \frac{y}{x}$

$$v + \arctan(v) = ln(x) + C \Longleftrightarrow \frac{y}{x} + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = ln(x) + C$$

esta última igualdad define y como solución implícita de la ED.

Ejemplo 2.3.5. Resuelva

$$xy' = y - \sqrt{x^2 - y^2}$$

para identificar que es homogénea despejamos y'

$$y' = \frac{y - \sqrt{x^2-y^2}}{x}$$

entonces del lado derecho de la igualdad todos los términos son de grado 1, para ver esto x, y directamente son de grado 1, para la raíz vea que x^2, y^2 son de grado 2, por lo que $x^2 - y^2$ tiene grado 2, pero al aplicarle raíz cuadrada a un término de grado 2 obtenemos un término de grado 1, por lo que $\sqrt{x^2-y^2}$ es un término de grado 1, con lo que se concluye que es una EDO homogénea.

entonces realizamos el cambio de variable $y = vx$ y $y' = v'x + v$

$$y' = \frac{y - \sqrt{x^2 - y^2}}{x} \Longrightarrow v'x + v = \frac{vx - \sqrt{x^2 - (vx)^2}}{x}$$

$$v'x + v = \frac{vx - x\sqrt{1 - v^2}}{x} = \frac{x(v - \sqrt{1 - v^2})}{x}$$

$$xv' + v = v - \sqrt{1 - v^2} \Longleftrightarrow xv' = -\sqrt{1 - v^2} \Longleftrightarrow -\frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \frac{dx}{x}$$

integrando ambos lados de la última igualdad

$$-\int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = \int \frac{dx}{x} \Longleftrightarrow -\arcsin(v) = \ln(x) + C$$

regresando al cambio de variable y aplicando al función seno para cancelar el seno inverso tenemos

$$\arcsin\left(\frac{y}{x}\right) = -\ln(x) - C \Longleftrightarrow \frac{y}{x} = \sin\left(-\ln(x) - C\right)$$

$$y = \frac{\sin(-\ln(x) - C)}{x}$$

que define la solución de la EDO.

Ejemplo 2.3.6. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

sujeto a $y(1) = 2$

podemos ver que es homogénea pues el denominador es suma de dos términos de grado 2, y el numerador también es de grado 2 al ser el producto de dos términos de grado 1, realizando el cambio de variable $y = vx$ y $y' = xv' + v$ tenemos

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} \Longleftrightarrow xv' + v = \frac{x^2 + (vx)^2}{x(vx)} \Longleftrightarrow v'x + v = \frac{x^2(1 + v^2)}{x^2 v}$$

$$v'x + v = \frac{1}{v} + v \Longleftrightarrow \frac{dv}{dx}x = \frac{1}{v} \Longleftrightarrow vdx = \frac{dx}{x}$$

integrando obtenemos

$$\int vdv = \int \frac{dx}{x} \Longleftrightarrow \frac{v^2}{2} = \ln(x) + C$$

regresando a la variable original obtenemos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln(x) + C$$

aplicando las condiciones de frontera

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1}\right)^2 = \ln(1) + C \Longrightarrow \frac{1}{2}2^2 = C \Longrightarrow C = 2$$

por lo que la solución particular para el problema de valores iniciales es

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln(x) + 2$$

Ejemplo 2.3.7. Pruebe que la siguiente EDO es homogénea y resuelva.

$$e^{y'} = \left(\frac{y}{x}\right)^{y/x}$$

para probar que es homogénea debemos ver que se puede escribir de la forma $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, aplicando logaritmo natural, y las propiedades de logaritmos obtenemos

$$y' = \ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^{y/x}\right) = \frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right)$$

por lo que podemos escribir nuestra EDO de la forma $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ y por lo tanto es homogénea.

Realizando el cambio de variable $vx = y$ y $y' = v'x + v$ obtenemos

$$y' = \frac{y}{x}\ln\left(\frac{y}{x}\right) \Longrightarrow v + xv' = \frac{ux}{x}\ln\left(\frac{ux}{x}\right)$$
$$\Longrightarrow x\frac{dv}{dx} = v\ln(v) - v \Longrightarrow \frac{dx}{v\ln(v) - v} = \frac{dx}{x} \Longrightarrow$$
$$\frac{dv}{v(\ln(v) - 1)} = \frac{dx}{x}$$

ahora debemos integrar ambos lados de la igualdad, para la integral del lado izquierdo se toma el cambio de variable $z = \ln(v) - 1$ con lo que $dz = \frac{dv}{v}$

$$\int \frac{1}{\ln(v) - 1}\frac{dv}{v} = \int \frac{dz}{z} = \ln(z) = \ln(\ln(v) - 1)$$

con lo que al integrar ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\int \frac{dx}{v(\ln(v)-1)} = \int \frac{dx}{x} \Longrightarrow \ln(\ln(v)-1) = \ln(x) + C$$

antes de volver a la variable original vamos a despejar v

$$\ln(\ln(v)-1) = \ln(x) + C \Longleftrightarrow \ln(v) - 1 = Kx \Longleftrightarrow \ln(v) = kx + 1 \Longleftrightarrow v = e^{kx+1}$$

donde $k = e^C$, finalmente reescribiendo $v = \frac{y}{x}$ y despejando y

$$\frac{y}{x} = e^{kx+1} \Longleftrightarrow y = xe^{kx+1}$$

donde la última igualdad define la solución de manera explicita.

Ejemplo 2.3.8. Resuelva la siguiente EDO

$$4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0 \tag{2.6}$$

Despejando y' tenemos que

$$y' = \frac{3y - 4x}{2y - 3x}$$

en este caso escribir $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ puede no ser tan directo, pero por un argumento de grados, como todos los términos tienen grado 1 tenemos una EDO homogénea, entonces tomando $xv = y$ y $y' = v'x + x$ obtenemos

$$y' = \frac{3y - 4x}{2y - 3x} \Longrightarrow v'x + v = \frac{3(xv) - 4x}{2(xv) - 3x}$$
$$\Longrightarrow v'x + v = \frac{\cancel{x}(3v-4)}{\cancel{x}(2v-3)} \Longrightarrow v'x = \frac{3v-4}{2v-3} - v$$
$$v'x = \frac{3v - 4 - v(2v-3)}{2v-3} = \frac{-2v^2 + 6v - 4}{2v - 3}$$

escribiendo $v' = \frac{dv}{dx}$ obtenemos

$$\frac{(2v-3)dv}{(-2v^2 + 6v - 4)} = \frac{dx}{x}$$

donde tenemos que $-2v^2 + 6v + 4 = -2(v^2 - 3v + 2) = -2(v-1)(v-2)$, entonces tenemos que

$$\frac{-1}{2}\frac{(2v-3)dv}{(v-1)(v-2)} = \frac{dx}{x}$$

para poder integrar el lado derecho le aplicamos fracciones parciales a

$$\frac{2v-3}{(v-1)(v-2)} = \frac{A}{v-1} + \frac{B}{v-2}$$
$$\Longrightarrow 2v-3 = A(v-2) + B(v-1)$$

Tomando $v = 2$ tenemos que $1 = B$, y tomando $v = 1$ tenemos que $-1 = -A$, y por lo tanto $A = 1$, entonces ahora si integrando

$$\frac{-1}{2}\frac{(2v-3)dv}{(v-1)(v-2)} = \frac{dx}{x}$$
$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{v-1} + \frac{1}{v-2}\Big)dx = \int\frac{dx}{x}$$
$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}(\ln(v-1) + \ln(v-2)) = \ln(x) + C$$

y regresando a las variables originales tenemos

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}\Big[\ln\Big(\frac{y}{x}-1\Big) + \ln\Big(\frac{y}{x}-2\Big)\Big] = \ln(x) + C$$

Ejemplo 2.3.9. Resuelva la siguiente ED.

$$y' = \frac{y}{x+\sqrt{xy}}$$

podemos observar que es homogénea por un argumento de grado, x, y tiene grado 1, y el término $\sqrt{xy}$ tiene grado 1 al ser raíz cuadrada de un término de grado 2, en este caso no es más conveniente realizar el cambio $y = vx$ y $y' = v'x + v$, entonces obtenemos

$$y' = \frac{y}{x+\sqrt{xy}} \Longleftrightarrow v'x + v = \frac{vx}{x+\sqrt{x(vx)}}$$
$$v'x + v = \frac{vx}{x+\sqrt{x^2(v)}} \Longleftrightarrow v'x + v = \frac{vx}{x+x\sqrt{v}}$$
$$v'x + v = \frac{v}{1+\sqrt{v}} \Longleftrightarrow v'x = \frac{v}{1+\sqrt{v}} - v$$
$$v'x = \frac{v - v(1+\sqrt{v})}{1+\sqrt{v}} \Longleftrightarrow \frac{dv}{dx}x = \frac{-\sqrt{v}}{1+\sqrt{v}}$$
$$\frac{1+\sqrt{v}}{\sqrt{v}}dv = -\frac{dx}{x}$$

Para la integral del lado izquierdo tenemos

$$\int \frac{1+\sqrt{v}}{\sqrt{v}}dv = \int \left(\frac{1}{\sqrt{v}} + \frac{\cancel{\sqrt{v}}}{\cancel{\sqrt{v}}}\right) dv = \int \left(\frac{1}{\sqrt{v}} + 1\right) dv$$
$$= \int (v^{-\frac{1}{2}} + 1)dv = 2\sqrt{v} + v$$

por lo tanto tenemos que

$$\int \frac{1+\sqrt{v}}{\sqrt{v}} = -\int \frac{dx}{x} \Longleftrightarrow 2\sqrt{v} + v = \ln(x) + C$$

finalmente regresando sobre el cambio de variable obtenemos que

$$2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = \ln(x) + C$$

Ejemplo 2.3.10. Resuelva la siguiente ED homogénea.

$$x' = \frac{x}{y} + \sec^2(x/y)$$

primero note que en este caso la variable independiente es y y la variable dependiente es x, por lo que el cambio de variable a realizar es $v = \dfrac{x}{y}$, de donde antes de derivar realizamos el despeje $vy = x$ para obtener $v'y + v = x'$, entonces obtenemos

$$x' = \frac{x}{y} + \sec^2\left(\frac{x}{y}\right) \Longleftrightarrow yv' + v = v + \sec^2(v) \Longleftrightarrow \frac{dv}{dy}y = \sec^2(v)$$
$$\frac{dv}{\sec^2(v)} = \frac{dy}{y}$$

en donde usando que $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ debemos integrar

$$\int \cos^2(v)dv = \int \frac{dy}{y}$$

donde debemos usar la igualdad $\cos^2(v) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos(2v)}{2}$

entonces obtenemos que

$$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2v)}{2}\right) dv = \int \frac{dy}{y}$$

$$\frac{v}{2} + \frac{\sin(2v)}{4} = \ln(y) + C$$

regresando al cambio de variable $v = \frac{x}{y}$ obtenemos

$$\frac{x}{2y} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{2x}{y}\right) = \ln(y) + C$$

la cual define a x como función implícita tal que es solución de la ecuación diferencial.

2.4. Ecuaciones Diferenciales exactas

Durante ese capitulo usaremos conceptos de derivadas parciales e integrales de funciones en dos variables, puede consultar un breve resumen de estos temas en el apartado de preliminares.

Considere la familia de funciones $F(x, y) = C$, calculando la derivada total (la derivada total es una combinación lineal de los componentes del gradiente) se obtiene

$$\mathrm{d}F(x, y) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial x}F(x, y)dx + \frac{\partial}{\partial y}F(x, y)dy = 0$$

La cual es una ecuación diferencial, esto motiva la siguiente definición

Definicion 2.4.1. Considere la EDO de orden 1

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

se dice exacta si existe una función $F(x, y)$ que cumple

$$M(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}F(x, y) \quad N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}F(x, y)$$

Además, la solución de una EDO exacta es escribe de manera implícita como $F(x, y) = C$, donde $F(x, y)$ es la función que se encuentra en la definición anterior. Por lo resolver una EDO exacta se equivalente a encontrar una función en dos variables de la cual conocemos sus derivadas parciales.

Una forma de saber si una ecuación diferencial es exacta es mediante la llamada prueba de exactitud.

Teorema 2.4.1. Considere la EDO

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es exacta si se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

para simplificar notación escribimos lo anterior como

$$M_y = N_x$$

donde el subíndice representa derivadas parciales.

Para ver porque el teorema anterior es verdadero, considere la EDO exacta

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

tal que existe un $F(x,y)$ que cumple

$$M(x,y) = F_x(x,y) \quad N(x,y) = F_y(x,y)$$

Si se asume que $F(x,y)$ es continua (que pasara en los ejercicios realizados en el curso), sabemos que el orden de derivación no importa, entonces

$$F_{xy} = F_{yx} \Longrightarrow (F_x)_y = (F_y)_x$$
$$M_y(x,y) = N_x(x,y)$$

que es justamente lo que dice el teorema.

Una forma de recordar la prueba de exactitud es que una vez escrita la EDO en la forma del teorema 2.4.1, debemos derivar las funciones con respecto a la variable opuesta a la que están multiplicados por los diferenciales en la EDO. Iniciemos con ejemplos:

Ejemplo 2.4.1. Corrobore que la siguiente ED es exacta

$$(6x^2 + y^3)dx + (3xy^2 - 5)dy = 0$$

Primero identificamos las funciones, $M(x,y) = 6x^2 + y^3$ y $N(x,y) = 3xy^2 - 5$, entonces las derivadas parciales son

$$M_y = 0 + 3y^2 = 3y^2$$
$$N_x = 3y^2 + 0 = 3y^2$$

Como $M_y = N_x$ tenemos que la ED es exacta.

Ahora que ya sabemos identificar cuando una EDO es exacta, veamos como se resuelve, recordemos que queremos encontrar $F(x,y)$ tal que

$$F_x = M(x,y) \quad F_y = N(x,y)$$

en donde $M(x, y)$ y $N(x, y)$ serán conocidas, un camino es primero integrar $M(x, y)$ con respecto a x.

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx = G(x, y) + g(y)$$

Entonces nos falta conocer $g(y)$ para poder determinar a $F(x, y)$, para esto debemos usar la información que aporta $N(x, y)$, puesto que

$$F_y(x, y) = N(x, y) \Longrightarrow F_y(x, y) = G_y(x, y) + h'(y) \Longrightarrow h'(y) = F_y(x, y) - G_y(x, y)$$

donde $F_y(x, y) - G_y(x, y)$ debe depender solo de y, entonces integrando $h'(y)$

$$h(y) = \int (F_y(x, y) - G_y(x, y))dy$$

Ya con esto conocemos a $F(x, y)$, y la solución general esta dada por

$$F(x, y) = C$$

Esta no es a única forma de resolver la ecuación diferencial, podemos hacer el mismo procedimiento anterior pero primero integrando $N(x, y)$ con respecto a y y haciendo los pasos de manera análoga intercambiando x por y en los pasos anteriores.

Pero hay una manera más sencilla, este método puede presentar inconvenientes pero en la mayoría de los casos funciona, si integramos ambas funciones

$$\int M(x, y)dx = G_1(x, y) + h(x) \qquad \int N(x, y)dy = G_2(x, y) + g(y)$$

y si pasa que que en el resultado de ambas integrales los términos que depende de ambas variables son iguales $(G_1(x, y) = G_2(x, y) = G(x, y)$, entonces se tiene que

$$F(x, y) = G(x, y) + h(x) + g(y)$$

Ejemplo 2.4.2. Resuelva

$$(6x^2 + y^3)dx + (3xy^2 - 5)dy = 0$$

en el ejemplo 2.4.1 ya se probo que es una EDO exacta, entonces calculando las integrales tenemos

$$\int M(x, y)dx = \int (6x^2 + y^3)dx = 2x^3 + xy^3$$

$$\int N(x, y)dy = \int (3xy^2 - 5) = xy^3 - 5y$$

vea que el término xy^3 que depende de ambas variables se repite en ambas integrales, agregando los términos que solo depende de una variable tenemos

$$F(x, y) = 2x^3 + xy^3 - 5y$$

y por lo tanto la solución general es

$$2x^3 + xy^3 - 5y = C$$

Ejemplo 2.4.3. Resuelva

$$(x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0$$

Iniciamos identificando $M(x, y) = x^2 - y^2$ y $N(x, y) = -2xy$, y ahora debemos corroborar que la EDO es exacta, para esto vea que

$$M_y(x, y) = -2y$$
$$N_x(x, y) = -2y$$

Como $M_x = N_y$ entonces es una ED exacta, ahora integrando tenemos

$$\int M(x, y)dx = \int (x^2 - y^2)dx = \frac{x^3}{3} - xy^2$$
$$\int N(x, y)dy = -xy^2$$

entonces tenemos un único término repetido es $-xy^2$, y por lo tanto

$$-xy^2 + \frac{x^3}{3} = C$$

En ejemplo anterior, la EDO también es homogénea, por lo que podemos encontrar EDO que se puedan resolver con más de uno de los métodos estudiados en el curso. Como práctica puede volver a resolver el ejemplo anterior pero como una EDO homogénea.

Ahora veamos un ejemplo en donde tenemos un problema de Cauchy.

Ejemplo 2.4.4. Resuelva

$$y' = \frac{2x - \sin(y)}{x\cos(y)}$$

sujeto a $y(2) = 0$

Reescribiendo la EDO

$$\frac{dy}{dx}x\cos(y) = 2x - \sin(y) \Longrightarrow -(2x - \sin(y))dx + (x\cos(y))dy = 0$$

por lo que tenemos que $M(x, y) = -(2x - \sin(y))$, y $N(x, y) = x\cos(y)$, realizando la prueba de exactitud tenemos

$$M_y(x, y) = \cos(y)$$
$$N_x(x, y) = \cos(y)$$

por lo que es exacta, entonces integrando

$$\int M(x, y)dx = -\int (2x - \sin(y))dx = -x^2 + x\sin(y)$$
$$\int N(x, y)dy = \int (x\cos(y)) = x\sin(y)$$

por lo tanto tenemos que $F(x, y) = -x^2 + x\sin(y)$ y la solución general es

$$-x^2 + x\sin(y) = C$$

Usando que $y(2) = 0$ tenemos

$$-(2)^2 + 2\sin(0) = C \Longrightarrow -4 = C$$

por lo que la solución al problema de valores iniciales es

$$-x^2 + x\sin(y) = -4$$

El siguiente ejemplo si es mejor resolverlo por el primer método que explicamos.

Ejemplo 2.4.5. Resuelva la siguiente ED

$$[\sin(xy) + xy\cos(xy)]\,dx + \left[x^2\cos(xy)\right]\,dy = 0$$

tenemos que $M(x, y) = \sin(xy) + xy\cos(xy)$ y $N(x, y) = x^2\cos(xy)$, primero verificamos si es exacta.

$$M_y(x, y) = \cos(x, y)x + x(\cos(xy) - y\sin(xy)x) = 2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy)$$

$$N_x(x, y) = 2x\cos(xy) + x^2(-\sin(xy)y) = 2x\cos(xy) - x^2y\sin(xy)$$

Como $M_y = N_x$ entonces la ED es exacta, ahora integrando

$$\int M(x,y)dx = \int M(x,y)dx = \int (\sin(xy) + xy\cos(xy))dx$$

no es imposible, pero si puede ser tedioso, pues el término $xy\cos(xy)$ se debe integrar por partes, por otro lado integrar $N(x,y)$ con respecto a y es más sencillo, calculando su integral con respecto a y tenemos

$$\int N(x,y)dy = \int (x^2\cos(xy))dy = x^2 \int \cos(xy)dy$$
$$= x^2\frac{\sin(xy)}{x} + a(x) = x\sin(xy) + h(x)$$

Ahora si derivamos con respecto a x la integral obtenida anteriormente esta debe coincidir con $M(x,y)$, entonces tenemos

$$\frac{d}{dx}(x\sin(xy) + h(x)) = \sin(xy) + xy\cos(xy) \iff$$
$$\sin(xy) + xy\cos(xy) + h'(x) = \sin(xy) + xy\cos(xy) \iff h'(x) = 0$$

por lo que $h(x) = D$, donde $D \in \mathbb{R}$, entonces $F(x,y) = x\sin(x,y) + D$. y la solución de la EDO es

$$x\sin(xy) + D = C \Longrightarrow x\sin(xy) = K$$

en donde $K = C - D$.

Ejemplo 2.4.6. Resuelva la siguiente EDO

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2\sin(\theta)}{2r\cos(\theta) - 1}$$

Reescribiendo la EDO obtenemos

$$(r^2\sin(\theta))d\theta - (2r\cos(\theta - 1))dr = 0$$

en este caso no estamos trabajando con las variables usuales, pero llamaremos a $M = r^2\sin(\theta)$ y $N = -(2r\cos(\theta) - 1)$, recordemos que para la prueba de exactitud se debe derivar con respecto a la variable opuesta a la del diferencial que lo acompaña en la EDO, entonces

$$M_r = 2r\sin(\theta)$$
$$N_\theta = 2r\sin(\theta)$$

por lo que es exacta, y ambas funciones son sencillas de integrar, entonces

$$\int M d\theta = \int r^2 \sin(\theta) d\theta = -r^2 \cos(\theta)$$

$$\int N dr = \int (2r\cos(\theta) - 1) dr = -r^2\cos(\theta) + r$$

entonces la solución es

$$-r^2\cos(\theta) + r = C$$

El siguiente ejemplo lo vamos a resolver con el primer método estudiado, este es un caso de (por lo menos hasta donde lo he intentado) que no se puede resolver usando el segundo método.

Ejemplo 2.4.7. Resuelva

$$\Big(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t^2+y^2}\Big)dt + \Big(ye^y + \frac{t}{t^2+y^2}\Big)dy = 0$$

en este caso la variable independiente es t, entonces tenemos que

$$M(t,y) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t^2+y^2} \qquad N(t,y) = ye^y + \frac{t}{t^2+y^2}$$

realizando la prueba de exactitud tenemos

$$M_y = -\frac{(t^2+y^2) - y(2y)}{(t^2+y^2)^2} = \frac{y^2-t^2}{(t^2+y^2)^2}$$
$$N_t = \frac{(t^2+y^2) - 2t(t)}{(t^2+t^2)} = \frac{y^2-t^2}{(t^2+y^2)^2}$$

como $M_y = N_t$ tenemos que la EDO es exacta, primero calculando

$$\int \Big(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t^2+y^2}\Big)dt = \ln(t) - \frac{1}{t} - y\int \frac{1}{t^2+y^2}dt$$

la integral que no hemos resuelto es un arcotangente, pero se deben hacer una manipulaciones algebraicas antes

$$\int \frac{1}{t^2+y^2}dt = \int \frac{1}{y^2(t^2/y^2+1)}dt =$$

$$= \frac{1}{y^2}\int \frac{1}{(t/y)^2+1}dt$$

se toma $u = t/y$ y derivando (recuerde que como estamos integrando con respecto a t tenemos que y es constante) obtenemos que $du = dt/y \Longrightarrow ydu = dt$, sustituyendo

$$\frac{1}{y^2}\int \frac{1}{(t/y)^2+1}dt = \frac{1}{y^2}\int \frac{1}{(u)^2+1}ydu = \frac{1}{y}\int \frac{du}{u^2+1}$$
$$\frac{1}{y}\arctan(u) = \frac{\arctan(t/y)}{y}$$

por lo tanto

$$\int M(t,y)dt = \ln(t) - \frac{1}{t} - y\frac{\arctan(t/y)}{y}$$
$$\ln(t) - \frac{1}{t} - \arctan(t/y)$$

ahora, si integramos $N(t,y)$ con respecto a t los términos que depende de ambas variables no nos van a coincidir, por lo que usar el método informar no es buena opción, pero usemos el método formal, sabemos que

$$F(x,y) = \int M(t,y)dt = \ln(t) - \frac{1}{t} - \arctan(t/y) + h(y)$$

donde además

$$F_y(t,y) = N(t,y)$$

ahora ocupamos derivar $F(x,y)$ con respecto a y, la derivada que tiene mas complicaciones es la del arcotangente, veamos esta primero

$$F_y(t,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{t}{y}\right)^2}\left(\frac{-t}{y^2}\right) = \frac{-ty^2}{y^2}\frac{1}{t^2+y^2} = \frac{-t}{t^2+y^2}$$

por lo que

$$F_y(x,y) = \frac{-t}{t^2+y^2} + h'(y) = \frac{-t}{t^2+y^2} + ye^y = N(t,y)$$

por lo que $h'(y) = ye^y$, procedemos a integrar por partes con respecto a y, tome

$$u = y \qquad du = dy$$
$$dv = e^y dy \qquad v = e^y$$

entonces

$$h(y) = \int ye^y dy = uv - \int vdu = ye^y - \int e^y dy$$

$$ye^y - e^y = e^y(y-1)$$

por lo que

$$F(x,y) = \ln(t) - \frac{1}{t} - \arctan(t/y) + e^y(y-1)$$

y la solución de la EDO es

$$\ln(t) - \frac{1}{t} - \arctan(t/y) + e^y(y-1) = C$$

Ejemplo 2.4.8. Resuelva

$$(2xy^4 + \sin(y))dx + (4x^2y^3 + x\cos(y))dy = 0.$$

En este caso tenemos que

$$M(x,y) = 2xy^4 + sin(y) \qquad N(x,y) = 4x^2y^3 + x\cos(y)$$

y aplicando la prueba de exactitud tenemos

$$M_y = 8xy^3 + \cos(y)$$
$$N_x = 8xy^3 + \cos(y)$$

por lo que es exacta.

Ambas funciones son sencillas de integrar, por lo que tenemos

$$\int M(x,y)dx = \int (2xy^4 + \sin(y))dx = x^2y^4 + x\sin(y)$$
$$\int N(x,y)dy = \int (4x^2y^3 + x\cos(y))dy = x^2y^4 + x\sin(y)$$

entonces tenemos que $F(x,y) = x^2y^4 + x\sin(y)$ y la solución es

$$x^2y^4 + x\sin(y) = 0$$

Ejemplo 2.4.9. Considere la EDO

$$(e^x\sin(y) + bx^2y^2)dx + (e^x\cos(y) + x^3y)dy = 0$$

1. Encuentre el valor $b \in \mathbb{R}$ tal que la EDO sea exacta.

2. Resuelva la EDO.

Iniciamos identificando $M(x,y) = e^x \sin(y) + bx^2y^2$ y $N(x,y) = e^x \cos(y) + x^3y$, realizando la prueba de exactitud obtenemos

$$M_y(x,y) = e^x \cos(y) + 2bx^2y$$
$$N_x(x,y) = e^x \cos(y) + 3x^2y$$

igualando ambos obtenemos

$$e^x \cos(y) + 2bx^2y = e^x \cos(y) + 3x^2y \iff 2bxy^2 = 3xy^2 \iff 2b = 3 \iff b = \frac{3}{2}$$

Esto resuelve el primer punto, para el punto 2 queremos resolver

$$(e^x \sin(y) + \frac{3}{2}x^2y^2)dx + (e^x \cos(y) + x^3y)dy = 0$$

donde $M(x,y) = e^x \sin(y) + \frac{3}{2}x^2y^2$ y $N(x,y) = e^x \cos(y) + x^3y$, no hace falta volver a aplicar la prueba de exactitud pues ya sabemos que para $b = \frac{3}{2}$ la EDO es exacta.

Ambas funciones son sencillas de integrar, entonces tenemos

$$\int M(x,y)dx = \int (e^x \sin(y) + \frac{3}{2}x^2y^2)dx = e^x \sin(y) + \frac{3}{2}\frac{x^3}{3}y^2 = e^x \sin(y) + \frac{x^3y^2}{2}$$

Por otro lado

$$\int N(x,y)dy = \int (e^x \cos(y) + x^3y)dy = e^x \sin(y) + \frac{x^3y^2}{2}$$

con lo que $F(x,y) = e^x \sin(y) + \frac{x^3y^2}{2}$ y por lo que la solución es

$$e^x \sin(y) + \frac{x^3y^2}{2} = C$$

2.5. Ecuaciones diferenciales exactas por factor integrante

Existen ecuaciones diferenciales que no son exactas, pero al multiplicarlos por una función adecuada se vuelven en exactas, esta función se llama el factor integrante.

Definicion 2.5.1. Considere la ecuación diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

la cual no es exacta, si existe una función $\mu(x, y)$ no nula tal que

$$M(x, y)\mu(x, y)dx + N(x, y)\mu(x, y)dy = 0$$

ahora si es exacta, entonces se le llama a la función $\mu(x, y)$ **factor integrante**

Ejemplo 2.5.1. Considere la ED

$$(y^2 + 2x^2)dx + xydy = 0$$

pruebe que no es exacta y que tiene por factor integrante $\mu = x$

Iniciamos identificando $M(x, y) = y^2+2x^2$ y $N(x, y) = xy$, entonces realizando la prueba de exactitud

$$M_y(x, y) = 2y$$
$$N_x(x, y) = y$$

por lo que no es exacta dado que $M_y \neq N_x$ (tienen que ser exactamente iguales, en este caso difieren por un múltiplo de 2), ahora multiplicando toda la ED por el factor integrante obtenemos

$$(xy^2 + 2x^3)dx + x^2ydy = 0$$

de donde (reciclando notación) $M(x, y) = xy^2 + 2x^3$ y $N(x, y) = x^2y$, realizando nuevamente la prueba de exactitud obtenemos

$$M_y(x, y) = 2xy$$
$$N_x(x, y) = 2xy$$

de donde ahora tenemos que $M_y = N_x$ por lo que la ED ahora si es exacta, como ejercicio puede determinar la solución general.

Ejemplo 2.5.2. Considere la EDO

$$(x^2y^3 + 2y)dx + (2x - 2x^3y^2)dy = 0$$

tiene como factor integrante una función de la forma $\mu(x, y) = x^ny^{-3}$, determine el valor de n y resuelva la ED.

Multiplicando nuestra ED por el factor integrante

$$x^n y^{-3}(x^2y^3 + 2y)dx + x^n y^{-3}(2x - 2x^3y^2)dy = 0 \Longrightarrow$$
$$(x^{n+2} + 2x^n y^{-2})dx + (2x^{n+1}y^{-3} - 2x^{n+3}y^{-1})dy = 0$$

entonces tenemos que $M(x, y) = x^{n+2} + 2x^n y^{-2}$ y $N(x, y) = 2x^{n+1}y^{-3} - 2x^{n+3}y^{-1}$, realizando la prueba de exactitud tenemos

$$M_y(x, y) = -4x^n y^{-3}$$
$$N_x(x, y) = 2(n + 1)x^n y^{-3} - 2(n + 3)x^{n+2}y^{-1}$$

igualando ambas derivadas

$$-4x^n y^{-3} = 2(n + 1)x^n y^{-3} - 2(n + 3)x^{n+2}y^{-1}$$

despejar el valor de n de esta ecuación es complicado, por lo que usaremos un método más simple, de cada lado de la igualdad tenemos términos, los términos del lado derecho deben de coincidir con los del lado izquierdo, del lado izquierdo lo tenemos un término pero podemos resolver esto mediante

$$-4x^n y^{-3} + 0x^{n+1}y^{-1} = 2(n + 2)x^n y^{-3} - 2(n + 3)x^{n+2}y^{-1}$$

entonces las constantes que multiplican a cada término deben de ser iguales, por lo que tenemos

$$\begin{cases} -4 = 2(n + 1) \\ -2(n + 3) = 0 \end{cases}$$

en donde ambas ecuaciones tienen por solución $n = 3$, que es el valor buscado.

ahora buscamos resolver la ED, ya conociendo el factor integrante tenemos la ED

$$(x^{-1} + 2x^{-3}y^{-2})dx + (2x^{-2}y^{-3} - 2y^{-1})dy = 0$$

no debemos volver a aplicar la prueba de exactitud, ya sabemos que es exacta, como todas las integrales son sencillas procedemos con el segundo método estudiando, de donde $M(x, y) = x^{-1} + 2x^{-3}y^{-2}$ y $N(x, y) = 2x^{-2}y^{-3} - 2y^{-1}$

$$\int (x^{-1} + 2x^{-3}y^{-2})dx = \ln(x) - x^{-2}y^{-2}$$

por otro lado

$$\int (2x^{-2}y^{-3} - 2y^{-1})dy = -x^{-2}y^{-2} - 2\ln(y)$$

escribiendo la solución escribiendo solo una vez el término repetido obtenemos como solución

$$\ln(x) - x^{-2}y^{-2} - 2\ln(y) = C$$

Ejemplo 2.5.3. Considere la EDO

$$(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$$

pruebe que tiene por factor integrante $\mu(x, y) = 1/(x + y)^2$.

Primero veamos que no es exacta, tenemos

$$M(x, y) = (x^2 + 2xy - y^2) \qquad N(x, y) = (y^2 + 2xy - x^2)$$

de donde

$$\begin{aligned} M_y &= 2x - 2y \\ N_x &= 2y - 2x \end{aligned}$$

por lo que no es exacta, multiplicando por el factor integrante ahora tenemos que

$$M(x, y) = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x + y)^2} \qquad N(x, y) = \frac{y^2 + 2xy - x^2}{(x + y)^2}$$

Derivando obtenemos

$$\begin{aligned} M_y &= \frac{(2x - 2y)(x + y)^{\cancelto{1}{2}} - (x^2 + 2xy - y^2)2\cancel{(x + y)}}{(x + y)^{\cancelto{3}{4}}} \\ &= \frac{2(x - y)(x + y) - 2(x^2 + 2xy - y^2)}{(x + y)^3} \\ &= \frac{2(x^2 - y^2) - 2x^2 - 4xy + 2y^2}{(x + y)^3} = \frac{-4xy}{(x + y)^3} \end{aligned}$$

Para la otra derivada se procede de manera muy similar

$$N_x = \frac{(2y-2x)(x+y)^{\cancel{2}\,1} - (y^2+2xy-x^2)2\cancel{(x+y)}}{(x+y)^{\cancel{4}\,3}} = \cdots = \frac{-4xy}{(x+y)^3}$$

se omiten los detalles pues es prácticamente repetir la simplificación de la primera derivada que realizamos, ahora como $M_y = N_x$ tenemos que la EDO es exacta.

Resolver la EDO mediante el método de exactas es puede ser complicado, pero si desea resolverla, note que la ecuación original es homogénea.

Ejemplo 2.5.4. Considere la siguiente ecuación diferencial

$$dx + [\cot(\beta y) + \ln(y)e^{-x}\csc(y)]dy = 0$$

que tiene por factor integrante $\mu(x,y) = e^x \sin(\beta y)$, donde $\beta \in \mathbb{R}$, determine el valor de β y resuelva la EDO.

Vamos a partir de que ya multiplicamos la EDO por el factor integrante, entonces tenemos

$$M(x,y) = e^x \sin(\beta y)$$

mientras que

$$\begin{aligned} N(x,y) &= [\cot(\beta y) + \ln(y)e^{-x}\csc(y)]e^x \sin(\beta y) \\ &= e^x \sin(\beta y)\cot(\beta y) + \ln(y)\csc(y)\sin(\beta y) \end{aligned}$$

$$= e^x \cancel{\sin(\beta x)}\frac{\cos(\beta y)}{\cancel{\sin(\beta y)}} + \ln(y)\csc(y)\sin(\beta y) = e^x\cos(\beta y) + \ln(y)\csc(y)\sin(\beta y)$$

realizando la prueba de exactitud tenemos

$$\begin{aligned} M_y &= e^x \cos(\beta y)\beta \\ N_x &= e^x \cos(\beta y) \end{aligned}$$

igualando $M_x = N_y$ tenemos

$$\beta \cancel{e^x \cos(\beta y)} = \cancel{e^x \cos(\beta y)} \implies \beta = 1$$

ahora que conocemos el valor de β, queremos resolver la EDO exacta tal que

$$\begin{aligned} M(x,y) &= e^x \sin(y) \\ N(x,y) &= e^x\cos(y) + \ln(y)\cancel{\csc(y)}\cancel{\sin(y)} = e^x \cos(y) + \ln(y) \end{aligned}$$

ambas funciones son integrales de manera sencilla

$$\int M(x,y)dx = \int e^x \sin(y)dx = \sin(y)\int e^x dx = e^x \sin(y)$$

por otro lado tenemos

$$\int N(x,y) = \int [e^x \cos(y) + \ln(y)] = e^x \sin(y) + y(\ln(y) - 1)$$

en donde $\int \ln(y)dy = y(\ln(y) - 1)$ se obtiene al integrar por partes, entonces $F(x,y) = e^x \sin(y) + y(\ln(y) - 1)$ y la solución es

$$e^x \sin(y) + y(\ln(y) - 1) = C$$

2.6. ED exactas, factor integrante que depende de una sola variable

En los ejemplos visto en el capitulo anterior ya nos proporcionan el factor integrante, ahora la pregunta es en caso de existir si hay una manera de calcular el factor integrando de una EDO.

En general no es posible, pero si se cumplen ciertas condiciones si podremos encontrar el factor integrante, veamos esto con nuestro primer teorema.

Teorema 2.6.1. Sea $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una EDO no exacta, entonces si

$$\frac{M_y(x,y) - N_x(x,y)}{N(x,y)} = h(x)$$

es decir, el cociente anterior depende únicamente de x, entonces tenemos que el factor integrante de la EDO es:

$$\mu(x) = e^{\int h(x)dx}$$

veamos de donde se obtiene el teorema anterior, asuma que existe un factor integrante que depende solamente de x, es decir $\mu(x)$ es nuestro factor integrante, entonces multiplicando la EDO por el factor integrante obtenemos

$$M(x,y)\mu(x)dx + N(x,y)\mu(x)dy = 0$$

Aplicando la prueba de exactitud tenemos

$$\frac{d}{dy}[M(x,y)\mu(x)] = M_y(x,y)\mu(x)$$

recuerde que $\mu(x)$ no depende de y, se toma como una constante al derivar, por otro lado

$$\frac{d}{dx}N(x,y)\mu(x) = N_x(x,y)\mu(x) + N(x,y)\mu'(x)$$

de ser exacta, ambas derivadas deben de coincidir, entonces tenemos

$$M_y(x,y)\mu(x) = N_x(x,y)\mu(x) + N(x,y)\mu'(x)$$

Vamos a escribir $\mu'(x) = \dfrac{d\mu}{dx}$, entonces

$$\mu(x)M(x,y) - \mu(x)N(x,y) = N(x,y)\frac{d\mu}{dx}$$
$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{M_y(x,y) - N_x(x,y)}{N(x,y)}dx$$

el problema de la igualdad anterior es que tiene 3 variables, $x, y(x), \mu(x)$, pero usando que $\frac{M_y(x,y)-N_x(x,y)}{N(x,y)} = h(x)$, tenemos

$$\frac{d\mu}{\mu} = h(x)dx$$

la cual solo tiene dos variables, por lo que entra en nuestra definición de EDO, y más aun, es una EDO de variables separables, integrando

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int h(x)dx \Longrightarrow \ln(\mu) = \int h(x)dx$$
$$\Longrightarrow \mu(x) = e^{\int h(x)dx}$$

como la igualdad anterior tiene una integral, al resolver esta debe aparecer una constante de integración, y todo lo dicho anteriormente es valido para cualquier constante, por lo que por comodidad se tomara $C = 0$ (o dicho de otra forma, a esa integral no se le pondrá constante de integración).

Ejemplo 2.6.1. Resuelva

$$(y^3 + 2e^x y)dx + (e^x + 3y^2)dy = 0$$

Primero realicemos la prueba de exactitud donde $M(x,y) = y^3 + 2e^x y$ y $N(x,y) = e^x + 3y^2$, entonces

$$M_y(x,y) = 3y^2 + 2e^x$$
$$N_x(x,y) = e^x$$

por lo que vemos que no es exacta, pero si calculamos el término

$$h(x) = \frac{M_y(x,y) - N_x(x,y)}{N(x,y)} = \frac{3y^2 + 2e^x - e^x}{e^x + 3y^2} = \frac{e^x + 3y^2}{e^x + 3y^2} = 1$$

el cual se puede interpretar como la función que depende de x dada por $h(x) = 1$

$$\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x$$

El teorema ya nos asegura que este es el factor integrante, por lo que no deberíamos volver a realizar la prueba de exactitud, pero el lector lo puede corroborar como práctica.

Multiplicando por nuestro factor integrante obtenemos la EDO

$$(e^x y^3 + 2e^{2x} y)dx + (e^2 x + 3y^2 e^x)dy = 0$$

de donde $M(x,y) = e^x y^3 + 2e^{2x} y$ y $N(x,y) = e^{2x} + 3y^2 e^x$, ambas integrales son muy sencillas de resolver con su respectivo diferencial, por lo que queda al lector corroborar que

$$F(x,y) = e^{2x} y + e^x y^3$$

y ya con esto se escribe la solución como

$$e^{2x} y + e^x y^3 = C$$

Existe la versión análoga cuando el factor integrante depende solamente de y, eso si, el cociente a calcular varia

Teorema 2.6.2. Sea $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es una EDO no exacta, entonces si el término

$$\frac{N_x(x,y) - M_y(x,y)}{M(x,y)} = h(y)$$

depende únicamente de y, tenemos que la EDo tiene por factor integrante

$$\mu(y) = e^{\int h(y) dy}$$

La demostración del teorema anterior es muy similar para el caso que el factor integrante solo depende de x, por lo que se omite.

Ejemplo 2.6.2. Resuelva al EDO

$$(y^2 \cos(x) - y)dx + (x + y^2)dy = 0$$

Realizando la prueba de exactitud donde $M(x,y) = y^2 \cos(x) - y$ y $N(x,y) = x + y^2$ obtenemos

$$M_y(x,y) = 2y\cos(x) - 1$$
$$N_x = 1$$

donde vemos que la EDO no es exacta, ahora calculando el término

$$h(y) = \frac{N_x(x,y) - M_y(x,y)}{M(x,y)} = \frac{1-(2y\cos(x)-1)}{y^2\cos(x)-y} = \frac{2-2y\cos(y)}{y(y\cos(x)-1)} = 2\frac{1-y\cos(y)}{y(y\cos(x)-1)}$$
$$-\frac{2}{y}\frac{\cancel{y\cos(x)-1}}{\cancel{y\cos(x)-1}} = -\frac{2}{y}$$

el cual depende solamente de y, entonces calculado el factor integrante tenemos

$$\mu(y) = e^{\int \frac{-2}{y}dy} = e^{-2\ln(y)} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

Entonces nuestra EDO se transforma a

$$\left(\cos(x) - \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{x}{y^2} + 1\right)dy = 0$$

de donde extraemos que

$$M(x,y) = \cos(x) - \frac{1}{y} \qquad N(x,y) = \frac{x}{y^2} + 1$$

ambas funciones son sencillas de integrar con su respectivo diferencial

$$\int M(x,y)dx = \int \left(\cos(x) + \frac{1}{y}\right)dx = \sin(x) - \frac{x}{y}$$
$$\int N(x,y)dy = \int \left(\frac{x}{y^2} + 1\right)dy = -\frac{x}{y} + y$$

por lo que $F(x,y) = \frac{-x}{y} + \cos(x) + y$, y por lo tanto, la solución es:

$$\frac{-x}{y} + \cos(x) + y = C$$

Entonces, si se nos pide encontrar un factor integrante de una EDO, debemos pensar en los dos teoremas anteriores, veamos más ejemplos.

Ejemplo 2.6.3. Encuentre el factor integrante de la siguiente EDO y luego encuentre la solución general.

$$(2y\sin(x) - \cos^3(x))dx + cos(x)dy = 0$$

Si aplicamos la prueba de exactitud tenemos

$$M(x,y) = 2y\sin(x) - \cos^3(x) \qquad N(x,y) = \cos(x)$$
$$M_y = 2\sin(x) \qquad N_x = -\sin(x)$$

Como nos piden encontrar el factor integrante calculemos los dos casos de los teoremas anteriores, primero veamos el caso que depende solo de y

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-\sin(x) - 2\sin(x)}{2y\sin(x) - \cos^3(x)} = -\frac{3\sin(x)}{2y\sin(x) + \cos^3(x)}$$

el cual no se puede simplificar más, y como no depende solo de y entonces no se puede aplicar el teorema, pero por otro lado

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2\sin(x) - (-\sin(x))}{\cos(x)} = 3\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 3\tan(x)$$

en cual depende solamente de x, como nos pide el teorema, antes de continuar recordemos como integrar $\tan(x)$

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$$

tomando $u = \cos(x)$ y $du = -\sin(x)dx$, entonces tenemos

$$-\int \frac{du}{u} = -\ln(\cos(x)) = \ln([\cos(x)^{-1}]) = \ln(\sec(x))$$

con lo que el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{\int 3\tan(x)dx} = e^{3\ln(\sec(x))} = \sec^3(x) = \frac{1}{\cos^3(x)}$$

multiplicando la EDO por el factor integrante tenemos

$$\left(2y\sin(x)\frac{1}{\cos^3(x)} - \frac{\cancel{\cos^3(x)}}{\cancel{\cos^3(x)}}\right)dx + \frac{\cos(x)}{\cos^3(x)}dy = 0$$
$$(2y\tan(x)\sec^2(x) - 1)dx + \sec^2(x)dy = 0$$

como los teoremas nos indican que la ecuación ya es exacta no es necesario realizar la prueba de exactitud, la puede realizar para practicar o también como una manera para asegurarse de que los cálculos del factor integrante son correctos, continuando con el ejercicio.

Integrar $tan(x)\sec^2(x)$ con respecto a x no es complicado, pero digamos que no lo queremos hacer, aplicando el método formal deberíamos poder evitar realizar dicha integral, entonces iniciemos calculando

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy = \int \sec^2(x)dy = \sec^2(x)\int dy = \sec^2(x)y + h(x)$$

Como $F_x = M(x,y)$, tenemos

$$\frac{d}{dx}\sec^2(x)y = y\frac{d}{dx}\sec^2(x) =$$
$$2\sec(x)y\left(\frac{d}{dx}\Big[\sec(x)\Big]\right)$$

donde en la ultima igualdad usamos la regla de la cadena, y como $\sec(x) = \cos(x)^{-1}$, entonces derivando usando regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}\cos(x)^{-1} = -\cos(x)^{-2}(-\sin(x)) = \tan(x)\sec(x)$$

retomando

$$\frac{d}{dx}\sec^2(x)y = 2y\,\mathrm{sen}^2(x)\tan(x)$$

Como $\frac{d}{dx}F(x,y) = 2y\sec^2(x)\tan(x) + h'(x)$, igualando a $M(x,y)$ tenemos

$$\cancel{2y\sec^2(x)\tan(x)} + h'(x) = \cancel{2y\sec^2(x)\tan(x)} - 1$$

de donde $h(x) = -1$, y por lo tanto $h(x) = -x$, con lo que tenemos que

$$F(x,y) = 2y\sec^2(x)\tan(x) - x$$

y por lo tanto la solución es

$$2y\sec^2(x)\tan(x) - x = C$$

2.7. Ecuaciones diferenciales lineales de orden 1

Las EDO lineales serán estudiadas a lo largo del curso, el caso más sencillo son las de orden 1, que tienen la siguiente forma

Definicion 2.7.1. Una EDO de orden 1 es lineal si se puede escribir como

$$y' + p(x)y = q(x)$$

donde $p(x), q(x)$ son funciones de x.

La forma anterior se llama la ecuación normalizada, esto quiere decir que no hay ningún término distinto de 1 multiplicando a y'.

En el caso de que $q(x) = 0$ se dice una EDO lineal homogénea (no confundir con ecuación diferencial homogénea), pero este caso no es de mucho interés debido a que la EDO se puede escribir de variables separables.

$$y' + p(x)y = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

ahora, la solución general de una EDO lineal de orden 1 es

Teorema 2.7.1. Dada la EDO lineal

$$y' + p(x)y = q(x)$$

tiene por solución

$$y = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \tag{2.7}$$

en otras referencias puede encontrar lo anterior escrito como

$$y = \frac{\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx}{e^{\int p(x)dx}}$$

pero debe ser claro que ambas son la misma fórmula.

Veamos cómo se obtiene la fórmula anterior, considere la EDO

$$y' + p(x)y = q(x) \Longrightarrow (p(x)y - q(x))dx + dy = 0$$

Aplicando la prueba de exactitud, tenemos

$$M(x, y) = p(x)y + q(x) \qquad N(x, y) = 1$$
$$M_y = p(x) \qquad N_x = 0$$

la ecuación no es exacta, pero si calculamos el siguiente cociente tenemos

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{p(x) - 0}{1} = p(x)$$

que solo depende de x, por lo que la EDO tiene factor integrante $e^{\int p(x)dx}$, multiplicando la EDO en su forma original por el factor integrante tenemos que

$$y' e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$
$$\frac{d}{dx}ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

donde en la última igualdad se puede ver al derivar $ye^{\int p(x)dx}$ con respecto a x se corrobora que es equivalente a lo escrito en la primera linea, ahora, ahora integrando con respecto a x obtenemos

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$
$$\implies y = e^{-p(x)dx} \int q(x)e^{p(x)dx}dx$$

De las integrales que tenemos en la formula, solo a $q(x)e^{\int p(x)dx}$ le pondremos una constante de integración.

Ejemplo 2.7.1. Resuelva la *ED*

$$xdy = (x\sin(x) - y)dx$$

primero reescribiendo la ED obtenemos

$$xy' = (x\sin(x) - y) \iff xy' + y = x\sin(x) \iff y' + \frac{y}{x} = \sin(x)$$

en donde la última igualdad ya representa la forma canónica de la ED lineal, identificando tenemos $p(x) = \frac{1}{x}$ y $q(x) = \sin(x)$, vamos a aplicar al formula 2.7, pero vamos resolviendo por partes, primero

$$\int p(x)dx = \int \frac{dx}{x} = \ln(x)$$

por lo que

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\ln(x)} = x$$

ahora resolvamos

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int x\sin(x)dx$$

para resolver esta integral procedemos por integración por parte, tome $u = x$ y por lo tanto $du = dx$, y tome $dv = \sin(x)dx$ y por lo tanto $v = -\cos(x)$, entonces

$$\int x\sin(x)dx = -x\cos(x) - \int -cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

como esta ya es la última integral que se resuelve a esta le colocamos la constante. Con esto ya podemos escribir la solución

$$y = e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = (x)^{-1}[-x\cos(x) + \sin(x) + C]$$
$$= \frac{1}{x}[-x\cos(x) + \sin(x) + C]$$
$$y = -\cos(x) + \frac{\sin(x)}{x} + \frac{C}{x}$$

Otra forma de resolver el ejercicio anterior es verificar que tomando

$$M = y - x\sin(x) \qquad N = x$$

y resolver como exacta, pues $M_y = 1 = N_x$.

Ejemplo 2.7.2. Resuelva
$$y^2x' + 2xy = 2y^2 + 1$$

primero debemos notar que la variable dependiente es x y la independiente es y, la revés de la manera usual, escribiendo ED lineal en su forma normalizada dividiendo todo entre y^2

$$x' + 2\frac{x}{y} = \frac{2y^2 + 1}{y^2}$$

de donde identificamos a $p(y) = \frac{2}{y}$ y $q(y) = \frac{2y^2+1}{y^2}$, entonces tenemos

$$e^{\int p(y)dy} = e^{\int \frac{2}{y}dy} = e^{2\ln(y)} = y^2$$

con lo que

$$\int q(y)e^{p(y)dy}dy = \int \frac{2y^2 + 1}{y^2}y^2dy = \int (2y^2 + 1)dy = \frac{2}{3}y^3 + y + C$$

por lo que la solución es

$$x = e^{-p(y)dy}\int q(y)e^{p(y)dy}dy = \frac{1}{y^2}\left(\frac{2}{3}y^3 + y + C\right)$$

Ejemplo 2.7.3. Resuelva la siguiente EDO

$$y' \cos(x) + y \sin(x) = 1$$

Iniciamos escribiendo la EDL en su forma normalizada.

$$y' + y\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

se puede cambiar las funciones trigonométricas por $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, pero realmente para resolver las integral nos sirve mas dejarlas en formas de senos y cosenos. Entonces identificando $p(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ y $q(x) = \frac{1}{\cos(x)}$, tenemos

$$\int p(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$$

para resolver esta integral tome $u = \cos(x)$ y $du = -\sin(x)$, obteniendo

$$-\int \frac{du}{u} = -\ln(x) = -\ln(\cos(x))$$

por lo tanto

$$e^{\int p(x)dx} = e^{-\ln(\cos(x))} = \cos(x)^{-1}$$

ahora resolviendo

$$\int q(x)e^{p(x)dx}dx = \int \frac{1}{\cos(x)}\frac{1}{\cos(x)}dx = \int \sec^2(x)dx = \tan(x) + C$$

por lo tanto la solución es

$$y = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \cos(x)(\tan(x) + C)$$

Ejemplo 2.7.4. Resuelva la siguiente ED

$$y' - 2y = x(e^{3x} - e^{2x})$$

fijado a la condición $y(0) = 2$

Ya la ED lineal esta escrita en su forma canónica, donde vemos que $p(x) = -2$ y $q(x) = x(e^{3x} - e^{2x})$, entonces

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int (x(e^{3x} - e^{2x})e^{\int -2dx}dx =$$

$$\int (x(e^{3x} - e^{2x})e^{-2x} = \int (xe^{x} - x)dx$$

para integrar xe^x debemos proceder por partes, tome $u = x$ y por lo tanto $du = dx$ y tome $dv = e^x$ y por lo tanto $v = e^x$, con lo que obtenemos

$$\int (xe^x - x)dx = \int xe^x dx - \int xdx = \left(xe^x - \int e^x dx\right) - x + C = e^x x - e^x - x + C$$

por lo la solución es

$$y = e^{2x}(e^x x - e^x - x + C)$$

y ahora usando que $y(0) = 2$ obtenemos que

$$2 = e^0(e^0 0 - e^0 - 0 + C) \Longrightarrow 2 = C$$

y la solución particular es

$$y = e^{2x}(e^x x - e^x - x + 2)$$

Ejemplo 2.7.5. Resuelva la siguiente EDL

$$y' + y = \frac{1}{1 + e^{2x}}$$

la EDL ya esta en su forma normalizada, tenemos que

$$p(x) = 1 \qquad q(x) = \frac{1}{1 + e^{2x}}$$

entonces el factor integrante es

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int dx} = e^x$$

y ahora debemos integrar

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}}dx$$

para resolver esta integral, tome $u = e^x$, y por lo tanto $du = e^x dx$, continuando

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{e^x dx}{1+(e^x)^2} =$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u) + C = \arctan(e^x) + C$$

con lo que finalmente la solución es

$$y = e^{-x}(\arctan(e^x) + C)$$

Ejemplo 2.7.6. Resuelva la siguiente EDO.

$$(1+x)\frac{dy}{dx} - xy = x + x^2$$

reescribiendo la EDL en su forma normalizada tenemos

$$y' - \frac{x}{1+x} = \frac{x\cancel{(1+x)}}{\cancel{(1+x)}}$$

de donde identificamos que

$$p(x) = -\frac{x}{x+1} \qquad q(x) = x$$

para la integral de

$$-\int \frac{x}{x+1}dx$$

podemos hacer una división de polinomios, pero es más sencillo proceder de la siguiente manera

$$-\int \frac{x}{x+1}dx = -\int \frac{x+1-1}{x+1}dx = -\int \Big(\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+1}} - \frac{1}{x+1}\Big)dx$$
$$= -\int dx + \int \frac{1}{1+x}dx = -x + \ln(x+1)$$

entonces el factor integrante es

$$e^{\int p(x)dx} = e^{-x+\ln(x)} = e^{-x}e^{\ln(x+1)} = e^{-x}(x+1) \tag{2.8}$$

ahora debemos resolver

$$\int q(x)e^{p(x)dx}dx = \int e^{-x}x(x+1)dx = \int e^x(x^2+1)dx$$

que es una integral de un polinomio por una exponencial, entonces debemos proceder por partes, como el polinomios es de grado 2 entonces se debe aplicar integración por partes dos veces, tome

$$u = x^2 + x \qquad du = (x+1)dx$$
$$dv = e^{-x}dx \qquad v = -e^{-x}$$

entonces la integral se transforma en

$$-e^{-x}(x^2+x) - \int -e^{-x}(x+1)dx = -e^{-x}(x^2+x) + \int (x+1)e^{-x}dx$$

para la integral obtenida, tomando

$$u = x+1 \qquad du = dx$$
$$dv = e^{-x}dx \qquad v = -e^{-x}$$

entonces la integral se reduce a

$$-e^{-x}(x^2+x) + \int (x+1)e^{-x}dx = -e^{-x}(x^2+x) + -e^{-x}(x+1) - \int -e^{-x}dx)$$

$$-e^{-x}(x^2+x) - e^{-x}(x+1) - e^{-x} + C$$

y finalmente la solución es

$$y = \frac{e^x}{x+1}\Big(- e^{-x}(x^2+x) - e^{-x}(x+1) - e^{-x} + C\Big)$$

Ejemplo 2.7.7. Resuelva la siguiente EDL

$$(x\ln(x))y' + y = 3x^3$$

normalizando la EDL obtenemos

$$y' + \frac{1}{x\ln(x)}y = \frac{3x^2}{\ln(x)}$$

de donde obtenemos que

$$p(x) = \frac{1}{x\ln(x)} \qquad q(x) = \frac{3x^2}{\ln(x)}$$

vea que, tomando $u = \ln(x)$ y $du = \dfrac{dx}{x}$ en la siguiente integral obtenemos

$$\int \frac{dx}{x\ln(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln(u) = \ln(\ln(x))$$

y por lo tanto tenemos que el factor integrante es

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\ln(\ln(x))} = \ln(x)$$

con lo que calculando

$$\begin{aligned}\int q(x)e^{p(x)dx}dx &= \int \frac{3x^2\cancel{\ln(x)}}{\cancel{\ln(x)}}dx \\ &= \int 3x^2dx = x^3 + C\end{aligned}$$

con lo que la solución de la EDL es

$$y = \frac{1}{\ln(x)}(x^3 + C)$$

Ejemplo 2.7.8. Considere la ecuación diferencia

$$xy' - 4x^2y + 2y\ln(y) = 0$$

realice el cambio de variable $u = \ln(y)$ y resuelva.

primero encontremos el diferencial con respecto a u, entonces

$$u' = \frac{y'}{y}$$

vea que si dividimos la ecuación diferencial entre y, realizar el cambio de variable es más sencillo

$$\begin{gathered} x\frac{y'}{y} - 4x^2\frac{\cancel{y}}{\cancel{y}} + 2\frac{\cancel{y}}{\cancel{y}}\ln(y) = 0 \\ x\frac{y'}{y} - 4x^2 + 2\ln(y) = 0 \\ xu' - 4x^2 + 2u = 0 \Longrightarrow u' + 2\frac{u}{x} = 4x \end{gathered}$$

de donde obtenemos $p(x) = \dfrac{2}{x}$ y $q(x) = 4x$, entonces

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int 4xe^{\int 2/xdx}dx = 4\int xe^{2\ln(x)}dx$$
$$= 4\int x(x^2)dx = 4\int x^3dx = x^4 + C$$

entonces tenemos

$$u = x^{-2}(x^4 + C)$$

y regresando a la variable original

$$\ln(y) = x^{-2}(x^4 + C)$$

2.8. Ecuación diferencial de Bernoulli

Ahora vamos a estudiar otro tipo de EDO que el primer paso para resolverlas es realizar un cambio de variable que la transforma en una EDL, iniciemos con la definición de estas EDO.

Definicion 2.8.1. Una ecuación diferencial ordinaria

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \tag{2.9}$$

donde $n \in \mathbb{R}$, se llama una ecuación diferencial de Bernoulli, la expresión que se presenta arriba es la forma normalizada.

En el caso de que $n = 0$ estamos en el caso de una EDL estudiadas en la sección anterior. En general la forma de resolver este tipo de ecuaciones diferenciales es tomar el cambio de variable

$$z = y^{1-n}$$

en donde n se extrae de 2.9, y derivando obtenemos que

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \Longrightarrow \frac{z'}{1-n} = y^{-n}y'$$

el siguiente paso es tomar 2.9 y multiplicar la EDO por y^{-n} para obtener

$$y'y^{-n} + p(x)yy^{-n} = q(x)y^ny^{-n}$$
$$y'y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

sustituyendo

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x) \Longrightarrow z' + \frac{p(x)}{1-n}z = \frac{q(x)}{1-n}$$

la cual es una EDL, por lo que primero resolveremos esta EDO en términos de $z(x)$, y una vez resuelta debemos regresar a nuestras variables originales.

Ejemplo 2.8.1. Resuelva

$$2xy' = y + x^2 y^{-2}$$

De manera directa se ve en este caso que $n = -2$, entonces se hace el cambio de variable $z = y^{1-n} = y^3$ y $z'/3 = y^2 y'$, ahora acomodamos la EDO y dividiendo entre $2x$ y también multiplicando la EDO por y^2

$$y'y^2 - \frac{y^3}{2x} = \frac{x}{2} \Longrightarrow \frac{z'}{3} - \frac{z}{2x} = \frac{x}{2} \Longrightarrow z' - \frac{3}{2}\frac{z}{x} = \frac{3}{2x}$$

la cual es la forma canónica de una ED lineal, donde identificamos

$$p(x) = \frac{3}{2x} \qquad q(x) = \frac{x}{2}$$

con esto ya podemos usar la formula 2.7, primero calculamos

$$e^{\int \frac{3}{2x} dx} = e^{\frac{3\ln(x)}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$$

ahora calculamos

$$\int q(x) e^{p(x)dx} dx = \int \frac{x}{2} x^{3/2} dx = \frac{1}{2}\int x^{5/2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}x^{7/2}\right) + C = \frac{x^{7/2}}{7} + C$$

entonces la solución es

$$z = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx\right) = x^{-3/2}\left(\frac{x^{7/2}}{7} + C\right)$$

para finalizar el ejercicio debemos regresar a la variables originales, donde $z = y^3$, entonces la solución de la EDO es

$$y^3 = x^{-3/2}\left(\frac{x^{7/2}}{7} + C\right)$$

Ejemplo 2.8.2. Resuelva la ecuación diferencial $y' - y = xy^2$ sujeta a las condiciones $y(0) = 1$

Podemos ver que $n = 2$, entonces realizando el cambio de variable $z = y^{1-n} = y^{-1}$ y $z' = -y^{-2}y'$, antes de sustituir multiplicamos la ecuación diferencial por y^{-2} para obtener

$$y' - y = xy^2 \Longrightarrow y^{-2}y' - y^{-1} = x$$

sustituyendo

$$-z' - z = x \Longrightarrow z' + z = -x$$

de donde identificamos $p(x) = 1$ y $q(x) = -x$, resolviendo tenemos que $e^{\int p(x)dx} = e^x$, entonces calculando

$$\int qe^{p(x)dx}dx = \int -xe^x dx = -\int xe^x dx$$

para resolver la integral procedemos por partes tomando $u = x$ y por lo tanto $du = dx$, por otro lado tomamos $dv = e^x dx$ y por lo tanto $v = e^x$, entonces tenemos

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

entonces tenemos

$$z = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{p(x)dx}dx\right) = e^{-x}(xe^x - e^x + C) = x - 1 + Ce^{-x}$$

y regresando a nuestras variables originales

$$y^{-1} = x - 1 + Ce^{-x}$$

ahora usando que $y(0) = 1$

$$1 = 0 - 1 + Ce^0 \Longrightarrow 2 = C$$

entonces la solución buscada es

$$y^{-1} = x - 1 + 2e^{-x}$$

Ejemplo 2.8.3. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$xy' + y = x^4y^3$$

podemos ver que es una ecuación diferencial de Bernoulli con $n = 3$, entonces tomando $z = y^{1-3} = y^{-2}$ y derivando $z' = -2y^{-3}y'$, de donde $\dfrac{-z'}{2} = y^{-3}y'$, normalizando la ecuación diferencial y luego multiplicando por y^{-3} obtenemos

$$y'y^{-3} + \frac{y^{-2}}{x} = x^3$$

$$\frac{-z'}{2} + \frac{z}{x} = x^3 \Longrightarrow z' - \frac{2}{x}z = -2x^3$$

de donde tenemos

$$p(x) = \frac{-2}{x} \qquad q(x) = -2x^3$$

entonces calculando el factor integrante tenemos

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{-2}{x}dx} = e^{-2\ln(x)} = x^{-2}$$

y ahora, calculado

$$\int q(x)e^{p(x)dx} = \int -2x^3(x^{-2})dx = -2\int xdx = -x^2 + C$$

por lo que la solución es

$$z = x^2(-x^2 + C)$$

y regresando a las variables originales

$$y^{-2} = x^2(-x^2 + C)$$

Ejemplo 2.8.4. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$xy^2y' + y^3 = x\cos(x)$$

normalizando la ecuación diferencial obtenemos

$$y' + \frac{y}{x} = \cos(x)y^{-2}$$

donde identificamos una ecuación diferencial de Bernoulli con $n = -2$, entonces tomando $z = y^{1--2} = y^3$, y derivando $z' = 3y^2y'$, de donde $z'/3 = y'y^2$, ahora multiplicando por y^2 tenemos

$$y'y^2 + \frac{y^3}{x} = \cos(x) \Longrightarrow \frac{z'}{3} + \frac{z}{x} = \cos(x)$$

$$z' + \frac{3}{x}z = 3\cos(x)$$

de donde $p(x) = 3/x$, $q(x) = 3\cos(x)$, y $\int p(x)dx = 3\ln(x)$, por lo que el factor integrante es

$$e^{\int p(x)dx} = e^{3\ln(x)} = x^3$$

por que ahora debemos integrar

$$\int qe^{\int p(x)dx}dx = \int 3x^3\cos(x)dx$$

el cual es el producto de un polinomios de grado 3 por un coseno, entonces se debe proceder por partes, debido a que se debe aplicar integración por partes 3 veces (pues el polinomio de la integral es de grado 3), se puede hacer algo largo, por lo que procederemos por el método tabular.

Para esto tomados $u = 3x^3$, que será la función que derivaremos hasta que se anule, y $dv = \cos(x)dx$, que será la función que integramos, derivando

$$3x^3 \qquad ,9x^2 \qquad ,18x \qquad ,18 \qquad ,0$$

integrando $\cos(x)$

$$\cos(x) \quad \sin(x) \quad -\cos(x) \quad -\sin(x) \quad \cos(x)$$

ahora debemos ir combinando alternando el signo, por lo que

$$\int 3x^3\cos(x) = 3x^3\sin(x) - -9x^2\cos(x) + -18x\sin(x) - 18\cos(x) + C$$
$$= 3x^3\sin(x) + 9x^2\cos(x) - 18x\sin(x) - 18\cos(x) + C$$

y por lo tanto tenemos que

$$z = \frac{1}{x^3}(3x^3\sin(x) + 9x^2\cos(x) - 18x\sin(x) - 18\cos(x) + C)$$

y regresando a las variables originales la solución es

$$y^3 = \frac{1}{x^3}(3x^3\sin(x) + 9x^2\cos(x) - 18x\sin(x) - 18\cos(x) + C)$$

Hasta el momento en todos los ejemplos hemos tenido que $n \in \mathbb{Z}$, veamos un caso en donde n es un racional

Ejemplo 2.8.5. Resuelva

$$y' + \frac{y}{x} = -2x^2y^{3/2}$$

tenemos que $n = 3/2$, entonces tomando $z = y^{1-3/2} = y^{-1/2}$, derivando obtenemos $z' = -\frac{1}{2}y^{-3/2}y'$, de donde despejando obtenemos $y^{-3/2}y' = -2z'$, multiplicando por $y^{-3/2}$ y luego sustituyendo

$$y^{-3/2}y' + \frac{y^{-1/2}}{x} = -2x^2$$
$$-2z' + \frac{z}{x} = -2x^2 \Longrightarrow z' - \frac{z}{2x} = x^2$$

de donde $p(x) = -\dfrac{1}{2x}$, por lo que

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{2x}} = e^{-\ln(x)/2} = x^{-1/2}$$

y usando que $q(x) = x^2$ tenemos

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = \int x^2(x^{-1/2})dx = \int x^{3/2}dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + C$$

entonces tenemos que

$$z = x^{1/2}\left(\frac{2}{5}x^{5/2} + C\right)$$

y regresando a las variables originales la solución es

$$y^{-1/2} = x^{1/2}\left(\frac{2}{5}x^{5/2} + C\right)$$

2.9. Ecuación diferencial de Ricatti

En esta sección vamos a estudiar otro tipo de EDO que a partir de un cambio de variable se transforma en una ecuación lineal, el cambio de variable es un poco peculiar pues depende de una solución particular de la EDO, iniciemos definiendo la ecuaciones diferenciales de Ricatti

Definicion 2.9.1. Una ecuación diferencial de Riccati tiene la forma

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x) \tag{2.10}$$

en donde $f(x), g(x), h(x)$ son funciones que depende de x

vea que a ecuación diferencial de Riccati no es lineal debido al elemento y^2, solo si $f(x) = 0$ obtenemos una EDL de manera directa, pero ese caso no presenta mucho interés.

Para resolver la ED de Riccati debemos conocer una solución particular $y_p = y_p(x)$, y realizamos el cambio de variable

$$y = y_p + \frac{1}{u}$$

derivando lo anterior obtenemos

$$y' = y_p' - \frac{u'}{u^2}$$

sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} y' &= f(x)y^2 + g(x)y + h(x) \\ y_p' - \frac{u'}{u^2} &= f(x)\left(y_p + \frac{1}{u}\right)^2 + g(x)\left(y_p + \frac{1}{u}\right) + h(x) \\ y_p' - \frac{u'}{u^2} &= f(x)y_p^2 + 2f(x)\frac{y_p}{u} + f(x)\frac{1}{u^2} + g(x)y_p + g(x)\frac{1}{u} + h(x) \end{aligned}$$

ahora, sabemos que y_p es solución particular de 2.10, quiere decir que si la sustituimos en la ecuación diferencial se cumple la igualdad, es decir tenemos que

$$y_p' = f(x)y_p^2 + g(x)y_p + h(x)$$

agrupando y cancelando entonces tenemos

$$\cancel{y_p'} - \frac{u'}{u^2} = \cancel{\left(f(x)y_p^2 + g(x)y_p + h(x)\right)} + 2f(x)\frac{y_p}{u} + f(x)\frac{1}{u^2} + g(x)\frac{1}{u}$$

ahora escribiendo como una ecuación lineal

$$u' + \Big[2f(x)y_p + g(x)\Big]u = -f(x)$$

recuerde que $y_p = y_p(x)$ es una función de x, ahora para este tipo de ejercicios, podemos aprendernos la igualdad anterior como una formula que vamos a obtener luego de realizar la sustitución, o recordamos la sustitución y en cada ejercicio desarrollamos dicha sustitución.

Esta segunda forma, aunque suena mucho más extensa, es sencilla y evita que tengamos que memorizar muchas cosas, además esta será la manera que resolveremos estos ejercicios en estas notas.

Finalmente, la solución particular que requerimos para hacer la sustitución nos la deben dar.

Ejemplo 2.9.1. Resuelva

$$y' = y^2 - \frac{y}{x} - 4\frac{1}{x^2}$$

pruebe que $y = 2/x$ es solución y luego obtenga la solución general.

Para verificar que es solución, tenemos que

$$y = \frac{2}{x} \qquad y' = -\frac{2}{x^2}$$

sustituyendo tenemos

$$y' = y^2 - \frac{y}{x} - 4\frac{1}{x^2}$$

$$-\frac{2}{x^2} = \left(\frac{2}{x}\right)^2 - \frac{2}{x}\frac{1}{x} - 4\frac{1}{x^2}$$

$$-\frac{2}{x^2} = \cancel{\frac{4}{x^2}} - \frac{2}{x^2} - \cancel{\frac{4}{x^2}} \Longrightarrow -\frac{2}{x^2} = -\frac{2}{x^2}$$

por lo que se concluye que si es solución, ahora tomando

$$y = y_p + \frac{1}{u} = \frac{2}{x} + \frac{1}{u}$$

$$y' = \frac{-2}{x^2} - \frac{u'}{u^2}$$

sustituyendo tenemos

$$y' = y^2 - \frac{y}{x} - 4\frac{1}{x^2}$$

$$-\frac{2}{x^2} - \frac{u'}{u^2} = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{u}\right)^2 - \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{u}\right)\frac{1}{x} - 4\frac{1}{x^2}$$

$$-\cancel{\frac{2}{x^2}} - \frac{u'}{u^2} = \cancel{\frac{4}{x^2}} + \frac{4}{xu} + \frac{1}{u^2} - \cancel{\frac{2}{x^2}} - \frac{1}{ux} - \cancel{\frac{4}{x^2}}$$

$$\frac{-u'}{u^2} = \frac{3}{ux} + \frac{1}{u^2} \Longrightarrow u' + 3\frac{u}{x} = -1$$

de donde $p(x) = 3/x$ y por lo tanto $e^{\int p(x)dx} = e^{3\ln(x)} = x^3$
con lo que

$$\int q(x)e^{p(x)dx}dx = -\int x^3 dx = -\frac{x^3}{4} + C$$

la solución en términos de u es

$$u = x^{-3}\left(-\frac{x^4}{4} + C\right)$$

y regresando a las variables originales, antes se debe despejar u de

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{u} \Longrightarrow y - \frac{2}{x} = \frac{1}{u} \Longrightarrow \frac{yx - 2}{x} = \frac{1}{u}$$

$$\implies \frac{x}{yx-2} = u$$

entonces

$$\frac{x}{yx-2} = x^{-3}\Big(-\frac{x^4}{4} + C\Big)$$

en donde y es la solución de la ecuación diferencial.

Ejemplo 2.9.2. Resuelva

$$y' = y^2 - 2xy + 1 + x^2$$

si se sabe que $y = x$ es solución

Tenemos una ecuación diferencial de Riccati, entonces tomando

$$y = x + \frac{1}{u} \qquad y' = 1 - \frac{u'}{u^2}$$

sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} y' &= y^2 - 2xy + 1 + x^2 \\ 1 - \frac{u'}{u^2} &= \Big(x + \frac{1}{u}\Big)^2 - 2x\Big(x + \frac{1}{u}\Big) + 1 + x^2 \\ \cancel{1} - \frac{u'}{u^2} &= \cancel{x^2} + 2\cancel{\frac{x}{u}} + \frac{1}{u^2} - \cancel{2x^2} - 2\cancel{\frac{x}{u}} + \cancel{1} + \cancel{x^2} \\ -\frac{u'}{u^2} &= \frac{1}{u^2} \implies u' = -1 \end{aligned}$$

la anterior es una ecuación diferencial lineal, pero resolverla como tal no es lo más óptimo dado que también es una ecuación diferencial de variables separables, entonces

$$\frac{du}{dx} = -1 \implies \int du = -\int dx$$
$$u = -x + C$$

ahora, debemos despejar u en términos de x, y

$$y = x + \frac{1}{u} \implies y - x = \frac{1}{u}$$
$$u = \frac{1}{y-x}$$

por lo que la solución es

$$\frac{1}{y-x} = -x + C$$

Ejemplo 2.9.3. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = y^2 - y\tan(x) + \sec^2(x)$$

tal que $y = \tan(x)$ es solución particular.

El verificar que $y = \tan(x)$ es directo usando que $y' = \sec^2(x)$, ahora tenemos una ecuación diferencial de Riccati, entonces tomando

$$y = \tan(x) + \frac{1}{u} \qquad y' = \sec^2(x) - \frac{u'}{u^2}$$

entonces tenemos

$$\begin{gathered}
y' = (y)^2 - y\tan(x) + \sec^2(x) \\
\sec^2(x) - \frac{u'}{u^2} = \left(\tan(x) + \frac{1}{u}\right)^2 - \left(\tan(x) + \frac{1}{u}\right)\tan(x) + \sec^2(x) \\
\cancel{sec^2(x)} - \frac{u'}{u^2} = \cancel{tan^2(x)} + 2\frac{\tan(x)}{u} + \frac{1}{u^2} - \cancel{tan^2(x)} - \frac{\tan(x)}{u} + \cancel{\sec^2(x)} \\
-\frac{u'}{u} = 3\frac{\tan(x)}{u} + \frac{1}{u^2} \Longrightarrow u' + \tan(x)u = -1
\end{gathered}$$

de donde tenemos que $p(x) = \tan(x)$, $q(x) = -1$, y usando que

$$\int tan(x)dx = -\ln(cos(x)) \Longrightarrow e^{\int p(x)dx} = e^{-\ln(cos(x))} = \sec(x)$$

ahora debemos calcular

$$\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx = -\int \sec(x)dx = -\ln(\sec(x) + \tan(x)) + C$$

por lo que tenemos

$$u = -\cos(x)\Big[\ln(\sec(x) + \tan(x)) + C\Big]$$

para finalizar despejamos u en términos de y tenemos

$$y = \tan(x) + \frac{1}{u} \Longrightarrow y - \tan(x) = \frac{1}{u}$$

$$\frac{1}{y-\tan(x)} = u$$

por lo que

$$\frac{1}{y-\tan(x)} = -\cos(x)\Big[\ln(\sec(x)+\tan(x))+C\Big]$$

2.10. Variable ausente (Estudio independiente)

Cuando hablamos de variable ausente nos referimos a ecuaciones donde no aparece la variable independiente x, o la variable dependiente $y(x)$ (pero si aparecen sus derivadas), dependiendo de cual variable este ausente se realiza un cambio de variable diferente.

En el caso de que no se tenga la variable $y(x)$, y la ecuación es de orden mayor a 2, se toma el cambio de variable $v = y^{(n-1)}$ donde n es el orden de la ecuación diferencial, y derivando tenemos que $v' = y^n$, es importante recordar que una EDO de orden n tiene por solución general una curva que depende de n parámetros.

Ejemplo 2.10.1. Resuelva la siguiente ecuación diferencial.

$$xy''' + y'' = 1$$

para resolverla tome $v = y''$ y $v' = y'''$, donde obtenemos

$$xv' + v = 1$$

la EDO anterior se puede resolver como una lineal de orden 1, pero también es de variable separables, y por este método es más sencilla de resolver

$$xv' = 1 - v \Longrightarrow \frac{dv}{dx}x = 1 - v \Longrightarrow \frac{dc}{1-v} = \frac{dx}{x} \tag{2.11}$$

integrando ambos lados

$$\int \frac{dv}{1-v} = \int \frac{dx}{x} \Longleftrightarrow -\ln(1-v) = \ln(x) + C$$

debemos regresar a las variables originales, pero antes despejemos v

$$\ln(1-v) = -\ln(x) + C \Longrightarrow e^{\ln(1-v)} = e^{-ln(x)+C} \Longrightarrow 1 - v = \frac{k}{x} \Longrightarrow v = 1 - \frac{k}{x}$$

donde $k = e^{C_1}$, al regresar a las variables originales obtenemos una nueva ecuación diferencial, pero estas se resuelve con integración directa.

$$y'' = 1 - \frac{k}{x} \Longrightarrow y' = \int \left(1 - \frac{k}{x}\right) = x + k\ln(x) + C_2$$

debemos volver a integrar la expresión anterior, usando que

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x$$

obtenemos que

$$y = \int (x + k\ln(x) + C_1)dx = \frac{x^2}{2} + k(x\ln(x) - x) + C_2x + C_3$$

Ejemplo 2.10.2. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + \left(x - \frac{1}{x}\right)y' = 0$$

Note que no tenemos el termino $y := y(x)$ en la EDO, haciendo el cambio de variable $u = y'$, $u' = y''$, tenemos

$$y'' + \left(x - \frac{1}{x}\right)y' = 0$$

$$u' + u\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0$$

La cual es de variables separables, usando que $u' = \dfrac{du}{dx}$

$$\frac{du}{u} = -\left(x - \frac{1}{x}\right)dx$$

$$\ln(u) = -\frac{x^2}{2} + ln(x) + K$$

$$u = y' = Kxe^{-\frac{x^2}{2}}$$

Donde $k = e^C$, nos falta integrar para obtener

$$y = \int Cxe^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

tomando $v = \dfrac{x^2}{2}$ y $dv = xdx$ tenemos

$$\int Cxe^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int Ce^{-u} = -Ce^{-u} + D$$

Con lo que la solución general es

$$y = Ce^{-x^2/2} + D$$

Ejemplo 2.10.3. Resuelva la siguiente ED

$$y'' = 2x(y')^2$$

Tenemos que la variable ausente es $y := y(x)$, entonces tomando $u = y'$ y $u' = y''$ tenemos

$$u' = 2xu^2 \Longrightarrow \frac{du}{u^2} = 2xdx$$

integrando ambos lados

$$\frac{-1}{u} = x^2 + C \Longrightarrow u = y' = \frac{-1}{x^2 + C}$$

Entonces

$$y = \int \frac{-1}{x^2 + C}dx = -\frac{1}{\sqrt{C}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{C}}\right) + D$$

Para el caso donde la variable ausente es x procedemos con otro cambio de variable, se puede dar el caso en donde tanto x como $y(x)$ estén ausente en la EDO, por lo que se puede proceder como variable ausente x o variable ausente y.

Para resolver las EDO de variable ausente x tomamos el cambio de variable $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$, pero ahora no podemos decir que $\dfrac{du}{dx} = y''$, pues la igualdad anterior tiene 3 variables, en la cual x es ausente en nuestra ecuación diferencial, entonces se toma

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u'(y)u(y) = u'u$$

en la última igualdad eliminamos la variable independiente para aligerar la notación, pero lo importante es ver que ahora nuestra variable dependiente es u, y la independiente es y.

Como ahora y es la variable independiente no se requiere cambiar al hacer el cambio de variable, solo sus derivadas se modifican.

Ejemplo 2.10.4. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$yy'' = y' + (y')^2$$

Vea que no tenemos la variable independiente x, realizando el cambio de variable $y' = u'$ y $y'' = u'u$ obtenemos

$$y(u'u) = u + u^2 \Longrightarrow u' = \frac{1}{y} + \frac{u}{y} \Longrightarrow u' - \frac{u}{y} = \frac{1}{y}$$

la cual es una ED lineal con $p(y) = \frac{-1}{y}$ y $q(y) = \frac{1}{y}$, entonces tenemos

$$e^{\int p(y)dy} = e^{-\int \frac{1}{y}dy} = e^{-\ln(y)} = \frac{1}{y}$$

por lo que tenemos

$$v = e^{-\int p(y)dy} \int q(y) e^{\int p(y)dy} dy = y \left(\int \frac{1}{y^2} dy \right)$$
$$= y \int y^{-2} dy = y\left(-y^{-1} + C\right) = -1 + Cy$$

regresando a la variable original

$$y' = -1 + Cy$$

en donde $y' = \frac{dy}{dx}$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = 1 + Cy \Longrightarrow \frac{dy}{1+Cy} = dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{1+Cy} = \int dx \Longrightarrow$$
$$\frac{\ln(1+Cy)}{C} = x + D$$

donde esta ultima igualdad determina a y como solución general implícita de la ecuación diferencial.

Ejemplo 2.10.5. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$yy'' = (y')^2$$

sujeta a las condiciones $y'(1) = 3$ y $y(1) = 1$

Realizamos el cambio de variable $v = y'$ y $y'' = vv'$ donde $v' = \frac{dv}{dy}$, entonces tenemos

$$yvv' = v^2 \Longrightarrow \frac{dv}{dy}y = v \Longrightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y} \Longrightarrow \ln(v) = \ln(y) + C \Longrightarrow v = Ky$$

en donde $k = e^C$, ahora regresamos a la variable original

$$y' = Ky$$

esta es una ecuación diferencial de variables separables, pero como tenemos valores iniciales podemos calcular K usando que $y'(1) = 3$, $y(1) = 1$, osea que cuando $x = 1$ tenemos que $y' = 3, y = 2$, y aunque la igualdad anterior no tiene x, recuerde que $y := y(x)$ depende de x, y como ambas condiciones de frontera estan en $x = 1$ podemos sustituir de manera simultanea

$$3 = k$$

ahora resolviendo como variables separables

$$y' = 3y \Longrightarrow \frac{y'}{y} = 3dx \Longrightarrow \ln y = 3x + D$$

para finalizar encontramos el valor de D usando que $y(1) = 1$,entonces

$$\ln(1) = 3(1)^2 + D \Longrightarrow D = -3$$

entonces la solución es

$$\ln(y) = 3x - 3$$

2.11. Aplicaciones

En áreas como ingeniería, física, biología o economía se tiene fenómenos o proceses que depende de tasas de cambio (derivadas). Mediante ecuaciones diferenciales es posible escribir estos procesos de forma matemática. Esta conexión entre datos empíricos y matemáticas se debe hacer bajo ciertos supuestos que simplifiquen el modelo, es imposible modelar algo a la perfecta debido a la gran cantidad de variables que están involucradas.

Por esto se debe identificar los principales factores que repercuten en el proceso para generar el modelo, estos modelos matemáticos se debe corroborar, ver que realmente tiene sentido los datos obtenidos con leyes físicas y datos experimentales.

2.11.1. Ley de enfriamiento

Considere un objeto con una temperatura mayor a la temperatura ambiente, este iniciara a transferir calor al ambiente y con esto desciende su temperatura. Para rangos de temperatura bajas la ley de enfriamiento de newton modela de manera adecuada esta perdida de calor.

Ley de enfriamiento de Newton: La tasa de cambio de la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura del cuerpo y el medio ambiente

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_m)$$

Donde $T = T(t)$ es la temperatura dele cuerpo con respecto al tiempo y T_m es la temperatura del medio y k es la constante de proporcionalidad tal que $k > 0$.

Para resolver la ED vamos a simplificar la notación, escribimos $T = T(t)$, entonces obtenemos

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \Longrightarrow \frac{dT}{T - T_m} = -kdt$$

Integrando tenemos

$$\ln(T - T_m) = -kt + D \Longrightarrow T - T_m = Ce^{-kt}$$

donde $C = e^D$, entonces despejando obtenemos

$$T(t) = T_m + Ce^{-kt}$$

Para determinar el valor de C considere T_i la temperatura inicial del cuerpo, es decir que $T(0) = T_i$, sustituyendo en la solución

$$T_i = T_m + Ce^{-k*0} \Longrightarrow T_i = T_m + C \Longrightarrow C = T_i - T_m$$

Con lo que obtenemos

$$T = T_m + (T_i - T_m)e^{-kt}$$

Entonces la anterior es la ecuación que modela la temperatura de un cuerpo con respecto al tiempo.

Ejemplo 2.11.1. Una taza de café se encuentra a 90 grados en un cuarto a una temperatura de 20 C, pasado 5 minutos la temperatura de la taza es de 80 grados, si se deja la tasa durante 20 minutos más, ¿cual sera su temperatura final?

Trabajaremos el tiempo en minutos, entonces para iniciar calculamos k usando que $T(5) = 80$

$$T = T_m + (T_i - T_m)e^{-kt} \Longrightarrow 82 = 20 + (90 - 20)e^{-5k}$$

$$80 = 20 + (90-20)e^{-5k} \Longrightarrow 80 - 20 = 70e^{-5k} \Longrightarrow 60 = 70e^{-5t}$$
$$\frac{6}{7} = e^{-5k} \Longrightarrow \ln(6/7) = -5k \Longrightarrow k = -\frac{\ln(6/7)}{5} \approx 0.0308$$

Con esto ya podemos calcular la temperatura en $t = 25$

$$T(t) = 20 + 70e^{-0.0308t} \Longrightarrow T(25) = 20 + 70e^{-0.0308*25} = 52.41$$

Entonces la temperatura final es de 52.41 grados.

Ejemplo 2.11.2. Una barra de metal se calienta hasta los 700 grados, y se coloca en una habitación a una temperatura de 20 grados, si una hora después la temperatura de la barra es de 520 grados, cuanto tiempo transcurrirá para que la barra alcance los 100 grados.

Trabajaremos el tiempo en horas, sabemos $T(1) = 520$, entonces

$$T = T_m + (T_i - T_m)e^{-kt} \Longrightarrow 520 = 20 + (700-20)e^{-k}$$
$$\Longrightarrow \frac{500}{680} = e^{-k} \Longrightarrow k = -\ln(500/680) \approx 0.3075$$

Ahora que conocemos el valor de k, debemos despejar t tal que $T(t) = 100$

$$T = T_m + (T_i - T_m)e^{-kt} \Longrightarrow 100 = 20 + (680)e^{-0.3075t}$$

$$\Longrightarrow \frac{80}{680} = e^{-0.3075t} \Longrightarrow \ln(80/680) = -0.3075t$$
$$\Longrightarrow t = -\frac{\ln(80/680)}{0.3075} = 6.96$$

entonces en aproximadamente 7 horas alcanzara la temperatura de 100 grados.

2.11.2. Población

La segunda aplicación que vamos a estudiar son las relacionadas a crecimiento poblacional, iniciando con el modelo exponencial, las suposiciones de este modelo se aproximan mas a una población bacteriana.

El modelo exponencial dice que la tasa de crecimiento de una población es proporcional en el tiempo a la cantidad de individuos presentes

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde $P = P(t)$ representa la población en función del tiempo, resolviendo como una ED de variables separables

$$\frac{dP}{dt} = kP \Longrightarrow \frac{dP}{P} = kdt \Longrightarrow \ln(P) = kt + D$$
$$\Longrightarrow P = Ce^{kt}$$

Tomando como P_0 la población inicial, es decir $P(0) = P_0$ obtenemos

$$P = P_0 e^{kt}$$

Ejemplo 2.11.3. Una población de 40 monos se introducen en una reserva, si 15 meses después la población a crecido hasta los 67 individuos, cuanto tiempo tardara para que la población alcance los 100 individuos.

Vamos a trabajar la unidad de tiempo en meses, entonces tenemos que $P(15) = 62$, con esto tenemos

$$62 = 40e^{15k} \Longrightarrow k = \frac{\ln(62/40)}{15} \approx 0.0292$$

Ahora debemos buscar un t tal que $P(t) = 100$

$$100 = 40e^{0.0292t} \Longrightarrow \ln(100/40) = 0.0292t$$
$$t = \frac{\ln(100/40)}{0.0292} \approx 31.38$$

entonces la población alcanzara los 100 individuos en 31.38 años

El modelo anterior presenta el inconveniente de que si $t \to \infty$ entonces $P(t) \to \infty$, la población nunca deja de crecer, lo cual no es realista, pero podemos hacer modificaciones al modelo para evitar que esto suceda.

El segundo modelo que vamos a estudiar es el modelo logístico, es una modificación al modelo exponencial pero se añade un elemento limitante llamado capacidad de carga (k). Esta se puede entender como la capacidad máxima de individuos que puede soportar el ambiente de una población dada, esta modificación se hace de la siguiente forma

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

donde r es el factor de proporcionalidad y k es la capacidad de carga, ambos son positivos. Con forme la población se acerque a la capacidad de carga K, se tiene que $\left(1 - \dfrac{P}{K}\right) \to 0$, lo cual detiene la tasa de crecimiento y la población se estanca.

Para resolver el modelo procedemos por variables separables

$$\frac{dP}{P\left(1 - \frac{K}{P}\right)} = rdt$$

vea que

$$\frac{1}{P\left(1-\frac{K}{P}\right)}=\frac{K}{P(P-K)}=\frac{K-P+P}{P(K-P)}=\frac{1}{P}+\frac{1}{K-P}$$

con esto se tiene que la solución de la ecuación diferencial es

$$\ln(P)-\ln(K-P)=rt+C$$

despejando $P=P(t)$

$$\ln\left(\frac{P}{K-P}\right)=rt+C\Longrightarrow\frac{P}{K-P}=Ce^{rt}$$

$$\Longrightarrow P=C(K-P)e^{rt}\Longrightarrow P+PCe^{rt}=CKe^{rt}\Longrightarrow P=\frac{CKe^{rt}}{1+Ce^{rt}}$$

Si se usa la condición de frontera $P(0)=P_0$ se tiene que

$$P_0=\frac{CK}{1+C}\Longrightarrow C=\frac{P_0}{K-P_0}$$

Ejemplo 2.11.4. Un lago tiene una población inicial de 100 peces, y pasado 8 meses la población aumento 177 peces, si se estima que el lago puede soportar una población de 2500 peces, determine la población en función del tiempo y determine la cantidad de peses pasado 3 años.

Tenemos que $K=2500$, $P_0=100$ y $P(8)=177$, con K,P_0 calculamos C

$$C=\frac{P_0}{K-P_0}=\frac{100}{2500-100}=\frac{1}{24}$$

con esto

$$P=\frac{\frac{1}{24}(2500)e^{rt}}{1+\frac{1}{24}e^{rt}}=\frac{2500e^{rt}}{24+e^{rt}}$$

para determinar r usamos que $P(8)=177$

$$177=\frac{2500e^{8r}}{24+e^{8r}}\Longrightarrow r\approx 0.07545$$

entonces la población en función del tiempo es

$$P(t)=\frac{2500e^{0.07545t}}{24+e^{0.07545t}}$$

para finalizar como 3 años son 36 meses evaluamos $P(36) = 966.365$ peces.

2.12. Ejercicios

1. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-1)}{x}$$

   tal que $y(1) = 0$

2. Dada la ecuación diferencial

$$y' = \frac{y(2xy+1)}{x(xy-1)}$$

   demuestre que el cambio de variable $u = xy$ transforma la ED en una de variables separables, y resuelva.

3. Resuelta la siguiente ecuación diferencial

$$y' = y^4 \cos(x) + y \tan(x)$$

4. Resuelta la siguiente ecuación diferencial

$$2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$$

5. Determine la solución de

$$\frac{dy}{dx} - y^3 \csc(x) = y \cot(x)$$

6. Encuentre la solución general de

$$(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$$

7. Dada la ecuación diferencial

$$\cos(x)dx + \left(1 + \frac{2}{y}\right)\sin(x)dy = 0$$

   a) Encuentre un factor integrante que haga la ecuación diferencial exacta.

   b) Resuelva la ecuación diferencial.

   Nota: El ejercicio anterior busca resolver la ED como exacta mediante factor integrante, pero note que es mas sencillo resolver como una ED de variables separables.

8. Resuelva la siguiente ED de Bernoulli

$$y' - \sin(x)y = \sin(2x)y^2$$

9. Considere la ecuación diferencial

$$x^2 + y\cos(xy) + x\cos(xy)\frac{dy}{dx} = 0$$

   a) Verifique que el cambio de variable $u = xy$ transforma la ecuación en una de variables separables.

   b) Determine la solución general de la ED.

10. Resuelva la siguiente ED

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - \pi^2}$$

11. Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$\left(\frac{3x^2}{y^2}\tan(y) - \frac{2y}{x^3}\right)dx + \left(\frac{x^3}{y^2}\sec^2(y) + 4y + \frac{3}{x^2}\right)dy = 0$$

   a) Compruebe que la ecuación diferencial **no** es exacta.

   b) Construya un factor integrante de la forma y^m, con $m \in \mathbb{Q}$.

   c) Determine la solución general de la ecuación diferencial.

12. Resuelva las siguientes ED lineales de orden 1.

   a)
$$y' + 2y = x$$

   b)
$$y' - 2xy = 2xe^{x^2}$$

   c)
$$(1 - x^2)y' + y - (1 - x^2)\sqrt{x+1} = 0$$

   d)
$$xy' + 4y = x^3 - x$$

   e)
$$ydx - 4(x + y^6)dy = 0$$

   f)
$$cos(x)y' + \sin(x)y = 1$$

13. Mediante el cambio de variable $u = 3x + 2y$ resuelva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x + 2y}{3x + 2y + 2}$$

14. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

a)
$$\sin(3x)dx + 2y\cos^3(3x)dy = 0$$

b)
$$(\sin(y) - y\sin(x))dx + (\cos(x) + x\cos(y) - y)dy = 0$$

c)
$$y' = \frac{x + 3y}{3x + y}$$

d)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + y}{x^2 + x}$$

e)
$$(e^y + 1)^2 e^{-y}dx + (e^x + 1)^3 e^{-x}dy = 0$$

f)
$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2y + 3}{2x - 1}\right)^2$$

g)
$$\frac{dP}{dt} = P - P^2$$

h)
$$\left(\frac{3y^2 - t^2}{y^5}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{t}{2y^4} = 0$$

i)
$$ydx + x(\ln(x) - \ln(y) - 1)dy = 0$$

j)
$$(x^2 - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$$

k)
$$-ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$$

l)
$$(x + ye^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0$$

m)
$$xyy' + y^2 = 2x$$

n)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$$

ñ)
$$\left(1-\frac{3}{y}+x\right)\frac{dy}{dx}+y=\frac{3}{x}-1$$

o)
$$\frac{dy}{dx}=5y+y^2$$

15. Considere
$$\frac{dy}{dx}-(1-x)y^2=(2x-1)y-x$$
corrobore que $y_1=1$ es solución particular y encuentre la solución general.

16. Considere
$$\frac{dy}{dx}=-y^2\sin(x)+2\tan(x)\sec(x)$$
corrobore que $y_1=\sec(x)$ es solución particular y encuentre la solución general.

17. Considere
$$\frac{dy}{dx}-y^2-6xy=9x^2-3$$
corrobore que $y_1=-3x$ es solución particular y encuentre la solución general.

18. Considere
$$\frac{dy}{dx}-y^2-\frac{2}{x}y=\frac{2}{x^2}$$
corrobore que $y_1=-2/x$ es solución particular y encuentre la solución general.

19. En un recipiente se lleva agua a hervir hasta los 100°C y luego se deja enfriar, pasado un tiempo la temperatura del agua es de 70 grados, y pasados 10 minutos la temperatura es de 50°C, si la temperatura ambiente es de 20°C, entonces

    a) Determine la temperatura en función del tiempo, tome $t=0$ como el momento donde se realiza la primera medida.

    b) Calcule la temperatura tendrá el agua pasado una hora de la primera medida.

    c) Determine cuanto tiempo después de la primera medida la temperatura del agua es 35°C.

    d) Estime cuanto tiempo transcurrió desde que el agua se empezó a enfriar hasta que se tomo la primera medición de temperatura.

20. Una población de bacterias sigue un crecimiento exponencial, se sabe que cada 3.5 horas la población se triplica. Determine el tiempo que le toma a la colonia de bacterias a que la cantidad de bacterias sea 10 veces la poblacional inicial.

21. Un bosque tiene capacidad para albergar 7000 aves. Se asume que la población de todas las diferentes aves se comporta como una sola población que sigue un modelo logístico. Si inicialmente la población es de 2400 aves y pasados 2 años aumento a 3500 aves, determine el tiempo para que la población alcance las 6000 individuos.

3. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

Una ecuación diferencial se dice lineal cuando $y := y(x)$ y sus derivadas no están elevadas a potencias y no están multiplicadas entre ellas.

Este tipo de ecuaciones son importantes en las matemáticas aplicadas y física pues diversos sistemas dinámicos se pueden modelar mediante este tipo de ecuaciones.

3.1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

Definicion 3.1.1. Una ecuación diferencial lineal de orden n es una EDO de la forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0(x)y = f(x) \tag{3.1}$$

donde $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$, $f(x)$ son funciones de x, la ecuación anterior se dice la forma normalizada de la EDL, en el sentido de nada multiplica a la derivada de mayor orden.

Ejemplo 3.1.1. Considere

$$\sin(x)y''' - x^2 y' + 3y = e^x$$

es una ecuación diferencial lineal de orden 3, escrita en forma normalizada se ve como

$$y''' - \frac{x^2}{\sin(x)}y' + 3\frac{y}{\sin(x)} = \frac{e^x}{\sin(x)}$$

Antes de iniciar a resolver las EDL tenemos el siguiente teorema que justifica la existencia de la solución.

Teorema 3.1.1. Existencia y unicidad: Considere el siguiente problema de Cauchy y sea $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, y_0, y_1, \ldots y_{n-1} \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_{n-1}) = y_{n-1} \end{cases}$$

en donde $f(x)$ y $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ son continuas en un intervalo I, donde además $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, entonces el problema de Cauchy tiene solución única en I

Otra definición importante es la EDL homogénea

Definicion 3.1.2. Una ecuación diferencial lineal homogéneas (**EDLH**) es una EDL (3.1) en donde $f(x) = 0$, es decir, es de la forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0(x)y = 0$$

Las soluciones de una EDLH forman un espacio vectorial, esto se resume en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.2. Considere la EDLH

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0(x)y = 0$$

tal que $y_1(x), y_2(x)$ son soluciones, entonces

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ también es solución de la EDLH.

Ejemplo 3.1.2. Considere la ecuación diferencial

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Se puede verificar que $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{-2x}$ son soluciones, y como la ecuación diferencial es una EDLH por lo que tenemos

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-2x}$$

es solución para todo $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Entonces cuando buscamos la solución de una EDLH "buscamos el aporte de todas las soluciones", pero debemos formalizar más esta idea.

Para esto vamos a recortar la definición de conjuntos linealmente independientes (l.i) y linealmente dependientes (l.d), aplicado directamente a funciones

Definicion 3.1.3. Considere el conjunto de funciones

$$A = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\}$$

entonces el conjunto se dice **linealmente independiente** si se cumple que

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_k f_k(x) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad C_1 = C_2 = \cdots = C_k = 0$$

en caso de no ser linealmente independiente, el conjunto se dice **linealmente dependiente**.

De la definición anterior podemos extraer la siguiente idea, en un conjunto l.i, todas las funciones aportan información (cuando realicemos su combinación lineal), pero en un conjunto l.d no, pues existe aunque sea una función que se puede escribir como combinación lineal de las otras.

Para ver esto asuma que $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)\}$ es l.d, entonces, entonces podemos escribir

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_k f_k(x) = 0$$

de tal manera que por lo menos algún $C_i \neq 0$, sin perdida de generalidad asuma que $C_1 \neq 0$, entonces podemos escribir

$$f_1(x) = -\frac{C_2}{C_1} f_2(x) - \frac{C_3}{C_1} f_3(x) + \ldots - \frac{C_k}{C_1} f_k(x)$$

por lo que $f_1(x)$ se puede escribir combinación lineal de $\{f_2(x), f_3(x), \ldots, f_k(x)\}$. Para determinar si un conjunto de funciones es li no vamos a usar la definición 3.1.3, para eso usaremos el Wronskiano.

Definicion 3.1.4. Wronskiano: Considere el conjunto de funciones

$$\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$$

definidas en un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ en donde cada una de ellas es $n-1$ veces derivables, se define su Wronskiano como el siguiente determinante

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Vea que tenemos n columnas, una por cada función, y n filas, una para las funciones originales y $n-1$ filas adicionales para sus derivadas, por lo que la matriz obtenida es cuadrada y tiene sentido calcular su determinante.

Antes de cualquier ejemplos veamos el siguiente teorema

Teorema 3.1.3. Considere el conjunto de funciones $\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$, definidas en un intervalo $I \in \mathbb{R}$, entonces son linealmente independiente si y solo si

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) \neq 0$$

para algún $x \in I$

Ejemplo 3.1.3. Determine si el conjunto de funciones $\{1, x\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}$, calculando el Wronskiano tenemos

$$W(1, x) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

por lo que se concluye que si son linealmente independientes.

Ahora veamos un caso de 3 funciones.

Ejemplo 3.1.4. Demuestre que el conjunto $\{1, x, x^2\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}$. Para esto corroboramos que el wronskiano sea distinto de 0.

$$W(1, x, x^2) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

En general se puede demostrar que el conjunto $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es linealmente independiente, más aún, este conjunto es la bases canónica del espacio vectorial de los polinomios de grado n.

Ejemplo 3.1.5. Demuestre que e^x, e^{2x} sin linealmente independientes, calculando el wronskiano tenemos

$$W(e^x, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^x(2e^{2x}) - e^x e^{2x} = e^{3x} \neq 0$$

por lo que el conjunto de funciones el linealmente independientes.

Veamos el caso de un conjunto que es linealmente dependiente

Ejemplo 3.1.6. Considere el conjunto $\{x, e^x, x+2e^x\}$, es fácil ver que la tercera función es combinación lineal de las dos primeras, por lo que sabemos que el conjunto es linealmente dependiente, pero corroboremos esto con el wronskiano

$$W(x, e^x, x+2e^x) = \begin{vmatrix} x & e^x & x+2e^x \\ 1 & e^x & 1+2e^x \\ 0 & e^x & 2e^x \end{vmatrix} =$$

$$x\begin{vmatrix} e^x & 1+2e^x \\ e^x & 2e^x \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} e^x & x+2e^x \\ e^x & 2e^x \end{vmatrix} = x[2e^{2x} - e^x(1+2e^x)] - [2e^{2x} - e^x(x+2e^x)]$$

$$x(-e^x) - (-xe^x) = 0$$

por lo que el conjunto es linealmente dependiente.

Con las definiciones que tenemos hasta el momento ya nos es posible definir la solución general de una EDLH.

Definicion 3.1.5. Considere la EDLH de orden n

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

entonces a cualquier conjunto de n funciones $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ de tal manera que cumple

1. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones de la EDLH
2. El conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es linealmente independiente

entonces el conjunto $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ se llama el **conjunto fundamental de soluciones**.

Note que el conjunto fundamental de soluciones no es único (este conjunto es una base de un subespacio vectorial y sabemos que las bases no son únicas), ahora el porque del nombre de conjunto fundamental de soluciones se justifica con el siguiente teorema.

Teorema 3.1.4. Considere la EDLH

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

y sea $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones, entonces la solución general es combinación lineal del conjunto fundamental de soluciones, es decir

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

donde $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ es la solución general de la ecuación diferencial.

Dicho de otra manera, el conjunto fundamental de soluciones es una base del espacio vectorial formado por las soluciones de la EDLH, y este tiene dimensión n.

Con esto ya podemos iniciar a resolver ecuaciones diferenciales lineales.

3.2. Identidad de Abel

Considere una ecuación diferencial de orden 2, entonces su solución general es generada por dos funciones linealmente independientes, algo que se puede demostrar es el siguiente teorema

Teorema 3.2.1. Sea y_1, y_2 dos funciones linealmente independientes, entonces su cociente y_1/y_2 no es constantes, es decir

$$\frac{y_1}{y_2} = u(x)$$

en donde $u(x)$ no es una función constante.

Si conocemos una solución no trivial de la EDL y_1, podemos tomar el cambio de variable $y = u(x)y_1$ para obtener una ecuación diferencial lineal de orden 1 que se puede resolver con lo estudiando en las secciones anteriores.

Pero podemos generalizar lo anterior para obtener el siguiente teorema.

Teorema 3.2.2. Sea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

tal que y_1 es solución, entonces tenemos que el conjunto fundamental de soluciones es $\{y_1, y_2\}$ en donde

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{\int -p(x)dx}}{y_1^2} dx$$

lo cual es equivalente a que la solución general es

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Ejemplo 3.2.1. Considere la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0$$

demuestre que $y_1 = x^2$ es solución y encuentre la solución general.

Para probar que y_1 es solución debemos sustituirlo en la ED, para esto vea que $y_1' = 2x$ y $y_1'' = 2$, sustituyendo

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0 \Longrightarrow x^2(2) + x(2x) - 4x^2 = 0 \Longrightarrow 2x^2 + 2x^2 - 4x^2 = 0$$
$$\Longrightarrow 4x^2 - 4x^2 = 0 \Longrightarrow 0 = 0$$

por lo tanto es solución, además tenemos que $a_2 = x^2$ y $a_1 = x$, por lo que $a_1/a_2 = 1/x$, entonces integrando

$$e^{-\int a_1/a_2 dx} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$$

con esto, ahora calculamos

$$y_2 = x^2 \int \frac{1/x}{(x^2)^2} dx = x^2 \int x^{-5} dx = x^2 \left(\frac{x^{-4}}{-4} \right) = \frac{-x^{-2}}{4} = \frac{-1}{4x^2}$$

por lo que la solución es

$$y = C_1x^2 + C_2\frac{-1}{4x^2}$$

C_2 puede absorbe las constantes por lo que podemos escribir lo anterior como

$$y = C_1x^2 + C_2\frac{1}{x^2}$$

Ejemplo 3.2.2. Considere la siguiente ecuación diferencial

$$x^2\ln^2(x)y'' - 2x\ln(x)y' + (\ln(x) + 2)y = 0$$

demuestre que $y = \ln(x)$ es solución y resuelva la ED.

Tenemos que $y' = 1/x$ y $y'' = -1/x^2$, sustituyendo en la ED.

$$x^2\ln^2(x)\left(\frac{-1}{x^2}\right) - 2x\ln(x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln(x) + 2)\ln(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \ln^2(x) - 2\ln(x) + \ln^2(x) + 2\ln(x) = 0 \Longrightarrow 0 = 0$$

ahora, tenemos que $a_2 = x^2\ln(x)^2$ y $a_1 = -2x\ln(x)$, por lo que $-a_1/a_2 = \dfrac{2}{x\ln(x)}$, vea que

$$\int -\frac{a_1}{a_2}dx = \int \frac{2}{x\ln(x)}dx$$

tomando $u = \ln(x)$ y $du = \dfrac{dx}{x}dx$ tenemos

$$2\int \frac{du}{u} = 2\ln(u) = 2\ln(\ln(x))$$

entonces con esto

$$y_2 = \ln(x)\int \frac{e^{2\ln(\ln(x))}}{\ln^2(x)} = \ln(x)\int \frac{\ln^2(x)}{\ln^2(x)}dx$$
$$= \ln(x)\int dx = x\ln(x)$$

por lo que la solución es

$$y = C_1\ln(x) + C_2 x\ln(x)$$

Ejemplo 3.2.3. Considere la ecuación diferencial

$$y'' + y'\tan(x) - 6y\cot^2(x) = 0$$

Compruebe que $y = \sin^3(x)$ es solución y determine la solución general de la ED.

Para corroborar que es solución calculamos

$$y = \sin^3(x) \qquad y' = 3\sin^2(x)\cos(x)$$
$$y'' = 3[(2\sin(x)\cos(x))\cos(x)] - \sin^3(x) = 6\sin(x)\cos^2(x) - 3\sin^3(x)$$

entonces, sustituyendo

$$y'' + y'\tan(x) - 6y\cot^2(x) = 0 \Longrightarrow$$
$$(6\sin(x)\cos^2(x) - 3\sin^3(x)) + (3\sin^2(x)\cos(x))\tan(x) - 6\sin^3(x)\cot^2(x) = 0$$

recordemos que

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

entonces

$$(6\sin(x)\cos^2(x) - 3\sin^3(x)) + (3\sin^2(x)\cos(x))\frac{\sin(x)}{\cos(x)} - 6\sin^3(x)\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 0$$

$$\cancel{6\sin(x)\cos^2(x)} - \cancel{3\sin^3(x)} + \cancel{3\sin^3(x)} - \cancel{6\sin(x)\cos^2(x)} = 0 \Longrightarrow 0 = 0$$

por lo que es solución, ahora de la ecuación diferencial identificamos $a_1 = \tan(x)$ y $a_2 = 1$, entonces $-a_1/a_2 = -\tan(x)$, calculando primero

$$e^{\int -a_1/a_2 dx} = e^{-\int tan(x)dx} = e^{\ln(\cos(x))} = \cos(x)$$

ahora calculando

$$\int \frac{e^{-\int a_1/a_2} dx}{y_1^2} dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin^6(x)} dx$$

para esto tome $u = \sin(x)$ y por lo tanto $du = \cos(x)dx$, para obtener

$$\int \frac{du}{u^6} = -\frac{1}{5u^5} = -\frac{1}{5\sin^5(x)}$$

con lo que

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1/a_2} dx}{y_1^2} dx = \sin^3(x)\Big(-\frac{1}{5\sin^5(x)}\Big) = -\frac{1}{5}\csc^2(x)$$

Por lo que la solución general es

$$y = C_1 \sin^3(x) + C\Big(-\frac{1}{5}\csc^2(x)\Big)$$

pero es mejor escribirlo como

$$y = C_1 \sin^3(x) + C_2 \csc^2(x)$$

en donde $C_2 = -\dfrac{1}{5}C$

Ejemplo 3.2.4. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$(1-2x-x^2)y''+2(x+1)y'-2y=0$$

si se sabe que $y_1 = x+1$ es solución.

Normalizando la EDL se tiene que

$$p(x)=\frac{2(x+1)}{-x^2-2x+1}=$$

con esto se tiene que

$$\int p(x)dx=\int\frac{2(x+1)}{-x^2-2x+1}dx$$

tomando $u=-x^2-2x+1$ y por ende $du=(-2x-2)dx=-2(x+1)dx$ se tiene

$$\int\frac{-du}{u}=-\ln(u)=-ln(-x^2-2x+1)$$

con esto

$$\int\frac{e^{-p(dx)}}{y_1^2}dx=\int\frac{e^{-(-\ln(-x^2-2x+1)}}{(x+1)^2}dx=\int\frac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2}$$

La integral anterior se puede resolver al aplicar división de polinomios, pero vea que

$$-x^2-2x+1=-x^2-2x+{\color{red}-1}+1+{\color{red}1}=-(x^2+2x+1)+2=-(x+1)^2+2$$

con esto podemos retomar la integral

$$\begin{aligned}\int\frac{-x^2-2x+1}{(x+1)^2}=\int\frac{-(x+1)^2+2}{(x+1)^2}dx&=-\int dx+2\int\frac{dx}{(x+1)^2}\\&=-x+\frac{-2}{(x+1)}\end{aligned}$$

con lo que

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx=(x+1)\left(-x-\frac{2}{(x+1)}\right)=-x(x+1)-2=-(x^2+x+2)$$

con esto la solución general es

$$y = C_1(x+1) + C_2[-(x^2+x+2)] = C_1(x+1) + C_2(x^2+x+2)$$

donde C_2 toma el menos.

3.3. Operador diferencial y anuladores

Definicion 3.3.1. El operador diferencial Denotemos por $\mathcal{C}^1$ es espacio de las funciones que son diferenciales, entonces tenemos que el operador Diferenciales un operador

$$D : \mathcal{C}^1 \to \mathcal{C}$$

tal que

$$D(f(x)) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

A este operador también lo llamaremos el operador D.

Ejemplo 3.3.1. Calcule $D(e^x + 4x\ln(x))$

Entonces tenemos

$$D(e^x + 4x\ln(x)) = D(e^x) + 4D(x\ln(x)) = e^x + 4(\ln(x) + 1)$$

Podemos interpretar D^n como derivar una función n veces.

Ejemplo 3.3.2. Calcule $D^2(x^2 + e^x)$

Tenemos

$$D^2(x^2 + e^2) = D^2(x^2) + D^2(e^x) = D(2x) + D(e^x) = 2 + e^x$$

El operador D realmente es una función (mas específicamente un operador lineal), pero dadas sus propiedades y para simplificar nuestros procedimientos lo tomaremos como un término que cuando multiplica una función se encarga de derivarla.

Ejemplo 3.3.3. Calcule $(D^2 + 1)(\sin(x) + e^{3x})$

Distribuyendo tenemos

$$(D^2 + 1)(\sin(x) + e^{3x}) = D^2(\sin(x) + e^{3x}) + (\sin(x) + e^{3x})$$
$$= D^2(\sin(x)) + D^2(e^{3x}) + (\sin(x) + e^{3x}) = D(\cos(x)) + 3D(e^{3x}) + (\sin(x) + e^{3x})$$

$$= -\sin(x) + 9e^{3x} + \sin(x) + e^{3x} = 10e^{3x}$$

Como el operador D se encarga de derivar solo tiene sentido hablar de D^n con $n \in \mathbb{N}$, esto quiere decir que solo podemos formar polinomios con el operador D.

Definicion 3.3.2. Anulador Considere una función $f(x)$, su anulador, en caso de existir, es el polinomio de menor grado $N(D)$ tal que

$$N(D)f(x) = 0$$

Ejemplo 3.3.4. Considere la función $f(x) = e^{\alpha x}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces su anulador es $N(D) = D - \alpha$, en efecto vea que

$$N(D) = (D - \alpha)(e^{\alpha x}) = D(e^{\alpha x}) - \alpha e^{\alpha x}$$
$$\alpha e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x} = 0$$

Ejemplo 3.3.5. Sea $f(x) = 2x^3$, entonces su anulador es D^4, en efecto

$$D^4(2x^3) = D^3(6x^2) = D^2(12x) = D(12) = 0$$

en general el anulador de un polinomio de grado n es D^{n+1}

Una tabla de los funciones que poseen anulador (existen funciones sin anulador, por ejemplo $\tan(x)$) y su respectivo anulador se muestra a continuación

Función $f(x)$	Anulador $N(D)$	Observación
1	D	
$e^{\alpha x}$	$D - \alpha$	$\alpha \in \mathbb{R}$
$\cos(\beta x), \sin(\beta x)$	$D^2 + \beta^2$	$\beta > 0$
$e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$(D-\alpha)^2 + \beta^2$	$\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$
$1, x, x^2, \ldots, x^n$	D^{n+1}	$n \in \mathbb{N}$
$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \ldots, x^n e^{\alpha x}$	$(D-\alpha)^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$
$x^n\cos(\beta x), x^n\sin(\beta x)$	$(D^2+\beta^2)^{n+1}$	$\beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
$x^n e^{\alpha x}\cos(\beta x), x^n e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$((D-\alpha)^2+\beta^2)^{n+1}$	$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Cosas importantes a tener en cuenta, el anulador no se ve afectado por constantes (esto se debe a que las constantes salen de las derivadas), entonces si $N(D)$ anula a $f(x)$, $N(D)$ también anula a $g(x) = kf(x)$ para todo $k \neq 0$.

Otro aspecto a tener en cuenta es que los polinomios de grado n se consideran como un x^n, por lo que solo nos interesa el grado mayor para determinar el anulador.

Ejemplo 3.3.6. Las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = 3x^3 - 2x - 1$ y $h(x) = 7x^3 - x^2 + 3x + 1$ tiene todas por anulador D^4 pues son todas polinomios de grado 3.

Teorema 3.3.1. Sea $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tal que $N_1(D)$ anula $f(x)$ y $N_2(D)$ anula $g(x)$, entonces el anulador de

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

es

$$N(D) = N_1(D)N_2(D)$$

Ejemplo 3.3.7. Determine el anulador de $f(x) = xe^{3x} + x + \cos(3x)$

Tenemos que el anulador de xe^{3x} es $(D-3)^2$, el anulador de x es D^2 y el anulador de $\cos(3x)$ es $D^2 = 9$ por lo que el anulador de $f(x)$ es

$$(D-3)^2 D^2 (D^2 + 9)$$

3.4. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes

Una gran familia de ecuaciones diferenciales que podemos resolver son las **ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de coeficientes constantes** (EDLHCC).

Definicion 3.4.1. Una ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes (EDLHCC) es de la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{3.2}$$

en donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

Según la definición de EDL 3.1, decimos que es homogénea pues $f(x) = 0$, y de coeficientes constantes porque los coeficientes $a_i(x)$ con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ son valores constantes en $\mathbb{R}$.

Vea que 3.2 se puede escribir usando el operador D de la forma

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0) y = 0$$

en donde $P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$ es un polinomio con respecto a D, y este polinomio es el que utilizaremos para resolver las EDLHCC.

Definicion 3.4.2. Considere la EDLHCC

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0) y = 0$$

entonces llamamos a $P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$ la **ecuación característica.**

Ejemplo 3.4.1. La ED $y'' + 3y' + 6y = 0$ se escribe como

$$(D^2 + 3D + 6)y = 0$$

en donde $D^2 + 3D + 6$ es la ecuación característica

Otra forma de denotar a las EDLHCC es escribiendo

$$P(D)y = 0$$

en donde $P(D)$ es la ecuación característica. Ademas $P(D)$ es el anulador de y, por lo que la solución son aquellas funciones que puede anular $P(D)$.

Las raíces de la ecuación característica nos dará la forma de la solución general de la EDLHCC, veamos el primer caso.

Teorema 3.4.1. Sea $P(D)y = 0$ una EDLHCC de orden n, en la cual su polinomio característico tiene n raíces reales ($\mathbb{R}$) distintas $\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$, entonces la solución general de la ED es

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots C_n e^{r_n x}$$

o equivalente, el conjunto fundamental de soluciones es

$$\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}\}$$

Ejemplo 3.4.2. Considere la ED $y''' - y'' + 6y' = 0$ que tiene por ecuación característica $D^3 - D^2 - 6D$, buscando sus raíces

$$D^3 - D^2 - 6 = D(D^2 - D - 6) = D(D + 2)(D - 3) = 0$$

de donde las raíces son $D = \{-2, 0, 3\}$, y por lo tanto la solución es

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 \cancelto{1}{e^{0x}} + C_3 e^{3x} = C_1 e^{-2x} + C_2 + C_3 e^{3x}$$

Ejemplo 3.4.3. Para la ED $y^{(3)} - 3y'' - 33y' + 35y = 0$ tiene por ecuación característica $D^3 - 3D^2 - 33D + 35 = 0$, y cuyas raíces son $D = \{-5, 1, 7\}$, entonces la solución general es

$$y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^x + C_3 e^{7x}$$

Para ver más casos debemos definir la multiplicidad algebraica de una raíz, que se puede interpretar como la cantidad de veces que se repite un raíz como solución de un polinomio.

Definicion 3.4.3. Considere $P(D)$ un polinomio de grado n, entonces $P(D)$ se puede escribir como

$$P(D) = (D - r_1)^{n_1}(D - r_2)^{n_2} + \cdots (D - r_k)^{n_k}$$

donde $r_1, \cdots, r_k$ son raíces distintas del polinomio y $n_1 + n_2 + \cdots n_r = n$, entonces se dice que la raíz r_i tiene multiplicidad algebraica n_i.

Teorema 3.4.2. Sea $P(D)y = 0$ un polinomio de grado n con k raíces $\{r_1, r_2, \cdots, r_k\}$ donde r_i tiene multiplicidad n_i y $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, entonces cada r_i aporta a la solución general

$$C_1 e^{r_i x} + C_2 x e^{r_i x} + C_3 x^2 e^{r_i x} + \cdots C_{n_i} x^{n_i - 1} e^{r_i x}$$

y la solución general es la suma de todos los aportes de las k raíces.

en una forma más sencilla de interpretarlo, si una raíz aparece r veces con r mayor a 1, entonces esa raíz debe aparecer en la solución general r veces, pero por cada vez que se repite la multiplicamos por x.

Ejemplo 3.4.4. Considere $y^{(4)} - 2y^{(3)} = 0$, donde la ecuación característica es $D^4 - 2D^3$, simplificando

$$D^4 - 2D^3 = D^3(D - 2) = 0$$

por lo que $D = 0$ tiene multiplicidad 3 y $D = 2$ tiene multiplicidad 1, entonces tenemos que la solución es

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 x^2 e^{0x} + C_4 e^{2x} = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{2x}$$

Ejemplo 3.4.5. Resuelva $y^{(4)} - 4y^{(3)} - 2y'' + 12y' + 9y = 0$

Tenemos que la ecuación característica es $D^4 - 4D^3 - 2D^2 + 12D + 9$ que tiene por raíces $D = 3$ y $D = -1$ obtenidas con la calculadora, el problema es que ocupamos 4 raíces, por lo que alguna de las anterior (o ambas) esta repetida. Una forma de saber la multiplicidades es ir simplificando el polinomio usando las raíces que conocemos y división sintética, usemos $D = 3$ (la selección es arbitraria, también se puede iniciar por $D = 1$), entonces

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -4 & -2 & 12 & 9 \\
3 & & 3 & -3 & -15 & -9 \\
\hline
 & 1 & -1 & -5 & -3 & 0
\end{array}
$$

por lo que el polinomio se factoría como $(D-3)(D^3 - D^2 - 5D - 3)$, donde el segundo polinomio tiene por raíces $D = 3$ y $D = -1$ de la calculadora, pero es de grado 3 y solo tenemos 2 raíces, por lo que podemos volver a aplicar la división sintética usando nuevamente $D = 3$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1 & -5 & -3 \\
3 & & 3 & 6 & 3 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 0
\end{array}
$$

Entonces el polinomio se factoriza como $(D-3)^2(D^2 + 2D + 1)$ donde en calculadora el segundo polinomio solo tiene por raíz $D = 1$, y como es de grado dos entonces $D = -1$ tiene multiplicidad 2, y del término $(D-3)^2$ es claro que $D = 3$ tiene multiplicidad 2, ya conociendo esto tenemos que la solución general es

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$$

Ejemplo 3.4.6. Considere la ED $y''' - 2y'' - 15y' + 36y = 0$ que tiene por EC $D^3 - 2D^2 - 15D + 36$ y usando calculadora las raíces son $D = -4$ y $D = 3$, como es de grado 3 y solo tenemos 2 raíces entonces alguna debe estar repetida, usando $D = -4$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & -15 & 36 \\
-4 & & -4 & 24 & -36 \\
\hline
 & 1 & -6 & 9 & 0
\end{array}
$$

entonces nuestra EC es $(D+4))(D^2 - 6D + 9)$, donde el segundo polinomio solo tiene por raíz $D = 3$, y como es de grado dos sabemos que debe tener multiplicidad 2, mientras que $D = 4$ tiene multiplicidad 1, entonces la solución general es

$$y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + C_3e^{-4x}$$

Ejemplo 3.4.7. Resuelva $(D^4 + 4D^3 + 6D^2 + 4D + 1)y = 0$

Ya tenemos la ecuación característica, calculado las raíces de $D^4+4D^3+6D^2+4D+1 = 0$ usando calculadora solo obtenemos $D = -1$, y como el polinomio es de grado 4 entonces esta raíz debe tener multiplicidad 4, por lo tanto la solución general es

$$y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x} + C_4x^3e^{-x}$$

Ejemplo 3.4.8. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} - 9y^{(3)} + 23y'' + 24y' - 36y = 0$$

si ya se sabe que $D = 3$ es raíz de la ecuación característica.

La ecuación característica es $D^5 - 3D^4 - 9D^3 + 23D^2 + 24D - 36$, la mayoría de las calculadora no puede resolver polinomios de grado 5, pero sabemos que $D = 3$ es solución, entonces aplicando división sintética

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -3 & -9 & 23 & 24 & -36 \\ 3 & & 3 & 0 & -27 & -12 & 36 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & -4 & 12 & 0 \end{array}$$

por lo que la ecuación característica se reescribe como $(D-3)(D^4 - 9D^2 - 4D + 12)$, ahora tenemos un polinomio de grado 4, con calculadora tenemos que las raíces son $D = \{-2, 1, 3\}$, como es un polinomio de grado 4 y solo tenemos 3 raíces alguna de estas debe estar repetida, escogemos alguna raíz para aplicar la división sintética, tomando $D = 1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -9 & -4 & 12 \\ 1 & & 1 & 1 & -8 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -8 & -12 & 0 \end{array}$$

Por lo que la ecuación característica se factoriza a $(D-3)(D-1)(D^3 + D^2 - 8D - 12)$, donde las raíces del polinomio de grado 3 son $D = \{-2, 3\}$, por lo que nos falta información para determinar la multiplicidad de las raíces, aplicando nuevamente división sintética con $D = 3$.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -8 & -12 \\ 3 & & 3 & 12 & 12 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

entonces la ecuación característica se reescribiré como $(D-3)^2(D-1)(D^2+4D+4)$, donde el polinomio de grado 2 tiene solo por raíces $D=-2$, por lo que esta debe tener multiplicidad 2, y se ve que $D=3$ tiene multiplicidad 2 y $D=1$ multiplicidad 1, entonces la solución es

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + C_3 e^{x} + C_4 e^{3x} + C_5 x e^{3x}$$

El caso que nos falta por estudiar es cuando la ecuación característica tiene raíces son complejas. En los polinomios de coeficientes reales, que son los que estudiamos en el curso, en caso de tener una raíz compleja, el conjugado de dicha raíz también es solución, es decir, si una raíz es $D=a+ib$, entonces $D=a-ib$ también es raíz de la ecuación característica.

Teorema 3.4.3. Sea $P(D)y=0$ un polinomio tal que entre sus raíces tenemos $D=a\pm ib$, entonces estas aportan a la solución los términos

$$e^{ax}(C_1\cos(bx)+C_2\sin(bx))$$

algo a mencionar es que $D=a\pm ib$ en el fondo son dos raíces con multiplicidad 1, por eso lo que aportan a la solución general tiene dos constantes, pues toma en cuenta las dos raíces.

El porque las raíces complejas aportan senos y cosenos se debe a la formula se debe a la formula de Euler que dice

$$e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$$

Ejemplo 3.4.9. Considere la ED $y''+4y=0$, que tiene por ecuación característica $D^2+4=0$, cuyas raíces son $D=\pm 2i$, identificando con la forma $D=a\pm ib$ tenemos que $a=0$ y $b=2$, entonces la solución es

$$y = e^{0x}[C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)] = C_1\cos(2x)+C_2\sin(2x)$$

Ejemplo 3.4.10. Resuelva $y^{(3)}-4y''+6y'-4y=0$.

La ecuación diferencial tiene por ecuación característica $D^3-4D^2+6D-4=0$, cuyas raíces son $D=2$ y $D=1\pm i$, como el polinomio es de grado 3 ocupamos 3 raíces, para el numero complejo tenemos $a=b=1$, entonces la solución es

$$y = C_1 e^{2x} + e^x[C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x)]$$

Ahora, solo hemos visto el caso cuando las raíces complejas tiene multiplicidad algebraica 1, recuerde que $D = a \pm ib$ son dos raíces de multiplicidad algebraica 1, pero la multiplicidad puede ser mayor que 1, en estos casos se usan la misma idea de raíces repetidas de multiplicarlos por x.

Ejemplo 3.4.11. Resuelva la ecuación diferencial

$$y^{(4)} - 8y^{(3)} + 26y'' - 40y' + 25y = 0$$

Tenemos que la ecuación característica es $D^4 - 8D^3 + 26D^2 - 40D + 25$ la calculadora dice que la raíces son $D = 2 \pm i$, como el polinomio es de grado 4, y cada raíz compleja debe venir acompañada de su conjugado, no queda de otra que cada raíz compleja tenga multiplicidad algebraica 2, entonces la solución general es

$$y = e^{2x}[C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)] + xe^{2x}[C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x)]$$

3.5. Coeficientes indeterminados

Para iniciar tomamos la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes (no homogénea)

$$P(D)y = f(x)$$

Sea y_h (llamada solución homogénea) la solución del sistema homogéneo, es decir, la solución de

$$P(D)y = 0$$

y sea y_p (llamada solución particular) una función que satisface

$$P(D)y_p = f(x)$$

La solución general de la EDLCC es $y = y_h + y_p$, para y_h sabemos como calcularla, para determinar la forma de y_p vamos a usar el método de coeficientes indeterminados.

Para esto usando $f(x)$ vamos a **proponer** una solución particular, y después debemos comparar nuestro solución propuesta con la solución homogénea, pues no se pueden repetir funciones en ambas soluciones, por lo que si existe una función repetida se debe multiplicar por x hasta que ya no se repita.

Veamos los casos de como ir proponiendo y_p, iniciemos cuando $f(x)$ es un polinomio de grado m, entonces se propone y_p como un polinomio de grado m con sus **coeficientes indeterminados**, es decir $y_p = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots A_mx^m$. Observe que solo nos interesa el grado del polinomio a la hora de proponer y_p.

Veamos ejemplos donde solo propones la solución particular.

Ejemplo 3.5.1. Considere la ED $P(D)y = x^2 + 3$, como $f(x) = x^2 + 3$ es un polinomio de grado 2, entonces se propone

$$y_p = A + Bx + Cx^2$$

la ecuación diferencial $P(D)y = 3x^2 - 2x$ propone el mismo y_p, esto porque solo nos interesa el grado del polinomio, y ambos son de grado 2.

Ejemplo 3.5.2. Considere $P(D)y = x^6$, como $f(x) = x^6$ un polinomio de grado 6, entonces se propone un polinomio de grado 6 con coeficientes indeterminados.

$$y_p = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6$$

El segundo caso que vamos a estudiar es cuando $f(x) = e^{\lambda x}$ es una función exponencial, en este caso se propone $y_p = Ae^{\lambda x}$

Ejemplo 3.5.3. Considere $P(D)y = e^x$, como $f(x) = e^x$ se propone

$$y_p = Ae^x$$

Ejemplo 3.5.4. Considere $P(D)y = -3e^{4x}$, como $f(x) = -3e^{4x}$, entonces se propone

$$y_p = Ae^{4x}$$

observe que solo nos interesa el hecho de que es un exponencial, la constante que multiplica al exponencial en $f(x)$ no afecta a la propuesta de y_p.

Si existen funciones de diferentes tipos, entonces cada una de ellas aporta a la solución particular propuesta.

Ejemplo 3.5.5. Considere $P(D)y = e^{3x} + 2e^{2x} + x^2$, vea que $f(x) = e^{3x} + e^{2x} + x^2$, es suma de un dos exponenciales y un polinomio de grado 3, entonces se propone

$$y_p = Ae^{3x} + Be^{2x} + Cx^2 + Dx + E$$

Si siguiente caso es cuando $f(x) = \sin(\beta x)$ o $f(x) = \cos(\beta x)$ o $f(x) = \cos(\beta x) + \sin(\beta x)$ pues estas 3 funciones proponen el mismo y_p, y se propone $y_p = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)$

Ejemplo 3.5.6. Considere $P(D)y = cos(3x)$, entonces se propone

$$y_p = Acos(3x) + B\sin(3x)$$

Ejemplo 3.5.7. Considere $P(D)y = 2\cos(3x) + 3\sin(3x)$, en este caso $f(x) = 2\cos(3x) + 3\sin(3x)$, pero como en ambas funciones trigonométricas están evaluadas en $3x$, se comportan como una sola a la hora de proponer y_p y proponen

$$y_p = A\cos(3x) + B\sin(3x)$$

Ejemplo 3.5.8. Considere la EDL $P(D)y = \cos(3x) + 7\sin(7x)$, en este caso $f(x) = \cos(3x) + 7\sin(7x)$, ambas funciones trigonométricas están evaluadas en distintos valores, por lo que para proponer y_p se comportan como dos funciones distintas, entonces se propone

$$y_p = A\cos(3x) + B\sin(3x) + C\cos(7x) + D\sin(7x)$$

Ejemplo 3.5.9. Considere la EDL

$$P(D)y = x^2 + 3e^{3x} + \cos(4x) + 2$$

debemos recordar que los polinomios se toman como uno para proponer la solución particular, entonces reacomoando, tenemos que

$$f(x) = x^2 + 2 + 3e^{3x} + \cos(4x)$$

que es la suma de un polinomio de grado 2, que propone un polinomio de grado 2 con coeficientes indeterminados, un exponencial de $3x$, que propone un exponencial de $3x$ con coeficientes indeterminados y el $\cos(4x)$, que propone tanto un seno como un coseno con coeficientes indeterminados.

$$y_p = A + Bx + Cx^2 + De^{3x} + E\cos(4x) + F\sin(4x)$$

Todos los ejemplos que hemos vistos son sumas de los 3 tipos de funciones que estamos trabajando, ahora veamos que pasa con el producto de estás funciones para proponer la solución particular, veamos el caso $f(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ o $f(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, entonces se propone

$$y_p = e^{\alpha x}[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]$$

Ejemplo 3.5.10. Considere $P(D)y = e^{2x}\cos(3x)$, entonces se propone

$$y_p = e^{2x}[A\cos(3x) + B\sin(3x)]$$

Los casos que nos faltan ver son el producto de polinomios con exponencial o con funciones trigonométrica, y el producto de las 3 juntas.

El siguiente caso es el producto de un polinomio de grado n con un exponencial, es decir, considere $f(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0)e^{\lambda x}$ donde $a_i \in \mathbb{R}$ para $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ y $a_n \neq 0$, entonces se propone

$$y_p = (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_n x^n)e^{\lambda x}$$

Ejemplo 3.5.11. Considere la EDL $P(D)y = x^2 e^{5x} + 2e^{4x} + x^2$, tenemos 3 funciones distintas, una es un exponencial multiplicado por un polinomio de grado 2, un exponencial solo y un polinomio de grado 2 solo, entonces para $f(x) = x^2 e^{5x} + e^{4x} + x^2$, entonces se propone

$$y_p = e^{5x}(Ax^2 + Bx + C) + De^{4x} + Ex^2 + Fx + G$$

El caso de un polinomio de grado n por seno o coseno es similar al caso del exponencial, solo que cada una de estas funciones trigonométricas estará multiplicada por un polinomio de grado n, donde los polinomios que multiplicada cada función tiene distintos coeficientes.

Es decir, si tenemos que $f(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)\sin(\beta x)$ o $f(x) = (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)\cos(\beta x)$ entonces se propone

$$y_p = (A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)\sin(\beta x) + (B_n x^n + \cdots + B_1 x + B_0)\cos(\beta x)$$

Ejemplo 3.5.12. Considere $P(D)y = x^2\cos(x)$, entonces tenemos un $\cos(x)$ multiplicado por un polinomio de grado 2, entonces

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)\cos(x) + (Ex^2 + Fx + G)\sin(x)$$

Ejemplo 3.5.13. Considere $P(D)y = x^2 e^x + e^x + 2xcos(3x) + x$ antes debemos ver que $f(x) = x^2 e^x + e^x + 2cos(3x) + x = (x^2 + 1)e^x + 2x\cos(3x) + x$, un polinomio de grado un multiplicando un exponencial, un coseno y un polinomio de grado 1 por lo tanto

$$y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^x + (Dx + E)\cos(3x) + (Fx + G)\sin(3x) + Hx + I$$

El caso final seria el producto de un polinomio de grado n, un exponencial y un seno o un coseno, es decir si $f(x) = (a_n x^n + \cdots a_0)e^{\lambda x}\cos(\beta x)$ o $f(x) = (a_n x^n + \cdots a_0)e^{\lambda x}\sin(\beta x)$, en este caso la solución particular propuesta es:

$$y_p = (A_0 + A_1x + \cdots A_nx^n)e^{\lambda x}\cos(\beta x) + (B_0 + B_1x + \cdots B_nx^n)e^{\lambda x}\sin(\beta x)$$

Ejemplo 3.5.14. Considere $P(D)y = xe^{2x}\cos(7x)$, entonces tenemos un polinomio de grado 1 multiplicado por un coseno y una función exponencial, entonces tenemos

$$y_p = (Ax + B)e^{2x}\cos(7x) + (Cx + D)e^{2x}\sin(7x)$$

Hasta el momento solo sabemos como proponer y_p, pero la verdadera forma de y_p depende del conjunto fundamental de soluciones de la EDL homogénea (o de la solución homogénea del sistema homogénea, recordemos que es equivalente conocer esto al conjunto fundamental de soluciones).

Para determinar yp considere $P(D)y = f(x)$ una EDL de orden n, donde $\{y_1, y_2, \cdots, y_n$ es el conjunto fundamental de soluciones de la EDL homogénea, de existir funciones repetidas en en y_p que se encuentran en el conjunto fundamental de soluciones, entonces se debe multiplicar por x las funciones repetidas en y_p hasta que dichas funciones ya no se repitan en y_h (y tampoco se pueden repetir dentro de la misma y_p).

Una vez se conoce la forma de y_p se debe sustituir en la EDL para determinar los valores de los coeficientes, recuerde que en la respuesta final y_p no puede depender de ningún parámetro.

Ejemplo 3.5.15. Considere la ecuación diferencial lineal

$$y^{(4)} + 2y^{(3)} + y'' = x^2 + 5$$

tenemos que la ecuación característica es $D^4+2D^3+D^2 = D^2(D^2+2D+1) = D^2(D+1)^2$, entonces las raices son $D = 0$ y $D = -1$ ambas de multiplicidad 2, por lo que tenemos

$$y_h = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x}$$

lo que es equivalente a decir que el conjunto fundamental de soluciones es $\{1, x, e^{-x}, xe^{-x}\}$, ahora $f(x) = x^2+5$, un polinomio de grado 2, por lo que se propone un polinomio de grado dos con sus coeficientes indeterminados

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

pero la función 1 y x se repiten en y_p y y_h, por lo que se multiplican por x^2, esto se debe hacer sobre todas las funciones que se obtuvieron del polinomio de grado 2, por lo que tenemos

$$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

Para determinar el valores de los coeficientes derivamos 4 veces, que es el orden de la ED para obtener

$$y_p' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$$
$$y_p'' = 12x^2 + 6Bx + 2C$$
$$y_p^{(3)} = 24Ax + 6B$$
$$y_p^{(4)} = 24A$$

Sustituyendo en $y^{(4)} + 2y^{(3)} + y'' = x^2 + 5$

$$24A + 2(24Ax + 6B) + (12Ax^2 + 6Bx + 2C) = x^2 + 5$$
$$24A + 48Ax + 12B + 12Ax^2 + 6Bx + 2C = x^2 + 5$$
$$x^2(12A) + x(48A + 6B) + (24A + 12B + 2C) = x^2 + 5$$

de donde

$$\begin{cases} 12A & & & = 1 \\ 48A+ & 6B & & = 0 \\ 24A+ & 12B+ & 2C & = 5 \end{cases}$$

de donde $A = 1/12$, $B = -2/3$ y $C = 11/2$ con lo que

$$y_p = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2$$

y finalmente

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4xe^{-x} + \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2$$

Ejemplo 3.5.16. Considere la EDL

$$P(D)y = x^2e^x + \cos(3x) + 2$$

en donde el conjunto fundamental de soluciones del sistema homogénea es

$$\{1, x, e^x, e^{3x}, \cos(x), \sin(x), \cos(3x), \sin(3x)\}$$

como $f(x) = x^2e^x + \cos(3x) + 2$ un polinomio de grado 2 producto con un exponencial sumado a un coseno y sumado un polinomio de grado 0 (la constante), entonces se propone

$$y_p = (A + Bx + Cx^2)e^x + D\cos(3x) + E\sin(3x) + F$$

pero vea que e^x, $\cos(3x)$ y $\sin(3x)$ se repiten en y_h, entonces multiplicamos por x en y_p,y por otro lado la solución constante y x se repite, por lo que debemos multiplicar el término constante por x^2 la constante que tenemos en y_p

$$y_p = (Ax + Bx^2 + Cx^3)e^x + Dx\cos(3x) + Ex\sin(3x) + Fx^2$$

Ejemplo 3.5.17. Encuentra la solución general de la siguiente EDL

$$y'' - 5y' + 6y = 36x + e^{3x}$$

Resolviendo la homogénea tenemos que la ecuación característica es $D^2 - 5D + 6$ cuyas raíces son $D = 2$ y $D = 3$, entonces tenemos

$$y_h = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

ahora como $f(x) = 36x + e^{3x}$, un polinomio de grado 1 y un exponencial, se propone

$$y_p = Ax + B + Ce^{3x}$$

pero vea que e^{3x} se repite en y_h, entonces nuestra solución particular debemos multiplicar el exponencial por una x para obtener

$$y_p = Ax + B + Cxe^{3x}$$

derivando dos veces

$$y_p' = A + C[e^{3x} + 3xe^{3x}] = A + Ce^{3x}(1 + 3x)$$
$$y_p'' = C[3e^{3x}(1 + 3x) + e^{3x}3] = Ce^{3x}(6 + 9x)$$

sustituyendo en $y'' - 5y' + 6y = 36x + e^{3x}$ y agrupando por funciones

$$Ce^{3x}(6 + 9x) - 5[A + Ce^{3x}(1 + 3x)] + 6[Ax + B + Cxe^{3x}] = 36x + e^{3x}$$
$$6Ce^{3x} + 9Cxe^{3x} - 5A - 5Ce^{3x} - 15Cxe^{3x} + 6Ax + 6B + 6Cxe^{3x} =$$
$$xe^{3x}[9C - 15C + 6C] + e^{3x}[6C - 5C] + x(6A) + -5A + 6B =$$
$$Ce^{3x} + 6Ax + (-5A + 6B) = 36x + e^{3x}$$

de donde tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -5A + 6B & = 0 \\ 6A & = 36 \\ C & = 1 \end{cases}$$

resolviendo, se obtiene que $A = 6$, $B = 5$ y $C = 1$, entonces

$$y_p = 6x + 5 + xe^{3x}$$

y finalmente

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + 6x + 5 + e^{3x}$$

Ejemplo 3.5.18. Considere la siguiente EDL

$$y^{(4)} + 2y'' + y = (x+1)^2$$

para la ecuación característica tenemos que es $D^4 + 2d + D^2 + 1$, si usamos calculadora las raíces de este polinomio es $\pm i$, como el polinomio es de grado 4 entonces debemos tener 4 raíces, y como las raíces complejas vienen acompañadas de su conjugado entonces $D = i$ y $D = -i$ tiene multiplicidad algebraica 2, por lo que la solución homogénea es

$$y_h = (C_1 + C_2 x)\sin(x) + (C_3 + C_4 x)\cos(x)$$

Ahora, usando que $f(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, el cual es un polinomio de grado 2, entonces se propone como solución particular un polinomio de grado 2 con coeficientes indeterminados

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

como la EDL es de orden 4, derivamos y_p 4 veces para obtener

$$y_p' = 2Ax + B \qquad y_p'' = 2A \qquad y_p^{(3)} = 2A \qquad y_p^{(4)} = 0$$

sustituyendo tenemos

$$y^{(4)} + 2y'' + y = x^2 + 2x + 1$$
$$0 + 2(2A) + (Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 2x + 1 \Longrightarrow Ax^2 + Bx + (4A + C) = x^2 + 2x + 1$$

de donde se obtiene que $Ax^2 = x^2$ y por lo tanto $A = 1$, por otro lado tenemos que $Bx = 2x$ y por lo tanto $B = 2$, y la última igualdad que tenemos es $4A + C = 1$, y como $A = 1$ entonces $C = -3$

entonces tenemos que

$$y_p = x^2 + 2x - 3$$

y la solución general es

$$y = y_p + y_h = (C_1 + C_2x)\sin(x) + (C_3 + C_4x)\cos(x) + x^2 + 2x - 3$$

Ejemplo 3.5.19. Encuentre la solución de la EDL

$$y'' + 4y' + 4 = (3 + x)e^{-2x}$$

sujeto a que $y(0) = 2$, $y'(0) = 5$

Primero debemos encontrar la solución general para luego aplicar las condiciones de frontera, iniciamos con el sistema homogéneo que tiene por ecuación característica $D^2 + 4D + 4$, cuyas raíces son $D = -2$ con multiplicidad 2, entonces la solución general es

$$y_h = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$$

ahora, como $f(x) = (3 + x)e^{-2x}$, es el producto de un polinomio de grado 1 por un exponencial, entonces se propone

$$y_p = (Ax + B)e^{-2x} = Axe^{-2x} + Be^{-2x}$$

pero ambas funciones que estamos proponiendo en y_p ya están en y_h, para solucionar esto debemos multiplicar estos elementos por x^2 para obtener

$$y_p = (Ax^3 + Bx^2)e^{-2x}$$

para sustituir en la EDL, como es de orden 2 ocupamos calcular las primeras dos derivadas, usando regla del producto

$$\begin{aligned} y_p' &= (3Ax^2 + 2Bx)e^{-2x} - 2(Ax^3 + Bx^2)e^{-2x} \\ &= e^{-2x}[-2Ax^3 + x^2(3A - 2B) + 2Bx] \end{aligned}$$

derivando nuevamente con la regla del producto

$$y_p'' = -2e^{-2x}[-2Ax^3 + x^2(3A - 2B) + 2Bx] + e^{-2x}[-6A + x(6A - 4B) + 2B]$$

$$= e^{-2x}[4Ax^3 - 2x^2(3A - 2B) - 4Bx - 6Ax^2 + x(6A - 4B) + 2B]$$

$$e^{-2x}[4Ax^3 + x^2(-12A + 4B) + x(6A - 8B) + (2B)]$$

cuando realice estas derivadas tenga cuidado, simplifique antes antes de derivar para que sus derivadas no se hagan muy difíciles de manipular, además de claro, tener un dominio adecuado de las reglas de derivación. Ahora sustituyendo

$$y'' + 4y' + y = (3+x)e^{-2x}$$

$$\cancel{e^{-2x}}[4Ax^3 + x^2(-12A+4B) + x(6A-8B) + (2B)] + 4\cancel{e^{-2x}}[-2Ax^3 + x^2(3A-2B) + 2Bx]$$

$$+4\cancel{e^{-2x}}(Ax^3 + Bx^2) = (3+x)\cancel{e^{-2x}}$$

donde tenemos la ventaja de que todos los e^{-2x} se cancelan, ahora vamos agrupando por funciones, vea que tenemos 4, x^3, x^2, x y la función constante, entonces

$$\cancelto{0}{x^3(4A-8A+4A)} + \cancelto{0}{x^2(-12A+4B+12A-8B+4B)} + x(6A-8B+8B) + (2B) = 3+x$$

$$6Ax + 2B = (3+x)$$

de donde tenemos $6Ax = x$ y por lo tanto $A = 1/6$, mientras que $2B = 3$, por lo que $B = 2/3$, entonces tenemos que

$$y_p = \frac{1}{6}e^{-2x}x^3 + \frac{2}{3}e^{-2x}x^2$$

y la solución general es

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{1}{6}e^{-2x}x^3 + \frac{2}{3}e^{-2x}x^2$$

ahora que ya conocemos la solución general podemos usar las condiciones de frontera para determinar C_1, C_2, primero como $y(0) = 2$ tenemos

$$2 = C_1e^0 + C_2 * 0 * e^0 + \frac{1}{6}e^0 * 0 + \frac{2}{3}e^0 * 0$$
$$2 = C_1$$

para poder usar la segunda condición $y'(0) = 5$, primero ocupamos saber quien es y', pero como conocemos a y, entonces solo debemos de derivar. Ahora, derivar y puede ser un poco extenso, pero una forma de facilitar las cosas es sacar a factor común el e^{-2x} antes de derivar

$$y = e^{-2x}\left[C_1 + C_2x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^2\right]$$

derivando con regla del producto

$$y' = -2e^{-2x}\left[C_1 + C_2x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{2}{3}x^2\right] + e^{-2x}\left[C_2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x\right]$$

no hace falta simplificar pues solo buscamos el valor de C_2, usando que $y'(0) = 5$ obtenemos

$$5 = -2[C_1] + [C_2]$$

y como $C_1 = 2$, entonces tenemos que $C_2 = 9$ y por lo tanto la solución al problema de Cauchy es

$$y = 2e^{-2x} + 9xe^{-2x} + \frac{1}{6}e^{-2x}x^3 + \frac{2}{3}e^{-2x}x^2$$

3.6. Variación de parámetros (Aprendizaje autónomo)

Ahora vamos a desarrollar nuestro último método para determinar la solución particular de una EDL, este método es más general, pues sirve para cualquier tipo de EDL, no tiene que ser de coeficientes constantes, pero tiene sus inconvenientes, como el aumento importante en la extensión de los cálculos conforme mayor sea el orden de la EDL, hasta el punto que para EDL de orden 4 ya se vuelve muy impráctico.

Veamos como funciona el método, considere la ecuación diferencial lineal

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0(x)y = f(x)$$

tal que el sistema homogéneo tiene por conjunto fundamental de soluciones

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$

El método fue desarrollado por Joseph-Louis Lagrange, lo que vamos a hacer es buscar funciones $V_1(x), V_2(x), \ldots, V_n(x)$, de tal manera que la solución particular sea

$$y_p = V_1(x)y_1 + V_2(x)y_2 + \ldots + V_n(x)y_n$$

En otras referencias a las funciones $V_1(x), V_2(x), \ldots, V_n(x)$ se denotan por $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$, pero como la C_i ya la usamos para denotar constantes usaremos $V_i(x)$ para hacer referencia a las funciones del método de **V**ariación de parámetros.

Lagrange demostró que estás funciones $V_i(x)$ que estamos buscando satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} V_1'(x)y_1 & +V_2'(x)y_2 & +\ldots+ & V_n(x)y_n' & = 0 \\ V_1'(x)y_1' & +V_2'(x)y_2' & +\ldots+ & V_n'(x)y_n' & = 0 \\ V_1'(x)y_1'' & +V_2'(x)y_2'' & +\ldots+ & V_n'(x)y_n'' & = 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ V_1'(x)y_1^{(n-1)} & +V_2'(x)y_2^{(n-1)} & +\ldots+ & V_n'(x)y_n^{(n-1)} & = f(x) \end{cases}$$

El sistema anterior se puede escribir de manera matricial como

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1'(x) \\ V_2'(x) \\ \vdots \\ V_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Note que la matriz en azul tiene por determinante el Wronskiano $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ del conjunto fundamental de soluciones

Para resolver el sistema anterior se puede proceder usando la regla de Cramer, un recordatorio rápido de como funciona la regla de Cramer, considere el sistema

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

en donde A es una matriz cuadrada $n \times x$ y

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si denotamos por A_j la matriz que es igual a A solo que la $j-$ésima columna (recuerde que las columnas son las verticales) por el vector $\vec{b}$, entonces se tiene que

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Con esto, veamos como es el caso para orden 2, considere la EDL en su forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

es decir, que no existe ningún término multiplicando a la derivada de mayor orden (más allá de multiplicar trivialmente por 1), normalizar la EDL es importante pues el $f(x)$ se extrae cuando la EDL esta en esta forma.

Según lo discutido anteriormente queremos resolver

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes del sistema la llamaremos W, y como ya mencionamos su determinante es el Wronskiano

$$\det(W) = W(y_1, y_2)$$

ahora, denotando por W_i a la matriz que es igual a W pero cambiando la columna $i-$ésima por el vector

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$V_1' = \frac{\det(W_1)}{\det(W)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = -\frac{f(x)y_2}{W(y_1, y_2)}$$

y por lo tanto

$$V_1(x) = -\int \frac{f(x)y_2}{W(y_1, y_2)} dx$$

mientras que por otro lado

$$V_2' = \frac{\det(W_2)}{\det(W)} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{f(x)y_1}{W(y_1, y_2)}$$

y por lo tanto

$$V_2(x) = \int \frac{f(x)y_1}{W(y_1, y_2)} dx$$

por lo que para el caso de orden 2 obtenemos dos fórmulas sencillas de recordar, iniciemos con ejemplos

Ejemplo 3.6.1. Resuelva

$$y'' + y = \sec^2(x)$$

Para la homogénea tenemos que la ecuación característica es $D^2 + 1 = 0$, de donde las raíces son $D = i$ y $D = -i$, por lo que la solución homogénea es

$$y_h = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

para aplicar variación de parámetros tome $y_1 = \cos(x)$ y $y_2 = \sin(x)$, calculando el wronskiano

$$W(\cos(x), \sin(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

donde la última igualdad es una igualdad trigonométrica, y como la EDL ya esta normalizada tenemos que $f(x) = \sec^2(x)$, calculando

$$V_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} = -\int \sin(x)\sec^2(x) = -\int \tan(x)\sec(x) = -\sec(x)$$

$$\begin{aligned} V_2(x) &= \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \int \cos(x)\sec^2(x) = \int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} dx \\ &= \int \sec(x) = \ln[\sec(x) - \tan(x)] \end{aligned}$$

con lo que ya podemos escribir nuestra solución particular

$$\begin{aligned} y_p = y_1 V_1(x) + y_2 V_2(x) &= \cos(x)(-\sec(x)) + \sin(x)\ln(\sec(x) + \tan(x)) \\ &= -1 + \sin(x)\ln(\sec(x) + \tan(x)) \end{aligned}$$

y la solución general es

$$y = y_h + y_p =$$
$$C_1\cos(x) + C_2\sin(x) - 1 + \sin(x)\ln(\sec(x) + \tan(x))$$

Ejemplo 3.6.2. Determine la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}$$

para el sistema homogéneo la ecuación característica es $D^2 + 3D + 2$, cuyas raíces son $D = -1$ y $D = -2$, por lo que tenemos

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

tome $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-2x}$, ahora calculando el wronskiano tenemos

$$W(e^{-x}, e^{-2x}) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-3x} + e^{-3x} = -e^{-3x}$$

como la EDL ya esta normalizada, tenemos que $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$, ahora calculamos

$$V_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)}dx = -\int \frac{e^{-2x}}{(1+e^x)[-e^{-3x}]}dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$$

para esta integral tome $u = e^x$ y $du = e^x dx$, entonces

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{du}{1+u} = \ln(1+u) = \ln(1+e^x)$$

ahora calculamos

$$V_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)}dx = \int \frac{e^{-x}}{(1+e^x)[-e^{-3x}]}dx$$
$$-\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$$

procediendo con el mismo cambio de variable $u = e^x$, $du = e^x dx$ tenemos

$$-\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = -\int \frac{e^x e^x dx}{1+e^x} = -\int \frac{u}{1+u}du$$
$$-\int \frac{u+1-1}{u+1}du = -\int du - \int \frac{du}{u+1}$$
$$= -u - \ln(u+1) = -e^x - \ln(e^x+1)$$

con esto escribimos la solución particular como

$$y_p = V_1(x)y_1 + V_2(x)y_2 = e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}\Big[-e^x - \ln(e^x+1)\Big]$$

y la solución general es

$$y = y_h + y_p =$$
$$C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}\Big[-e^x - \ln(e^x+1)\Big]$$

Hasta el momento hemos trabajado con EDLCC para el método de variación de parámetros, pero el método puede resolver cualquier EDL, veamos un ejemplos usando también el teorema de Abel para la parte homogénea.

Ejemplo 3.6.3. Encuentre la solución general de la siguiente EDL

$$x^2y'' + xy' + \Big(x^2 - \frac{1}{4}\Big)y = x^{5/2}$$

si se sabe que $y_1 = \dfrac{cos(x)}{\sqrt{x}}$ es solución. Para poder aplicar variación de parámetros ocupamos resolver el sistema homogéneo, para eso usamos el teorema de Abel, vea que $a_2 = x^2$ y $a_1 = x$, entonces

$$e^{-\int a_1/a_2 dx} = e^{-x/x^2 dx} = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$$

y ahora

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1/a_2 dx}}{y_1^2} dx = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \int \frac{1/x}{cos^2(x)/x} dx =$$
$$\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \int \sec^2(x) dx = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

y por lo tanto

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

para calcular el wronskiano primero veamos las derivadas de y_1, y_2, para esto reescriba $y_1 = \cos(x)x^{-1/2}$, $y_2 = \sin(x)x^{-1/2}$ para derivar una regla del producto y no una regla del cociente, entonces

$$y_1' = -\sin(x)x^{-1/2} - \frac{1}{2}\cos(x)x^{-3/2}$$
$$= -\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\cos(x)}{2x^{3/2}}$$

$$y_2' = \cos(x)x^{-1/2} - \frac{1}{2}\sin(x)x^{-3/2}$$
$$= \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\sin(x)}{2x^{3/2}}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} & \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \\ -\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\cos(x)}{2x^{3/2}} & \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\sin(x)}{2x^{3/2}} \end{vmatrix} =$$
$$\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} \Big[\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\sin(x)}{2x^{3/2}} \Big] - \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \Big[-\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\cos(x)}{2x^{3/2}} \Big]$$
$$\frac{\cos^2(x)}{x} - \cancel{\frac{\cos(x)\sin(x)}{x^2}} + \frac{\sin^2(x)}{x} + \cancel{\frac{\cos(x)\sin(x)}{x^2}}$$
$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{x} = \frac{1}{x}$$

ahora, vea que la ecuación diferencial no esta normalizada, para normalizarla debemos dividir entre x^2, como solo nos importa $f(x)$ tenemos que

$$f(x) = \frac{x^{5/2}}{x^2} = \sqrt{x} \tag{3.3}$$

ahora calculamos

$$V_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)} = -\int \frac{\sin(x)\sqrt{x}}{\sqrt{x}} x dx$$
$$= -\int x\sin(x) = -[-x\cos(x) + \sin(x)] = x\cos(x) - \sin(x)$$

donde la integral se resuelve por partes, lo detalles se omiten, ahora calculando

$$V_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)} = \int \frac{cos(x)\sqrt{x}}{\sqrt{x}} x dx$$
$$= \int x\cos(x) = x\sin(x) + \cos(x)$$

con esto ya podemos escribir la solución particular, tenemos que

$$y_p = y_1 V_1(x) + y_2 V_2(x) =$$
$$\frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}[x\cos(x) - \sin(x)] + \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}[x\sin(x) + \cos(x)]$$
$$= \sqrt{x}\cos^2(x) - \frac{\cos(x)\sin(x)}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\sin^2(x) + \frac{\cos(x)\sin(x)}{\sqrt{x}}$$
$$= \sqrt{x}[\cos^2(x) + \sin^2(x)] = \sqrt{x}$$

Ejemplo 3.6.4. Considere la ecuación diferencial

$$y'' - \frac{2}{2x+1}y' - \frac{2x+3}{2x+1}y = (2x+1)e^{-x}$$

donde se sabe que $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^x$ son soluciones del sistema homogéneo. Demuestre que $\{y_1, y_2\}$ forman el conjunto fundamental de soluciones y encuentre la solución general de la EDL.

Tenemos una EDL de orden 2, entonces el conjunto fundamental de soluciones esta formado por 2 funciones que son solución de la EDLH y a su vez son linealmente independientes, entonces para mostrar que $\{y_1, y_2\}$ es el conjunto fundamental de soluciones es mostrar que son linealmente independientes, y esto lo podemos hacer verificando que el wronskiano es distinto de 0.

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} e^{-x} & xe^x \\ -e^{-x} & e^x(x+1) \end{vmatrix} = e^{-x}[e^x(x+1)] - -e^{-x}(xe^x)$$

$$x + 1 + x = 2x + 1 \neq 0$$

como el wronskiano es distinto de 0 se verifica que forman el sistema fundamental de soluciones, ahora para resolver la EDL, como no es de coeficientes constantes, debemos proceder exclusivamente por el método de variación de parámetros, además ya tenemos calculado el valor del wronskiano, y como la EDL ya esta en su forma normalizada tenemos que $f(x) = (2x+1)e^{-x}$

$$V_1(x) = -\int \frac{f(x)y_2}{W(y_1,y_2)}dx = -\int \frac{(2x+1)e^{-x}e^{-x}}{2x+1}dx =$$
$$-\int e^{-2x}dx = \frac{e^{-2x}}{2}$$

por otro lado

$$V_2(x) = \int \frac{f(x)y_1}{W(y_1,y_2)} = \int \frac{\cancel{(2x+1)}\cancel{e^{-x}}x\cancel{e^{x}}}{\cancel{2x+1}}dx$$
$$\int x dx = \frac{x^2}{2}$$

con esto podemos escribir la solución particular

$$y_p = y_1V_1(x) + y_2V_2(x) = e^{-x}\frac{e^{-2x}}{2} + xe^x\frac{x^2}{2} = \frac{e^{-3x}}{2} + \frac{1}{2}x^3e^x$$

y con esto ya podemos escribir la solución general, para la solución homogénea usamos el conjunto fundamental de soluciones

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2xe^x + \frac{e^{-3x}}{2} + \frac{1}{2}x^3e^x$$

Ejemplo 3.6.5. Resuelva la siguiente ecuación diferencial

$$y'' - 4y' + 4 = (12x^2 - 6x)e^{2x}$$

sujeto a $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Iniciamos con el sistema homogéneo, donde la ecuación característica es $D^2 - 4D + 4 = 0$, en donde las raíces son $D = 2$ con multiplicidad, por lo que la solución general es

$$y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$$

para encontrar la solución particular podemos usar cualquier método de los estudiados, pero vamos a proceder por variación de parámetros, tome $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$, calculando el wronskiano tenemos

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{-2x} & e^{2x}(1+2x)\end{vmatrix}=e^{2x}[e^{2x}(1+2x)]-(2e^{2x})(xe^{2x})$$
$$e^{4x}(1+2x)-2xe^{-4x}=e^{4x}+\cancel{2xe^{4x}}-\cancel{2xe^{-4x}}=e^{4x}$$

ahora, la ecuación diferencial ya esta en su forma normalizada, entonces tenemos que $f(x)=(12x^2-6x)e^{2x}$, ahora calculando

$$V_1(x)=-\int\frac{f(x)y_2}{W(y_1,y_2)}dx=-\int\frac{(12x^2-6x)e^{2x}(xe^{2x})}{e^{4x}}dx$$
$$=-\int(12x^3-6x^2)dx=-3x^4+2x^3$$

por otro lado

$$V_2(x)=\int\frac{f(x)y_1}{W(y_1,y_2)}dx=\int\frac{(12x^2-6x)e^{2x}(e^{2x})}{e^{-4x}}dx=\int(12x^2-6x)dx$$
$$=4x^3-3x^2$$

con esto podemos calcular la solución particular

$$y_p=y_1V_1(x)+y_2V_2(x)=e^{2x}(-3x^4+2x^3)+xe^{2x}(4x^3-3x^2)$$
$$e^{2x}x^4-e^{2x}x^3$$

y con esto ya podemos escribir la solución general como

$$y=y_h+y_p=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+e^{2x}x^4-e^{2x}x^3$$

ahora debemos resolver el problema de Cauchy, usando que $y(0)=1$ tenemos

$$1=C_1e^0+C_2*0*e^0+e^0*0^4-e^0*0^3\Longrightarrow C_1=1$$

para poder usar la condición de que $y'(0)=0$ debemos derivar nuestra solución, como varios de los términos son de la forma $e^{2x}x^n$, calculemos esta derivada

$$\frac{d}{dx}e^{2x}x^n=2e^{2x}x^n+ne^{2x}x^{n-1}=e^{2x}x^{n-1}(2x+n)$$

usando lo anterior tenemos

$$y'=2C_1e^{2x}+C_2e^{2x}(1+2x)+e^{2x}x^3(2x+4)-e^{2x}x^2(2x+3)$$

usando que $y'(0)=0$ y que $C_1=1$ tenemos

$$0 = 2e^0 + C_2e^0(1+0) + 0 + 0 \Longrightarrow 0 = 2 + C_2 \Longrightarrow C_2 = -2$$

por lo que la solución al problema de Cauchy es

$$y = 1e^{2x} - 2xe^{2x} + e^{2x}x^4 - e^{2x}x^3$$

El ejemplo anterior se puede resolver con anuladores o coeficientes indeterminados, pero en este caso no es recomendado, pues como

$$y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$$

y como $f(x) = (12x^2 - 6x)e^{2x}$, es un exponencial multiplicado por un polinomio de grado 2 tenemos que se propone

$$y_p = (A + Bx + Cx^2)e^{2x}$$

pero como e^{2x}, xe^{2x} están en y_h, entonces se debe multiplicar y_p por x^2, por lo que

$$y_p = (Ax^2 + Bx^3 + Cx^4)e^{2x}$$

Ahora se debe derivar la expresión anterior 2 veces, que ya es algo pesado de hacer y luego despejar el sistema para obtener A, B, C, por lo que optar por este camino es considerablemente más largo. Pero en los casos de que y_p es fácil de derivar es más recomendable tomar el camino de anuladores o coeficientes indeterminados para EDL de orden 2.

Ahora, en general podemos darnos una idea de como se aplica el método de variación de parámetros para EDL de orden n, pero como depende de un sistema lineal al cual calculamos su determinante, y luego debemos calcular n integrales, con forma se aumenta el orden de la EDL el método de variación de parámetros se vuelve muy complicado.

Para efectos del curso lo máximo orden de EDL que resolveremos por variación de parámetros serán las de orden 3, para esto considere la EDL de orden 3 normalizada.

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + h(x)y = f(x)$$

cuyo conjunto fundamental de soluciones es $\{y_1, y_2, y_3\}$, entonces la solución particular tiene la forma

$$y_p = y_1V_1(x) + y_2v_2(X) + y_3v_3(X)$$

en donde se cumple

$$V_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ f(x) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2, y_3)} dx$$

$$V_2(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & f(x) & y_3'' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2, y_3)} dx$$

$$V_3(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & f(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2, y_3)} dx$$

Ejemplo 3.6.6. Determine la solución general de la siguiente EDL

$$y''' + y' = \tan(x)$$

Del sistema homogéneo obtenemos la ecuación característica, $D^3 + D = 0$ cuyas raíces son $D = \pm i$ y $D = 0$, por lo que la solución homogénea es

$$y_h = C_1 + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x) \tag{3.4}$$

ahora, para la solución particular como $f(x) = tan(x)$ no tiene anulador, solo podemos proceder por el método de variación de parámetros, para esto tome $y_1 = 1$, $y_2 = \cos(x)$, $y_3 = \sin(x)$, calculando el wronskiano tenemos

$$W(1, \cos(x), \sin(x)) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 0 & -sin(x) & \cos(x) \\ 0 & -\cos(x) & -sin(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -sin(x) & \cos(x) \\ -\cos(x) & -sin(x) \end{vmatrix} = \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Ahora, para calcular $V_1(x)$ primero calculamos el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos(x) & \sin(x) \\ 0 & -sin(x) & \cos(x) \\ \tan(x) & -\cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} = \tan(x) \begin{vmatrix} -\sin(x) & \cos(x) \\ -\cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix}$$
$$= \tan(x)[\sin^2(x) + \cos^2(x)] = \tan(x)$$

por lo que

$$V_1(x) = \int \tan x dx = -\ln(\cos(x))$$

para $V_2(x)$ primera calculamos

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin(x) \\ 0 & 0 & \cos(x) \\ 0 & \tan(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos(x) \\ \tan(x) & -\sin(x) \end{vmatrix}$$
$$= \tan(x)\cos(x) = \sin(x)$$

entonces tenemos que

$$V_2(x) = \int \sin(x) dx = -\cos(x)$$

para $V_3(x)$ calculamos

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & 0 \\ 0 & -\sin(x) & 0 \\ 0 & -\cos(x) & \tan(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin(x) & 0 \\ -\cos(x) & \tan(x) \end{vmatrix}$$
$$= -\tan(x)\sin(x)$$

entonces

$$V_3(x) = -\int \tan(x)\sin(x)$$

integrando por partes tome $u = \tan(x)$ y $du = \sec^2(x)$, y $dv = \sin(x)dx$ con lo que $v = -\cos(x)$, entonces tenemos

$$= -\left(-cos(x)\tan(x) - \int -cos(x)\sec^2(x)dx\right) = \sin(x) - \int \sec(x)dx$$
$$= \sin(x) - \ln(\sec(x) + \tan(x))$$

con esto escribimos $y_p = y_1V_1(x) + y_2V_2(x) + y_3V_3(x)$

$$y_p = -\ln(\cos(x)) - \cos(x)^2 + \sin(x)[\sin(x) - \ln(\sec(x) + \tan(x))]$$

y finalmente

$$y = y_h + y_p$$

no vamos a sustituir y_h y y_p en la igualdad anterior pues sería muy largo.

Ejemplo 3.6.7. Encuentre la solución general de la siguiente EDL

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

Primero resolvemos el sistema homogéneo, donde tenemos la ecuación característica es $D^3 - 3D^2 + 2D$, donde las raíces son $D = \{0, 1, 2\}$, entonces tenemos que

$$y_h = C_1 + C_2e^x + C_3e^{2x}$$

tenemos que $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$, el cual no tiene anulador, por lo que solo podemos proceder por variación de parámetros, tomando $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$, $y_3 = e^{2x}$, calculando el wronskiano tenemos

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 2e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 4e^{3x} - 2e^{3x} = 2e^{3x}$$

Para calcular $V_1(x)$, calculamos el siguiente determinante, usando que $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$

$$\begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ \frac{e^{2x}}{1+e^x} & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{1+e^x}\begin{vmatrix} e^x & 2e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{2e^{5x}}{1+e^x}$$

Entonces ahora calculamos la siguiente integral

$$V_1(x) = \int \frac{2e^{5x}}{1+e^x}\left(\frac{1}{2e^{3x}}\right)dx = \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$$

para esta integral tome $u = 1 + e^x$ y por lo tanto $du = e^x dx$, además tenemos que $e^x = u - 1$, entonces

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{e^x e^x dx}{1+e^x}$$

$$= \int \frac{u-1}{u} du = \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du$$
$$= u - \ln(u) = (1 + e^x) + \ln(1 + e^x)$$

ahora calculando $V_2(x)$ tenemos el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{2x} \\ 0 & 0 & 2e^{2x} \\ 0 & \frac{e^{2x}}{1+e^x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2e^{2x} \\ \frac{e^{2x}}{1+e^x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{-2e^{4x}}{1+e^x}$$

por lo que

$$V_2(x) = \int \frac{-2e^{4x}}{1+e^x}\left(\frac{1}{2e^{3x}}\right) dx = -\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{u} dx = \ln(u) = \ln(1 + e^x)$$

en donde se uso el mismo cambio de variable que se utilizo para calcular $V_1(x)$, para V_3 tenemos el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & \frac{e^{2x}}{1+e^x} = \frac{e^{3x}}{1+e^x} \end{vmatrix}$$

y por lo tanto

$$V_3(x) = \int \frac{e^{3x}}{1+e^x}\left(\frac{1}{2e^{3x}}\right) dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+e^x}$$

para esta integral vuelva a tomar $u = 1 + e^x$ y por lo tanto $du = e^x dx$, pero como $e^x = u - 1$ tenemos que $du = (u-1)dx$, o equivalente $dx = \dfrac{du}{u-1}$, sustituyendo

$$V_3 = \int \frac{dx}{1+e^x} = \frac{1}{(u-1)u} du$$

donde para resolver la integral se debe realizar fracciones parciales, tenemos que

$$\frac{1}{(u-1)u} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u}$$
$$1 = Au + B(u-1) = u(A+B) - B$$

de donde $1 = -B$ y por lo tanto $B = -1$, y $A + B = 0$ por lo que $A = 1$, entonces

$$V_3(x) = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u-1}\right) = \ln(u) - \ln(u-1)$$

$$= \ln\left(\frac{u}{u-1}\right) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$$

con esto tenemos que

$$y_p = y_1 V_1(x) + y_2 V_2(x) + y_3 V_3(x)$$

en donde todos los términos están escritos en alguna parte de la solución, no lo vamos a reescribir todo pues sería muy extenso, y como también al inicio ya escribimos quien es y_h, entonces tenemos que la solución general es

$$y = y_h + y_p$$

3.7. Aplicaciones de las EDL de orden 2

Vamos a estudiar dos aplicaciones físicas, en este contexto consideramos el movimiento en una dimensión de un objeto, dado un marco de referencia diremos que la posición del objeto en función del tiempo esta dada por $x(t)$.

La velocidad del objeto dada por $v(t)$ esta relacionada con la posición pues

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

Ademas la aceleración del objeto esta dada por

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dx^2}$$

esto nos sera de utilidad en ambas aplicaciones.

3.7.1. Segunda ley de Newton

La segunda ley de Newton dice que

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

esta es una ecuación vectorial pero como nos centraremos en el estudio en una dimensión podemos escribir $F = ma$, esta ecuación la podemos reescribir como

$$\sum F = mx''(t)$$

La cual es una ecuación diferencial de segundo orden.

Si sobre el objeto actúa una fuerza F que hace que este se mueva en la misma dirección de la fuerza, y consideramos el efecto de la fricción (de algún fluido como el aire o el agua) que ejerce una fuerza opuesta al movimiento proporcional a la velocidad del objeto, que denotaremos por $f_r = \beta v(v) = \beta x'(t)$ donde $\beta > 0$, obtenemos

$$\sum F = mx'' \Longrightarrow F - f_r = mx'' \Longrightarrow F - \beta x' = mx''$$

si la fuerza es constante obtenemos la EDLCC

$$mx'' + \beta x' = F$$

Ejemplo 3.7.1. Un bote de $300kg$ es acelerado por un motor que ejerce una fuerza de $140N$, el agua ejerce una fricción sobre el bote de $10v(t)$, si el bote parte del reposo y tomando como $x = 0$ el punto de partida, determine la velocidad del bote en función del tiempo y determine su velocidad máxima.

Debemos resolver

$$\sum F = mx'' \Longrightarrow 140 - 10x' = 300x'' \Longrightarrow 300x'' + 10x' = 140$$

sujeto a $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$ (esto ultimo pues parte del reposo), iniciamos resolviendo la ecuación homogénea que esta dada por $(300D + 10D)y = 0$ que tiene por raíces $D = 0$ y $D = -1/30$, entonces la solución homogénea es

$$x_h = C_1 + C_2 e^{-x/30}$$

para la solución particular como $F = 140$ se propone $x_p = A$, pero como la solución constante ya esta en x_h debemos multiplicar la constante de x_p por t para obtener $x_p = At$, derivando $x_p' = A$ y $x_p'' = 0$, sustituyendo

$$10A = 140 \Longrightarrow A = 14$$

entonces la solución general es

$$x = x_h + x_p = C_1 + C_2 e^{-t/30} + 14t$$

para las condiciones de frontera ocupamos la velocidad, entonces derivando

$$x' = -\frac{C_1}{30} e^{-t/30} + 14$$

usando que $x(0) = 0$ tenemos

$$0 = c_1 + c_2 \Longrightarrow C_1 = -C_2$$

y usando que $x'(0) = 0$ tenemos que

$$0 = -\frac{C_2}{30} + 14 \Longrightarrow C_1 = 420$$

y como $C_1 = -C_2 = -420$ tenemos que la posición esta dada por

$$x(t) = -420 + 420e^{-t/30} + 14t$$

la velocidad máxima la podemos determinar usando el limite al infinito de la velocidad

$$v_{max} = \lim_{t\to\infty} \cancelto{0}{-\frac{420}{30}e^{-t/30}} + 14 = 14$$

ahora, otra forma de determinar la velocidad máxima sin tener que resolver la ED es que esta sera la velocidad donde la fuerza de empuje sea igual a la resistencia

$$F = F_s \Longrightarrow 140 = 10v(t) \Longrightarrow v(t) = 14$$

Ejemplo 3.7.2. Un paracaidista en caída libre alcanza una velocidad de 60 m/s antes de abrir su paracaídas, el paracaídas ejerce una fuerza en contra al movimiento dada por $F_r = 175v(t)$, si la persona junto a su paracaídas tienen una masa de 105 kg, determine la distancia recorrida por el paracaidista luego de abrir su paracaídas en función del tiempo. Si el paracaídas se abrió a 1000 m sobre el suelo determine cuanto tiempo le toma al paracaidista tocar el suelo.

La fuerza que acelera al paracaidista es la fuerza de gravedad (su peso) dada por $W = mg$ donde g =9.81 m/s^2, tenemos que m =105 kg y tenemos que $\beta = 175$, tomando como $x(0) = 0$ y $x'(0) = 60\, m/s$ pues es la velocidad a la que se abre el paracaidas, tenemos

$$\sum F = mx'' \Longrightarrow W - F_s = mx'' \Longrightarrow 105 * 9.81 - 175x' = 105x''$$
$$105x'' + 175x' = 1030.05$$

resolviendo el sistema homogéneo tenemos que $105D^2 + 175D = 0$ de donde $D = 0$ y $D = -5/3$, entonces

$$x_h = C_1 + C_2e^{-5t/3}$$

se propone $x_p = A$ pero como la solución constante ya esta en x_h se sigue que $x_p = Ax$, sustituyendo

$$105x'' + 175x' = 1030.05 \Longrightarrow 105 * 0 + 175A = 1030.5 \Longrightarrow A = 5.89$$

por lo que

$$x(t) = x_h + x_p = C_1 + C_2 e^{-5t/3} + 5.89t$$

para aplicar las condiciones de frontera primero derivamos y aplicamos que $x'(0) = 60$

$$x' = -\frac{5}{3} C_2 e^{-5t/3} + 5.89 \Longrightarrow 60 = -\frac{5}{3} C_2 \Longrightarrow C_2 = -36$$

y como $x(0) = 0$ tenemos que

$$0 = C_1 + C_2 \Longrightarrow C_1 = -C_2 = 36$$

entonces

$$x(t) = 36 - 36e^{-5t/3} + 5.89t$$

para determinar el tiempo que tarde en tomar es suelo buscamos el t tal que $x(t) = 1000$

$$1000 = 36 - 36e^{-5t/3} + 5.89t \Longrightarrow t = 163.667\ s$$

3.7.2. Movimiento armónico

La ley (de elasticidad) de Hooke establece que es estiramiento de un resorte con respecto a su posición de equilibrio es proporcional a la fuerza F aplicada sobre el resorte. A su vez, el resorte ejercerá una fuerza opuesta de igual magnitud de F que busca restaurar el resorte a su posición de equilibrio. Lo anterior lo podemos escribir como

$$F_k = -kx$$

donde F_k es la fuerza del resorte, $k > 0$ es la constante de proporcionalidad y x es la distancia que se desplaza el resorte de la posición de equilibrio. La constante k tiene unidades de fuerza sobre desplazamiento, comúnmente N/m.

Si colocamos una objeto de masa m en el extremo del resorte y desplazamos el resorte para luego dejarlo oscilar, si a este sistema aplicamos la segunda ley de Newton se tiene

$$\sum F = mx'' \Longrightarrow F_k = mx'' \Longrightarrow -kx = mx'' \Longrightarrow mx'' + kx = 0$$

Esta es una ecuación homogénea de coeficientes constantes, la ecuación característica es $mD^2 + kx = 0$ y sus raíces son $D = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i = \pm\omega i$, donde ω es la velocidad angular del movimiento oscilador, que tiene unidades de rad/s. Regresando a la $EDLHCC$ tenemos raíces complejas, entonces su solución general es

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

Para poder resolver un caso particular debemos conocer las constantes, para esto usamos la velocidad del objeto en el resorte

$$v(t) = -\omega C_1 \cos(\omega t) + \omega C_2 \ \sin(\omega t)$$

Ejemplo 3.7.3. Un resorte con $k = 100\, N/m$ se le coloca una masa de $m = 250\, g = 0.25\, Kg$, el resorte se estira 10 cm y se libera desde el reposo (es decir $v(0) = x'(0) = 0$), determine la posición del objeto en función del tiempo.

Debido a que $N = Kg * m/s^2$ es mejor trabajar todo en metros y kilogramos, con esto tenemos que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0.25}} = 20$$

con esto tenemos que

$$x(t) = C_1 \cos(20t) + C_2 \sin(20t)$$
$$x'(t) = -20C_1 \sin(20t) + 20C_2 \cos(20t)$$

ahora, como al inicio el resorte se estira 10 cm equivalente a 0.1 m tenemos que $x(0) = 0.1$, y ya establecimos que $x'(0) = 0$, usando esto

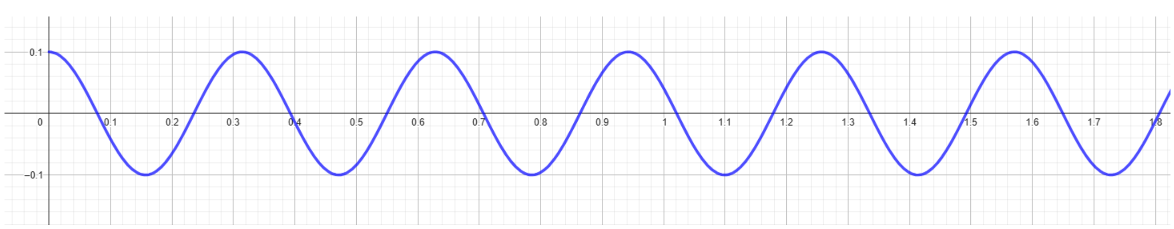
$$x'(0) = 0 \Longrightarrow 0 = 20C_2 \Longrightarrow C_2 = 0$$

por otro lado

$$x(0) = 0.1 \Longrightarrow 0.1 = C_1$$

por lo que

$$x(t) = 0.1 \cos(20t)$$



$x(t)$ tiene unidades de metros, en la gráfica anterior el eje x representa el tiempo y el eje y representa la posición, donde el valor de 0 es el punto de equilibrio, por lo que la masa oscila con respecto a este punto de equilibrio.

Nota: En el examen recuerde que debe plantear las ecuaciones diferenciales y resolverlas.

Nuestro modelo de resorte oscilando no toma en cuenta fuerzas que detengan el movimiento, como fricción del aire o energía que libere el resorte en forma de calor o sonido. Suponiendo que esta perdida de energía es proporcional a la velocidad de movimiento, podemos modelar esta como una fuerza amortiguadora $F_a ='$. Aplicando la segunda ley de Newton obtenemos

$$\sum F = mx'' \Longrightarrow -kx - \beta x = mx'' \Longrightarrow mx'' - \beta x' + kx = 0$$

en la sumatoria de fuerza restamos la fuerza amortiguadora pues esta es una fuerza opuesta al movimiento. Con esto obtenemos una EDLHCC de orden 2, para esta no podemos dar una formula para la solución general pues depende de las raíces de la ecuación característica (puede ser dos raíces reales distintas, reales repetidas o complejas).

Ejemplo 3.7.4. Considere un resorte colgado de forma vertical en condición de reposo, sobre este se coloca una masa de 1 kg y con esto el resorte se estira 0.3 metros hasta alcanzar su nuevo punto de equilibrio, posterior a esto el resorte estira (se jala hacia abajo) 0.25 metros y se le aplica una velocidad hacia arriba de 0.5 m/s, si por perdidas de fricción se determina que la fuerza amortiguadora es de $Fa = 5v(t)$ determine la posición de la partícula en función del tiempo, tome el nuevo punto de equilibrio posterior a colocar la masa por $x = 0$.

Algunas cosas a considerar, el resorte en su nuevo punto de equilibrio producto de masa que lo esta estirando se comporta de igual forma bajo la ley de Hooke porque lo seguimos estudiando el mismo modelo, Otra cosa es que no hace falta tomar la fuerza de gravedad en el análisis pues esta es una fuerza conservativa. Ahora, no sabemos la constante del resorte, pero sabemos que si se aplica una masa de 1 kg este se estira 0.3 metros, usando la ley de Hooke, la fuerza que ejerce el resorte es hacia arriba y es igual al peso de la masa, tomando hacia abajo como el eje positivo en el ejercicio tenemos

$$F = -kx \Longrightarrow k = -\frac{F}{x} = -\frac{-1 * 9.81}{0.3} = 32.7$$

con esto debemos resolver

$$mx'' + \beta x' + kx = 0 \Longrightarrow x'' + 5x' + 32.7x = 0$$

tal que $x(0) = 0.25$ (positivo pues esta debajo del punto de equilibrio), y como la velocidad que se le da a la masa es de 0.5 m/s hacia arriba entonces $x'(0) = -0.5$, con esto tenemos que la ecuación característica de la EDLHCC es $D^2 + 5D + 32.7$ donde las raíces son aproximadamente $D = -2.5 \pm 5.153i$, por lo tanto

$$x(t) = e^{-2.5t} \left(C_1 \cos(5.153t) + C_2 \sin(5.153t)\right)$$

Aplicando que $x(0) = 0.25$ se concluye que $C_1 = 0.25$, para poder aplicar la segunda condición debemos derivar, para esto aplicados regla del producto

$$x' = -2.5e^{-2.5t} \left(C_1 \cos(5.153t) + C_2 \sin(5.153t)\right)$$

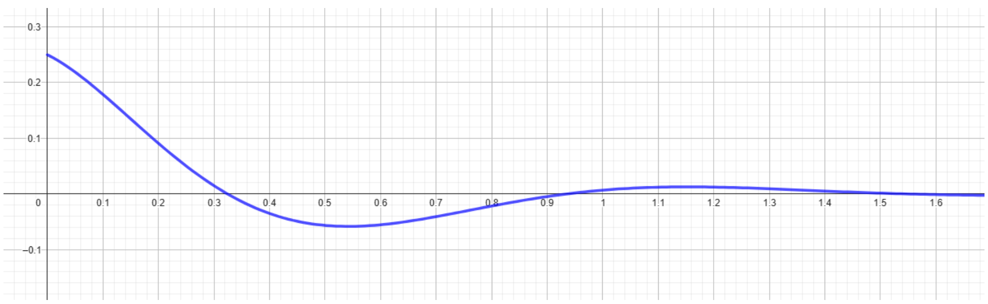
$$+e^{-2.5t}\left(-5.153C_1\sin(5.153t)+5.153C_2\cos(5.153t)\right)$$

como $x'(0)=-0.5$ y $C_1=0.25$ tenemos

$$-0.5=-2.5(0.25)+5.153C_2 \Longrightarrow C_2=0.0242$$

con lo que

$$x(t)=e^{-2.5t}\left(0.25\cos(5.153t)+0.0242\sin(5.153t)\right)$$



Esto es un caso se un sistema subamortiguado, que ocurre cuando las raíces son complejas, el sistema oscila pero cada vez con menos fuerza.

Lo ultimo que vamos a agregar a nuestro modelo de resorte es alguna fuerza externa $f(t)$ que actué sobre el sistema, asimiento que la fuerza en la dirección positiva tenemos que

$$\sum F=mx'' \Longrightarrow f(t)-kx-\beta x''=mx'' \Longrightarrow x''+\beta x'+kx=f(t)$$

Ejemplo 3.7.5. Un resorte de constante $K=100N/m$ se le coloca una masa de 10 kg, el sistema se sumerge en aceite de tal manera que se estima que la constante de amortiguamiento es de $\beta=80$, si se aplica una fuerza de $f(t)=0.5t$ determine la posición de la masa en función del tiempo, si inicialmente el resorte esta comprimido 0.5 metros y se una velocidad en la dirección positiva de $1m/s$.

En resumen, debemos resolver

$$10x''+80x'+100=0.5t$$

sujeto a $x(0)=-0.5$ (negativo pues esta comprimido) y $x'(0)=1$

para la solución homogénea tenemos la ecuación característica $10D^2+80D+100=0$ que tiene por raíces aproximadas son $D=-1.551$ y $D=-6,459$, por lo que

$$x_h=C_1e^{-1.551t}+C_2e^{-6.459t}$$

ahora debemos resolver la solución particular, para esto se propone $x_p=A+Bx$ pues $f(t)=0.5t$, y ninguna función se repite en x_h, por lo que esta ya es la forma de x_p, sustituyendo

$$10(0) + 80(B) + 100(A + Bt) = 0.5t \Longrightarrow 100Bt + (100A + 80B) = 0.5t$$

donde $B = 0.005$ y $100A + 80B = 0 \Longrightarrow A = -0.004$

entonces tenemos que

$$x = x_h + x_p = C_1 e^{-1.551t} + C_2 e^{-6.459t} - 0.004 + 0.005t$$

Ahora como $x(0) = -0.5$ se tiene que

$$-0.5 = C_1 + C_2 - 0.004 \Longrightarrow C_1 + C_2 = -0.504$$

para la segunda condición obtenemos $x'(t)$

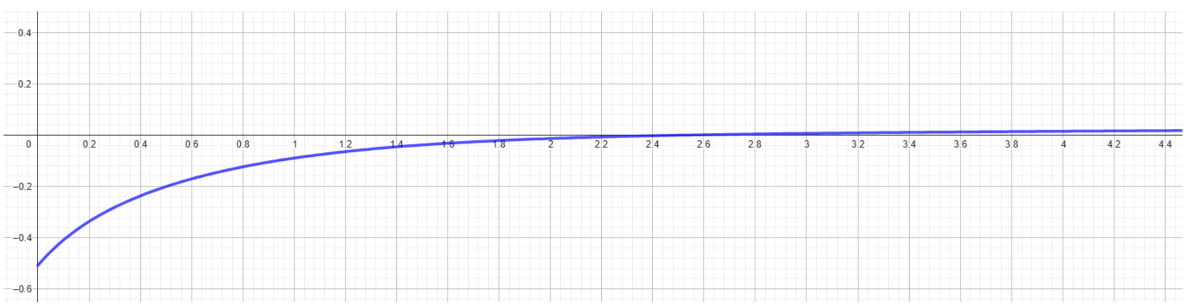
$$x'(t) = -1.1551 C_1 e^{-1.551t} - 6.459 C_2 e^{-6.459t} + 0.005$$

y como $x'(0) = 1$

$$1 = -1.1551C_1 - 6.459C_2 + 0.005 \Longrightarrow -1.1551C_1 - 6.459C_2 = 0.995$$

resolviendo el sistema tenemos que $C_1 = -0.426$ y $C_2 = -0.078$, por lo tanto

$$x = -0.426e^{-1.551t} - 0.078e^{-6.459t} - 0.004 + 0.005t$$



este es un caso de un ejemplo sobreamortiguado, que ocurre cuando las raíces son reales y distintas, lo que sucede es que el resorte no oscila, sino que regresa a su posición original, en la gráfica posterior a regresar a la posición original el resorte se sigue estirando (se ve levemente en t=4.4 que la gráfica es mayor a 0) pero esto se debe a que la fuerza de $f(t) = 0.5$t que sigue jalando de la masa.

3.8. Soluciones con series de potencias

Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas solo las sabemos resolver si son de coeficientes constante o en las de orden 2 si sabemos una solución para poder aplicar la identidad de Abel para obtener la solución general. Lo que vamos a desarrollar ahora es un método más general para resolver EDLH de orden 2 mediante series de potencias.

3.8.1. Series de potencias

Definicion 3.8.1. Una serie de potencia alrededor de x_0 es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$

La serie de potencia converge a una función en su **intervalo de convergencia**, entonces decimos que

Definicion 3.8.2. Una función $f(x)$ tiene una serie de potencia centradas en x_0 si la serie de potencia converge a $f(x)$ en un intervalo $U \subseteq \mathbb{R}$, es decir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

para todo $x \in U$

De las series de potencias que ya hemos estudiando en cursos anteriores tenemos los polinomio de Taylor, que se define para una función $f(x)$ la cual es infinitamente diferenciable como

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)$$

Algunos polinomios de Taylor comunes son

Función $f(x)$	Serie Taylor	Serie Taylor
e^x	$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
$\cos(x)$	$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$\sin(x)$	$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\ln(1+x)$	$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$

Definicion 3.8.3. Decimos que una función es analítica en $x = x_0$ si existe una serie de potencia centrada en x_0 que converge a $f(x)$ en un intervalo U. Como las funciones que estudiamos son continuamos podemos resumir que son analistas en $x = x_0$ si la función esta bien definida en x_0

Para finalizar, algo que usaremos referentes a las series es cambiar el contador donde inician sin alterar la serie, para esto podemos usar lo siguiente

Teorema 3.8.1. Sea $i, m \in \mathbb{N}$, y considere la serie

$$\sum_{n=i}^{\infty} f(n)$$

sea tomando el cambio de variable $n = k + m$ (las variables son n y k, m es un valor fijo), entonces

$$\sum_{n=i}^{\infty} f(n) \Longrightarrow \sum_{k+m=i}^{\infty} f(k+m)$$
$$\Longrightarrow \sum_{k=i-m}^{\infty} f(k+m)$$

Una manera más sencilla de enunciar el teorema anterior es, si queremos que el contador de la sumatoria aumente en uno, lo que esta dentro de la sumatoria debe iniciar una unidad antes, o de manera contraria si queremos disminuir en una unidad el contador de la sumatoria, lo que esta dentro de la sumatoria debe iniciar una unidad después.

Ejemplo 3.8.1. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_0, a_1, \ldots\}$ una sucesión de números reales, entonces tenemos las siguientes igualdades

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+3}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+4}x^{n+2} = \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+5}x^{n+3}$$

En el ejemplo anterior tenemos indices negativos, y esto es algo que puede llegar cuando resolvamos las EDLH.

3.8.2. Soluciones en torno a puntos ordinarios

Considere la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

lo que vamos a buscar es si existen soluciones centradas en $x = 0$ tal que se puedan escribir de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

es decir, buscamos una solución analítica centrada en $x = 0$, para esto primero ocupamos la siguiente definición

Definicion 3.8.4. Considere la EDLH

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

el punto x_0 se dice **punto ordinario** si tanto $p(x)$ como $q(x)$ son analíticas en x_0. En caso de no ser un punto ordinario, x_0 se dice un **punto singular**

con esto, tenemos el siguiente teorema

Teorema 3.8.2. Considere la EDLH

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

tal que x_0 es un punto regular. Entonces existen dos soluciones y_1, y_2

$$y_1 = \sum a_n x^n \qquad y_2 = \sum b_n x^n$$

linealmente independientes que tienen una serie de potencias centradas en x_0, además el radio de convergencia de dichas series corresponde a la distancia entre x_0 al punto singular más cercano

En la práctica vamos a trabajar sobre todo con polinomios o funciones racionales, recuerde que una función racional es de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

en donde $P(x), Q(x)$ son polinomios, para este tipo de funciones es bastante sencillo determinar cuando son analíticas

Teorema 3.8.3. Considere la función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

entonces $f(x)$ es analítica en x_0 siempre que $Q(x_0) \neq 0$

Otra manera de interpretar el teorema anterior es que una función racional es analítica en todo punto de continuidad, y la discontinuidad en una función de este tipo solo ocurre cuando el denominador es 0.

Ahora, centrándonos en $x_0 = 0$, queremos encontrar la solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Para esto debemos determinar los coeficientes a_i, esto lo haremos sustituyendo lo anterior en la ecuación diferencial, recordando que derivar una serie de potencias es equivalente a derivar término por término, tenemos que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

pero la sumatoria anterior es equivalente a

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{0} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$0 * a_0 x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

simplificando, podemos iniciar la sumatoria en $n = 1$, pues cuando $n = 0$ no aporta nada a la sumatoria, ahora volviendo a derivar tenemos

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

y usando argumentos similares a los de arriba se puede ver que cuando $n = 0$ y $n = 1$ no aporta nada a la sumatoria anterior, por lo que podemos iniciar la serie en $n = 2$, en resumen tenemos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Veamos la idea de como se resuelve las EDLH con este método, iniciemos con un ejemplo sencillo mientras vamos describiendo los pasos a seguir

Ejemplo 3.8.2. Resuelva con series de potencias

$$y'' + y = 0$$

Esta ecuación la podemos resolver pues es de coeficientes constantes, es más, la solución es

$$y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

vamos a corroborar esto con series de potencias, primero vea que $p(x) = 0$ y $q(x) = 1$, ambos definidos en $x = 0$, por lo que el punto es ordinario y podemos aplicar el teorema, tomando

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

y sustituyendo

$$y'' + y = 0 \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Una vez se sustituye se deben hacer las distribuciones necesarias, en este ejemplo como la y'', y "están solas", no debemos distribuir nada, por lo que el siguiente paso es que todos los x que están dentro de las distintas sumatorias estén elevados a la misma potencia, puede ser cualquier potencia siguiente que sea la misma, para efectos de las notas buscaremos escribir los exponentes de la forma x^n, a menos que exista otro exponente que simplifique los procedimientos.

Para esto nos ayudamos del teorema 3.8.1, si vemos la segunda sumatoria ya tiene x^n, entonces nos centramos en la primera que tiene un x^{n-2}, queremos pasar de $x^{n-2} \to x^n$, por lo que buscamos aumentar el contador de lo que esta dentro de la sumatoria en 2, por lo que el contador de la sumatoria debe disminuir en 2, es decir.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+2-1) a_{n+2} x^{n+2-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

vea que todo lo que depende de n dentro de la sumatoria debe aumentar en dos unidad, continuando tenemos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Longrightarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

el siguiente paso es que todas las sumatorias inicien en el mismo contador, pero en nuestro ejemplo esto ya ocurre. Ahora como todas las sumatorias inician en el mismo contador, podemos unirlas en solo una sumatoria y luego sacando a factor común x^n tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + a_n x^n] = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}[((n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n)x^n]=0$$

ahora, la única forma de que lo anterior ocurre es

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0$$

una manera de justificarlo es que $1, x, x^2, \ldots, x^n \ldots$ son linealmente independientes, es más, son base de los polinomios de grado infinito, y entonces las combinaciones lineales de estos solo es igual a cero si todos los coeficientes son nulos (esta es la definición de ser linealmente independiente), o dicho de otra forma, el único polinomio que es igual a cero (para todo valor de $x \in \mathbb{R}$) es el polinomio cuyos todos sus coeficientes son cero.

Ahora, trabajando con la igualdad anterior tenemos

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0 \Longrightarrow a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$$

con la igualdad anterior ya sabemos la forma de los coeficientes, primero vea que para poder obtener el elemento $n+2$ debemos conocer el elemento n, de esta forma es imposible conocer todos los coeficientes, pues se deberían calcular infinitos de estos, por lo que se suelen solicitar una cantidad determinada de coeficientes.

Calculemos hasta a_5, pero para iniciar al calcular debemos conocer los dos primeros a_0, a_1, estos diremos que son "libres", y vienen a ser las constantes C_1, C_2 que ponemos en las soluciones de las EDLHCC, ahora lo que vamos a hacer es escribir los demás coeficientes en términos de a_0, a_1, entonces como

$$a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$$

tenemos

$$a_2=a_{0+2}=-\frac{a_0}{(0+2)(0+1)}=-\frac{a_0}{2}=-\frac{a_0}{2!}$$

$$a_3=a_{1+2}=-\frac{a_1}{(1+2)(1+1)}=-\frac{a_1}{3*2}=-\frac{a_1}{3!}$$

$$a_4=a_{2+2}=-\frac{a_2}{(2+2)(2+1)}=-\frac{a_2}{4*3}=-\frac{-a_0/2!}{4*3}=\frac{a_0}{4!}$$

$$a_5=a_{3+2}=-\frac{a_3}{(3+2)(3+1)}=-\frac{a_3}{5*4}=-\frac{-a_1/3!}{5*4}=\frac{a_1}{5!}$$

$$a_6=a_{4+2}=-\frac{a_4}{(4+2)(4+1)}=-\frac{a_4}{6*5}=-\frac{a_1/4!}{6*5}=-\frac{a_0}{6!}$$

$$a_7 = a_{5+2} = -\frac{a_5}{(5+2)(5+1)} = -\frac{a_5}{7*6} = -\frac{a_1/5!}{7*6} = -\frac{a_1}{7!}$$

no es obligatorio encontrar la sucesión de los coeficientes de manera explicita, pero si observa tenemos en general que

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} \qquad\qquad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}$$

ahora escribiendo la solución

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2}x - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 - \frac{a_0}{6!}x^6 - \frac{a_1}{7!}x^7 + \dots$$

esto es una respuesta valida, pero como sabemos la forma explicita de las sucesión, la suma total la podemos separar en términos pares e impares

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

y como a_0, a_1 no depende de n podemos escribir

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$
$$y = a_0 \cos(x) + a_1 \sin(x)$$

en donde $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, donde la última igualdad usamos el polinomio de Taylor de $\cos(x)$ y $\sin(x)$

Desde un punto de vista practico, resolver el ejemplo anterior usando serie de potencia no es lo más adecuado, pero el objetivo era meramente didáctico, ahora veamos un ejemplo de algo que no sabemos resolver con métodos anteriores

Ejemplo 3.8.3. Resuelva usando series de potencia en $x = 0$

$$(x^2+1)y'' + 4xy' + xy = 0$$

antes corroboraremos que $x = 0$ es un punto ordinario, normalizando tenemos

$$y'' + 4\frac{x}{x^2+1}y' + \frac{x}{x^2+1}y = 0$$

donde

$$p(x) = \frac{4x}{x^2+1} \qquad\qquad q(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

ambas definidas en $x = 0$, por lo que este es un punto ordinario, entonces tome

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad\qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad\qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

ahora vamos a sustituir, para hacer eso no es recomendado hacerlo en la forma normalizada, pues tiene fracciones, es mejor sustituir en la forma original que nos dieron de la ecuación diferencial

$$(x^2+1)y'' + 4xy' + xy = 0 \Longrightarrow$$
$$(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 4x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

el siguiente paso es distribuir, como x no depende de n puede entrar en la sumatoria, debido a que la notación es muy extensa, vamos a operar cada sumatoria de manera individual, entonces

$$\begin{aligned}
(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} &= x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^{n}
\end{aligned}$$

en donde la ultima igualdad a la segunda sumatoria se aplico el teorema 3.8.1 para obtener el x^n

ahora desarrollando la siguiente sumatoria

$$4x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = 4\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n}$$

y para la ultima sumatoria

$$x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

ahora ocupamos que todas las sumatorias inicien en el mismo contador, esto lo tenemos que hacer sin usar el teorema 3.8.1, pues si lo usamos estaríamos cambiamos los exponentes de los x^n, y no queremos eso.

La forma en que hacemos esto es buscar cual es el contador mayor, vea que es este caso es $n = 2$, y calculamos los primeros términos parciales de la suma, igual procediendo por partes vea que

$$(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + 2a_2 + 3*2a_3x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n$$

para la siguiente sumatoria

$$4x\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} = 4\Big[\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n\Big] = 4\Big[a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} na_n x^n\Big]$$

$$4a_1x + 4\sum_{n=2}^{\infty} na_n x^n$$

y para la última sumatoria tenemos

$$x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = a_0x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n+1} =$$

$$a_0x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n+1}$$

En la ultima igualdad solo se hace el cambio de color, sustituyendo

$$(x^2+1)y'' + 4xy' + xy = 0 \Longrightarrow$$

$$2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n + 4a_1x + 4\sum_{n=2}^{\infty} na_n x^n +$$

$$a_0x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^{n+1} = 0$$

todas las sumatorias inician en $n = 2$ por lo que las podemos unificar, y sacando a factor común x^n tenemos

$$2a_2 + (6a_3 + 4a_1 + a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} + 4na_n + a_{n-1}]x^n = 0$$

en la sumatoria agrupando los a_n

$$2a_2 + (6a_3 + 4a_1 + a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty}[a_{n-1} + (n(n-1) + 4n)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2}]x^n = 0$$

ahora, para que la igualdad anterior sea verdadera todos los coeficientes del polinomio deber ser 0, entonces

$$\begin{cases} 2a_2 &= 0 \\ 6a_3 + 4a_1 + a_0 &= 0 \\ a_{n-1} + (n(n-1) + 4n)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} &= 0 \end{cases}$$

entonces de la primera igualdad tenemos que $a_2 = 0$, de la segunda igualdad tenemos que

$$a_3 = -\frac{4a_1 + a_0}{6}$$

y de la ultima igualdad tenemos

$$a_{n-1} + n(n+3)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0$$

$$a_{n+2} = -\frac{a_{n-1} + n(n+3)a_n}{(n+2)(n+1)}$$

Vea que la ultima igualdad, para conocer a_{n+2} ocupamos conocer a_n y a_{n-1}, dicho de otra manera, para calcular un nuevo coeficiente ocupamos conocer el segundo y tercer coeficientes anteriores.

Entonces para iniciar a calcular ocupamos tener los 3 primeros elementos, a_0 y a_1 son "libres", y recuerde que $a_2 = 0$, con esto ya tenemos determinados los primeros 3 coeficientes. Además ya tenemos despejado a_3 en términos de a_0, a_1, pero también podemos usar la formula de recursividad para calcular a_3, vea que

$$a_3 = a_{1+2} = -\frac{a_{1-1} + 1(1+3)a_1}{(1+2)(1+1)} = -\frac{4a_1 + a_0}{6}$$

que coincide con lo que sabíamos de a_3, no es necesario volver a calcular coeficientes que ya conocemos, pero hacer esto sirve para corroborar que el desarrollo de los cálculos son correctos, calculemos hasta a_5

$$a_4 = a_{2+2} = -\frac{a_1 + 2(2+3)a_2}{(2+2)(2+1)} = -\frac{a_1 + 10 * 0}{12} = -\frac{a_1}{12}$$

$$a_5 = a_{3+2} = -\frac{a_2 + 3(3+3)a_3}{(3+2)(3+1)} = -\frac{0 + 18[-(4a_1 + a_0)/6]}{20} = \frac{3}{5}a_1 + \frac{3}{20}a_0$$

con esto podemos representar nuestra solución

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + 0x^2 - \frac{4a_1 + a_0}{6}x^3 - \frac{1}{12}a_1 x^4 + \Big(\frac{3}{5}a_1 + \frac{3}{20}a_0\Big)x^5 + \dots$$

para ver las dos soluciones linealmente independientes (aunque sea los coeficientes iniciales de sus series de potencial) recordemos que se deben separar por las constantes a_0, a_1, entonces

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0\Big(1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{20}x^5 + \dots\Big) + a_1\Big(x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{5}x^5 + \dots\Big)$$

y como no tenemos puntos singulares (vea que $p(x), q(x)$ están definidos en todo $\mathbb{R}$), las series de potencias convergen en todo $\mathbb{R}$.

La soluciones que obtenemos no necesariamente se pueden escribir usando las funciones que conocemos, como el caso anterior. Ahora, en el fondo no estamos calculando toda la serie de potencias, solo los primeros términos, por lo que estamos haciendo es aproximando la solución con los primeros términos de su serie de potencias, entre mas términos se calcule mejor será la aproximación.

También podemos resolver problemas de Cauchy mediante series de potencias, con lo que debemos determinar los valores de a_0, a_1

Ejemplo 3.8.4. Resuelve mediante series de potencias el siguiente problema de Cauchy

$$y'' - xy + 4y = 0$$

tal que $y(0) = 3$, $y'(0) = -5$

Tenemos que $p(x) = -x$ y $q(x) = 4$, definidas en todo $\mathbb{R}$, por lo que todos los puntos son ordinarios, ahora tome

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

sustituyendo

$$y'' - xy' + 4y = 0 \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ahora buscamos que todas las series inicien en el mismo contador, buscamos el mayor, por lo que queremos que todas inicien en $n = 1$

$$\Longrightarrow 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + 4a_0 + 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Longrightarrow 4a_0 + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n + 4a_n]x^n = 0$$

$$\Longrightarrow 4a_0 + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + (4-n)a_n]x^n = 0$$

entonces tenemos

$$\begin{cases} 4a_0 + 2a_2 &= 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + (4-n)a_n &= 0 \end{cases}$$

entonces $a_2 = -2a_0$ de la primera ecuación y de la segunda ecuación

$$a_{n+2} = \frac{n-4}{(n+2)(n+1)}a_n$$

ya sabemos que $a_2 = -2a_0$, calculemos hasta a_6

$$a_3 = a_{1+2} = \frac{1-4}{(1+2)(1+1)}a_1 = -\frac{1}{2}a_1$$

$$a_4 = a_{2+2} = \frac{2-4}{(2+2)(2+1)}a_2 = -\frac{1}{6}(-2a_0) = \frac{1}{3}a_0$$

$$a_5 = a_{3+2} = \frac{3-4}{(3+2)(3+1)}a_3 = -\frac{1}{20}\left(-\frac{1}{2}a_1\right) = \frac{1}{40}a_1$$

$$a_6 = a_{4+2} = \frac{4-4}{(4+2)(4+1)}a_4 = 0$$

entonces la solución es

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x - 2a_0 x^2 - \frac{1}{2}a_1 x^3 + \frac{1}{3}a_0 x^4 + \frac{1}{40}a_1 x^5$$

Ahora debemos determinar el valor de a_0, a_1, primero como $y(0) = 3$, tenemos

$$3 = a_0 + a_1 * 0 + a_2 * +a_3 * 0 + \ldots \Longrightarrow 3 = a_0$$

y para poder usar que $y'(0) = -5$ debemos derivar y

$$y' = a_1 - 4a_0x - \frac{3}{2}a_1x^+\frac{4}{3}a_0x^3 + \frac{1}{8}a_1x^4$$

en realidad de derivada anterior solo nos interesa el primer termino pues los demás se anular al evaluarlos en $x = 0$, usando $y'(0) = -5$

$$-5 = a_1 + 0 + \ldots \Longrightarrow a_1 = -5$$

entonces la solución al problema de Cauchy es

$$y = a_0\Big(1 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^4\Big) + a_1\Big(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{40}x^5\Big)$$
$$y = 3\Big(1 - 2x^2 + \frac{1}{3}x^4\Big) - 5\Big(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{40}x^5\Big)$$

Ejemplo 3.8.5. Resuelva mediante series de potencias

$$y'' + x^2y = 0$$

tomando

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

y sustituyendo

$$y'' + x^2y = 0 \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + x^2\sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+2} = 0$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n = 0$$

ahora queremos que todas las sumatorias inicien en $n = 2$

$$2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n = 0$$

$$2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_{n-2}]x^n = 0$$

entonces tenemos que $2a_2 = 0$, $6a_3 = 0$ (recuerde que todos los coeficientes del polinomio deben ser 0), y

$$a_{n+2} = -\frac{a_{n-2}}{(n+2)(n+1)}$$

de la formula de recursividad para calcular un elemento ocupamos saber el 4 elemento anterior, entonces debemos definir las primeras 4 coeficientes, tenemos que a_0, a_1 son “libres”, y sabemos que $a_2 = a_3 = 0$, con eso ya conocemos los primeros 4 términos,

$$\begin{aligned}
a_4 = a_{2+2} &= -\frac{a_0}{4*3} = -\frac{a_0}{12} \\
a_5 = a_{3+2} &= -\frac{a_1}{5*4} = -\frac{a_1}{20} \\
a_6 = a_{4+2} &= -\frac{a_2}{6*5} = 0 \\
a_7 = a_{5+2} &= -\frac{a_3}{7*6} = 0 \\
a_8 = a_{6+2} &= -\frac{a_4}{8*7} = -\frac{-a_0/12}{56} = \frac{a_0}{672} \\
a_9 = a_{7+2} &= -\frac{a_5}{9*8} = -\frac{-a_1/20}{72} = \frac{a_1}{1440}
\end{aligned}$$

puede ver que $a_10 = a_11 = 0$, y el patrón se repite, cada dos coeficientes siguen dos coeficientes nulos, ahora escribiendo la solución

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x - \frac{a_0}{12}x^4 - \frac{a_1}{20}x^5 + \frac{a_0}{672}x^8 + \frac{a_1}{1440}x^9 + \dots$$

escribiendo la solución como dos funciones linealmente independientes

$$y = a_0\Big(1 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{672}x^8 + \dots\Big) + a_1\Big(x - \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{1440}x^9 + \dots\Big)$$

Por el momento solo hemos trabajado cuando $p(x), q(x)$ son funciones racionales, pero en caso de que esto no ocurra, si conocemos el polinomio de Taylor de $p(x)$ o $q(x)$, podemos usarlos para aproximar la solución, veamos esto con ejemplos.

Ejemplo 3.8.6. Resuelva mediante series de potencias

$$y'' + \ln(x+1)y = 0$$

aproximando $\ln(x+1)$ con un polinimio de grado 3.

En este caso $p(x) = 0$, $q(x) = \ln(1+x)$, ambas definidas en $x = 0$, vea que el punto singular más cercano es $x = -1$, que indetermina el logaritmo, por lo que la solución que encontraremos converge en el intervalo $]-1, 1[$.

Para el $\ln(x+1)$ lo aproximamos con los primeros 3 términos

$$\ln(1+x) \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

y tomando

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

sustituyendo

$$y'' + \ln(x+1)y = 0 \Longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

y ahora el ejercicio lo trabajamos de igual manera que los anteriores, entre más coeficientes de la serie de Taylor se usen mejor será la aproximación de la solución, distribuyendo

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-2)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n = 0$$

ahora hacemos que todos los contadores inicien en $n = 2$

$$2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + a_0 + a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n + a_0x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n = 0$$

$$a_0 + 2a_2 + (a_0 + a_1 + 6a_3)x + \sum_{n=2}^{\infty}\Big[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n + a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-2}\Big]x^n = 0$$

entonces todos los coeficientes del polinomio deben ser 0, primero de $a_0 + 2a_2 = 0 \Longrightarrow a_2 = -\dfrac{a_0}{2}$, luego tenemos

$$a_0 + a_1 + 6a_3 = 0 \longrightarrow a_3 = -\frac{a_0 + a_1}{6}$$

y de la sumatoria extraemos que

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n + a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-2} = 0$$
$$\Longrightarrow a_{n+2} = -\frac{2a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2}}{2(n+2)(n+1)}$$

dejando a_0, a_1 libres, y anteriormente despejamos a_2, a_3 en términos de a_0, a_1

$$a_4 = a_{2+2} = -\frac{2a_2 + 2a_1 + a_0}{2*4*3} = -\frac{2(-a_0/2) + 2a_1 + a_0}{24} = -\frac{2a_1 + \cancel{a_0} - \cancel{a_0}}{24} = -\frac{a_1}{12}$$

$$a_5 = a_{3+2} = -\frac{2a_3 + 2a_2 + a_1}{2*5*4} = -\frac{2(-[a_0 + a_1]/6) + 2(-a_0/2) + a_1}{40} = -\frac{1}{30}a_0 + \frac{1}{60}a_1$$

con esto podemos escribir la solución

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2}x^2 - \frac{a_0 + a_1}{6}x^3 - \frac{a_1}{12}x^4 + \Big(-\frac{1}{30}a_0 + \frac{1}{60}a_1\Big)x^5 + \dots$$

$$a_0\Big(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots\Big) + a_1\Big(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 + \dots\Big)$$

3.8.3. Soluciones en torno a puntos singulares

Ahora veamos como proceder cuando $x_0 = 0$ no es un punto ordinario

Definicion 3.8.5. Considere la EDL

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en donde $x = 0$ es un punto singular, entonces si se cumple que

$$P(x) = xp(x) \qquad\qquad Q(x) = x^2 q(x)$$

son ambas analíticas $x = 0$ (a efectos prácticos, definidas en $x = 0$), el punto se llama **singular regular**, caso contrario el punto $x = 0$ se llama **singular irregular**.

Ejemplo 3.8.7. Considere la EDL

$$x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$$

en este caso $x = 0$ es un punto singular regular, para iniciar vea que al normalizar se obtiene

$$p(x) = \frac{4}{x} \qquad q(x) = -\frac{4}{x^2}$$

ambas se indeterminan en $x = 0$, pero

$$P(x) = xp(x) = 4 \qquad Q(x) = x^2q(x) = -4$$

ambas funciones definidas en $x = 0$, por lo que el punto es singular regular.

Para resolver EDL de orden 2 en un punto singular vamos a utilizar el teorema de Frobenius, que enunciado para $x = 0$ dice

Teorema 3.8.4. Considere la EDL de orden 2

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

tal que $x = 0$ es un punto singular regular, definimos

$$\begin{aligned} P(x) &= xp(x) & Q(x) &= x^2q(x) \\ p_0 &= P(0) & q_0 &= Q(x) \end{aligned}$$

y considere el siguiente polinomio que depende de r

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0$$

donde r_1, r_2 son las dos raíces del polinomio, entonces si $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ existen dos soluciones linealmente independientes de la forma

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+r_1} \qquad y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+r_2}$$

La ecuación $r(r-1) + p_0r + q_0 = 0$ se llama la **ecuación indicial**

En el curso solo estudiaremos el caso cuando $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$, solo para mencionar, cuando $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Q}$ el teorema de Frobenius dice que existen dos soluciones de la forma

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+r_1}$$

$$y_2 = Ay_1 \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2}$$

en donde A es una constante que se debe determinar.

Entonces en resumen queremos encontrar dos soluciones de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

en donde debemos determinar los coeficientes a_n para r_1 y r_2, para esto procedemos igual que en los puntos ordinarios, derivando tenemos

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n+r-1} \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

note que en este caso todas la sumatorias inician en $n = 0$ a diferencial del caso de puntos ordinarios, ahora como x^r no depende de n, lo anterior lo escribimos como

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = x^r \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^{n-1} \qquad y'' = x^r \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n x^{n-2}$$

y luego se sustituye en la EDLH para obtener la relación de recurrencia.

Ejemplo 3.8.8. Resuelva usando series de potencias la siguiente EDLH

$$3xy'' + (2-x)y' - y = 0$$

calculando hasta el coeficiente a_3 de la serie de potencia de dos soluciones linealmente independientes.

En este caso tenemos que

$$p(x) = \frac{2-x}{3x} \qquad q(x) = -\frac{1}{3x}$$

ambas se indeterminan en $x = 0$, pero

$$P(x) = xp(x) = \frac{2-x}{3} \qquad Q(x) = x^2 q(x) = \frac{-1}{3}x$$

las cuales si están definidas en $x = 0$, para calcular la ecuación indicial tenemos

$$p_0 = P(0) = \frac{2}{3} \qquad q_0 = Q(0) = 0$$

entonces la ecuación indicial es

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \Longrightarrow r(r-1) + \frac{2}{3}r = 0$$
$$r^2 - \frac{1}{3}r = 0$$

que tiene por raíces $r = 0$ y $r = 1/3$, tome $r_1 = 0$ y $r_2 = 1/3$, y $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$, ahora tomando

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n-1} \qquad y'' = x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n-2}$$

sustituyendo tenemos

$$3xy'' + (2-x)y' - y = 0 \Longrightarrow$$
$$3x\left(x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n-2}\right) + (2-x)\left(x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n-1}\right) - x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

como todos los términos tiene x^r, podemos cancelarlos, y luego distribuyendo tenemos

$$3\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

ahora buscamos que todas las sumatorias tenga x^n

$$3\sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1)(n+r) a_{n+1} x^n + 2\sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

haciendo que todas las sumatorias inicien en el mismo contador, se elije el mayor que en este caso es $n = 0$, entonces tenemos

$$\left[3r(r-1)a_0 x^{-1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+r+1)(n+r) a_{n+1} x^n\right] +$$

$$\left[2ra_0x^{-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)a_{n+1}x^n\right]-\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\Longrightarrow$$

$$[3r(r-1)+2r]a_0x^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\Big([3(n+r+1)(n+r)+2(n+r+1)]a_{n+1}-[(n+r)+1]a_n\Big)x^n=0$$

$$\Longrightarrow [3r(r-1)+2r]a_0x^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\Big([(n+r+1)(3(n+r)+2)]a_{n+1}-(n+r+1)a_n\Big)x^n=0$$

$$\Longrightarrow [3r(r-1)+2r]a_0x^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+r+1)\Big((3n+3r+2)a_{n+1}-a_n\Big)x^n=0$$

Ahora tenemos un termino de la forma x^{-1}, por lo que ya no es un polinomio, pero de igual forma todos los coeficientes deben ser cero, esto se debe a que el conjunto $\{x^{-1},1,x,x^2,\ldots,x^n,\ldots\}$ es linealmente independiente, entonces primero tenemos que

$$[3r(r-1)+2r]a_0x^{-1}=0$$

de donde tenemos que $a_0=0$ o $3r(r-1)+2r=0\Longrightarrow 3r^2-r=0$, que es la ecuación indicial, la cual sabemos que es igual a 0 cuando $r=r_1$ y $r=r_2$, que son los casos que vamos a estudiar, por lo tanto lo anterior siempre sera igual a 0. Por lo tanto **no** podemos afirmar que $a_0=0$ solo usando la ecuación anterior.

Ahora, de la sumatoria debemos tener que

$$(n+r+1)\Big((3n+3r+2)a_{n-1}-a_n\Big)=0$$

pero $n+r+1=0$ no se puede cumplir para todo $n\in\mathbb{N}$ (recuerde que r es fijo), entonces se debe de cumplir que

$$(3n+3r+2)a_{n+1}-a_n=0\Longrightarrow a_{n+1}=\frac{a_n}{3n+3r+2}$$

ahora debemos encontrar los coeficientes para r_1 y r_2, iniciemos con $r=r_1=0$

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{3n+3r+2}=\frac{a_n}{3n+2}$$

dejando a_0 libre, calculamos 4 coeficientes más

$$a_1=a_{0+1}=\frac{a_0}{3*0+2}=\frac{a_0}{2}$$
$$a_2=a_{1+1}=\frac{a_1}{3+2}=\frac{a_1}{5}=\frac{a_0}{2}\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{a_0}{10}$$
$$a_3=a_{2+1}=\frac{a_2}{3*2+2}=\frac{a_0}{10}\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{a_0}{80}$$

entonces la primera solución es

$$y_1 = x^{r_1} \sum a_n x^n = x^0 a_0 \Big(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}ax^2 + \frac{1}{80}x^3 + \dots\Big)$$
$$y_1 = a_0 \Big(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}ax^2 + \frac{1}{80}x^3 + \dots\Big)$$

ahora usando $r_2 = 1/3$ tenemos

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3n + 3\frac{1}{3} + 2} = \frac{a_n}{3n+3}$$

dejando a_0 libre tenemos

$$a_1 = a_{0+1} = \frac{a_0}{3}$$
$$a_2 = a_{1+1} = \frac{a_1}{3+3} = \frac{a_0}{3}\Big(\frac{1}{6}\Big) = \frac{a_0}{18}$$
$$a_3 = a_{2+1} = \frac{a_2}{3*2+3} = \frac{a_0}{18}\Big(\frac{1}{9}\Big) = \frac{a_0}{162}$$

entonces la segunda solución es

$$y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{1/3} a_0 \Big(1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{162}x^3 + \dots\Big)$$
$$y_2 = a_0 \Big(x^{1/3} + \frac{1}{4}x^{4/3} + \frac{1}{18}x^{7/3} + \frac{1}{162}x^{10/3} + \dots\Big)$$

vamos a escribir la solución general, antes vea que ambas soluciones depende de a_0, pero cada una en realidad es una variable diferente, lo que estamos es reciclando el nombre de la constante, remediando esto en la solución general escribimos

$$y = C_1 \Big(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}ax^2 + \frac{1}{80}x^3 + \dots\Big) + C_2 \Big(x^{1/3} + \frac{1}{4}x^{4/3} + \frac{1}{18}x^{7/3} + \frac{1}{162}x^{10/3} + \dots\Big)$$

Ejemplo 3.8.9. Resuelva mediante series de potencias

$$2xy'' + 5y' + xy = 0$$

al normalizar tenemos que

$$p(x) = \frac{5}{2x} \qquad q(x) = \frac{1}{2}$$

de $p(x)$ se indetermina en $x = 0$, pero por otro lado

$$P(x) = xp(x) = \frac{5}{2} \qquad Q(x) = x^2 q(x) = \frac{1}{2}x^2$$

ambas continuas en $x = 0$, calculando la ecuación indicial tenemos

$$p_0 = P(0) = \frac{5}{2} \qquad q_0 = Q(0) = 0$$

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) + \frac{5}{2}r = r^2 + \frac{3}{5}r$$

donde las raíces de la ecuación indicial son $r_1 = 0$ y $r_2 = -3/2$, ahora tomando

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n-1} \qquad y'' = x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n-2}$$

y sustituyendo tenemos que

$$2xy'' + 5y' + xy = 0 \Longrightarrow$$

$$2x\left(x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n-2}\right) + 5\left(x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n-1}\right) + x\left(x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = 0$$

cancelando el término x^r y distribuyendo

$$2\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n-1} + 5\sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

ahora haciendo que todas las sumas tenga el término x^n

$$2\sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1)(n+r) a_{n+1} x^n + 5\sum_{n=-1}^{\infty} (n+r+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

ahora buscamos que todas las sumas inicien en el mismo contador, en este caso el mayor es $n = 1$, entonces

$$2r(r-1)a_0 x^{-1} + 2(r+1)ra_1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (n+r+1)(n+r) a_{n+1} x^n +$$

$$5ra_0 x^{-1} + 5(r+1)a_1 + 5\sum_{n=1}^{\infty} (n+r+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$$

agrupando

$$(2r(r-1)+5r)a_0x^{-1}+(2(r+1)r+5(r+1))a_1+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big([2(n+r+1)(n+r)+5(n+r+1)]a_{n+1}+a_{n-1}\Big)x^n=0$$

de donde tenemos que $(2r(r-1)+5r)a_0=0$, esta es la ecuación indicial que sabemos que es igual a 0 cuando sustituimos las raíces r_1, r_2, luego tenemos que

$$(2(r+1)r+5(r+1))a_1=0 \Longrightarrow (2r^2+7r+5)a_1=0$$

las raíces de $2r^2+7r+5=0$ son $r=-5/2$ y $r=-1$, como no coinciden con r_1 o r_2, este polinomio no será 0 para los casos que vamos a estudiar, por lo que se concluye que $a_1=0$, ahora de la sumatoria extraemos la relación de recurrencia

$$[2(n+r+1)(n+r)+5(n+r+1)]a_{n+1}+a_{n-1}=0 \Longrightarrow$$
$$(n+r+1)(2(n+r)+5)a_{n+1}+a_{n-1}=0 \Longrightarrow$$
$$a_{n+1}=-\frac{a_{n-1}}{(n+r+1)(2n+2r+5)}$$

ahora, para $r_1=0$ tenemos

$$a_{n+1}=-\frac{a_{n-1}}{(n+1)(2n+5)}$$

y tenemos que a_0 es libre mientras que $a_1=0$, calculando

$$a_2=a_{1+1}=-\frac{a_0}{(0+1)(2*0+5)}=-\frac{a_0}{5}$$
$$a_3=a_{2+1}=-\frac{a_1}{(1+1)(2*1+5)}=\frac{0}{14}=0$$
$$a_4=a_{3+1}=-\frac{a_2}{(2+1)(2*2+5)}=--\frac{a_0}{5}\Big(\frac{1}{3*9}\Big)=\frac{a_0}{135}$$

entonces la primera solución es

$$y_1=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0\Big(1-\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{135}x^4+\dots\Big)$$

por otro lado, para $r_2=-3/2$ tenemos

$$a_{n+1}=-\frac{a_{n-1}}{(n+r_2+1)(2n+2r_2+5)}=-\frac{a_{n-1}}{(n-3/2+1)(2n+2(-3/2)+5)}$$

$$= -\frac{a_{n-1}}{\left(\frac{2n-3+2}{2}\right)(2n-3+5)} = -\frac{a_{n-1}}{\left(\frac{2n-1}{\cancel{2}}\right)\cancel{2}(n+1)} = -\frac{a_{n-1}}{(2n-1)(n+1)}$$

tenemos que a_0 es libre y $a_1 = 0$, siguiendo

$$a_2 = -\frac{a_0}{(-1)(1)} = a_0$$
$$a_3 = \frac{a_1}{1(2)} = 0$$
$$a_4 = -\frac{a_2}{(4-1)(3)} = -\frac{a_2}{9}$$

con lo que la segunda solución es

$$y_2 = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0\left(1 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{135}x^4 + \dots\right)$$

3.9. Ejercicios

1. Justifique por el las funciones $y_1 = \cos(x)$, $y_2 = \sin(x)$, $y_3 = x^2$ son linealmente independientes.

2. Demuestre que e^{nx} y e^{mx} son linealmente independientes siempre que $n \neq m$.

3. Resuelva la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' - 9y = 0$$

   sujeto a $y(1) = 6$, $y'(1) = 12$ si se sabe que $y_1 = x^3$ es solución particular

4. La función $y_1(x) = e^x$ satisface que su segunda derivada es igual a sí misma: $y_1'' = y_1$. Determine otra función $y_2(x)$, **linealmente independiente** de $y_1(x)$, que cumpla con esta misma propiedad. Justifique su respuesta.

5. Muestre que la ecuación diferencial

$$x^2y'' + 7xy' + 5y = 0$$

   posee dos soluciones particulares de la forma $y = x^r$. Utilice este resultado para hallar la solución general de esta ecuación diferencial.

6. Resuelva la ecuación diferencial

$$4x^2y'' - 6xy' + (x+6)y = 0$$

   si se sabe que $y_1 = x\cos(\sqrt{x})$ es solución.

   Si se considera

$$4x^2y'' - 6xy' + (x+6)y = x^2 \tag{3.5}$$

se sabe que la forma de $y_p = A + Bx$ (con lo visto en clase no tenemos forma de saber porque esta es y_p, el ejercicio se resolvería con variación de parámetros por lo que tome como verdadero que y_p es de esta forma), determine la solución general de 3.5

7. Considere la ecuación diferencial

$$2(y'' + y)\tan x - y' + y\cot x = 0$$

   a) Verifique que $y_1 = \sin x$ es solución de la ecuación diferencial anterior.

   b) Halle la solución general de la ecuación diferencial.

8. Determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes

   a)
$$y'' + y/4 = x^2 + e^x$$

   b)
$$y'' - 5y' + 6y = 104\cos(2x)$$

   c)
$$y''' + y = x^2$$

   d)
$$y''' + y' = 4x + 20e^{2x}$$

   e)
$$y'' + 6y' + 13y = e^x + \cos(x)$$

   f)
$$y''' - 4y' = 40e^{2x}$$

   g)
$$y'' - 10y' + 24y = xe^x$$

   h)
$$y'' + 2y' + 2y = x^3 - 4x + 2$$

9. Considere la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$$

   Sabiendo que $y_1(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ es solución de la ecuación diferencial.

   a) Determine su solución general.

   b) Halle la solución particular que satisfaga $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 1$.

10. Determine la solución general de

$$y'' - y' + e^{2x}y = 0$$

si se sabe que $y_1 = \sin(e^x)$ es solución particular.

11. Considere el operador diferencial L dado por

$$L = D(D-1)(D^2+4)(D+3)^2.$$

   a) Resuelva la ecuación $Ly = 0$.

   b) Halle la forma de la solución particular de la ecuación diferencial

$$Ly = xe^x + \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

12. Considere la ecuación diferencial

$$y'' + xy' + (x+1)y = 0$$

   a) Demuestre que $x = 0$ es un punto singular ordinario.

   b) Mediante series de potencia, encuentre la relación de recursividad entre los coeficientes, además determine el coeficiente a_2 en términos de a_0 y a_1

13. Considere la siguiente ecuación diferencial.

$$2xy'' + (x+1)y' + y = 0$$

en donde si se considera que $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$ se obtiene

$$[2r(r-1)+r]a_0x^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}[2(n+r+1)(n+r)a_{n+1} + (n+r)a_n + (n+r+1)a_{n+1} + a_n]x^{r+k} = 0$$

   a) Demuestre que $x = 0$ es un punto singular regular

   b) Calcule las raíces r_1, r_2 de la ecuación indicial y pruebe que la diferencia $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

   c) Encuentre la relación de recursividad entre los coeficientes en términos de n, r.

   d) Una raíz de la ecuación indicial es $r_1 = 0$, calcule los primeros 4 coeficientes (hasta a_3) la solución asociada a $r_1 = 0$ y escriba la forma aproximada de la solución

   e) Sea r_2 la raíz no nula, calcule los primeros 4 coeficientes (hasta a_3) la solución asociada a r_2 y escriba la forma aproximada de la solución

14. Considere la ecuación diferencial

$$y'' - 2xy' - 2y = 0$$

Si se asume que $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, se obtiene

$$2a_2 - 2a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}[a_{n+2}(n+2)(n+1) - 2a_n n - 2a_n]x^n = 0$$

   a) Demuestre que $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación diferencial.

   b) Mediante series de potencia, encuentre la relación de recursividad entre los coeficientes, y determine hasta el coeficiente a_4.

   c) Usando los coeficientes calculados en el punto anterior escriba la solución general y separe la solución en dos funciones linealmente independientes.

15. Considere la siguiente ecuación diferencial.

$$3xy'' + (2 - x)y' - y = 0$$

   a) Demuestre que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial.

   b) Calcule las raíces r_1, r_2 de la ecuación indicial y pruebe que la diferencia $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$

   c) Demuestre que la relación de recursividad esta dada por

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3n + 3r + 2}$$

   d) $r = 1/3$ es una raíz de la ecuación indicial, calcule los coeficientes hasta a_2 asociadas a esta raíz y exprese la solución.

16. Se lanza un objeto de un 1 kg con una velocidad de 2.5 m/s hacia abajo, el aire ejerce una fricción que puede ser modelada por $Fr = 0.5v(t)$, si el objeto se lanza desde una altura de 1500 metros determine cuando tiempo tarda en tocar el suelo y la velocidad del objeto en el instante que toca el suelo.

17. Un auto acelera de tal forma que su motor ejerce una fuerza de 3000 N. La fuerza de fricción del aire y las ruedas se modela como $f_r = 50v(t)$, si el auto parte del reposo, determine el tiempo que le toma llegar a una velocidad de 108 km/h (50 m/s).

18. Un bote con masa $500kg$ parte del reposo, se modela que la fuerza de fricción esta dada por $f_r = 15v(t)$, si la fuerza que ejerce el motor esta modelada por

$$F_m = 450(1 - e^{-0.2t})$$

si el bote debe recorrer 785 metros, determine el tiempo que le toma recorrer esta distancia.

19. Un resorte con constante $k = 50\ N/m$ se le coloca una masa de $0.25kg$, el resorte se estira 30 cm de la posición de equilibrio y se aplica una velocidad (en la misma dirección en la que se estiro el resorte) de $0.25\ m/s$. Determine la posición de la masa en función del tiempo.

20. Un resorte de constante $k = 40N/m$ se le coloca una masa de un kilogramo, el resorte se estira 0.5 metros y se libera del reposo, si la fuerza amortiguadora se modela como $f_a = 5v(t)$ y sobre la masa actúa una fuerza externado dada por $F(t) = 10\cos(t)$. Determine la posición de la masa en función del tiempo.

4. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Un sistema de ecuaciones diferenciales relaciona n funciones (que depende de una misma variable) y sus derivadas entre si. Diversos modelos físicos, económicos y biológicos se describen mediante sistemas de EDL.

Muchas de las herramientas que vamos a utilizar vienen del curso de álgebra lineal, de donde ocupamos poder realizar reducción Gaussiana, calculo de determinantes, inversas, y calculo de vectores y valores propios.

4.1. Método anuladores y reducción Gausiana

Considere que tenemos una variable independiente, que llamaremos t, esto se debe a que los sistemas de ecuaciones se suelen usar para modelar fenómenos físicos, donde la variable independiente es el **t**iempo , y n funciones que dependen de t $x_1(t), \ldots, x_n(t)$.

$$\begin{cases} P_{11}(D)x_1(t) & +P_{12}(D)x_2(t) & +\ldots+ & P_{1n}(D)x_n(t) & = f_1(t) \\ P_{21}(D)x_1(t) & +P_{22}(D)x_2(t) & +\ldots+ & P_{2n}(D)x_n(t) & = f_2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ P_{n1}(D)x_1(t) & +P_{n2}(D)x_2(t) & +\ldots+ & P_{nn}(D)x_n(t) & = f_n(t) \end{cases}$$

en donde $P_{ij}(D)$ son polinomios que dependen del operador D, escrito como matrices el sistema anterior se ve

$$P(D)\vec{X} = f(\vec{t})$$

$$\begin{pmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) & \ldots & P_{1n} \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) & \ldots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(D) & P_{n2}(D) & \ldots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

El cual es un sistema de ecuaciones cuya matriz de coeficientes es la matriz de polinomios $P_{ij}(D)$, y lo podemos resolver usando herramientas de álgebra lineal, como la reducción Gaussiana o la regla de Cramer, en el caso de que $f_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, el sistema se llama homogéneo, pero antes de iniciar a resolver ejercicios tenemos el siguiente teorema

Teorema 4.1.1. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) & \dots & P_{1n} \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(D) & P_{n2}(D) & \dots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

entonces la soluciones general son la familia de curvas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ que depende de k parámetros, donde k es el grado del polinomio que depende de D que se obtiene al calcular el determinante de la matriz de coeficientes $P(D)$

$$\det(P(D)) = \begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) & \dots & P_{1n} \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(D) & P_{n2}(D) & \dots & P_{nn} \end{vmatrix}$$

En nuestros ejemplos procederemos por reducción Gausiana, la idea es despejar una ecuación diferencial en donde solo este involucrada una variable dependiente, esta será una EDL que podemos resolver con los métodos antes estudiados.

Cuando teníamos matrices de números reales, como en los cursos de álgebra lineal, usábamos números reales para realizar las operaciones filas, ahora que nuestra matriz de coeficientes contiene polinomios del operador D, por lo que ahora para realizar las operaciones filas columnas vamos a usar polinomios del operador D, iniciemos con ejemplos para que esto sea más claro.

Ejemplo 4.1.1. Considere el sistema

$$\begin{cases} x'(t) & +y'(t) & = 0 \\ 2x'(t) & +y(t) & = 0 \end{cases}$$

Escribiendo el sistema de manera matricial

$$\begin{pmatrix} D & D \\ 2D & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

calculando el determinante de la matriz de coeficientes

$$|P(D)| = \begin{vmatrix} D & D \\ 2D & 1 \end{vmatrix} = D - 2D^2$$

ahora escribiendo la matriz aumentada del sistema y aplicando operaciones filas

$$\left(\begin{array}{cc|c} D & D & 0 \\ 2D & 1 & 0 \end{array}\right) \xRightarrow{-2f_1+f_2} \left(\begin{array}{cc|c} D & D & 0 \\ 0 & 1-2D & 0 \end{array}\right)$$

de la segunda fila, encontramos la ecuación

$$(1-2D)x_2(t) = 0$$

la cual es una ecuación lineal con ecuación característica $1-2D$, que tiene por raíces $D = 1/2$, por lo que

$$x_2(t) = C_1 e^{t/2}$$

ahora, del sistema original, tenemos que $x_1' + x_2' = 0$, lo cual es equivalente a que

$$x_1' = -x_2' \Longrightarrow x_1 = -\int x_2' dt = -\int 2C_1 e^{t/2} dt = C_1 e^{2t} + C_2$$

por lo que a solución es $x_1 = C_1 e^t + C_2$, $x_2 = C_1 e^t$, para dar la solución escribimos lo anterior en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.1.2. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x''(t) & +y'(t) + 2y(t) & = 0 \\ 2x(t) & +y'(t) & = 0 \end{cases}$$

tenemos que

$$P(D) = \begin{pmatrix} D^2 & D+2 \\ 2 & D \end{pmatrix}$$

de donde su determinante es

$$|P(D)| = \begin{vmatrix} D^2 & D+2 \\ 2 & D \end{vmatrix} = D^3 - 2D - 4$$

el cual es un polinomio de orden 3, por lo que la solución general depende de 3 parámetros, escribiendo la matriz aumentada del sistema y haciendo reducción gausiana, de la segunda ecuación es fácil despejar $x(t)$ en términos de $y(t)$, entonces con la reducción gausiana despejemos $y(t)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} D^2 & D+2 & 0 \\ 2 & D & 0 \end{array}\right) \overset{-\frac{D^2}{2}f_2+f_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -D^3/2+D+2 & 0 \\ 2 & D & 0 \end{array}\right)$$

donde obtenemos la ecuación lineal

$$\Big(-\frac{D^3}{2}+D+2\Big)y=0$$

cuyas raíces son $D=2$, y $D=-1\pm i$, entonces

$$y=C_1e^{2x}+e^{-x}(C_2\cos(x)+C_3\sin(x))$$

ahora, de la segunda ecuación $2x(t)+y'(t)=0$ tenemos que $x(t)=-y'(t)/2$, calculando la derivada de $y(t)$

$$y'=2C_1e^{2t}+\Big[-e^{-x}(C_2\cos(x)+C_3\sin(x))+e^{-x}(-C_2\sin(x)+C_3\cos(x))\Big]$$

$$2C_1e^{2x}+e^{-x}\Big[C_2(\cos(x)-\sin(x))+C_3(\sin(x)+\cos(x))\Big]$$

por lo tanto

$$x=-\frac{y'(t)}{2}=-\frac{2C_1e^{2x}+e^{-x}\Big[C_2(\cos(x)-\sin(x))+C_3(\sin(x)+\cos(x))\Big]}{2}$$

$$C_1e^{2x}+\frac{e^{-x}}{2}\Big[C_2(\cos(x)-\sin(x))+C_3(\sin(x)+\cos(x))\Big]$$

escribiendo la solución general en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} e^{-x}\cos(x) \\ e^{-x}(\cos(x)-\sin(x)) \end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix} e^{-x}\sin(x) \\ e^{-x}(\cos(x)+\sin(x)) \end{pmatrix}$$

Hasta el momento solo hemos resuelto sistemas homogéneos, veamos el caso cuando esto no sucede, se procede de igual manera usando reducción gausiana.

Ejemplo 4.1.3. Encuentre la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x''(t) & +3y''(t) & =-3y(t) \\ x''(t) & +3y(t) & =te^{-t} \end{cases}$$

Para iniciar vea que la primera ecuación, del lado derecho el termino depende de $y(t)$, por lo que pasando a sumar al lado izquierdo tenemos que la matriz aumentada del sistema es

$$\left(\begin{array}{cc|c} D^2 & 3D^2+3 & 0 \\ D^2 & 3 & te^{-t} \end{array}\right)$$

donde el determinante de la matriz de coeficientes es

$$D^2(3) - D^2(3D^2+3) = 3D^2 - 3D^4 - 3D^2 = -3(D^4 + D^3 - D^2)$$

por lo que la solución general depende de 4 parámetros, procediendo por Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} D^2 & 3D^2+3 & 0 \\ D^2 & 3 & te^{-t} \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1+f_2} \left(\begin{array}{cc|c} D^2 & 3D+3 & 0 \\ 0 & -3D^2 & te^{-t} \end{array}\right)$$

entonces tenemos que $(-3D^2)y = te^{-t}$, donde la solución homogénea se obtiene de las raíces de $-3D^2 = 0$ que son $D = 0$ con multiplicidad 2, entonces

$$y_h = C_1 + C_2 t$$

ahora como $f(t) = te^{-t}$ se propone $y_p = (At + B)e^{-t}$, y como ninguna función se repite en la solución homogénea y la particular, entonces lo anterior es directamente la forma de y_p, derivando dos veces obtenemos que

$$y_p' = -e^{-t}(A(t-1) + B) \qquad y_p'' = e^{-t}(A(t-2) + B)$$

sustituyendo tenemos que

$$-3y'' = te^{-t} \Longrightarrow -3\cancel{e^{-t}}(A(t-2) + B) = t\cancel{e^{-t}}$$
$$-3At + 6A - 3B = t$$

de donde $-3A = 1$ y $6A - 3B = 0$, por lo que $A = -1/3$ y $B = 2A = -2/3$, con lo que

$$y = C_1 + C_2 x + \Big(-\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}\Big)e^{-t}$$

Ahora, la segunda ecuación dice que $x'' = te^{-t} + 3y$, por lo que integrando dos veces lo anterior obtenemos a $x(t)$, por lo tanto

$$x'' = te^{-t} + 3\Big[C_1 + C_2 x + \Big(-\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}\Big)e^{-t}\Big] \Longrightarrow$$
$$x'' = \cancel{te^{-t}} + 3C_1 + 3C_2 t - \cancel{te^{-t}} - 2e^{-t} = 3C_1 + 3C_2 t - 2e^{-t}$$

integrando

$$x' = \int x'' dt = 3C_1 t + \frac{3}{2}C_2 t^2 + 2e^{-t} + C_3$$

$$x = \int x' dt = \frac{3}{2}C_1 t^2 + \frac{1}{2}C_2 t^3 - 2e^{-t} + C_3 t + C_4$$

escribiendo la solución en forma de matrices tenemos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}t^3 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.1.4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} x_1'(t) - 2x_1(t) & + & x_2''(t) & & & = -2e^{2t} \\ x_1'(t) & + & 2x_2(t) & & & = e^{2t} \\ -x_1'(t) & & & + & x_3(t) & = e^{2t} \end{cases}$$

Reescribiendo el sistema anterior

$$A(D)X(t) = f(t)$$

que tiene por matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} D-2 & D^2 & 0 & -2e^{2t} \\ D & 2 & 0 & e^{2t} \\ -2 & 0 & 1 & e^{2t} \end{array}\right)$$

multiplicando la fila 2 por un $-D^2/2$ para sumarla a la fila 1 obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{D^3}{2} + D - 2 & 0 & 0 & -4e^{2t} \\ D & 2 & 0 & e^{2t} \\ -D & 0 & 1 & e^{2t} \end{array}\right)$$

de donde $(-D^3 + 2D - 4)x_1 = -8e^{2t}$ de la primera fila (y multiplicando por 2), las raíces de la ecuación característica son $D = -2yD = 1 \pm i$, por lo que

$$x_{1h} = C_1 e^{-2x} + e^x[C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x)]$$

para la solución particular se toma $x_{1p} = Ae^{2t}$, derivando $x_{1p}' = 2Ae^{2t}$, $x_{1p}'' = 4Ae^{2t}$, $x_{1p}^{(3)} = 8Ae^{e^{2t}}$ y con esto sustituyendo se obtiene

$$-[8Ae^{2t}] + 2[2Ae^{2t}] - 4Ae^{2t} = -8e^{2t}$$

de donde se tiene que $A = 1$ y por lo tanto

$$x_1 = C_1e^{-2t} + e^x[C_2\cos(x) + C_3\sin(x)] + e^{2t}$$

ahora como x_2, x_3 están en términos de la derivada de x_1 tenemos

$$\begin{aligned} x_1' &= -2C_1e^{-2t} + e^x[C_2\cos(x) + C_3\sin(x)] + e^x[C_3\cos(x) - C_2\sin(x)] + 2e^{2t} \\ &-2C_1e^{-2t} + e^x[(C_2 + C_3)\cos(x) + (-C_2 + C_3)\sin(x)] + 2e^{2t} \end{aligned}$$

Ahora, podemos ver que $x_2 = (e^{2t} - Dx)/2$ y $x_3 = e^{2t} + Dx$, entonces

$$x_2 = \frac{2C_1e^{-2x} - e^x[(C_2 + C_3)\cos(x) + (-C_2 + C_3)\sin(x)] - e^{2t}}{2}$$

y por otro lado

$$x_3 = -2C_1e^{-2t} + e^x[(C_2 + C_3)\cos(x) + (-C_2 + C_3)\sin(x)] + 3e^{2t}$$

4.2. Método de valores propios

El calculo de valores y vectores propios ya lo vimos en el curso de álgebra lineal, y serán de suma importancia en este capitulo, iniciemos con un repaso de como calcular valores propios (**VLP**) y vectores propios (**VCP**).

Definicion 4.2.1. Sea A una matriz $n \times n$, un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$ es un escalar tal que existe un vector $\vec{v} \neq 0$ tal que

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Vea que $\lambda \in \mathbb{C}$, por lo que podemos tener valores propios complejos, vamos a hacer la deducción de como encontrar los valores propios de A, primero recordemos notación de álgebra lineal

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

es decir, $\vec{0}$ es el vector de n filas y 1 columna cuyas entradas son todas 0, e I es la matriz identidad $n \times n$, ahora de la definición de valor propio tenemos

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Longrightarrow A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

en cual es un sistema homogéneo asociado a la matriz $n \times n$ $A - I\lambda$, y cuyo vector de solución es $\vec{v}$, como queremos que este vector no sea nulo, entonces ocupamos que $A - I\lambda$ tenga determinare distinto de cero, de lo contrario seria invertible y el sistema tendría solución única

$$(A - I\lambda)\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow (A - I\lambda)^{-1}(A - I\lambda)\vec{v} = (A - I\lambda)^{-1}0 \Longrightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

por lo que ocupamos que el determinante de $A - I\lambda$ sea distinto de cero. Todo lo anterior esta muy bien, pero resumiendo, lo que nos interesa es el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1. Sea A una matriz $n \times n$, sus valores propios λ son los escalares que cumplen

$$\det(A - I\lambda) = 0$$

Ejemplo 4.2.1. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

calculando los valores propios

$$\det(A - I\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

y si tomamos $\det(A - I\lambda) = 0$ tenemos que $\lambda = 4$, $\lambda = -2$

La cantidad de valores propios distintos no puede ser mayor que el tamaño de la matriz, ya que vea que $\det(A - I\lambda)$ es un polinomio de grado n que depende de λ, y este a lo sumo puede tener n soluciones, siguiente esta idea tenemos la siguiente definición

Definicion 4.2.2. Sea A una matriz $n \times n$, llamamos a $\det(A - I\lambda)$ el **polinomio característico** asociado a A, el cual es un polinomio de grado n que depende de λ, tenemos que el polinomio característico se puede escribir como

$$\det(A - I\lambda) = \alpha(\lambda_1 - \lambda)^{r_1}(\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \ldots (\lambda_k - \lambda)^{r_k}$$

en donde $r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$ (dado que el grado del polinomio característico es n) y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son los valores propios de A, se define la **multiplicada algebraica** asociada a λ_i como

$$m_A(\lambda = \lambda_i) = r_i \qquad i \in \{1, 2, \ldots, k\}$$

Ejemplo 4.2.2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

calculando sus valores propios tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$(1-\lambda)[-\lambda(1-\lambda)-2] = (1-\lambda)[\lambda^2-\lambda-2] = (1-\lambda)[(\lambda-2)(\lambda+1)]$$

entonces tenemos los valores propios $\lambda = -1, \lambda = 1, \lambda = 2$ todos con multiplicidad algebraica 1.

Ejemplo 4.2.3. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

calculando los valores propios tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda = (1-\lambda)(4-\lambda)^2 \end{vmatrix}$$

entonces tenemos que $\lambda = 1$, $\lambda = 4$ son los valores propios con $m_A(\lambda = 1) = 1$, $m_A(\lambda = 4) = 2$

Con respecto al ejemplos anterior, para una matriz triangular (superior o inferior) los valores propios son los valores de la diagonal, continuemos con nuestro repaso con la definición de un vector propios

Definicion 4.2.3. Considere una matriz A y una valor propio λ de A, un vector propio son los vectores $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ que cumplen

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Dentro de la definición de vector propio el vector $\vec{v} = 0$ es posible, en realidad siempre cumple la relación pues

$$A\vec{0} = \lambda\vec{0} \Longrightarrow \vec{0} = \vec{0}$$

por lo que el $\vec{0}$ siempre es un vector propio asociado a λ, ademas si tomamos dos vectores propios $\vec{v_1}, \vec{v_2}$, su combinación lineal es también un vector propio asociado a A, en efecto como $A\vec{v_1} = \lambda\vec{v_1}$ y $A\vec{v_2} = \lambda\vec{v_2}$, entonces para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$A(\alpha v_1 + v_2) = \alpha A v_1 + A v_2 = \alpha\lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(\alpha v_1 + v_2)$$

lo que prueba que $\alpha v_1 + v_2$ es también valor propio, lo anterior demuestra que los vectores propios asociados a λ forman un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Entonces podemos encontrar una base de este espacio vectorial para cada valor propio, estos vectores cumplen

$$(A - I\lambda)\vec{v} = 0$$

por lo que debemos encontrar la solución del sistema homogéneo anterior.

Ejemplo 4.2.4. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

del ejemplo 4.2.1 sabemos que los valores propios son $\lambda = 4$, $\lambda = -2$, calculemos los valores propios, iniciando para $\lambda = -2$ tenemos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 - -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 - -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

ambas filan son multiplo, y podemos extraer que $3x + 3y = 0$, despejando y tenemos que $y = -x$, y entonces los vectores propios asociados a $\lambda = -2$ son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces la base es $(-1, 1)^t$, (donde t representa el vector transpuesto, para poder escribir nuestro vector columna como un vector fila transpuesto), ahora para $\lambda = 4$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 - 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 - 4 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

donde nuevamente ambas filas son múltiplo, y se extrae que $-3x + 3y = 0 \Longrightarrow x = y$, entonces los vectores propios asociados a $\lambda = 4$ son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

por lo que una base de los vectores propios asociados a $\lambda = 4$ es el vector $(1,1)^t$

Para finalizar el repaso introducimos el concepto de multiplicidad algebraica.

Definicion 4.2.4. Sea A una matriz $n \times n$ y sea λ un valor propio de A, sea V_λ es espacio (vectorial) de los vectores propios asociados a λ, se define la multiplicidad algebraica del valor propio λ como $m_G(\lambda) = \dim(V_\lambda)$

La dimensión de un espacio vectorial es la cantidad de vectores que conforman su base, entonces podemos simplificar a que la multiplicidad algebraica de λ es igual a la cantidad de vectores que encontremos al buscar sus bases.

Ejemplo 4.2.5. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculando sus valores propios tenemos que

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$-(\lambda+2)[(-1-\lambda)^2 - 1] = -(\lambda+2)[\lambda^2 + 2\lambda] = -\lambda(\lambda+2)^2$$

entonces tenemos que los valores propios son $\lambda = 0$ con $m_A(\lambda = 0) = 1$ y $\lambda = -2$ con $m_A(\lambda = -2) = 2$, calculando los vectores propios asociados a $\lambda = 0$ tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{f_2/2+f_1;f_2/2+f_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{f_1+f_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

esta ya es una matriz escaladonada, esta es una matriz que cumple que debajo del primer elemento no nulo de la fila, solo hay elementos igual a 0, y en esta forma ya podemos extraer la información, fila 2 dice que $y = 0$ y fila 1 dice que $-x + z = 0 \Longrightarrow x = z$, entonces los vectores propios asociados a $\lambda = 0$ son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como solo genera un vector tenemos que $m_A(\lambda = 0) = 1$, ahora para $\lambda = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{-f_1+f_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

esta matriz ya esta escalonada, ademas recuerde que la cantidad de parámetros del que depende la solucion es igual a la cantidad de variables menos la cantidad de fila **NO** nulas, tenemos 3 variables (x,y,z) y una fila no nula, entonces la solución depende de 3-1=2 parámetros.

Entones debemos parametrizar con respecto a dos variables, vea que fila 1 indica que $x + y + z = 0 \Longrightarrow x = -y - z$, entonces los vectores propios son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

por lo que $m_G(\lambda = -2) = 2$

El siguiente teorema nos indica le relación entre las multiplicidades algebraicas y geométrica.

Teorema 4.2.2. Sea A una matriz $n \times n$, y sea λ un valor propio de A, entonces tenemos que

$$1 \leq m_G(\lambda) \leq m_A(\lambda) \leq n$$

Todo lo anterior son cosas que ya se cubrieron en el curso de álgebra lineal, pero son gran parte del procedimiento que se debe realizar para resolver los SED que vamos a estudiar. Considere las funciones $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ funciones que depende de t, queremos resolver

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x_1'(t) & = a_{1,1}x_1(t) & +a_{2,2}x_2(t) & + \ldots & +a_{1,n}x_n(t) \\ x_2'(t) & = a_{2,1}x_1(t) & +a_{2,2}x_2(t) & + \ldots & +a_{2,n}x_n(t) \\ \quad\vdots & \qquad\vdots & & \ddots & \quad\vdots \\ x_n'(t) & = a_{n,1}x_1(t) & +a_{n,2}x_2(t) & + \ldots & +a_{n,n}x_n(t) \end{array} \right.$$

en donde $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, podemos escribir el sistema anterior en forma de matrices, para esto llamamos

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

entonces el sistema se escribe como

$$X'(t) = AX(t)$$

La solución del sistema son funciones $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ que satisfacen de manera simultanea el sistema de ED. La manera de encontrar estas soluciones se basa en los valores y vectores propios de la matriz A, veamos esto por casos.

Teorema 4.2.3. Caso 1: valores propios reales y distintos: Sea el sistema

$$X' = AX$$

donde A es una matriz de entradas reales $n \times n$, y sea $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \dots_n$ los n valores propios de A de tal forma que todos son números reales y distintos, y sea $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ los vectores propios asociados a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivamente, entonces la soluciones general esta dada por

$$X = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v_2} + \dots + C_n e^{\lambda_n t} \vec{v_n}$$

donde $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$.

Como la multiplicidad algebraica de cada valor propio debe ser n, se deduce que en el teorema anterior cada valor propio tiene multiplicidad algebraica 1, y por el teorema 4.2.2, tenemos que la multiplicidad geométrica también debe ser igual a 1, por lo que cada valor propio genera un solo vector propio.

Ejemplo 4.2.6. Recordando la matriz del ejemplo 4.2.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene por valores propios $\lambda = -2$, $\lambda = 4$, y los vectores propios asociados a cada valor son $v_1 = (-1, 1)^t$, $v_2 = (1, 1)^t$ respectivamente, estos vectores propios se calcularon en 4.2.4, entonces la solución general esta dada por

$$X = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.2.7. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

del ejemplo 4.2.2 tenemos que los valores propios son $\lambda = -1$, $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$, debemos calcular los vectores propios, iniciemos con $\lambda = -1$, tenemos

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{f_1/2;-f_2+f_3}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-f_1+f_2;2f_1+f_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

esta ya es la matriz escalonada, de fila 1 tenemos que $x = 0$ y de fila 2 $y + 2z = 0 \Longrightarrow y = -2z$, por lo que los valores propios son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora para $\lambda = 1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{f_3+f_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de fila 2 tenemos que $z = 0$, mientras que de fila 3 tenemos que $-x + y = 0 \Longrightarrow x = y$, entonces los vectores propios son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para $\lambda = 2$ tenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{f_1+f_2;-f_1+f_3}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

de fila 1 tenemos que $x = 0$, mientras que $f_2 = -2f_1$, entonces ambas aportan la misma información, tomando f_3 tenemos que $y - z = 0 \Longrightarrow y = z$, entonces los valores propios son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ya con esto podemos dar la solución general

$$X = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.2.8. Resuelva

$$\begin{cases} x'(t) & = & 4x(t) & +4y(t) & +2z(t) \\ y'(t) & = & & -3y(t) & \\ z'(t) & = & x(t) & -2y(t) & +5z(t) \end{cases}$$

escribiendo el sistema como $X' = AX$ tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

omitiremos el calculo de los valores propios pero estos son $\lambda = -3$, $\lambda = 3$ y $\lambda = 6$, ahora calculando los valores propios tenemos

$$\begin{pmatrix} 4-(-3) & 4 & 2 \\ 0 & -3-(-3) & 0 \\ 1 & -2 & 5-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \overset{-7f_3+f_1}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 18 & -54 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \overset{f_1/18}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \overset{2f_1+f_3}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

entonces tenemos de fila 1 que $y - 3z = 0 \Longrightarrow y = 3z$, mientras que la fila 3 dice que $x + 2z = 0 \Longrightarrow x = -2z$, entonces los vectores tiene la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ahora para $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 4-(3) & 4 & 2 \\ 0 & -3-(3) & 0 \\ 1 & -2 & 5-(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{\frac{4}{6}f_2+f_1;-\frac{1}{3}f_2+f3}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tenemos de fila 2 que $y = 0$, mientras que como f_1, f_3 son múltiplos aportan la misma información, esta es $x + 2z = 0 \Longrightarrow x = -2z$, entonces los vectores propios son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ahora para $\lambda = 6$

$$\begin{pmatrix} 4-(6) & 4 & 2 \\ 0 & -3-(6) & 0 \\ 1 & -2 & 5-(6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\frac{4}{9}f_2+f_1;-\frac{2}{9}f_2+f3}{\Longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde de fila 2 tenemos $y = 0$, mientras que fila 1 y 2 son múltiplos, tomando f_3 tenemos $x - z = 0 \Longrightarrow x = z$, entonces los vectores propios son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ya con esto podemos escribir la solución general

$$X = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{6t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La forma anterior para dar la solución es correcta, pero lo anterior se puede reescribir como

$$x(t) = -2C_1 e^{-3t} - 2C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}$$

$$y(t) = 3C_1e^{-3t}$$
$$z(t) = C_1e^{-3t} + C_2e^{3t} + C_3e^{6t}$$

Ejemplo 4.2.9. Resuelva el sistema $X' = AX$, en donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Calculando los valores propios tenemos

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda) - 12 = \lambda^2 - 6\lambda - 7 = (\lambda - 7)(\lambda + 1)$$

entonces los valores propios son $\lambda = 7$, $\lambda = -1$, calculando los valores propios para $\lambda = 7$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ambas filas son múltiplo, tomando fila 1 $6x + 3y = 0 \Longrightarrow y = -2x$, entonces los vectores son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

para $\lambda = -1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

nuevamente ambas filas son múltiplo, esto siempre pasara en el caso de matrices $2x2$, excepto para matrices $2x2$ que son múltiplos de la identidad, pero estos casos no son interesantes de estudiar, entonces tenemos de fila 1 que $2x + 3y = 0 \Longrightarrow x = -\frac{3}{2}y$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}y \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces la solución general es

$$X = C_1e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2e^{-t}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora continuamos con un caso mas general que cubre el anteriormente estudiado, para eso enunciamos el siguiente teorema

Teorema 4.2.4. Sea el sistema $X' = AX$, donde λ es un valor propio de A de tal manera que $m_A(\lambda) = m_G(\lambda) = r$, y sea $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_r}$ r vectores propios linealmente independientes asociados a λ, o simplificando, los vectores que forman la base del espacio vectorial de los vectores propios, entonces λ **aporta** a la solución

$$C_1 e^{\lambda t}\vec{v_1} + C_2 e^{\lambda t}\vec{v_2} + \ldots + C_n e^{\lambda t}\vec{v_n}$$

Ejemplo 4.2.10. Considere el sistema $X' = AX$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

del ejemplo 4.2.5 tenemos que $\lambda = 0$ es un valor propio con multiplicidad algebraica y geométrica igual a 1, donde un vector de la base es $(1,0,1)^t$, y $\lambda = -2$ con multiplicidad algebraica y geométrica igual a 2, y dos vectores de la base son $(-1,1,0), (-1,0,1)$, por lo tanto la solucion general es

$$X = C_1 e^{0t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y como $e^0 = 1$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.2.11. Considere el sistema $X' = AX$ en donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde el polinomio característico es $-(\lambda+1)^2(\lambda-2)$, entonces $\lambda = -1$ es valor propio con multiplicidad algebraica 2, y $\lambda = 2$ es otro valor propio con multiplicidad algebraica 1. Calculando los vectores propios iniciando con $\lambda = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces todas las filas son iguales, y dan la información que $x+y+z=0$, como con la primera fila podemos anular fila 2 y 3, solo tenemos 1 fila no nula y 3 variables, por lo que la solución depende de 2 parámetros, despejando x tenemos $x=-y-z$, por lo que los valores propios son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como el valor propio genera dos vectores, entonces la multiplicidad geométrica es 2 y coincide con la algebraica. Ahora para $\lambda = 2$ calculemos el vector propio, sabemos por el teorema 4.2.2 que la multiplicidad geométrica debe ser 1.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{2f_2+f_1;-f_2+f_3}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \overset{-f_1+f_3;-\frac{2}{3}f_1+f_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de fila 1 tenemos $-3y+3z=0 \Longrightarrow y=z$, y de fila 2 $x-z=0 \Longrightarrow x=z$, entonces los valores propios son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y con esto la solución general es

$$X = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.2.12. Considere el sistema $X' = AX$ en donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

calculando los valores propios tenemos

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)[\lambda^2 - 1] = -(1+\lambda)^2(1-\lambda)$$

donde la ultima igualdad se utilizo diferencia de cuadrados, y tenemos que $\lambda = -1$ es valor propio con multiplicidad 2, y $\lambda = 1$ con multiplicidad 1, calculando los vectores propios para $\lambda = -1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos que fila 1 y fila 2 son iguales, donde se extrae $x + y - z = 0 \Longrightarrow x = -y + z$, entonces los valores propios son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

por lo que $m_G(\lambda = -1) = 2$ que coincide con su multiplicidad algebraica, ahora para $\lambda = 1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{2}f_3+f_1;-\frac{1}{2}f_3+f_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

donde fila 1 y fila 2 son múltiplos e indican que $-x + y = 0 \Longrightarrow x = y$, y fila 3 dice que $z = 0$, entonces los vectores propios son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

como para los dos valores propios la multiplicidad algebraica coincide con la geométrica, tenemos que la solución general es

$$X = C_1e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.2.13. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$X' = AX$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Procediendo por valores propios calculamos

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & 4 \\ 2 & -5-\lambda & 4 \\ 2 & -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} -5-\lambda & 4 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -5-\lambda \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$(1-\lambda)[-(5+\lambda)(3-\lambda)+16] + 4[2(3-\lambda)-8] + 4[-8+2(5+\lambda)]$$

$$-(1-\lambda)[-\lambda^2-2\lambda-1] - 8[\lambda+1] + 8[\lambda+1] = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$$

ahora procedemos a calcular los vectores propios, para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -4 & 4 \\ 2 & -5-1 & 4 \\ 2 & -4 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 2 & -6 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{-1}{4}f_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{4f_1+f_2;2f_1+f_3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde se extrae que $y - z = 0$ de fila 1 y de fila 2 $2x - 2y = 0$ de donde obtenemos $x = y = z$, entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para $\lambda = -1$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 1+1 & -4 & 4 \\ 2 & -5+1 & 4 \\ 2 & -4 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

de donde se ve que todas las filas con múltiplo, por lo que extraemos la ecuación $2x - 4y + 4z = 0$, o equivalente $x - 2y + 2z = 0$, de donde $x = 2y - 2z$, entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como para ambos valores propios la multiplicidad geometrica y algebraica coinciden, entonces la solución esta dada por

$$X(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora veamos que sucede cuando tenemos raíces complejas, solo podremos estudiar el caso en que cada raíz compleja tenga multiplicidad algebraica 1, y por ende multiplicidad geométrica 1, al igual que con las ecuaciones características estudiadas en la EDLHCC, cuando aparece un valor complejo debe venir acompañado de su conjugado complejo.

Teorema 4.2.5. Sea el sistema $X' = AX$, y $\lambda = a + ib$ un valor propio de A con multiplicidad algebraica 1, y por lo tanto $\lambda = a - ib$ es también un valor propio de A con multiplicidad algebraica 1, sea $\vec{v}$ el vector propio (con entradas complejas) asociado a $\lambda = a + ib$ (también se puede hacer para $\lambda = a - ib$ pero el punto es solo calcularlo para uno de los valores propios complejos), si se descompone $\vec{v}$ en su parte real y compleja

$$\vec{v} = \vec{B}_1 + i\vec{B}_2$$

donde $\vec{B}_1$ es la parte real de $\vec{v}$ y $\vec{B}_2$ es la parte imaginaria de $\vec{v}$, entonces los valores propios $\lambda = a \pm ib$ (ambos de manera simultanea) aportan a la solución general

$$C_1 X_1 + C_2 X_2$$

en donde

$$X_1 = e^{at}\left[\vec{B}_1 \cos(bt) - \vec{B}_2 \sin(bt)\right]$$

$$X_2 = e^{at}\left[\vec{B}_2 \cos(bt) + \vec{B}_1 \sin(bt)\right]$$

Como ahora podemos obtener valores propios complejos, en ocaciones requeriremos hacer operaciones filas que involucren números complejos, para esto debemos recordar que i cumple $i^2 = -1$

Ejemplo 4.2.14. Considere el sistema $X' = AX$ en donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

calculando los valores propios tenemos

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -5 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 + 25 = \lambda^2 - 4\lambda + 29$$

en donde las raíces del polinomio característico es $\lambda = 2 + 5i$, $\lambda = 2 - 5i$ que escribimos como $\lambda = 2 \pm 5i$, por lo que $a = 2$ y $b = 5$, ahora solo debemos calcular un vector propio para alguno de los valores reales, tomando $\lambda = 2 - 5$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 2-(2-5i) & -5 \\ 5 & 2-(2-5i) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 5i & -5 \\ 5 & 5i \end{pmatrix}$$

ambas filas son múltiplos, vea que $f_1 = if_2$, y esto es algo que siempre va a ocurrir en matrices 2×2 con dos valores propios distintos, sean reales o complejos, una vez se realiza la sustitución ambas filas son múltiplos, esto se debe a que como la multiplicidad algebraica del valor propio es 1, entonces la geométrica también debe ser 1, por lo que el sistema depende de 1 parámetro, al tener dos variables eso quiere decir que solo debe quedar una fila no nula, visto de otra manera una fila se debe anular, y en matrices 2×2 solo pasa si ambas filas son múltiplo.

Ahora de fila 1 tenemos que $5ix - 5y = 0 \Longrightarrow y = ix$ (a la otra de despejar trate de evitar enviar a dividir un numero complejo para simplificar calcular), entonces los vectores son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} = x\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

entonces tenemos que $\vec{B_1} = (1,0)^t$ y $\vec{B_2} = (0,1)^t$, con esto ya podemos escribir X_1, X_2

$$X_1 = e^{at}\left[\vec{B_1}\cos(bt) - \vec{B_2}\sin(bt)\right]$$

$$e^{2t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(5t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(5t)\right] = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(5t) \\ -\sin(5t) \end{pmatrix}$$

por otro lado, X_2

$$X_2 = e^{at}\left[\vec{B}_2\cos(bt) + \vec{B}_1\sin(bt)\right]$$

$$e^{2t}\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\cos(5t) + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\sin(5t)\right] = e^{2t}\begin{pmatrix}\sin(5t)\\\cos(5t)\end{pmatrix}$$

con lo que la solución general es

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 = C_1e^{2t}\begin{pmatrix}\cos(5t)\\-\sin(5t)\end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix}\sin(5t)\\\cos(5t)\end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.2.15. Considere el sistema $X' = AX$ en donde

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

el polinomio característica de A es $(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$ (de deja el calculo del mismo como ejercicio), de donde los valores propios son $\lambda = 1$, $\lambda = 1+i$ y $\lambda = 1-i$, todos con multiplicidad algebraica 1, iniciemos con el valor propio real $\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\-1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

la fila 2 y fila 3 son múltiplos e indican que $x = 0$, por otro lado en fila 1 tenemos que $-y + 2z = 0 \Longrightarrow y = 2z$, por lo que los valores propios son de la forma

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

para los valores propios reales solo debemos calcular un vector propio asociado a uno de ellos, tomando $\lambda = 1-i$, tenemos

$$\begin{pmatrix}1-(1-i) & -1 & 2\\-1 & 1-(1-i) & 0\\-1 & 0 & 1-(1-i)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i & -1 & 2\\-1 & i & 0\\-1 & 0 & i\end{pmatrix}$$

podemos hacer reducción gausiana y llevar el sistema a una matriz escalonada, pero podemos simplificar esto, para iniciar como el valor propio $\lambda = 1-i$ tiene multiplicidad algébrica 1, entonces la multiplicidad geométrica también debe ser 1, osea que la solución depende de 1 parámetro, como hay 3 variables esto quiere decir que una fila se debe hacer nula pues es combinación lineal de las otras dos, por lo que basta tomar dos filas que no sean múltiplo.

Como podemos tomar cualquier dos filas (no múltiplos entre ellas), tomemos fila 2 y 3 que son las más sencillas, de f_2 tenemos que $-x + iy = 0 \implies x = iy$, mientras que de fila 3 tenemos que $-x + iz = 0 \implies x = iz$, ahora, el problema es que tenemos x parametrizada en términos de y, z pero solo debería depende de un parámetro (pues la multiplicidad algebraica es 1), entonces de $x = iz$, multiplicando por $-i$ obtenemos que $z = -ix$, y de $x = iy$, nuevamente multiplicando por $-i$ obtenemos que $y = -ix$, y con este tenemos a y, z parametrizadas en términos de x, entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -ix \\ ix \end{pmatrix} = x\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

Ahora con esto ya podemos montar las soluciones asociadas a las raíces completas, recuerde que como $\lambda = 1 \pm i$, tenemos que $a = 1$, $b = 1$, entonces

$$X_1 = e^t \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \sin(t) \right] = e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$X_2 = e^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) \right] = e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

con lo que la solución general es

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El ultimo saco que vamos a estudiar es cuando no hay coincidencia entre las multiplicidades algebraicas y geométricas, la idea es que si la multiplicidad algebraica de una valor propio λ es r, este debe generar r vectores (linealmente independientes) para aportar a la solución, solo veremos el caso en donde $m_G(\lambda) = 1$.

Teorema 4.2.6. Considere A una matriz $n \times n$ y λ un valor propio de A, suponga que $m_G(\lambda) = 1 < m_A(\lambda) = r \leq n$, entonces podemos encontrar r vectores linealmente independientes $\vec{v_0}, \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_{r-1}}$, que llamaremos cadena de vectores, en donde cumplen

$$(A - I\lambda)v_0 = 0$$

$$(A - I\lambda)v_1 = v_0$$

$$(A - I\lambda)v_2 = v_1$$

y así hasta llegar a

$$(A - I\lambda)v_{r-1} = v_{r-2}$$

con los vectores anteriores generamos los siguientes r vectores

$$\vec{X_0} = \vec{v_0}$$
$$\vec{X_1} = \vec{v_1} + t\vec{v_0}$$
$$\vec{X_2} = \vec{v_2} + t\vec{v_1} + \frac{t^2}{2}\vec{v_0}$$
$$\vdots$$
$$\vec{X_{r-1}} = \vec{v_{r-2}} + t\vec{v_{r-3}} + \frac{t^2}{2}\vec{v_{r-4}} + \ldots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}v_0$$

y el aporte a la solución general es

$$C_0 e^{\lambda t}\vec{X_0} + C_1 e^{\lambda t}\vec{X_1} + \ldots + C_{r-1}e^{\lambda t}\vec{X_{r-1}}$$

Resumiendo el teorema anterior, cada vector propio de multiplicidad algebraica r, debe generar r valores propios, pero mediante el proceso usual que hemos realizado solo vamos a obtener 1, debemos generar $r-1$ vectores más, y la forma de encontrarlos es resolver el mismo sistema solo que en lugar de igualarlo a $\vec{0}$, lo igualamos al vector anterior de la cadena.

Ahora, solo ocupamos un vector que cumplas esas condiciones, para el caso donde la multiplicidad geométrica y algebraica coincide tomábamos los vectores de las bases de los espacio vectoriales de valores propios, pero para $v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}$ estos vectores no forman un espacio vectorial, por lo que no existen bases, pero podemos tomar cualquier valor que cumpla, veamos esto con ejemplos para que las ideas sean claras.

Ejemplo 4.2.16. Considere el sistema $X' = AX$ en donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

el único valor propios es $\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica 2 (una matriz triangular (superior o inferior) tiene por valores propios los valores de su diagonal), con esto calculemos los vectores propios

$$A = \begin{pmatrix} 2-2 & 1 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de fila 2 tenemos que $y = 0$, y como la columna 1 asociada a x es nula, entonces el valor de x es libre $x \in R$, entonces tenemos que los vectores propios son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que la multiplicidad geométrica es 1, menor a la algebraica, por lo que estamos en el ultimo caso, y debemos generar un nuevo vector $\vec{v_1}$ tal que $(A - I\lambda)v_1 = v_0$, entonces

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donde la fila 1 dice que $y = 1$ y nuevamente la columna de x es nula, por lo que $x \in \mathbb{R}$, entonces los vectores que son solución del sistema anterior tienen la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

cualquier vector de esa forma funciona, entonces podemos tomar $x = 0$ para obtener el vector $(0, 1)^t$, entonces tenemos que

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

y la solución general es

$$X = C_0 e^{2t} X_0 + C_1 e^{2t} X_1$$

Ejemplo 4.2.17. Resuelva

$$\begin{cases} x'(t) &= 5x(t) & -4y(t) & \\ y'(t) &= x(y) & & +2z(t) \\ z'(t) &= & 2y(t) & +5z(t) \end{cases}$$

Para iniciar el sistema se puede escribir como $X' = AX$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

omitiremos el cálculos del polinomio característico y utilizaremos que este es igual a $-\lambda(\lambda-5)^2$, con lo que $\lambda = 0$ es valor propio con multiplicidad algebraica 1 y $\lambda = 5$ es otro valor propio con multiplicidad algebraica 2, calculando los valores propios para $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \overset{-5f_2+f_1}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & -4 & -10 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

donde fila 1 y 3 son múltiplos, entonces de fila 1 tenemos que $-4y-10z = 0 \Longrightarrow y = -\frac{5}{2}z$, mientras que de fila 2 tenemos que $x + 2z = 0 \Longrightarrow z = -2z$, con esto los vectores propios son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -\frac{5}{2}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ahora, para $\lambda = 5$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{2f_3+f_1;\frac{5}{2}f_3+f_2}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

de fila 3 $y = 0$ mientras que de fila 1 tenemos $x + 2z = 0 \Longrightarrow x = -2z$, entonces los vectores propios son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces $m_G(\lambda = 5) = 1 < m_A(\lambda = 5) = 2$, por lo que debemos generar un vector más $\vec{v_1}$ tal que $(A - I\lambda)\vec{v_1} = \vec{v_0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2f_3+f_1;\frac{5}{2}f_3+f_2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5/2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

tercera ecuación indica que $y = 1/2$, y la segunda

$$x + 2z = 5/2 \Longrightarrow x = -2z + \frac{5}{2}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z+5/2 \\ 1/2 \\ z \end{pmatrix}$$

tomando $z = 0$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y con este nuevo vector y el anterior generamos

$$X_1 = v_1 + tv_0 = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2-2t \\ 1/2 \\ t \end{pmatrix}$$

ahora que tenemos dos vectores para $D = 5$ damos la solución igual que el caso anterior

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 5/4 \\ -1/2 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 5/2-2t \\ 1/2 \\ t \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.2.18. Considere el sistema $X' = AX$ en donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

del ejemplo 4.2.3 tenemos que los valores propios son $\lambda = 1$, $\lambda = 4$ en donde $m_A(\lambda = 1) = 1$ y $m_A(\lambda = 4) = 2$, iniciemos calculando los vectores propios asociados a $\lambda = 1$, tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

fila 1 indica que $y = 0$, mientras que fila 3 indica que $z = 0$, mientras que fila 2 es consistente con estos resultados, ahora, como la columna que tiene la variable x es completamente nula, quiere decir que x es libre ($x \in \mathbb{R}$), entonces los vectores propios son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ahora, para $\lambda = 4$ tenemos

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de fila 2 tenemos que $z = 0$ mientras que de fila 1 tenemos que $-3x+2y = 0 \longrightarrow x = \frac{2}{3}y$, entonces tenemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y/3 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

llame $\vec{v_0} = (2/3, 1, 0)^t$como la multiplicidad algebraica de $\lambda = 4$ es 2, y la multiplicidad geométrica es 1, debemos generar un nuevo vector $\vec{v_1}$ que cumpla $(A-4I)v_1 = v_0$, entonces

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

de fila 2 tenemos que $z = 1$, mientras que de fila 2 tenemos que $-3x + 2y = 2/3 \Longrightarrow x = \dfrac{2y}{3} - \dfrac{2}{9}$, tomando $y = 0$ tenemos $x = \dfrac{-2}{9}$, entonces

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con esto tenemos que

$$X_0 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2/9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/9 + 2/3t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

entonces la solución general es

$$X = C_0 e^{4t}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 e^{4t}\begin{pmatrix} -2/9+2/3t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.3. Variación de parámetros para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Ahora vamos a estudiar sistemas lineales no homogéneos, considere

$$X(t)' = A(t)X(t) + \vec{f(t)} \tag{4.1}$$

en donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & a_{1,2}(t) & \dots & a_{1,n}(t) \\ a_{2,1}(t) & a_{2,2}(t) & \dots & a_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}(t) & a_{n,2}(t) & \dots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{f(t)} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

Vea que la matriz A depende de t, por lo que ahora puede ser una matriz de funciones, a diferencia de la sección anterior de valores propios donde las matrices tenían entradas reales. Para poder resolver estos problemas primero ocupamos definir ciertos objetos

Definicion 4.3.1. En la ecuación 4.1, se define el sistema homogéneo asociado al tomar $\vec{f(t)} = \vec{0}$, es decir es el sistema

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

el cual tiene por solución

$$X_h(t) = C_1\vec{v_1(t)} + C_2\vec{v_2(t)} + \dots + C_n\vec{v_n(t)}$$

entonces se define la matriz fundamental de soluciones asociada al sistema homogeneo como la matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ v_1(t) & v_2(t) & \dots & v_n(t) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz fundamental de soluciones es una matriz cuyas filas son los vectores que multiplican a nuestros parámetros en la solución homogénea, y conocer la matriz fundamental de soluciones es equivalente a conocer la solución homogénea.

El método de valores propios que estudiamos la sección pasada resuelve sistemas homogéneo, por ejemplo.

Ejemplo 4.3.1. Del ejemplos 4.2.12, teníamos el sistema $X' = AX$ en donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y determinamos que la solución general (y por lo tanto también esta es la solución homogénea pues el sistema es homogéneo) es

$$X = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces la matriz fundamental de soluciones es

$$\Phi = \begin{pmatrix} -e^{-t} & e^{-t} & e^{t} \\ e^{-t} & 0 & e^{t} \\ 0 & e^{-t} & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz fundamental no es única, de la manera que la definimos depende del orden en que se acomoda la solución general, pero cumple dos características importantes que nos permiten identificarla

Definicion 4.3.2. Sea el sistema homogéneo $X'(t) = A(t)X(t)$, entonces $\Phi(t)$ es la matriz fundamental de soluciones si cumple

1. $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$
2. $\det(\Phi(t)) \neq 0$

La derivada de una matriz con respecto a t es derivar cada una de sus entradas con respecto a t.

Ejemplo 4.3.2. Considere el sistema

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X$$

vamos a verificar que

$$\Phi = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} & e^{3t} \\ e^{-2t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

para iniciar vamos a verificar que $\Phi' = A\Phi$, primero vea que

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 4e^{-2t} & 3e^{3t} \\ -2e^{-2t} & 6e^{3t} \end{pmatrix}$$

por otro lado, multiplicando tenemos

$$A\Phi = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^{-2t} & e^{3t} \\ e^{-2t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2e^{-2t} + 2e^{2t} & -e^{3t} + 4e^{3t} \\ -4e^{-2t} + 2e^{-2t} & 2e^{3t} + 4e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{-2t} & 3e^{3t} \\ -2e^{-2t} & 6e^{3t} \end{pmatrix}$$

con lo que se cumple $\Phi' = A\Phi$, solo falta por corroborar que $\det(\Phi)$ es distinto de cero

$$\begin{vmatrix} -2e^{-2t} & e^{3t} \\ e^{-2t} & 2e^{3t} \end{vmatrix} = -4e^{t} - e^{t} = -5e^{t} \neq 0$$

por lo que Φ es la matriz fundamental de soluciones.

Ya con esto podemos describir el método de variación de parámetros para sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Teorema 4.3.1. Considere el sistema de orden n

$$X'(t) = A(t)X(t) + f(\vec{t})$$

donde Φ es la matriz fundamental de soluciones del sistema homogéneo, y por ende conocemos X_h, entonces la solución general del sistema esta dada por

$$X = X_h + X_p$$

en donde

$$X_p = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) f(\vec{t}) dt$$

Algo que nos puede ser de utilizada es el siguiente teorema sobre las inversas 2×2

Teorema 4.3.2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

invertible, entonces su inversa esta dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Para matrices de orden mayor a 2 podemos calcular la inversa por el método usual aplicando reducción gausiana.

Ejemplo 4.3.3. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

y la matriz

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & -2e^{-t} \\ e^t & e^{-t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

1. Demuestre que $\Phi(t)$ es la matriz fundamental asociado al sistema homogéneo
2. Determine la solución general de 4.2

1. Primero vea que

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} e^t & -2e^{-t} & 2e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} & 0 \\ e^t & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

si Φ es la matriz fundamental entonces debe cumplir que $\Phi' = A\Phi$, calculando

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & -2e^{-t} \\ e^t & e^{-t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & -2e^{-t} & 2e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} & 0 \\ e^t & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

Ahora falta determinar que $|\Phi| \neq 0$, entonces calculando el determinante usando la fila 3

$$\Phi(t) = \begin{vmatrix} e^t & 2e^{-t} & -2e^{-t} \\ e^t & e^{-t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{-t} \end{vmatrix} = e^t \begin{vmatrix} 2e^{-t} & -2e^{-t} \\ e^{-t} & 0 \end{vmatrix} + e^{-t} \begin{vmatrix} e^t & 2e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{vmatrix}$$

$$= e^t(2e^{-2t}) + e^{-t}(1-2) = e^{-t} \neq 0$$

por lo que se corrobora que Φ es la matriz fundamental

2. Para aplicar variación de parámetros calculamos Φ^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} e^t & 2e^{-t} & -2e^{-t} & 1 & 0 & 0 \\ e^t & e^{-t} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ e^t & 0 & e^{-t} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-f_1+f_2;-f_1+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} e^t & 2e^{-t} & -2e^{-t} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-t} & 2e^{-t} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2e^{-t} & 3e^{-t} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2f_2+f_1;-2f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} e^t & 0 & 2e^{-t} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -e^{-t} & 2e^{-t} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-t} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2f_3+f_1;2f_3+f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} e^t & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -e^{-t} & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -e^{-t} & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

dividiendo las fila 1 por e^t y fila 2 y fila 3 por $-e^{-t}$ obtenemos que

$$\Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -2e^{-t} & -2e^{-t} \\ -e^t & 3e^t & 2e^t \\ -e^t & 2e^t & -e^t \end{pmatrix}$$

entonces calculando

$$\int \Phi^{-1}(t) f(t) dt = \int \begin{pmatrix} e^{-t} & -2e^{-t} & -2e^{-t} \\ -e^t & 3e^t & 2e^t \\ -e^t & 2e^t & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} dt$$

$$\int \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}$$

por lo que finalmente

$$X_p = \Phi \int \Phi^{-1} f(t)dt = \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & -2e^{-t} \\ e^t & e^{-t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4e^{2t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}$$

con lo que la solución es

$$X = C1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4e^{2t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.3.4. Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) &= & x(t) - 5y(t) + t \\ y'(t) &= & x(t) - y(t) + t \end{cases}$$

Para el sistema homogéneo tenemos que

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X(t)$$

Calculando los valores propios tenemos, si $det(A - I\lambda) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) + 5 = \lambda^2 + 4 = 0$$

de donde se obtiene que $\lambda = \pm 2i$, usando $\lambda = 2i$ para encontrar los vectores propios tenemos

$$\begin{pmatrix} 1-2i & -5 \\ 1 & -1-2i \end{pmatrix}$$

tomando la segunda fila $x - (1+2i)y = 0$ entonces $x = (1+2i)y$, por lo que los vectores propios cumplen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\Big[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Big]$$

de donde extraemos que

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ahora montando la solución

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) - 2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2t) = \begin{pmatrix} 2\cos(2t) + \sin(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

entonces la matriz fundamental es

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos(2t) - 2\sin(2t) & 2\cos(2t) + \sin(2t) \\ \cos(2t) & \sin(2t) \end{pmatrix}$$

de donde se verifica que $\det(\Phi) = -2$, y como conocemos la forma de una matriz inversa 2×2 tenemos

$$\Phi^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} \sin(2t) & -2\cos(2t) - \sin(2t) \\ -\cos(2t) & \cos(2t) - 2\sin(2t) \end{pmatrix}$$

procediendo por variación de parámetros tenemos

$$\int \Phi^{-1}(t) f(\vec{t}) = -\frac{1}{2} \int \begin{pmatrix} \sin(2t) & -2\cos(2t) - \sin(2t) \\ -\cos(2t) & \cos(2t) - 2\sin(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int \begin{pmatrix} t\cos(2t) \\ t\sin(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t\sin(2t)}{2} + \frac{\cos(2t)}{4} \\ \frac{-t\cos(t)}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2t\sin(2t) + \cos(2t) \\ -2t\cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix}$$

y calculando

$$X_p = \Phi \int \Phi^{-1} f(\vec{t}) dt = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos(2t) - 2\sin(2t) & 2\cos(2t) + \sin(2t) \\ \cos(2t) & \sin(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t\sin(2t) + \cos(2t) \\ -2t\cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4t + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y finalmente la solución general es

$$X = C_1X_1 + C_2X_2 + X_p$$

$$X = C_1 \begin{pmatrix} \cos(2t) - 2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\cos(2t) + \sin(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4t + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.3.5. Considere el sistema

$$X' = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix}$$

verifique que

$$\Phi = \begin{pmatrix} t^2 & t^4 \\ 3t^2 & t^4 \end{pmatrix}$$

es la matriz fundamental de soluciones y encuentre la solución general.

Para iniciar corroboramos que $\Phi' = A\Phi$, vea que

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 2t & 4t^3 \\ 6t & 4t^3 \end{pmatrix}$$

Por otro lado tenemos que

$$A\Phi = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & t^4 \\ 2t^2 & t^4 \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 5t^2 - 3t^2 & 5t^4 - t^4 \\ 3t^2 + 3t^2 & 3t^4 + t^4 \end{pmatrix}$$
$$\frac{1}{t} \begin{pmatrix} 2t^2 & 4t^4 \\ 6t^2 & 4t^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t & 4t^3 \\ 6t & 4t^3 \end{pmatrix}$$

donde se corrobora la igualdad, ahora veamos que $\det(\Phi) \neq 0$

$$\det(\Phi) = \begin{vmatrix} t^2 & t^4 \\ 3t^2 & t^4 \end{vmatrix} = t^6 - 3t^6 = -2t^6 \neq 0$$

por lo que Φ es la matriz fundamental de soluciones, con esto podemos escribir la solución homogénea

$$X_h = C_1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 3t^2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t^4 \\ t^4 \end{pmatrix}$$

Ahora debemos buscar la solución particular X_p, procediendo por variación de parámetros calculamos primero la inversa de Φ

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\det \Phi} \begin{pmatrix} t^4 & -t^4 \\ -3t^2 & t^2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2t^6} \begin{pmatrix} t^4 & -t^4 \\ -3t^2 & t^2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} t^{-2} & -t^{-2} \\ -3t^{-4} & t^{-4} \end{pmatrix}$$

ahora calculando $\displaystyle\int \Phi^{-1} f(\vec{t})$ tenemos

$$\int \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} t^{-2} & -t^{-2} \\ -3t^{-4} & t^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} dt = \frac{-1}{2} \int \begin{pmatrix} -t^{-1} - t^{-1} \\ 3t^{-3} + t^{-3} dt \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-1}{2} \int \begin{pmatrix} -2t^{-1} \\ 4t^{-3} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ t^{-2} \end{pmatrix}$$

con esto

$$X_p = \Phi \int \Phi^{-1} f(\vec{t}) dt = \begin{pmatrix} t^2 & t^4 \\ 3t^2 & t^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(t) \\ t^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \ln(t) + t^2 \\ 3t^2 \ln(t) + t^2 \end{pmatrix}$$

y finalmente tenemos que

$$X = X_h + X_p = C_1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 3t^2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t^4 \\ t^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \ln(t) + t^2 \\ 3t^2 \ln(t) + t^2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.3.6. Considere el sistema

$$X' = AX + \begin{pmatrix} 0 \\ te^{-t} \end{pmatrix}$$

donde A es una matriz 2×2, si se sabe que la solución asociada al sistema homogéneo es

$$X_h = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determine la solución general.

De X_h extraemos que

$$\Phi = \begin{pmatrix} -2e^{-3t} & 4 \\ e^{-3t} & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular su inversa para aplicar variación de parámetros, como es 2×2 calculamos primero su determinante

$$\det(\Phi) = \begin{vmatrix} -2e^{-3t} & 4 \\ e^{-3t} & 1 \end{vmatrix} = -2e^{-3t} - 4e^{-3t} = -6e^{-3t}$$

por lo tanto

$$\Phi^{-1} = \frac{-1}{6e^{-3t}} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -e^{-3t} & -2e^{-3t} \end{pmatrix} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} e^{3t} & -4e^{3t} \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculando

$$\int \Phi^{-1} f(\vec{t})dt = \int \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} e^{3t} & -4e^{3t} \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ te^{-t} \end{pmatrix} dt = \frac{1}{6} \int \begin{pmatrix} 4te^{2t} \\ 2te^{-t}dt \end{pmatrix}$$

Ambas integrales se resuelve por partes, resolviendo en forma general para

$$\int te^{at}dt$$

tome $u = t$ y por lo tanto $du = dt$, mientras que $dv = e^{at}dt$ y por lo tanto $v = e^{at}/a$, entonces

$$xuv - \int vdu = t\frac{e^{at}}{a} - \int \frac{e^{at}}{a}dt = t\frac{e^{at}}{a} - \frac{e^{at}}{a^2} =$$
$$e^{at}\left[\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}\right]$$

con esto

$$\frac{1}{6} \int \begin{pmatrix} 4te^{2t} \\ 2te^{-t}dt \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{2t}\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right) \\ 2e^{-t}\Big(-t-1\Big) \end{pmatrix}$$

Ahora

$$X_p = \Phi \int \Phi^{-1} f(\vec{t})dt = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2e^{-3t} & 4 \\ e^{-3t} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e^{2t}\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right) \\ 2e^{-t}\Big(-t-1\Big) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} e^{-t}(-12t-6) \\ -3e^{-t} \end{pmatrix}$$

y ya con esto podemos escribir la solución general

$$X = X_h + X_p$$

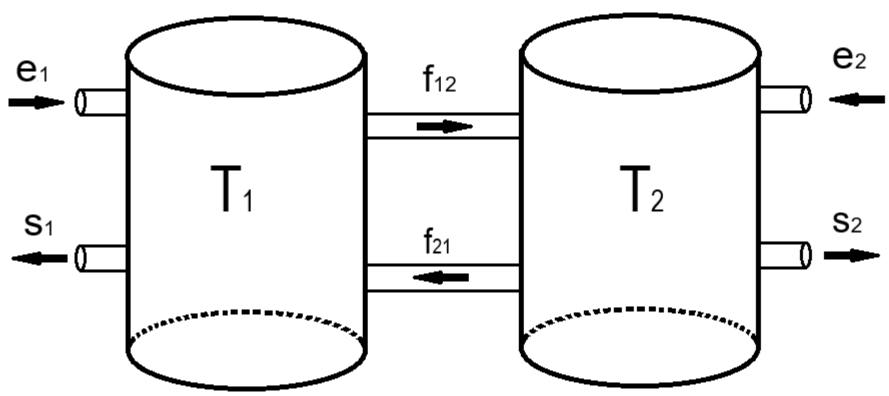
4.4. Mezclas, tanques interconectados

Para iniciar considere un liquido en el cual se disuelve un soluto, la concentración másica de la mezcla se define como

$$C = \frac{\text{Masa de soluto}}{\text{Volumen de disolvente}}$$

La cual tiene unidades de masa entre volumen. También tenemos la concentración volumétrica que es volumen del soluto entre volumen de disolvente, este tipo de concentración se usa en las bebidas alcohólicas por ejemplo. Para lo que vamos a realizar ambos tipos de concentración funcionan, debido a que ambos están relacionados dada la densidad del soluto, pero principalmente trabajaremos con la concentración másica, por lo que a esta simplemente la llamaremos concentración.

Considere el siguiente problema, tenemos dos tanques interconectados, cada uno con un volumen de mezcla a una concentración inicial. El sistema inicia a operar y cada tanque tiene una entrada y salida de flujo, ademas de que cada tanque envía y recibe mezcla del otro tanque.



Donde

- ▷ e_1, e_2 es el flujo de entrada al tanque 1 y tanque 2 respectivamente en unidades de volumen entre tiempo.
- ▷ c_1, c_2 son las respectivas concentraciones de los flujos de entradas en cada tanque.
- ▷ s_1, s_2 es el flujo de salida al tanque 1 y tanque 2 respectivamente en unidades de volumen entre tiempo.

▷ f_{12} es el flujo de mezcla del tanque 1 al tanque 2.

▷ f_{21} es el flujo de mezcla del tanque 2 al tanque 1.

Lo que buscamos es modelar la cantidad de soluto disuelto en los tanques en función del tiempo, para poder hacer esto vamos a hacer un balance de flujos en cada tanque, sea $x(t), y(t)$ la cantidad de soluto en el tanque 1 y 2 respectivamente en el tiempo t.

Para simplificar solo vamos a estudiar casos donde el volumen de los tanques se mantiene constante, es decir $e_1 + f_{21} - s_1 - f_{12} = 0$ y $e_2 + f_{12} - s_2 - f_{21} = 0$, por lo que denotamos V_1, V_2 el volumen de mezcla en el tanque 1 y 2 respectivamente.

Para el tanque 1 tenemos una entrada e_1 a una concentración c_1, como masa es el producto del volumen por concentración tenemos que entra al tanque e_1c_1 cantidad de soluto. También tenemos la entrada f_{21}, esta mezcla viene del tanque 2, por lo que si concentración debe ser la cantidad de soluto en el tanque 2 dividido entre el volumen del tanque 2, entonces este entrada se puede escribir como

$$f_{21}\frac{y(t)}{V_2}$$

pues $y(t)$ modela la cantidad de soluto en el tanque 2. Para la salida tenemos s_1, f_{12}, ambas con la concentración del tanque 1, entonces la cantidad de soluto que sale del tanque 1 es

$$(s_1 + f_{12})\frac{x(t)}{V_1}$$

Si sumamos las entradas de soluto y restamos las salidas de soluto, obtenemos la razón de cambio de la cantidad de soluto en el tanque, por lo tanto tenemos

$$\frac{dx(t)}{dt} = e_1c_1 + \frac{f_{21}}{V_2}y(t) - \frac{(s_1 + f_{12})}{V_1}x(t)$$

aplicando el mismo análisis al tanque 2 tenemos que

$$\frac{dy(t)}{dt} = e_2c_2 + \frac{f_{12}}{V_1}x(t) - \frac{(s_2 + f_{21})}{V_2}y(t)$$

Matricialmente lo anterior se escribe como

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} -\frac{s_1+f_{12}}{V1} & \frac{f_{21}}{V_2} \\ \frac{f_{12}}{V_1} & -\frac{s_2+f_{21}}{V_2} \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} e_1c_1 \\ e_2c_2 \end{pmatrix}$$

donde $\vec{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(y) \end{pmatrix}$

Lo anterior como formula es difícil de memorizar, pero lo importante es la deducción, la razón de cambio de la cantidad de soluto en cada tanque es la entrada de soluto menos la salida de soluto.

Ejemplo 4.4.1. Dos tanques con 24 litros de agua en la cual se disolvió sal, ambos se encuentran interconectados, al primer tanque entra agua pura a razón de 6 litros por minuto y del segundo tanque sale mezcla al exterior a razón de 6 litros por segundo. Del tanque 1 se envía mezcla a razón de 8 litros por minuto hacia el tanque 2, mientras que el tanque 2 envía mezcla a razón de 2 litros por segundo hacia el tanque 1. Si inicialmente el tanque 1 tiene 20 kilogramos de sal disuelta mientras que tanque 2 tiene 12 kilogramos de sal disuelta, entonces determine la cantidad de sal en función del tiempo en cada tanque.

Iniciemos analizando el tanque 1, como a este entra agua pura la concentración de sal es 0 kilogramos por litros, entonces esto no aporta soluto, del tanque 1 sale 8 l/min de mezcla al tanque 2 con la misma concernencia del tanque 1, y el tanque 1 recibe 2 l/min de mezcla del tanque 2 con la concentración del tanque 2, como $x(t), y(t)$ modela la cantidad de sal en cada tanque tenemos.

$$x' = -\frac{8\, l/min}{24\, l}x + \frac{2\, l/min}{24\, l}y = -\frac{1\, l/min}{3\, l}x + \frac{1\, l/min}{12\, l}y$$

mientras que del tanque 2 recibe 8 litros por minuto de mezcla del tanque 1, y del tanque 2 sale 6 litros por segundo al exterior y 2 litros por segundo hacia el tanque 1, por lo tanto

$$y' = \frac{8\, l/min}{24\, l}x - \frac{(2+6)\, l/min}{24\, l}y = \frac{1\, l/min}{3\, l}x - \frac{1\, l/min}{3\, l}y$$

lo anterior matricialmente se escribe como el sistema homogéneo

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/12 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \vec{X}$$

omitiremos los cálculos de los valores y vectores propios, de los cuales se obtiene que $\lambda = -1/6$ es valor propio con vector propio asociado $(1/2, 1)$ y $\lambda = -1/2$ es el otro valor propio con vector propio asociado $(-1/2, 1)$, por lo tanto tenemos

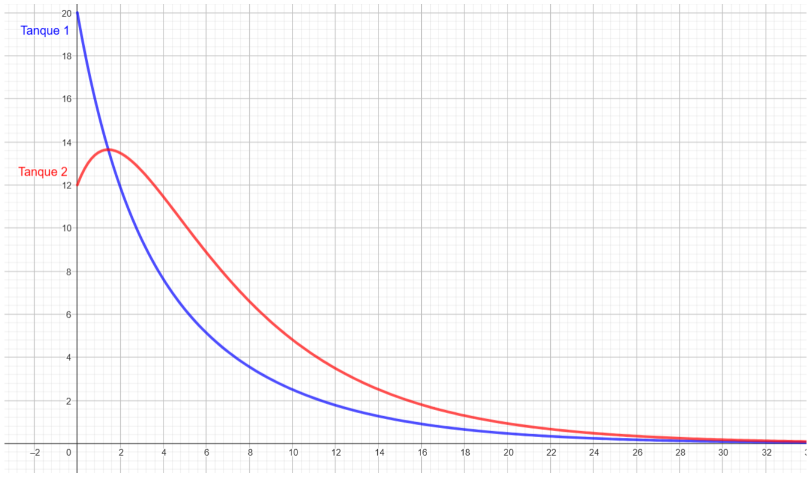
$$\vec{X} = C_1 e^{-\frac{t}{6}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para determinar las constantes C_1, C_2 como el tanque 1 inicialmente tiene 20 kilogramos de sal y el tanque 2 tiene 12 kilogramos de sal es equivalente a $\vec{X}(0) = (20, 12)$, con esto

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene que $C_1 = 26$ y $C_2 = -14$, con esto la solución es

$$\vec{X} = e^{-\frac{t}{6}} \begin{pmatrix} 13 \\ 26 \end{pmatrix} + e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \end{pmatrix}$$



En la imagen anterior podemos ver como se comporta la cantidad de sal en los tanques, como solo ingresa agua pura es de esperar que la cantidad de sal tienda a 0, vemos que el tanque 2 aumenta inicialmente la cantidad de sal debido a que recibe agua del tanque 1 que tiene mayor concentración de sal, pero con el tiempo esta disminuye a cero.

Ejemplo 4.4.2. Partamos del mismo ejemplos anterior, pero que ahora el tanque 1 entre solución salina a razón de 6 litros por minuto con una concentración de 0.5 kilogramos por litro, esto modifica la ecuación del tanque 1 a la siguiente

$$x' = -\frac{8\, l/min}{24\, l}x + \frac{2\, l/min}{24\, l}y + 6 * 0.5 = -\frac{1\, l/min}{3\, l}x + \frac{1\, l/min}{12\, l}y + 3$$

mientras que la ecuación del tanque 2 no se modifica, obtenemos el sistema matricial

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/12 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

conocemos la solución del sistema homogéneo y con esto tenemos que

$$\vec{X_h} = C_1 e^{-\frac{t}{6}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \Phi = \begin{pmatrix} \frac{e^{-t/6}}{2} & -\frac{e^{-t/2}}{2} \\ e^{-t/6} & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

Se calcula la inversa para obtener que

$$\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} e^{t/6} & \frac{e^{t/6}}{2} \\ -e^{t/2} & \frac{e^{t/2}}{2} \end{pmatrix}$$

Y con esto

$$\Phi^{-1}f(\vec{t}) = \begin{pmatrix} e^{t/6} & \frac{e^{t/6}}{2} \\ -e^{t/2} & \frac{e^{t/2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{t/6} \\ -3e^{t/2} \end{pmatrix}$$

por lo que

$$\int \Phi^{-1}f(\vec{t})dt = \begin{pmatrix} 18e^{t/6} \\ -6e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

para obtener

$$X_p = \Phi \int \Phi^{-1}f(\vec{t})dt = \begin{pmatrix} \frac{e^{-t/6}}{2} & -\frac{e^{-t/2}}{2} \\ e^{-t/6} & e^{-t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18e^{t/6} \\ -6e^{-t/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

entonces la solución general es

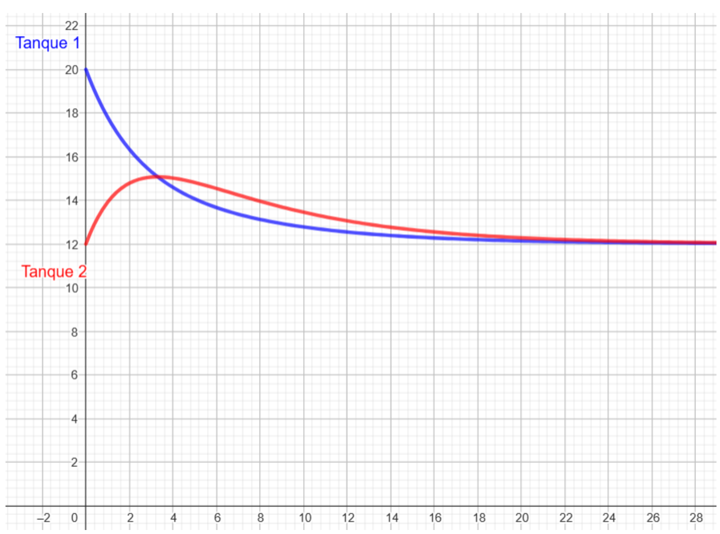
$$\vec{X} = \vec{X}_h + \vec{X}_p = C_1 e^{-\frac{t}{6}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

usando las mismas condiciones de frontera $\vec{X}(0) = (20, 12)$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 12 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde $C_1 = 8$ y $C_2 = -8$, con lo que obtenemos

$$\vec{X} = 8e^{-\frac{t}{6}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} - 8^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$



Ejemplo 4.4.3. Se tienen dos tanques con 100 litros de solución salina, el primer tanque contiene 10 kilogramos de sal y el segundo 25 kilogramos del sal. Se inicia a bombear a cada tanque 12 litros de agua pura por minuto, mientras que el tanque 1 envía mezcla a razón de 4 litros por minuto al tanque 2 y se extraer mezcla del tanque 1 al exterior a razón de 20 litros por minuto. Mientras que el tanque 2 envía hacia el tanque 1 mezcla a razón de 12 litros por minuto y se extraer del tanque 2 hacia el exterior mezcla a razón de 4 litros por minuto.

Analizando el tanque 1, como el agua que entra es pura esta no aporta sal, mientras que el tanque 1 pierde mezcla a razón de 24 litros por segundo, con concentración del tanque 1, y a este ingresa mezcla a 12 litros por segundo a concentración del tanque 2, entonces

$$x' = -24\frac{x}{100} + 12\frac{y}{100} = -\frac{6}{25}x + \frac{3}{25}y$$

para el tanque 2 el agua pura tampoco aporta sal, tenemos el ingreso de 4 litros por segundo del tanque 1 y el tanque 2 pierde 16 litros de mezcla (suma de flujos hacia el exterior y hacia el tanque 1), entonces

$$y' = 4\frac{x}{100} - 16\frac{y}{100} = \frac{1}{25}x - \frac{4}{25}y$$

matricialmente el sistema se escribe como

$$X' = \begin{pmatrix} -6/25 & 3/25 \\ 1/25 & -4/25 \end{pmatrix} X$$

tenemos que $\lambda = -7/25$ es valor propio con vector propio $(-3, 1)$ asociado, mientras que el segundo valor propio es $\lambda = -3/25$ con vector propio asociado $(1, 1)$, entonces tenemos que la solución general es

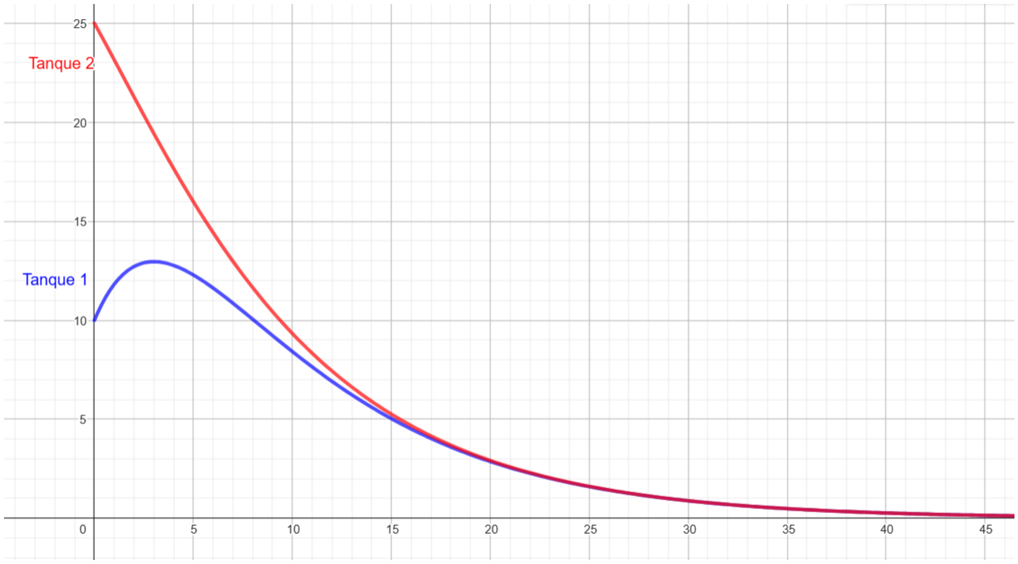
$$X = C_1 e^{-7t/25} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t/25} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para obtener las constantes tenemos que el tanque 1 y tanque 2 tiene inicialmente 10 y 25 kilogramos del sal, es decir $\vec{X}(0) = (10, 25)$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 25 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde se obtiene que $C_1 = -15/2$ y $C_2 = 65/2$, por lo que

$$X = -\frac{15}{2} e^{-7t/25} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{65}{2} e^{-3t/25} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



4.5. Sistemas masas-resortes conectados

Considere el sistema con 2 masas m_1, m_2 y 2 resortes de constantes k_1, k_2 respectivamente como se muestra a continuación

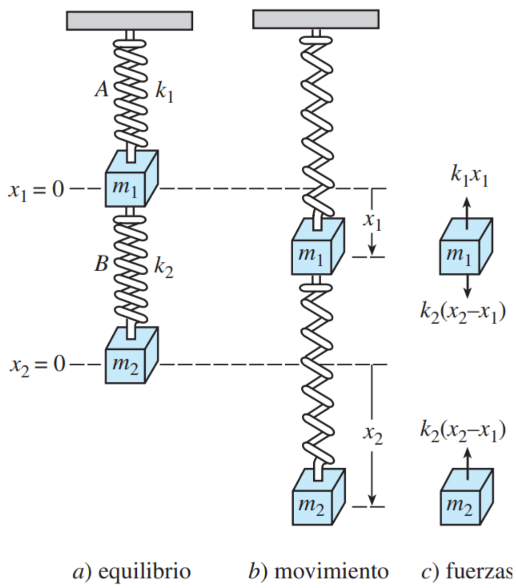


Figura 4.1: Sistema masas-resortes, Extraído de [2], pagina 184

En la figura 4.1, inicialmente (a) los resortes y las masas se encuentran en posiciones de equilibrio, cuando hay movimiento las masas se desplazan de sus posiciones de equilibrio, como se muestra en (b) para esto estamos tomando como positivo el eje que apunta hacia abajo (en la dirección de la gravedad), este desplazamiento (en función del tiempo) lo llamaremos $x_1 = x_1(t), x_2(t) = x_2$ respectivamente para la masa m_1, m_2. En (c) se realiza el análisis de fuerzas, recordemos que la ley de Hooke establece que

$$F_r = -kx$$

Para la primera masa actúan dos resortes, el resorte 1 se encuentra fijo en un extremo, su elongación es igual al desplazamiento de la masa 1 (nota: en la imagen ambos resortes esta estiramos pero pueden estar comprimidos, en ese caso x_1 seria negativo).

Por otro lado vea que la elongación del resorte dos es $x_2 - x_1$, por lo que la masa 1 tiene una fuerza hacia abajo de $k_2(x_2 - x_1)$ y la masa 2 tenemos esta misma fuerza hacia arriba ($x_2 - x_1$ puede ser negativo).

Para la pasa 1 tenemos

$$\sum F = ma \Longrightarrow -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) = m_1x_1''$$

Mientras que para la masa 2 tenemos

$$\sum F = ma \Longrightarrow -k_2(x_2 - x_1) = m_2x_2''$$

El sistema se puede escribir entonces como

$$\vec{X}'' = \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} \end{pmatrix} \vec{X}$$

Simplificando, es de la forma $\vec{X}'' = A\vec{X}$, si se asume que la solución son de la forma $\vec{X} = e^{\lambda t}\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es un vector constante, derivando dos veces se obtiene que $\vec{X}'' = \lambda^2 e^{\lambda t}\vec{v}$, sustituyendo se tiene

$$\lambda^2 e^{\lambda t}\vec{v} = Ae^{\lambda t}\vec{v} \Longrightarrow A\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$$

de donde se concluye que λ^2 es valor propio de A, entonces el valor de λ buscamos son las raíces de los valores propios de A, esto nos dará 4 valores al agregar el $\pm$ asumiendo que A tiene dos valores propios distintos y no nulos. Mientras que el vector $\vec{v}$ es el vector propio asociado al valor propio λ^2.

Ejemplo 4.5.1. Dos masas de 1 kilogramo se colocan como el sistema de masas resortes de 4.1, donde $k_1 = 3$ y $k_2 = 2$, si inicialmente $x_1(0) = 0.1$ y $x_2(0) = 0.3$ y se libera la masa 1 desde el reposo y la masa 2 se le aplica una velocidad de 0.5 m/s hacia abajo (dirección positiva, lo anterior dice que $X'(0) = (0, 0.5)$

Usando lo anterior descrito el sistema se escribe como

$$X'' = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

que tiene por valores propios $\lambda = -6$ y $\lambda = -1$ con vectores propios asociados $(-2, 1)$ y $(1, 2)$, ahora para $\lambda = -1$ tenemos que su raíz cuadrada es $\pm i$, y para $\lambda = -6$ su raíz cuadrada es $\pm\sqrt{6}i$, por lo que la solución es

$$\vec{X} = C_1 e^{\sqrt{6}it}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{-\sqrt{6}it}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + C_3 e^{it}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + C_4 e^{-it}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

lo anterior es verdadero, no podemos dejar valores complejos en nuestro solución, para esto se utiliza la identidad de Euler y algunas manipulaciones algebraicas se llega a que si

$$C_1 e^{(a-ib)t} + C_2 e^{(a+ib)t} = e^{at}\Big[C_1\cos(bt) + C_1\sin(bt)\Big]$$

en la igualdad anterior las constantes del lado derecho y del lado izquierdo no son las mismas realmente, se esta aprovechando para reciclar las variables, pero el punto es que usando lo anterior la solución es de la forma

$$\vec{X} = C_1\cos(\sqrt{6}t)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + C_2\sin(\sqrt{6}t)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + C_3\cos(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + C_4\sin(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

Ahora debemos calcular las constantes, primero evaluemos que $X(0) = (0.1, 0.3)$, con esto

$$\begin{pmatrix}0.1\\0.3\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

donde $C_1 = 1/50$ y $C_3 = 7/50$, ahora derivando tenemos que

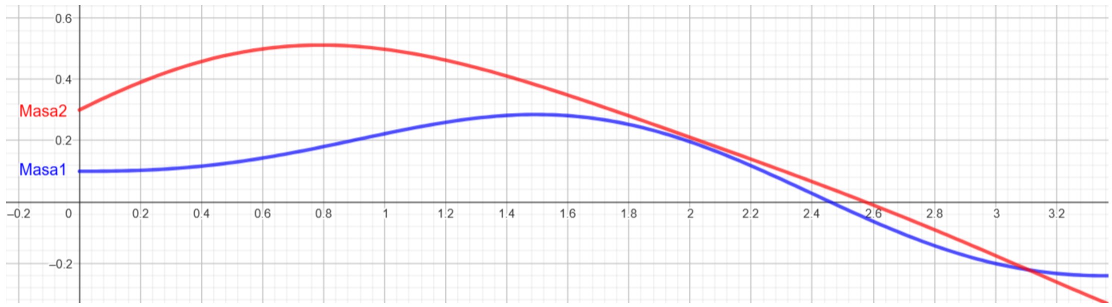
$$\vec{X}' = -C_1\sqrt{6}\sin(\sqrt{6}t)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + C_2\sqrt{6}\cos(\sqrt{6}t)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} - C_3\sin(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + C_4\cos(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

este es el vector de velocidades, como estos parten del reposo tenemos que $\vec{X}'(0) = 0$, sustituyendo

$$\begin{pmatrix}0\\0.5\end{pmatrix} = C_2\sqrt{6}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + C_4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

donde $C_2 = \sqrt{6}/60$ y $C_4 = 1/5$, por lo que la posicion en funcion del tiempo de las masas es

$$\vec{X} = \frac{1}{50}\cos(\sqrt{6}t)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{60}\sin(\sqrt{6}t)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + \frac{7}{50}\cos(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\sin(t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$



En la gráfica anterior el 0 de cada gráfica es con respecto a su punto de equilibrio, por lo que aunque las gráficas se tocan, en realidad las masas no se tocan (aunque si pueden llegar a tocarse dependiendo de las condiciones).

Ejemplo 4.5.2. Dos masas de 1 kilogramo se colocan como el sistema de masas resortes de 4.1, donde $k_1 = 15$ y $k_2 = 10$, la masa 1 se estira hacia abajo tal que esta 0.5 metros hacia abajo de su posición de equilibrio, y la masa 2 se estira de tal manera que ahora esta 1.2 metros abajo de su posición de equilibrio. Si la masa 1 se libera desde el reposo y a la masa 2 se le aplica una velocidad hacia abajo de 1 m/s, determine la posición de las masas en función del tiempo.

Tenemos que el sistema se escribe como

$$\vec{X}'' = \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} \end{pmatrix} \vec{X} = \begin{pmatrix} -25 & 10 \\ 10 & -10 \end{pmatrix} \vec{X}$$

Esta matriz tiene por valor propio $\lambda = -30$ con vector propio $(-2, 1)$ y $\lambda = -5$ con vector propio $(1, 2)$, entonces la solución general es

$$\vec{X} = C_1 \cos(\sqrt{30}t) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \sin(\sqrt{30}t) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \cos(\sqrt{5}t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_4 \sin(\sqrt{5}t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Evaluando que $X(0) = (0.5, 1.2)$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donde $C_1 = 1/25$ y $C_3 = 29/50$, ahora derivando tenemos

$$\vec{X}' = -C_1\sqrt{30}\sin(\sqrt{30}t) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\sqrt{30}\cos(\sqrt{30}t) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

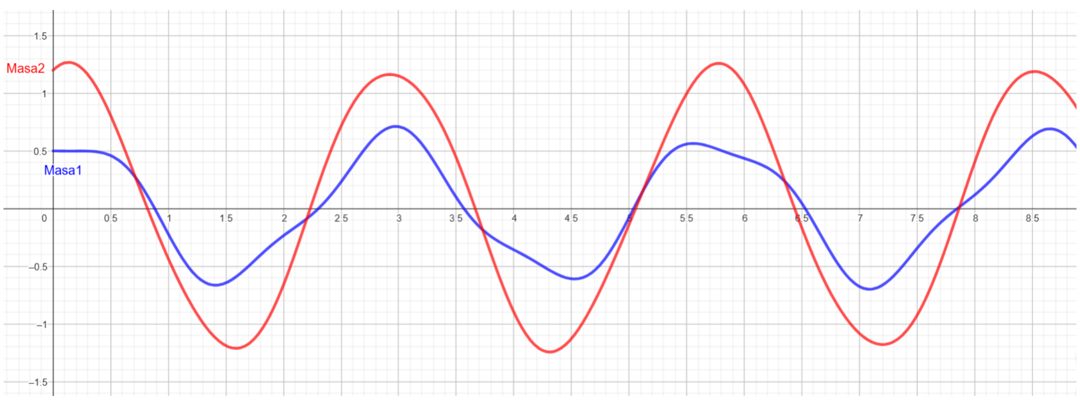
$$-C_3\sqrt{5}\sin(\sqrt{5}t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+C_4\sqrt{5}\cos(\sqrt{5}t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

evaluando $\vec{X}'(0)=(0,1)$

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=C_2\sqrt{30}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+C_4\sqrt{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

de donde $C_2=1/(5\sqrt{30})$ y $C_4=2/(5\sqrt{5})$, con esta la posición de las masas respecto al tiempo es

$$\vec{X}=\frac{1}{25}\cos(\sqrt{30}t)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{5\sqrt{30}}\sin(\sqrt{30}t)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+\frac{29}{50}\cos(\sqrt{5}t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\frac{2}{5\sqrt{5}}\sin(\sqrt{5}t)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$



5. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace es una transformación lineal que toma una función de variable t a una función de variable s compleja, inicialmente se uso en la teoría de probabilidad por

Leondard Euler en 1744 y posteriormente por Pierre-Simon Laplace en 1782 para resolver ecuaciones diferenciales.

La transformada de Laplace permite transformar una ecuación diferencial en un problema algebraico, generalmente mas sencillo de resolver.

5.1. Transformadas elementales

La transformada de Laplace se calcula mediante una integral de primera especie (que tiene un limite de integración infinito), veamos directamente al definición

Definicion 5.1.1. Sea $f(t)$ una función, se define su transformada de Laplace para todo $s \geq 0$ como

$$\mathscr{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Algunos aspectos importantes que recalcar

1. En las tres igualdades la s es la misma, por lo que si se varia alguna se deben variar todas, por ejemplo

$$\mathscr{L}\{f(t)\}(s^2+3) = F(s^2+3) = \int_0^\infty e^{-(s^2+3)t} f(t)dt$$

2. La variable de nuestras funciones originales es t, luego de aplicar la transformada la variable es s.

3. La integral de la definición es con respecto a t, por lo que s es una constante para la integral, y al integrar se obtiene una función con s por parámetro.

4. Para resolver la integral nos puede ser útil recordar que

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st}t^n = 0$$

para todo $s \geq 0$ y todo $n \geq 0$

Iniciemos con el calculo de la transformada de Laplace, la función mas sencilla que podemos encontrar es la función constante, para la cual tenemos

Ejemplo 5.1.1. Sea $f(t) = 1$, calcule $\mathscr{L}\{f(t)\}$

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} 1 dt = \int_0^\infty e^{-st} dt$$

$$= \frac{-e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty = -\frac{\cancel{e^{-s*\infty}}^{\,0}}{s} + \frac{e^{-0s}}{s} = \frac{1}{s}$$

Otra función elemental importante es $f(t) = t^n$

Teorema 5.1.1. Sea $f(t) = t^n$, en donde $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Recuerde que el factorial de un numero natural se define de manera recursiva

$$0! = 1 \qquad 1! = 1 \qquad n! = n(n-1)!$$

o dicho de otra forma

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 * 2 * 1$$

Ejemplo 5.1.2. Tenemos que

$$\mathscr{L}\left\{t^5\right\} = \mathscr{L}\left\{t^{4+1}\right\} = \frac{4!}{s^{4+1}} = \frac{24}{s^5}$$

Ahora, el primer teorema que nos permitirá encontrar transformada de funciones más complejas es el siguiente.

Teorema 5.1.2. La transformada de Laplace es lineal, es decir que para dos funciones $f(t), g(t)$ y un numero real α tenemos

$$\mathscr{L}\{\alpha f(t) + g(t)\} = \alpha\mathscr{L}\{f(t)\} + \mathscr{L}\{g(t)\}$$

Es decir, podemos sacar (o introducir) constantes en la transformada y separar en sumas.

Ejemplo 5.1.3. Sea $f(t) = 2 + t + 3t^3$, entonces

$$\mathscr{L}\{2 + t + 3t^3\} = 2\mathscr{L}\{1\} + \mathscr{L}\{t\} + 3\mathscr{L}\{t^3\} = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + 3\frac{3!}{s^4}$$

Otro tipo de funciones a la cual le podemos calcular su transformada de Laplace son los exponenciales, en ese caso tenemos:

Teorema 5.1.3. Sea $f(t) = e^{at}$, entonces

$$\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

Demostración. Tenemos

$$\mathscr{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt$$

$$= \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Bigg|_0^\infty = \cancelto{0}{\frac{-e^{-(s-a)*\infty}}{s-a}} + \frac{e^0}{s-a} = \frac{1}{s-a}$$

lo que concluye la prueba $\square$

Ejemplo 5.1.4. Tenemos que

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{s-\pi}\right\} = e^{\pi t} \tag{5.1}$$

Las ultimas funciones elementales que vamos a desarrollar son el seno y coseno, omitiremos el calculo de la transformada y solo enunciaremos el siguiente teorema.

Teorema 5.1.4. Tenemos las siguientes transformadas de funciones trigonométricas

$$\mathscr{L}\{\sin(kt)\} = \frac{k}{s^2+k^2}$$
$$\mathscr{L}\{\cos(kt)\} = \frac{s}{s^2+k^2}$$

Veamos un ejemplo donde podamos mezclar un poco todo lo que hemos visto en este capitulo.

Ejemplo 5.1.5. Calcule

$$\mathscr{L}\{t + e^{2t} + \cos(5t)\} = \mathscr{L}\{t\} + \mathscr{L}\{e^{2t}\} + \mathscr{L}\{\cos(5t)\}$$
$$\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-5} + \frac{s}{s^2+5^2}$$

5.2. Transformada inversa

Dada una función $F(s)$ en el espacio de las transformadas, podemos determinar una función $f(t)$ tal que $\mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\} = F(s)$, en dicho caso decimos que $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $F(s)$

Definicion 5.2.1. Se define la transformada inversa de $F(s)$ (vea que $F(s)$ vive en el espacio de funciones transformada) como

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

en donde

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$$

La transformada inversa es lineal.

Teorema 5.2.1. La transformada inversa de Laplace es lineal, es decir que para dos transformadas $F(s), G(s)$ y un numero real α tenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + G(s)\} = \alpha\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}$$

Veamos el primer ejemplo de calculo de una transformada inversa.

Ejemplo 5.2.1. Encuentre la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{3}{s} + \frac{4}{s^5} + \frac{1}{s+3} + \frac{s+4}{s^2+4}$$

Aplicando la transformada y linealidad tenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s} + \frac{4}{s^5} + \frac{1}{s+3} + \frac{s+4}{s^2+4}\right\} =$$
$$3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-3)}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} \quad (5.2)$$

ahora debemos identificar de cual es la inversa de cada una de las funciones anteriores, la primera es la transformada inversa de 1, es decir

$$3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 3$$

para la segunda es de la forma $\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ según la tabla, pero falta el $n!$, esto no es problema dado a que las constantes pueden entrar y salir de la transformada inversa por la linealidad, y usando el truco de que $1 = \dfrac{a}{a}$ para $a \neq 0$, nos permite colocar el factorial, es decir

$$4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = 4 * \frac{4!}{4!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} = \frac{4}{4!}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} = \frac{4}{4!}t^4 = \frac{t^4}{6}$$

la tercera suma es un exponencial, se escribió $3 = -(-3)$ para identificar mejor la forma $1/(s-a)$, es decir $a = -3$, osea

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-3)}\right\} = e^{-3t}$$

la cuarta suma es un $\cos(2t)$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} = \cos(2t)$$

y la ultima suma es un $\sin(2t)$, pero según la tabla el seno lleva un k arriba, en este caso $k=2$, pero haciendo el mismo truco de multiplicar arriba y abajo por 2 obtenemos

$$4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\} = 4 * \frac{2}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\} = \frac{4}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2}\right\}$$
$$\frac{4}{2}\sin(2t) = 2\sin(2t)$$

entonces sustituyendo en 5.2

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = 1 + \frac{t^4}{6} + e^{-3t} + \cos(2t) + 2\sin(t)$$

En el ejemplo anterior, cuando resolvimos el $\sin(2t)$ multiplicamos arriba y abajo por 2, pero otra manera (equivalente) es separar $4 = 2 * 2$, sacar un dos de la inversa y el otro dos lo dejamos dentro de la inversa.

5.3. Teorema de traslación en Frecuencia o primer teorema de traslación

Lo siguiente es desarrollar teoremas que nos permitan calcular transformadas de funciones mas elaboradas, para iniciar tenemos el primer teorema de traslación.

Teorema 5.3.1. Sea $f(t)$ una función tal que $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$, entonces

$$\mathscr{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = \mathscr{L}\left\{f(t)\right\}\Big|_{s-a} = F(s-a)$$

La notación $\mathscr{L}\left\{f(t)\right\}\Big|_{s-a}$ dice calcule la transformada de $f(t)$ (que la transformada depende de s), y luego cambie todas las s por $s-a$ (escribiremos, $s \to (s-a)$).

Ejemplo 5.3.1. Calcule la transformada de $f(t) = e^{2t}t^2$

$$\mathscr{L}\left\{e^{2t}t^2\right\} = \mathscr{L}\left\{t^2\right\}\Big|_{s-2} = \frac{2!}{s^3}\Big|_{s-2} = \frac{2}{(s-2)^3}$$

Ejemplo 5.3.2. Calcule la transformada de $f(t) = e^{-2t}[\cos(3t) + e^{3t}]$.

Antes de calcular la transformada distribuimos el el exponencial para obtener que $f(t) = e^{-2t}\cos(3t) + e^{t}$, entonces

$$\mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\} = \mathscr{L}\Big\{e^{-2t}\cos(3t)\Big\} + \mathscr{L}\Big\{e^{t}\Big\}$$
$$\mathscr{L}\Big\{\cos(3t)\Big\}\Big|_{s+2} + \mathscr{L}\Big\{e^{t}\Big\} = \left(\frac{s}{s^2+9}\right)\Big|_{s+2} + \frac{1}{s-1}$$
$$\frac{s+2}{(s+2)^2+9} + \frac{1}{s-1}$$

Vea que cuando aplicamos la traslación a la transformada del $\cos(3t)$, todas las s se deben de trasladar. Otra cosa a considerar es que no hacia falta distribuir el exponencial al inicio, y se podía aplicar el teorema de traslación a toda la función, pero desde un punto de vista practico es mas sencillo distribuir al inicio.

Ahora veamos la inversa del primer teorema de traslación.

Teorema 5.3.2. Tenemos que

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{F(s-a)\Big\} = e^{at}\mathscr{L}^{-1}\Big\{F(s)\Big\} = e^{at}f(t)$$

En general para el calculo de inversas es bueno tener un buen manejo de la tabla, pues si queremos calcular la inversa de una función trasladada, debemos identificar la traslación para obtener la función deseada, veamos un ejemplos.

Ejemplo 5.3.3. Calcule

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s-3)^5}\Big\}$$

como tenemos una traslación vamos a sacar un exponencial para trasladar $(s+3) \to s$ entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s-3)^5}\Big\} = e^{3t}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^5}\Big\}$$

para la inversa de $1/s^5$ es un t^4, pero debemos antes colocar un 4!, entonces

$$e^{3t} * \frac{4!}{4!}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^5}\Big\} = e^{3t} * \frac{1}{4!}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{4!}{s^5}\Big\} = \frac{e^{3t}}{4!}t^4$$

Ejemplo 5.3.4. Encuentre la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{s}{(s+3)^2 + 25}$$

Para este ejercicio debemos ir familiarizándonos con la forma de las transformadas de 5.15, la parte de abajo de nuestra fracción tiene forma de un seno o un coseno, pero esta desplazado, y cuando tienen forma de seno o coseno el s del denominador es el que marca la traslación.

Ahora, queremos trasladar $(s+3) \to s$ para el s del denominador, pero la traslación debe ser igual para todos los s, entonces para el s del numerado podemos usar que la traslación $s + 3 \to s$ es equivalente a $s \to s - 3$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^2+25}\right\} &= e^{-3t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-3}{s^2+25}\right\} \\ &= e^{-3t}\left(\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+25}\right\} - 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+25}\right\}\right) \qquad (5.3)\end{aligned}$$

para la primera suma es directamente un $\cos(5t)$, para la segunda debemos volver aplicar el truco de multiplicar arriba y abajo por un número conveniente, en este caso por 5.

$$3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+25}\right\} = \frac{3}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+25}\right\} = \frac{3}{5}\cos(5t)$$

entonces retomando 5.3 tenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = e^{-3t}\left(\cos(5t) - \frac{3}{5}\cos(5t)\right)$$

5.4. Fracciones parciales y completar cuadrados

A la hora de calcular inversas, fracciones parciales y completar cuadrados es una herramienta útil, una explicación de ambos procedimientos los puede encontrar en la sección de preliminares, iniciemos viendo como se usa las fracciones parciales.

Ejemplo 5.4.1. Calcule la siguiente transformada inversa

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 2s - 8}\right\}$$

en este caso vamos a aplicar fracciones parciales, recuerde que para aplicar este método los polinomios del denominador deben estar simplificados al máximo, entones vea que $s^2 - 2s - 8 = (s+2)(s-4)$, por lo tanto

$$\frac{1}{(s+2)(s-4)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-4}$$
$$1 = A(s-4) + B(s+2) = s(A+B) + [-4A+2B]$$

de donde obtenemos las ecuaciones $A+B=0$ y $-4A+2B=1$ de donde $A=-1/6$ y $B=1/6$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s-8}\right\} = \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - \frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}$$
$$\frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{4t}$$

Veamos un caso de un polinomio de grado 1 que se repite mas de una vez.

Ejemplo 5.4.2. Calcule la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{2s^2-7s+11}{(s-2)^2(s+3)}$$

vea que tenemos un polinomio de grado 1 pero que se repite dos veces, entonces la fracción parcial tiene la forma

$$\frac{2s^2-7s+11}{(s-2)^2(s+3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{s+3}$$

$$2s^2-7s+11 = A(s-2)(s+3) + B(s+3) + C(s-2)^2$$
$$2s^2-7s+11 = As^2 + As - 6A + Bs + 3B + Cs^2 - 4sC + 4C$$
$$2s^2-7s+11 = s^2(A+C) + s(A+B-4C) + [-6A+3B+4C]$$

de donde se obtiene el sistema $A+C=2$, $A+B-4C=-7$ y $-6A+3B+4C=11$, de donde obtenemos que $A=0$, $B=1$ y $C=2$, por lo tanto tenemos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-7s+11}{(s-2)^2(s+3)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$

de lado derecho, la segunda inversa es fácil de calcular, es un exponencial (en particular un e^{-3t}), la primera presenta un poco más de trabajo, se debe identificar como un t desplazado, para ver esto con calma tenemos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = e^{2t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = e^{2t}t$$

en donde la primera igualdad se da aplicando la transformada inversa del primer teorema de translación y la segunda igualdad de aplicar la transformada inversa de $1/s^2$, que es $f(t) = t$, por tanto.

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2 - 7s + 11}{(s-2)^2(s+3)}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} + 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$$
$$e^{2t}t + 2e^{-3t}$$

Ahora veamos el caso donde tenemos un polinomio de grado 2 irreducible en el denominador, ahora, a los polinimios de grado 2 irreducible en el denominador le aplicamos el proceso de completar cuadrados.

Algo importante a tener en cuenta es que cuando se completan cuadrados, al aplicar la transformada inversa lo que se va a obtener se senos, coseno o ambos trasladados mediante el primer teorema de traslación, y el cuadrado del denominador es el que determina dicha traslación.

Primero veamos un ejemplo donde solo debemos completar cuadrados.

Ejemplo 5.4.3. Calcule la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 8}$$

para iniciar el ejercicio se ve que $s^2 + 4s + 8$ es irreducible, una forma de ver esto es calculando las raíces y ver que estas son numeros complejos. Entonces completamos cuadrados,

$$d = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$$

entonces

$$s^2 + 4s + 4 - 4 + 8 = (s-2)^2 - 4 + 8 = (z-2)^2 + 4$$

por lo que queremos calcular

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2 + 4}\right\}$$

como se menciono anteriormente, lo que vamos a obtener son senos, cosenos o ambas funciones trigonométricas trasladadas, en sentido que el termino $(s-a)$ del denominador es el que indica la translación, entonces tenemos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2 + 4}\right\} = e^{2t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = e^{2t}\sin(2t)$$

Ahora veamos un ejemplo de fracciones parciales más elaborada

Ejemplo 5.4.4. Calcule la transformada inversa de

$$F(s) = \frac{4s^3 - 4s^2 + 20s - 2}{(s-3)(s+2)(s^2 - 2s + 10)}$$

tenemos dos polinomios de grado 1 (que cada uno aparece solo una vez) y un polinomio irreducible de grado dos, entonces la fracción parcial tiene la forma

$$\frac{4s^3 - 4s^2 + 20s - 2}{(s-3)(s+2)(s^2 - 2s + 10)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2} + \frac{Cs + D}{s^2 - 2s + 10}$$

primero vamos a realizar la fracción parcial y ya luego completamos cuadrados en el polinomio de grado 2 irreducible, entonces tenemos

$$\begin{gathered} 4s^3 - 4s^2 + 20s - 2 = \\ A(s+2)(s^2 - 2s + 10) + B(s-3)(s^2 - 2s + 10) + (Cs + D)(s-3)(s-2) \\ A(s^3 + 6s + 20) + B(s^3 - 5s^2 + 16s - 30) + C(s^3 - s^2 - 6s) + D(s^2 - s - 6) \\ s^3(A + B + C) + s^2(-5B - C + D) + s(6A + 16B - 6C - D) + [20A - 30B - 6D] \end{gathered}$$

de donde se obtiene el sistema

$$\begin{cases} A & +B & +C & & = 4 \\ & -5B & -C & +D & = -4 \\ 6A & +16B & -6C & -D & = 20 \\ 20A & -30B & & -6D & = -2 \end{cases}$$

de donde se obtiene que $A = D = 2$ y $B = C = 1$, ahora estudiemos la fracción que tiene el polinomio de grado dos, vamos a completar cuadrados

$$c = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$$

entonces

$$s^2 - 2s + 1 - 1 + 10 = (s-2)^2 - 1 + 10 = (s-2)^2 + 9$$

por lo tanto vamos a obtener senos o cosenos desplazados con el primer teorema de translación con $a = 2$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{Cs + D}{(s-2)^2 + 9}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s-2)^2 + 9}\right\}$$

ahora, debemos trasladar el $s-2$ de denominador, queremos que $s-2 \to s$, esto lo podemos hacer por el primer teorema de traslación a cambio de sacar un e^{2t} de la transformada, ahora, para el s de arriba que $s-2 \to s$ es equivalente a $s \to s+2$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s-2)^2+9}\right\} = e^{2t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2+2}{s^2+9}\right\}$$
$$= e^{2t}\left(\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+9}\right\}\right)$$
$$e^{2t}\left(\cos(3t) + \frac{4}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\}\right) = e^{2t}\left(\cos(3t) + \frac{4}{3}\sin(3t)\right)$$

las transformadas de las demás fracciones son exponenciales, por lo que obtenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s^2+9}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-3} + \frac{1}{s+2} + \frac{s+2}{s^2-2s+10}\right\} =$$
$$2e^{3t} + e^{-2t} + e^{2t}\left(\cos(3t) + \frac{4}{3}\sin(3t)\right)$$

5.5. Función Heaviside

La función Heaviside o escalón unitario debe su nombre al matemático Oliver Heaviside, se define como

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \textbf{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Trasladando la función anterior tenemos que

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < a \\ 1 & \text{si} \quad t \geq a \end{cases}$$

Antes de iniciar a calcular transformada de la función Heaviside, veamos una aplicación de esta para escribir funciones a trozos.

Teorema 5.5.1. Sea

$$f(t) = \begin{cases} g_1(t) & \text{si} \quad t < a \\ g_2(t) & \text{si} \quad t \geq a \end{cases}$$

entonces usando la función heaviside tenemos que

$$f(t) = g_1(t) + [g_2(t) - g_1(t)]\mathcal{U}(t-a)$$

Ejemplo 5.5.1. Considere

$$f(t) = \begin{cases} t+3 & \text{si} \quad t < \pi \\ \sin(t)+3 & \text{si} \quad t \geq \pi \end{cases}$$

entonces tenemos que

$$f(t) = t + 3 + [\sin(t) + 3 - (t+3)]\mathcal{U}(t-\pi) = t + 3 + [\sin(t) - t]\mathcal{U}(t-\pi)$$

Para una función que esta definida en 3 trozos tenemos

Teorema 5.5.2. Sea

$$f(t) = \begin{cases} g_1(t) & \text{si} \quad t < a_1 \\ g_2(t) & \text{si} \quad a_1 \leq t < a_2 \\ g_3(t) & \text{si} \quad t \geq a_2 \end{cases}$$

entonces usando la función heaviside tenemos que

$$f(t) = g_1(t) + [g_2(t) - g_1(t)]\mathcal{U}(t-a_1) + [g_3(t) - g_2(t)]\mathcal{U}(t-a_2)$$

Ejemplo 5.5.2. Considere la función

$$f(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{si} \quad t < 5 \\ t^2+2 & \text{si} \quad 5 \leq t < 10 \\ 4 & \text{si} \quad t \geq 10 \end{cases}$$

entonces

$$f(t) = \cos(t) + [t^2 - 2 - \cos(t)]\mathcal{U}(t-5) + [4 - (t^2+2)]\mathcal{U}(t-10)$$

En general tenemos el teorema

Teorema 5.5.3. Sea

$$f(t) = \begin{cases} g_1(t) & \text{si} \quad t < a_1 \\ g_2(t) & \text{si} \quad a_1 \leq t < a_2 \\ & \vdots \\ g_{n-1}(t) & \text{si} \quad a_{n-2} \geq t \geq a_{n-1} \\ g_n(t) & \text{si} \quad t \leq a_{n-1} \end{cases}$$

entonces usando la función heaviside tenemos que

$$f(t) = g_1(t) + [g_2(t) - g_1(t)]\mathcal{U}(t - a_1) + \ldots + [g_{n-1} - g_{n-2}]\mathcal{U}(t - a_{n-2}) + [g_n - g_{n-1}]\mathcal{U}(t - a_{n-1})$$

Ejemplo 5.5.3. Considere la función

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad t < 1 \\ t + 2 & \text{si} \quad 1 \leq t < 5 \\ t^2 + 2 & \text{si} \quad 5 \leq t < 8 \\ t & \text{si} \quad t \geq 8 \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned} f(t) &= t + (t + 2 - t)\mathcal{U}(t - 1) + (t^2 + 2 - (t + 2))\mathcal{U}(t - 5) + (t - (t^2 + 2))\mathcal{U}(t - 8) \\ &= t + 2\mathcal{U}(t - 1) + (t^2 - t)\mathcal{U}(t - 5) + (-t^2 + t - 2)\mathcal{U}(t - 8) \end{aligned}$$

5.6. Segundo teorema de traslación

Ahora que ya hemos definido la función heaviside, veamos su transformada de Laplace

Teorema 5.6.1. Tenemos que

$$\mathscr{L}\Big\{\mathcal{U}(t - a)f(t - a)\Big\} = e^{-as}\mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\} = e^{-as}F(s)$$

esta es la forma usual del segundo teorema de traslación, el problema es que la forma anterior es buena para calcula inversas, pero para calcular transformadas el mejor escribir la forma anterior como

$$\mathscr{L}\Big\{\mathcal{U}(t - a)f(t)\Big\} = e^{-as}\mathscr{L}\Big\{f(t + a)\Big\}$$

se debe tener el cuidado cuidado de que $\mathscr{L}\Big\{f(t + a)\Big\} \neq F(s + a)$, en la primera se debe trasladar la función (en t) y luego calcular la transformada, en la segunda primera se calcula la transformada y luego se traslada (en s), y esto no es equivalente

Ejemplo 5.6.1. Calcule la transformada de $g(t) = \mathcal{U}(t - a)$

Según nuestro teorema, ocupamos que la función heaviside este multiplicada por otra función, en este caso vamos a escribir $g(t) = \mathcal{U}_a(t) = 1\mathcal{U}_a(t)$, por lo que $f(t) = 1$, ahora calculamos $f(t + a)$, que es reemplazar todos los t por $t + a$ ($t \to t + a$), pero vea que $f(t)$

no tiene ninguna t, por lo que $f(t+a)=1$, entonces

$$\mathscr{L}\Big\{\mathcal{U}(t-a)\Big\}=\mathscr{L}\Big\{\mathcal{U}(t-a)1\Big\}=e^{-as}\mathscr{L}\Big\{1\Big\}=e^{-as}\frac{1}{s}$$

Ejemplo 5.6.2. Calcule la transformada de $g(t)=[t-3]U(t-3)$

Tenemos que $f(t)=t-3$, y de la heaviside vea que $a=3$, entonces tenemos que $f(t+a)=f(t+3)=(t+3)-3=t$, por lo tanto

$$\mathscr{L}\Big\{[t-3]\mathcal{U}(t-3)\Big\}=e^{-3s}\mathscr{L}\Big\{t\Big\}=e^{-3s}\frac{1}{s^2}$$

Ejemplo 5.6.3. Calcule la transformada de $g(t)=\big(t^2+e^{2t}\big)\mathcal{U}(t-\pi)$

En este caso tenemos que $f(t)=t^2+e^{2t}$, y de la heaviside se observa que $a=\pi$, por lo tanto

$$f(t+\pi)=(t+\pi)^2+e^{2(t+\pi)}=t^2+2\pi t+\pi^2+e^{2t}e^{2\pi}$$

el motivo por el que escribimos $e^{2(t+\pi)}=e^{2t}e^{2\pi}$ es porque $e^{2\pi}$ es una constante, entonces

$$\mathscr{L}\Big\{\big(t^2+e^{2t}\big)\mathcal{U}(t-\pi)\Big\}=e^{-\pi s}\mathscr{L}\Big\{t^2+2\pi t+\pi^2+e^{2t}e^{2\pi}\Big\}$$
$$=e^{-\pi s}\Big(\mathscr{L}\Big\{t^2\Big\}+2\pi\mathscr{L}\Big\{t\Big\}+\pi^2\mathscr{L}\Big\{1\Big\}+e^{2\pi}\mathscr{L}\Big\{e^{2t}\Big\}\Big)$$
$$e^{-\pi s}\Big(\frac{2}{s^3}+\frac{2\pi}{s^2}+\frac{\pi^2}{s}+e^{2\pi}\frac{1}{s-2}\Big)$$

Ejemplo 5.6.4. Calcule la trasformada de Laplace de $g(t)$ definida como

$$g(t)=\begin{cases} t & \text{si} \quad t<1 \\ 0 & \text{si} \quad 1\leq t<2 \\ cos(2t-4) & \text{si} \quad t\geq 2 \end{cases}$$

tenemos una función a trozos, entonces expresemos esta usando la función Heaviside

$$g(t)=t+[0-t]\mathcal{U}(t-1)+[cos(2t-4)-0]\mathcal{U}(t-2)$$

entonces debemos calcular

$$\mathscr{L}\Big\{g(t)\Big\}=\mathscr{L}\Big\{t\Big\}+\mathscr{L}\Big\{-t\mathcal{U}(t-1)\Big\}+\mathscr{L}\Big\{\cos(2t-4)\mathcal{U}(t)*2\Big\}$$

tenemos dos heaviside, en el primer caso $f(t) = -t$ y $a = 1$, por lo que $f(t+a) = f(t+1) = -(t+1)$, para la segunda tenemos que $f(t) = cos(2t-4)$ y $a = 2$, por lo que $f(t+a) = f(t+2) = \cos(2(t+2)-4) = \cos(2t)$, entonces

$$\mathscr{L}\Big\{g(t)\Big\} = \mathscr{L}\Big\{t\Big\} - e^{-s}\mathscr{L}\Big\{t+1\Big\} + e^{-2s}\mathscr{L}\Big\{cos(2t)\Big\} =$$
$$\frac{1}{s^2} - e^{-s}\Big(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\Big) + e^{-2s}\frac{s}{s^2+4}$$

Ahora veamos la transformada inversa del segundo teorema de traslación, en este caso nos resulta mas útil usar

Teorema 5.6.2. Tenemos que

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{e^{-as}F(s)\Big\} = \mathcal{U}_a(t)\Big[\mathscr{L}^{-1}\Big\{F(s)\Big\}\Big]\Big|_{t-a} = U(t-a)f(t-a)$$

Ejemplo 5.6.5. Calcule

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{e^{-2s}\Big[\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+9}\Big]\Big\}$$

tenemos que $a = 2$, por lo tanto

$$= \mathcal{U}(t-2)\Big[\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s}\Big\} + \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^2}\Big\} + \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{s}{s^2+9}\Big\}\Big]\Big|_{t-2}$$
$$= U(t-2)\Big[1 + t + \cos(3t)\Big]\Big|_{t-2} = U(t-2)\Big[1 + (t-2) + cos\Big(3(t-2)\Big)\Big]$$

Ejemplo 5.6.6. Calcule la trasformada inversa de

$$F(s) = e^{-\pi s}\Big(\frac{1}{s-2} + \frac{3}{s^2-2s+10}\Big)$$

tenemos que $a = \pi$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{F(s)\Big\} = \mathcal{U}(t-\pi)\Big[\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s-2}\Big\} + \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{3}{s^2-2s+10}\Big\}\Big]\Big|_{t-\pi}$$

para la segunda inversa tenemos un polinomio de grado 2 irreducible, completando cuadrados con $(2/2)^2 = 1$ tenemos $s^2 - 2s + 1 - 1 + 10 = (s-1)^2 + 9$, entonces tenemos un seno desplazado, es decir

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{3}{(s-1)^2+9}\Big\} = e^t\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{3}{s^2+9}\Big\} = e^t\sin(3t)$$

entonces retomando

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{F(s)\Big\} = U(t-\pi)\Big[\Big(e^{2t} + e^{t}\sin(3t)\Big)\Big]\Big|_{t-\pi} = \mathcal{U}(t-\pi)\Big(e^{2(t-\pi)} + e^{t-\pi}\sin(3(t-\pi))\Big)$$

5.7. Convolución

La convolución es una operación matemática que toma dos funciones y regresa una tercera función, una interpretación de esta operación es como la forma (por forma entienda el gráfico) de $f(t)$ es modificado por la forma de $g(t)$, es de suma importancia en el análisis de señales.

Cabe resaltar que existe una versión discreta de la convolución, pero en el curso solo estudiaremos la versión continua.

Definicion 5.7.1. Sea $f(t), g(t)$ dos funciones, se define su convolución como

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$$

No confunda el símbolo $*$ con el del producto $(\cdot)$, en nuestro contexto $*$ representa la convolución. A la hora de usar la convolución no queremos resolver la integral (en muchos casos ni sera posible), sino que queremos usar la transformada de Laplace, iniciemos viendo un ejemplo de una convolución.

Ejemplo 5.7.1. Considere la integral

$$\int_0^t e^{3(t-u)\sin(3u)}du$$

si vemos la definición de la convolución, ocupamos una función $f(u)$ evaluada en u y una función $g(t-u)$ evaluada en $t-u$, en este caso vea que $f(u) = \sin(3u)$ y $g(t-u) = e^{3(t-u)}$, ahora como $f(u) = \sin(3u)$ entonces $f(t) = \sin(3t)$ (cambia u por t) y como $g(t-u) = e^{3(t-u)}$ entonces $g(t) = e^{3t}$ (cambia t-u por t), con lo que

$$e^{3t} * \sin(3t) = \int_0^t e^{3(t-u)}\sin(3u)du$$

Ahora veamos unos teoremas que nos serán de utilidad con respecto a la convolución

Teorema 5.7.1. La convolución es una operación conmutativa, es decir

$$f(t) * g(t) = g(t) * (t)$$

Con respecto a la transformada de Laplace de la convolución tenemos

Teorema 5.7.2. Tenemos que

$$\mathscr{L}\Big\{f(t)*g(t)\Big\} = \mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\}\mathscr{L}\Big\{g(t)\Big\} = F(s)G(s)$$

Calculemos una transformada de Laplace usando la convolución

Ejemplo 5.7.2. Calcule

$$\mathscr{L}\Big\{\int_0^t e^{3(t-u)\sin(3u)}du\Big\}$$

por el ejemplo 5.7.1 ya vimos que la integral anterior representa una convolución, entonces

$$\mathscr{L}\Big\{\int_0^t e^{3(t-u)}\sin(3u)du\Big\} = \mathscr{L}\Big\{e^{3t}*\sin(3t)\Big\} = \mathscr{L}\Big\{e^{3t}\Big\}\mathscr{L}\Big\{\sin(3t)\Big\}$$
$$= \Big(\frac{1}{s-3}\Big)\Big(\frac{3}{s^2+9}\Big)$$

Un resultado importante es que podemos expresar cualquier integral usando la convolución, para esto vea que

$$\int_0^t f(u)du = \int_0^t f(u)1du$$

entonces podemos tomar a $g(t-u)=1$, y por lo tanto $g(t)=1$, con lo que

$$\mathscr{L}\Big\{\int_0^t f(u)du\Big\} = \mathscr{L}\Big\{f(t)*1\Big\} = \mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\}\mathscr{L}\Big\{1\Big\} = \frac{F(s)}{s}$$

Una forma de identificar cuando es conveniente usar el resultado anterior es cuando tengamos una integral pero no existen dentro de la integral una dependencia de t, osea que solo haya variables u.

Ejemplo 5.7.3. Calcule la trasformada de $g(t) = \displaystyle\int_0^t e^{3u}\cos(u)du$.

Como no tenemos una función en $t-u$ usamos la idea descrita anteriormente

$$\mathscr{L}\Big\{\int_0^t e^{3u}\cos(u)du\Big\} = \frac{\mathscr{L}\Big\{e^{3t}\cos(t)\Big\}}{s} = \frac{1}{s}\Big[\mathscr{L}\Big\{cos(3t)\Big\}\Big]\Big|_{s-3}$$
$$= \frac{1}{s}\Big[\frac{s}{s^2+9}\Big]\Big|_{s-3} = \frac{s-3}{s[(s-3)^2+9]}$$

Ejemplo 5.7.4. Calcule

$$\mathscr{L}\Big\{\int_0^t f(u)(t-u)^2 du\Big\}$$

en donde

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad t < 4 \\ t^2 + t & \text{si} \quad t \geq 4 \end{cases}$$

Vea que tenemos una función evaluada en u, la cual es $f(u)$, y otra evaluada en $t-u$, en este caso seria $g(t-u) = (t-u)^2$, por lo tanto $g(t) = t^2$, entonces

$$\mathscr{L}\Big\{\int_0^t f(u)(t-u)^3 du\Big\} = \mathscr{L}\Big\{f(t) * t^2\Big\} = \mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\}\mathscr{L}\Big\{t^3\Big\}$$

por lo que ahora debemos calcular la transformada de $f(t)$, como es una función a trozos usamos la heaviside

$$f(t) = t + [t^2 + t - t]\mathcal{U}(t-4) = t + t^2 U(t-4) \tag{5.4}$$

por lo tanto

$$\mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\} = \mathscr{L}\Big\{t\Big\} + \mathscr{L}\Big\{t^2 U(t-4)\Big\}$$

para la segunda transformada usamos el segundo teorema de traslación, tenemos que $a = 4$ y la función evaluada en t es t^2, por lo que la función evaluada en $t + a = t + 4$ es $(t+4)^2 = t^2 + 8t + 16$, entonces

$$\mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\} = \mathscr{L}\Big\{t\Big\} + e^{-4s}\mathscr{L}\Big\{t^2 + 8t + 16\Big\} = \frac{1}{s} + e^{-4s}\Big[\frac{2}{s^3} + \frac{8}{s^2} + \frac{16}{s}\Big]$$

entonces remando

$$\mathscr{L}\Big\{\int_0^t f(u)(t-u)^3 du\Big\} = \mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\}\mathscr{L}\Big\{t^3\Big\} =$$

$$\Big[\frac{1}{s} + e^{-4s}\Big[\frac{2}{s^3} + \frac{8}{s^2} + \frac{16}{s}\Big]\Big]\Big[\frac{3!}{s^4}\Big]$$

Existe un teorema inverso de la convolución, pero no vale la pena abarcarlo pues al realizar se debe resolver la integral de la convolución, además de que los casos en donde se puede llegar a aplicar es mejor proceder por fracciones parciales, por lo que no estudiaremos el caso de la transformada inversa de la convolución.

5.8. Teorema de la n-ésima derivada

Ahora vamos a desarrollar otra transformada que nos permite combinar nuestras funciones elementales, en este caso polinomios de t con funciones.

Teorema 5.8.1. Sea $f(t)$ una función tal que $\mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\} = F(s)$, entonces tenemos que

$$\mathscr{L}\Big\{t^n f(t)\Big\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

en donde $n \in \mathbb{N}$

recuerde que $\dfrac{d^n}{ds^n}F(s) = F^{(n)}(s)$ es la $n-$ésima derivada de $F(s)$ con respecto a s

Ejemplo 5.8.1. Calcule

$$\mathscr{L}\Big\{t\sin(2t)\Big\}$$

aplicando el teorema anterior tenemos

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\Big\{t\sin(2t)\Big\} &= -\frac{d}{ds}\mathscr{L}\Big\{\sin(2t)\Big\} = -\frac{d}{ds}\frac{2}{s^2+4}\\ &= -2\frac{d}{ds}(s^2+4)^{-1} = -\Big(-1(s^2+4)^{-2}(2s)\Big) = \frac{2s}{(s^2+4)^2}\end{aligned}$$

Ejemplo 5.8.2. Calcule

$$\mathscr{L}\Big\{t^2\int_0^t udu\Big\}$$

Primero aplicamos el teorema de la n-ésima derivada para obtener

$$\mathscr{L}\Big\{t^2\int_0^t udu\Big\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}\Big\{\int_0^t udu\Big\}$$

para la integral, como no tenemos alguna función en $t-u$ aplicamos la convolución con 1, de donde $f(u) = u$ y por lo tanto $f(t) = t$

$$(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}\Big\{\int_0^t udu\Big\} = \frac{d^2}{ds^2}\mathscr{L}\Big\{t*1\Big\} = \frac{d^2}{ds^2}\frac{\mathscr{L}\Big\{t\Big\}}{s}$$

$$= \frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{s^2}\frac{1}{s} = \frac{d^2}{ds^2}s^{-3} = -3\frac{d}{ds}s^{-4} = 12s^{-5} = \frac{12}{s^{-5}}$$

Para obtener la forma inversa del teorema de la derivada tenemos

$$\mathscr{L}\Big\{t^n f(t)\Big\} = (-1)^n F^{(n)}(s) \Longrightarrow t^n f(t) = -(1)^n \mathscr{L}^{-1}\Big\{F^{(n)}(s)\Big\}$$
$$\Longrightarrow f(t) = \frac{(-1)^n}{t^n}\mathscr{L}^{-1}\Big\{F^{(n)}(s)\Big\}$$

por simplicidad se suele hacer énfasis en el caso cuando $n = 1$

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\Big\{F'(s)\Big\}$$

como $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\Big\{F(s)\Big\}$, tenemos que

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{F(s)\Big\} = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\Big\{F'(s)\Big\}$$

esto nos permite calcular inversas de funciones de las cuales originalmente no podemos calcular su inversa, pero si podemos calcular la inversa de su derivada.

Ejemplo 5.8.3. Calcule

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\ln\Big(\frac{s+1}{s-2}\Big)\Big\}$$

no sabemos como calcular transformadas de ln, pero si derivamos vemos que

$$\frac{d}{ds}\ln\Big(\frac{s+1}{s-2}\Big) = \frac{s-2}{s+1}\Big[\frac{s-2-(s+1)}{(s-2)^2}\Big] = \frac{-3}{(s+1)(s-2)}$$
$$= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-2}$$

de la cual si sabemos su transformada inversa, la ultima igualdad se obtiene de aplicar fracciones parciales, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\ln\Big(\frac{s+1}{s-2}\Big)\Big\} = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-2}\Big\}$$
$$-\frac{1}{t}\Big[e^{-t} - e^{2t}\Big]$$

Ejemplo 5.8.4. Calcule la transformada inversa de Laplace de

$$\arctan\Big(\frac{2}{s}\Big)$$

Primero recordemos que

$$\frac{d}{ds}\arctan(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

entonces aplicando regla de la cadena tenemos

$$\frac{d}{ds}\arctan\left(\frac{2}{s}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{2}{s}\right)^2}\left[\frac{-2}{s^2}\right] = \frac{s^2}{s^2+4}\left[\frac{-2}{s^2}\right] = \frac{-2}{s^2+4}$$

Entonces tenemos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\arctan\left(\frac{2}{s}\right)\right\} = \frac{-1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} = \frac{\sin(2t)}{t}$$

5.9. Teorema de la integral

El teorema de la integral se puede ver como aplicar el teorema de la $n-$ésima derivada usando $n=-1$, este establece que

Teorema 5.9.1. Tenemos que

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du$$

Veamos esto directamente con un ejemplo

Ejemplo 5.9.1. Calcule

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\}$$

aplicando el teorema tenemos

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \mathscr{L}\left\{\sin(t)\right\}(u)du = \int_s^\infty \frac{1}{s^2+1}du$$

recuerde que la integral que se nos plantea es un $\arctan(s)$

$$= \left[\arctan(s)\right]\Big|_s^\infty = \arctan(\infty) - \arctan(s)$$

y como $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$, acá estamos abusando de notación, realmente estamos diciendo $\lim_{b\to\infty}\arctan(b) = \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \arctan(\infty) - \arctan(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s)$$

5.10. Delta de Dirac

El delta de Dirac es una función $\delta(t-a)$ (el termino $t-a$ es donde tenemos evaluada el delta de Dirac) que cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$$

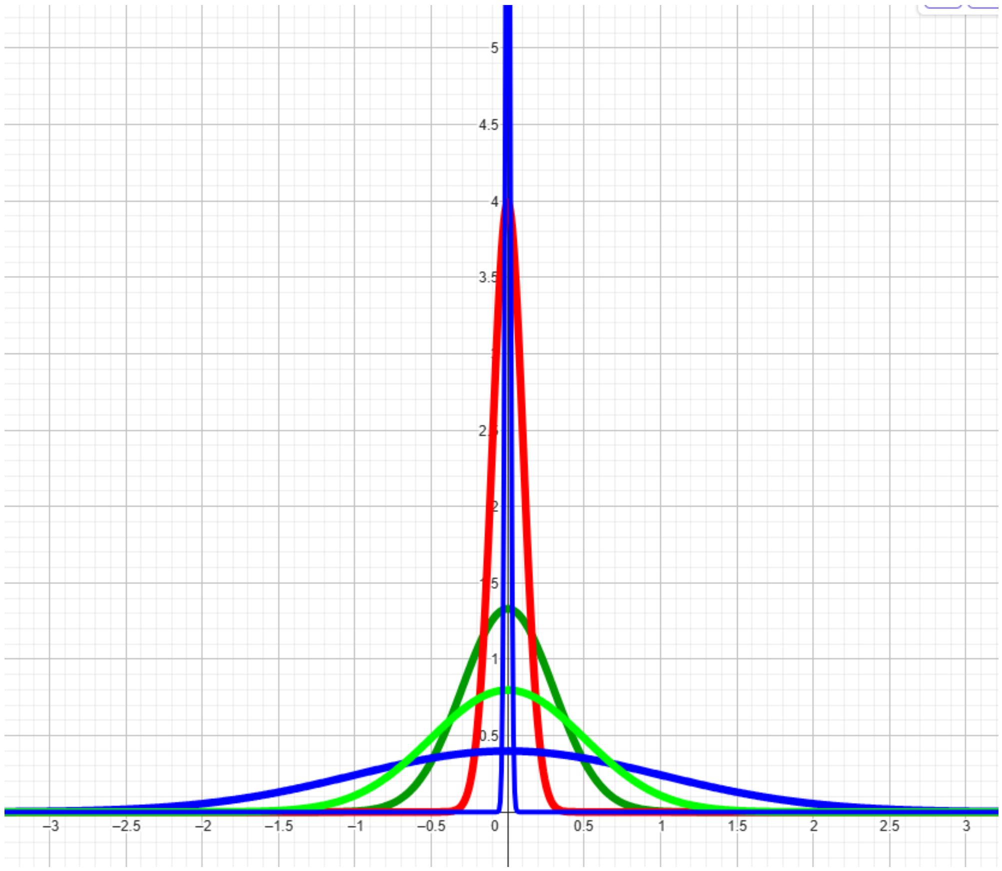
o equivalente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)dt = 1$$

el delta de Dirac no es una función en el sentido usual que conocemos, la manera en que la definimos es

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad t = a \\ 0 & \text{si} \quad t \neq a \end{cases}$$

Una forma informar de construir el delta de Dirac es tomar una distribución normal de media $\overline{x} = a$ y hacer que su varianza tienda a cero, y como son distribuciones de probabilidad sabemos que el area bajo la curva debe ser igual a 1.



En la imagen podemos ver una distribución normal con media $\overline{x} = 0$, y con forma hacemos la desviación estándar tender a cero vemos como la campana se va comprimiendo y la función colapsa en el punto $x = 0$ y en ese punto la función explota hacia el infinito.

Lo anterior es interesante, pero lo que realmente nos importa es calcular la transformada de Laplace del delta de Dirac.

Teorema 5.10.1. Sea $f(t)$ una función continua en $x = a$, entonces tenemos que

$$\mathscr{L}\Big\{\delta(t-a)f(t)\Big\} = e^{-as}f(a)$$

Ejemplo 5.10.1. Calculemos la transformada de

$$\mathscr{L}\Big\{\delta(t-a)\Big\} = \mathscr{L}\Big\{\delta(t-a)1\Big\}$$

por lo que tenemos que $f(t) = 1 \implies f(a) = 1$, entonces

$$\mathscr{L}\Big\{\delta t - a1\Big\} = 1e^{-as} = e^{-as}$$

En el ejemplo anterior tomando $a = 0$ tenemos

$$\mathscr{L}\left\{\delta(t)\right\} = 1$$

o equivalente

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{1\right\} = \delta(t)$$

Ejemplo 5.10.2. Calcule

$$\mathscr{L}\left\{t^2 \cos(t)\delta(t-2\pi)\right\}$$

tenemos que $a = 2\pi$ y $f(t) = t^2 \cos(t)$, entonces $f(2\pi) = (2\pi)^2 \cos(2\pi) = (2\pi)^2$, entonces

$$\mathscr{L}\left\{t^2 \cos(t)\delta(t-2\pi)\right\} = (2\pi)^2 e^{-2\pi s}$$

Ejemplo 5.10.3. Calcule

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{s\right\}$$

en las transformada que hemos desarrollado, no tenemos ninguna función tal que si transformada sea s, pero sabemos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{1\right\} = \delta(t)$$

y ademas como $\dfrac{d}{ds}(s) = 1$, podemos usar la transformada inversa del teorema de la $n-$enesi derivada para obtener que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{s\right\} = \frac{-1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{1\right\} = \frac{-\delta(t)}{t}$$

5.11. Transformada de funciones periódicas

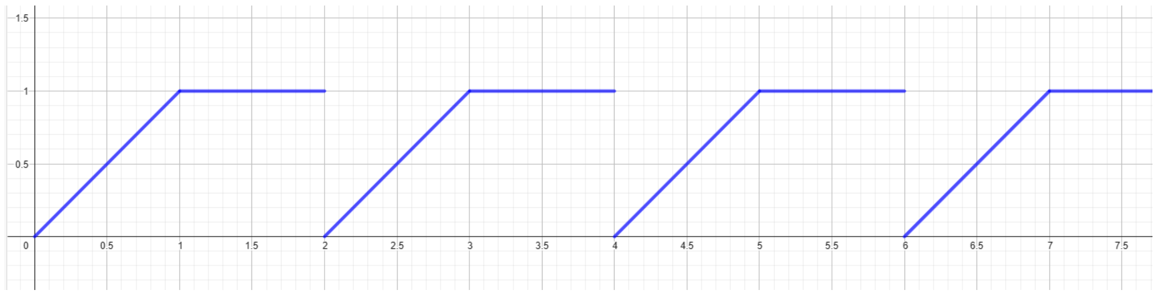
Primero veamos la definición de una función periódica

Definicion 5.11.1. Sea $f(t)$ una función, se dice que tiene periodo T si cumple que

$$f(t+T) = f(t)$$

Lo anterior quiere decir que la función se repite en intervalos de longitud T, funciones periódicas tenemos por ejemplo $\cos(t), \sin(t)$ que tienen periodo 2π

Ejemplo 5.11.1. Considere la gráfica de la función $f(t)$



vea que la función tiene periodo $T = 2$

La forma de calcular una transformada de Laplace de una función periódica es similar a calcular una transformada por definición, solo que podemos enfocarnos en la función en su primer periodo.

Teorema 5.11.1. Sea $f(t)$ una función con periodo T, entonces tenemos que

$$\mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(t)e^{-st}dt$$

Ejemplo 5.11.2. Considere $f(t)$ como en el ejemplo 5.11.1, la cual tiene periodo $T = 2$, entonces para calcular su transformada tenemos que expresar a $f(t)$ en $[0, 2]$, en el intervalo de $[0, 1]$ tenemos la recta que pasa por $(0, 0)$ y $(1, 1)$, esa es la recta $f(t) = t$, mientras que en el intervalo $[1, 2]$ la gráfica es constante, en este intervalo tenemos que $f(t) = 1$, entonces en el intervalo $[0, 2]$ se tiene

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Ahora, como $f(t)$ es una función periódica tenemos que su transformada de Laplace es

$$\mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\} = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 f(t)e^{-st}dt$$

como en ese intervalo tenemos que $f(t)$ esta dada a trozos, podemos separar la integral en dos

$$\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 f(t)e^{-st}dt = \frac{1}{1-e^{-2s}}\Big[\int_0^1 f(t)e^{-st}dt + \int_1^2 f(t)e^{-st}dt\Big]$$

$$\frac{1}{1-e^{-2s}}\Big[\int_0^1 te^{-st}dt + \int_1^2 1e^{-st}dt\Big]$$

usando que

$$\int te^{-st} = -\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}$$

tenemos que

$$\int_0^1 te^{-st}dt = \Big[-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\Big]\Big|_0^1 = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2}$$

por otro lado

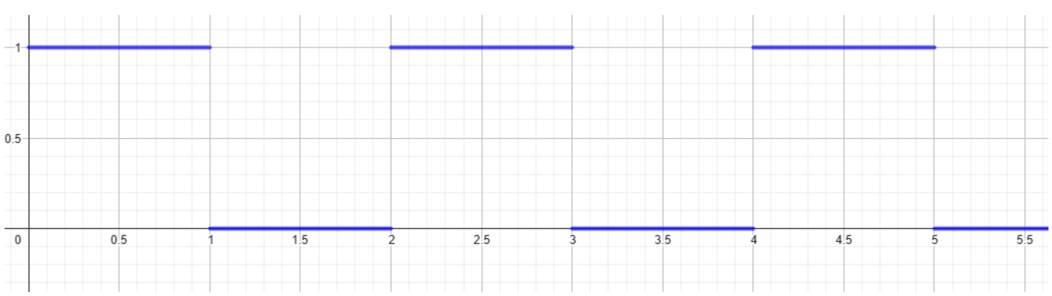
$$\int_1^2 e^{-st}dt = \Big[\frac{-e^{-st}}{s}\Big]\Big|_1^2 = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$

retomando tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-e^{-2s}}\Big[\int_0^1 te^{-st}dt + \int_1^2 1e^{-st}dt\Big] &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\Big[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}\Big]\\ &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\Big[\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s}\Big]\end{aligned}$$

donde esta ultima expresión es $\mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\}$

Ejemplo 5.11.3. Calcule la transformada de $f(t) = e^{2t}g(t)$, donde $g(t)$ esta dada por



Primero vea que

$$\mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\} = \mathscr{L}\Big\{e^{2t}g(t)\Big\} = \Big[\mathscr{L}\Big\{g(t)\Big\}\Big]\Big|_{s-2}$$

entonces debemos calcular la trasformada de $g(t)$, la cual es una función con periodo $T = 2$ y luego aplicar una traslación, vea que en el intervalo $[0, 2]$ tenemos que

$$g(t)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0\le t<1 \\ 0 & \text{si} \quad 1\le t\le 2 \end{cases}$$

entonces

$$\mathscr{L}\Big\{g(t)\Big\}=\frac{1}{1-e^{-2s}}\Big[\int_0^1 1e^{-st}dt+\int_1^2 0e^{-st}dt\Big]=\frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^1 e^{-st}dt$$
$$\frac{1}{1-e^{-2s}}\Big[-\frac{e^{-st}}{s}\Big]\Big|_0^1=\frac{1}{1-e^{-2s}}\Big[\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s}\Big]$$

por lo que

$$\mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\}=\Big[\mathscr{L}\Big\{g(t)\Big\}\Big]\Big|_{s-2}=\Big[\frac{1}{1-e^{-2s}}\Big[\frac{1}{s}-\frac{e^{-st}}{s}\Big]\Big]\Big|_{s-2}$$
$$=\frac{1}{1-e^{-2(s-2)}}\Big[\frac{1}{s-2}-\frac{e^{-(s-2)t}}{s-2}\Big]$$

Ejemplo 5.11.4. Considere la función $g(t)$ de periodo 1 tal que $g(t)=e^t$ en el intervalo $[0,1]$, calcule la transformada de

$$\int_0^t g(u)du$$

Sabemos que la transformada de una integral esta dada por

$$\mathscr{L}\Big\{\int_0^t g(u)du\Big\}=\frac{\mathscr{L}\Big\{g(t)\Big\}}{s}$$

por lo que debemos calcular la transformada de $g(t)$, como es una función periódica tenemos

$$\mathscr{L}\Big\{g(t)\Big\}=\frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 e^t e^{-st}dt=\frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 e^{-(s-1)t}dt=\frac{1}{1-e^{-s}}\Big[-\frac{e^{-(s-1)t}}{s-1}\Big]\Big|_0^1$$
$$\frac{1}{1-e^{-s}}\Big[\frac{1}{s-1}-\frac{e^{-(s-1)}}{s-1}\Big]$$

y por lo tanto

$$\mathscr{L}\Big\{\int_0^t g(u)du\Big\}=\frac{\mathscr{L}\Big\{g(t)\Big\}}{s}=\frac{1}{s(1-e^{-s})}\Big[\frac{1}{s-1}-\frac{e^{-(s-1)}}{s-1}\Big]$$

5.12. Trasformada de derivadas

Para poder iniciar a resolver EDO solo nos falta una transformada, pues en la EDO la función $y = f(t)$ es desconocida, en este caso su transformada se puede definir como

Teorema 5.12.1. Tenemos que

$$\mathscr{L}\Big\{f^{(n)}(t)\Big\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-1}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

La formula anterior nos pude información de $f(t)$ y sus primeras $n-1$ derivadas evaluadas en $t = 0$, además la formula depende de n, veamos como se ve para los primeros casos.

Ejemplo 5.12.1. Tenemos los casos particulares que

$$\mathscr{L}\Big\{f'(t)\Big\} = sF(s) - f(0)$$
$$\mathscr{L}\Big\{f''(t)\Big\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$
$$\mathscr{L}\Big\{f'''(t)\Big\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$
$$\mathscr{L}\Big\{f^{(4)}(t)\Big\} = s^4F(s) - s^3f(0) - s^2f'(0) - sf''(0) - f'''(0)$$

5.13. Resolución de ecuaciones diferenciales e integro-diferenciales usando transformada de Laplace

Para resolver EDO mediante la place, usamos la notación de que $\mathscr{L}\Big\{y\Big\} = Y$ (donde $Y := Y(s)$ es una función que depende de s), junto con los visto en el capitulo anterior lo que se busca es aplicar la transformada de Laplace a toda la EDO, de esta despejar Y, la cual seria la transformada de la solución de la EDO, por lo que la solución esta dada por

$$y = \mathscr{L}^{-1}\Big\{Y\Big\}$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\Big\{Y(s)\Big\}$$

Ejemplo 5.13.1. Resuelva

$$y(t) + e^{-t} = 5t^2 - \int_0^t y(t-u)e^{-2u}du$$

Vamos a calcular las transformada de manera individual, para

$$\int_0^t y(t-u)e^{-2u}du$$

vea que $f(u)=e^{-2u}$ por lo que $f(t)=e^{-2t}$, mientras que $g(t-u)=y(t-u)$, por lo que $g(t)=y(t)$, por lo tanto

$$\mathscr{L}\Big\{\int_0^t y(t-u)e^{-2u}du\Big\}=\mathscr{L}\Big\{y(t)*e^{-2t}\Big\}=\mathscr{L}\Big\{y(t)\Big\}\mathscr{L}\Big\{e^{-2t}\Big\}$$
$$=\frac{Y}{s+2}$$

Esta es la única transformada que presenta dificultad, pues

$$\mathscr{L}\Big\{t^2\Big\}=\frac{2}{s^3}$$

y por otro lado

$$\mathscr{L}\Big\{e^{-t}\Big\}=\frac{1}{s+1}$$

entonces tenemos al aplicar la transformadas en

$$y(t)+e^{-t}=5t^2-\int_0^t y(t-u)e^{-2u}du$$
$$Y+\frac{1}{s+1}=5\frac{2}{s^3}-\frac{Y}{s+2}\Longrightarrow$$
$$Y+\frac{Y}{s+2}=\frac{10}{s^3}-\frac{1}{s+1}\Longrightarrow Y\Big[1+\frac{1}{s+2}\Big]=\frac{10(s+1)-s^3}{s^3(s+1)}\Longrightarrow$$
$$Y\Big[\frac{s+3}{s+2}\Big]=\frac{10(s+1)-s^3}{s^3(s+1)}$$

entonces despejando tenemos

$$Y=\Big(\frac{s+2}{s+3}\Big)\Big(\frac{10(s+1)-s^3}{s^3(s+1)}\Big)$$
$$=\frac{-s^4-2s^3+10s^2+30s+20}{s^3(s+3)(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{D}{s+3}+\frac{E}{s+1}$$
$$\frac{-10}{27s}+\frac{10}{9s^2}+\frac{20}{3s^3}-\frac{7}{54(s+3)}-\frac{1}{2(s+1)}$$

en donde la ultima igualdad de da al completar el proceso de fracciones parciales, se omiten los detalles de esto, entonces

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\Big\{Y\Big\} =$$

$$\frac{-10}{27}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s}\Big\} + \frac{10}{9}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^2}\Big\} + \frac{20}{3\cdot 2}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{2}{s^3}\Big\} - \frac{7}{54}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s+3}\Big\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s+1}\Big\}$$

$$\frac{-10}{27} + \frac{10}{9}t + \frac{10}{3}t^2 - \frac{7}{54}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t}$$

Ejemplo 5.13.2. Resuelva la siguiente ED

$$y'' + 2y' - 3y = f(t)$$

en donde $y(0) = y'(0) = -1$ y

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t < 3 \\ -1 & \text{si} \quad t \geq 3 \end{cases}$$

para iniciar tenemos que

$$f(t) = 1 - (-1-1)\mathcal{U}_3(t) = 1 - 2\mathcal{U}_3(t)$$

aplicando la transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\} = \mathscr{L}\Big\{1\Big\} - 2\mathscr{L}\Big\{U_3 t\Big\} = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s}$$

en donde la transformada de $U_3(t)$ se calcula usando lo hecho en el ejercicio 5.6.1 ahora calculando la transformada de las derivadas

$$\mathscr{L}\Big\{y'\Big\} = sY - y(0) = sY - (-1) = sY + 1$$

$$\mathscr{L}\Big\{y''\Big\} = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - s(-1) - (-1) = s^2Y + s + 1$$

sustituyendo tenemos

$$y'' + 2y' + -3y = f(t)$$

$$s^2Y + s + 1 + 2(sY + 1) - 3Y = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-3s}}{s}$$

ahora despejando Y tenemos

$$s^2Y + s + 1 + 2sY + 2 - 3Y = \frac{1 - 2e^{-3s}}{s}$$

$$Y\Big(s^2+2s+-3\Big)=\frac{1-2e^{-3s}}{s}-s-3$$

$$Y(s-1)(s+3)=\frac{1-2e^{-3s}}{s}-(s+3)$$

$$Y=\frac{1}{s(s-1)(s+3)}-2\frac{e^{-3s}}{s(s-1)(s+3)}-\frac{s+3}{s(s-1)(s+3)}$$

$$Y=\frac{1}{s(s-1)(s+3)}-2\frac{e^{-3s}}{s(s-1)(s+3)}-\frac{1}{s(s-1)}$$

ahora debemos calcular la inversa de Y

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{Y\Big\}=\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s(s-1)(s+3)}\Big\}-2\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{e^{-3s}}{s(s-1)(s+3)}\Big\}-\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s(s-1)}\Big\}$$

tenemos 3 inversas, vamos con la primera, para

$$\frac{1}{s(s-1)(s+3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s+3}$$

$$1=A(s-1)(s+3)+Bs(s+3)+Cs(s-1)$$

$$1=As^2+2As-3A+Bs^2+3Bs+Cs^2-Cs$$

$$1=s^2(A+B+C)+s(2A+3B-C)-3A$$

de donde obtenemos el sistema $A+B+C=0$, $2A+3B-C=0$ y $-3A=1$, con lo que obtenemos $A=-1/3$, $B=1/4$ y $C=1/12$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s(s-1)(s+3)}\Big\}=-\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s}\Big\}+\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s-1}\Big\}+\frac{1}{12}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s+3}\Big\}$$

$$=\frac{-1}{3}+\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{12}e^{-3t}$$

ahora, para la segunda inversa aplicamos el segunda teorema de translación con $a=3$

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{e^{-3s}}{s(s-1)(s+3)}\Big\}=\mathcal{U}(t-3)\Big[\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s(s-1)(s+3)}\Big\}\Big]\Big|_{t-3}$$

pero la inversa que tenemos que calcular es la misma que ya calculamos en el paso anterior, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{e^{-3s}}{s(s-1)(s+3)}\Big\}=\mathcal{U}(t-3)\Big[\frac{-1}{3}+\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{12}e^{-3t}\Big]\Big|_{t-3}$$

$$= \mathcal{U}(t-3)\Big[\frac{-1}{3} + \frac{1}{4}e^{t-3} + \frac{1}{12}e^{-3(t-3)}\Big]$$

finalmente, para la ultima inversa se debe aplicar fracciones parciales, se deja como ejercicio corroborar que

$$\frac{1}{s(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

con lo que

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s(s-1)}\Big\} = \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s-1}\Big\} - \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s}\Big\} = e^t - 1$$

finalmente, tenemos que

$$y(t) = \Big[\frac{-1}{3} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{12}e^{-3t}\Big] - 2\Big[U(t-3)\Big[\frac{-1}{3} + \frac{1}{4}e^{t-3} + \frac{1}{12}e^{-3(t-3)}\Big]\Big] - \Big[e^t - 1\Big]$$

Ejemplo 5.13.3. Resuelva

$$y'(t) = 1 - e^t - \int_0^t y(u)du$$

sujeto a $y(0) = 0$

primera, para

$$\mathscr{L}\Big\{y'\Big\} = sY - y(0) = sY + 0 = sY$$

para la integral, como no tenemos una función evaluada en $t-u$ entonces

$$\mathscr{L}\Big\{\int_0^t y(u)du\Big\} = \mathscr{L}\Big\{y(t) * 1\Big\} = \frac{Y}{s}$$

mientras que para

$$\mathscr{L}\Big\{1 - e^t\Big\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}$$

entonces sustituyendo obtenemos que

$$sY = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} - \frac{Y}{s}$$

$$sY + \frac{Y}{s} = \frac{s-1-s}{s(s-1)} \Longrightarrow Y\Big(s + \frac{1}{s}\Big) = \frac{-1}{s(s-1)}$$

$$Y\Big(\frac{s^2+1}{s}\Big)=\frac{-1}{s(s-1)}\Longrightarrow Y=\frac{-1}{(s-1)(s^2+1)}$$

por lo que aplicando fracciones parciales tenemos (vea que s^2+1 es irreducible)

$$\frac{-1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$$
$$-1=A(s^2+1)+(Bs+C)(s-1)=As^2+A+Bs^2-Bs+Cs-C$$
$$-1=s^2(A+B)+s(-B+C)+[A-C]$$

de donde obtenemos el sistema $A+B=0$, $-B+C=0$ y $A-C=-1$ de donde $A=-1/2$ y $B=C=1/2$, entonces tenemos

$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{Y\Big\}=\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{-1}{2}\frac{1}{s-1}\Big\}+\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2+1}\Big\}$$
$$=-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s-1}\Big\}+\frac{1}{2}\Big[\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{s}{s^2+1}\Big\}+\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{s^2+1}\Big\}\Big]=$$
$$-\frac{1}{2}e^t+\frac{1}{2}\Big[\cos(t)+\sin(t)\Big]$$

Ejemplo 5.13.4. Resuelva la siguiente ecuación integro-diferencial

$$ty(t)=t^2e^t+\int_0^t y(u)e^{t-u}du$$

sujeto a que $Y(2)=-1$

Calculando las transformadas de las funciones involucradas

$$\mathscr{L}\Big\{ty(t)\Big\}=-\frac{d}{ds}\mathscr{L}\Big\{y(t)\Big\}=-\frac{d}{ds}[Y]=-Y'$$
$$\mathscr{L}\Big\{e^tt^2\Big\}=\Big[\mathscr{L}\Big\{t^2\Big\}\Big]\Big|_{s-1}=\Big[\frac{2}{s^3}\Big]\Big|_{s-1}=\frac{2}{(s-1)^3}$$

esta ultima transformada se pudo calcular también primero con el teorema de la derivada $n-$ésima pero es mucho mas complicado pues debemos derivar dos veces. Ahora, para la integral vea que

$$\int_0^t y(u)e^{t-u}du=y(t)*e^t$$

por lo que

$$\mathscr{L}\Big\{\int_0^t y(u)e^{t-u}\Big\}=\mathscr{L}\Big\{y\Big\}\mathscr{L}\Big\{e^t\Big\}=\frac{Y}{s-1}$$

con esto, sustituyamos obtenemos

$$-Y' = \frac{2}{(s-1)^3} + \frac{Y}{s-1}$$

no podemos despejar de manera directa a Y, ya que lo que tenemos es una ecuación diferencial linea de orden 1, reescribiendo tenemos

$$Y' + \frac{Y}{s-1} = -\frac{2}{(s-1)^3}$$

que tiene la forma $Y' + p(s)Y = q(s)$ en donde

$$p(s) = \frac{1}{s-1} \qquad q(s) = -\frac{2}{(s-1)^3}$$

calculando

$$e^{\int pds} = e^{\int \frac{ds}{s-1}} = e^{\ln(s-1)} = s-1$$

por otro lado

$$\int qe^{\int pds}ds = \int \frac{-2}{(s-1)^3}(s-1)ds = -2\int (s-1)^{-2}ds$$
$$\frac{2}{(s-1)} + C$$

por lo tanto

$$Y = e^{-\int pds}\Big[\int qe^{pds}ds\Big] = \frac{1}{(s-1)}\Big[\frac{2}{(s-1)} + C\Big] = \frac{C}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2}$$

Ahora, usando que $Y(2) = -1$, tenemos

$$-1 = \frac{C}{2-1} + \frac{2}{(2-1)^2} \Longrightarrow -1 = C + 2 \Longrightarrow C = -3$$

por lo que

$$Y = \frac{-3}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2}$$

calculando la inversa

$$y = \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{-3}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2}\Big\} = e^t\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{-3}{s} + \frac{2}{s^2}\Big\} = e^t[-3+2t]$$

Ejemplo 5.13.5. Resuelva

$$y'' - y' = \delta(t - 2\pi)$$

sujeto a que $y(0) = 0, y'(0) = 1$

calculando la transformadas de las funciones involucradas tenemos

$$\mathscr{L}\Big\{y''\Big\} = s^2 Y - 1$$
$$\mathscr{L}\Big\{y'\Big\} = sY$$
$$\mathscr{L}\Big\{\delta(t - 2\pi)\Big\} = e^{-2\pi s}$$

sustituyendo tenemos

$$s^2 Y - 1 + sY = e^{-2\pi s} \Longrightarrow Y(s^2 - 1) = e^{-2\pi s}$$
$$\Longrightarrow Y = \frac{e^{-2\pi s}}{(s+1)(s-1)}$$

Entonces

$$y = \mathscr{L}^{-1}\Big\{Y\Big\} = \mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{e^{-2\pi s}}{(s+1)(s-1)}\Big\}$$

usando el segundo teorema de traslación tenemos

$$\mathcal{U}(t - 2\pi)\Big[\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s+1)(s-1)}\Big\}\Big]\Big|_{t-2\pi}$$

entonces para

$$\frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} \Longrightarrow 1 = A(s+1) + B(s-1)$$

si se toma $s = 1$ se concluye que $A = 1/2$, si se toma $s = -1$ se tiene que $B = -1/2$, entonces

$$y = \mathcal{U}(t - 2\pi)\Big[\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s+1)(s-1)}\Big\}\Big]\Big|_{t-2\pi} = \frac{1}{2}\mathcal{U}(t - 2\pi)\Big[\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s-1)} - \frac{1}{s-1}\Big\}\Big]\Big|_{t-2\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{U}(t - 2\pi)\Big[e^t - e^{-t}\Big]\Big|_{t-2\pi} = \frac{1}{2}\mathcal{U}(t - 2\pi)\Big[e^{t-2\pi} - e^{-(t-2\pi)}\Big]$$

5.14. Sistemas de ecuaciones diferenciales con la transformada de Laplace

La gran ventaja de aplicar la transformada de Laplace (por lo menos a las EDO que estudiamos), es que como resultado obtenemos una EDO lineal con respecto a Y (un despeje ordinario se puede considerar una EDO lineal de orden 0). Ahora, si tenemos un sistema de EDO de dos variables dependientes $x(t), y(t)$, al aplicar la transformada de Laplace obtendremos un sistema lineal con respecto a $\mathscr{L}\Big\{x(t)\Big\} = X(s), \mathscr{L}\Big\{y(t)\Big\} = Y(s)$.

Como es un sistema lineal podemos usar las herramientas conocidas de 1004 para despejar X, Y, ya sea Gauss-Jordan, regla de Cramer o incluso despejes una variable para sustituir en la otra ecuación.

Ejemplo 5.14.1. Considere el sistema de EDO

$$\begin{cases} 2x'' - x' - 2y' + y = -e^t \\ 2x'' - y' = \delta(t-2) \end{cases}$$

sujeto a que $x(0) = 0, x'(0) = 1, y(0) = 2$

Cabe mencionar que si no fuera por el Delta de Dirac en la segunda ecuación, seria posible resolver el ejercicio con el método de anuladores y reducción gausiana visto en capítulos anteriores.

Vea que tenemos las siguientes transformadas

$$\mathscr{L}\Big\{x''\Big\} = s^2X - sx(0) - x'(0) = s^2X - 1$$

$$\mathscr{L}\Big\{x'\Big\} = sX - y(0) = sX$$

$$\mathscr{L}\Big\{y'\Big\} = sY - y(0) = sY - 2$$

$$\mathscr{L}\Big\{-e^t\Big\} = \frac{-1}{s-1}$$

$$\mathscr{L}\Big\{\delta(t-2)\Big\} = e^{-2s}$$

Sustituyendo tenemos

$$\begin{cases} 2(s^2X - 1) - (sX) - 2(sY - 2) + Y = \dfrac{-1}{s-1} \\ 2(s^2X - 1) - (sY - 2) = e^{-2s} \end{cases}$$

agrupando X, Y, en la primera ecuación obtenemos

$$\begin{cases} X(2s^2 - s) + Y(-2s+1) = \dfrac{-1}{s-1} - 2 \\ X(2s^2) + Y(-s) = e^{-2s} \end{cases}$$

El despeje mas sencillo es despejar Y de la segunda ecuación para tener

$$Y = \frac{2s^2X - e^{-2s}}{s} = 2Xs - \frac{e^{-2s}}{s}$$

sustituyendo el la primera

$$X(2s^2 - s) + Y(-2s+1) = \frac{-1}{s-1} - 2 \Longrightarrow X(2s^2 - s) + \left[2sX - \frac{e^{-2s}}{s}\right](-2s+1) = \frac{-1}{s-1} - 2$$

$$\Longrightarrow 2s^2X - sX - 4s^2X + 2sX - \frac{e^{-2s}}{s}(-2s+1) = \frac{-1}{s-1} - 2$$

$$\Longrightarrow -2s^2X + sX = \frac{-1}{s-1} - 2 + \frac{e^{-2s}}{s}(1-2s)$$

$$\Longrightarrow sX(1-2s) = \frac{1-2s}{s-1} + \frac{e^{-2s}}{s}(1-2s)$$

$$X = \frac{1}{s(s-1)} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

Aplicando fracciones parciales al primer sumando

$$\frac{1}{s(s-1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s} \Longrightarrow `1 = As + B(s-1)$$

tomando $s = 0$ tenemos que $B = -1$, y tomando $s = 1$ tenemos $A = 1$, entonces

$$X = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

las primeras transformadas son directas de funciones elementales, para la segunda, como tenemos un exponencial usamos el segundo teorema de traslación, donde

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} = \mathcal{U}(t-2)\left[\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}\right]\Big|_{t-2} = \mathcal{U}(t-2)\Big[t\Big]\Big|_{t-2} = \mathcal{U}(t-2)(t-2)$$

entonces

$$x = \mathscr{L}^{-1}\Big\{X\Big\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} = e^t - 1 + \mathcal{U}(t-2)(t-2)$$

nos falta encontrar y, como tenemos que

$$Y = 2Xs + \frac{e^{-2s}}{s} \qquad X = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

sustituyendo

$$Y = 2\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2}\right]s - \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$Y = \frac{2s}{s-1} - 2 + \frac{e^{-2s}}{s}$$

$$Y = \frac{2s - 2s + 2}{s-1} + \frac{e^{-2s}}{s} = \frac{2}{s-1} + \frac{e^{-2s}}{s}$$

y por lo tanto

$$y = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{e^{-2s}}{s}\right\} = 2e^t + \mathcal{U}(t-2)$$

Ejemplo 5.14.2. Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{cases} x'' - 2y' + y = \cos(2t) \\ x' - y' = e^t \end{cases}$$

sujeto a $x(0) = 0, x'(0) = 1, y(0) = 0$

Este sistema lo podemos resolver con anuladores y reducción gausiana, pero veamos como resolverlo usando Laplace, calculando las transformadas de las funciones involucradas

$$\mathscr{L}\left\{x''\right\} = s^2X - sx(0) - x'(0) = s^2X - 1$$

$$\mathscr{L}\left\{x'\right\} = sX - y(0) = sX$$

$$\mathscr{L}\left\{y'\right\} = sY - y(0) = sY$$

$$\mathscr{L}\left\{\cos(2t)\right\} = \frac{s}{s^2+4}$$

$$\mathscr{L}\left\{e^t\right\} = \frac{1}{s-1}$$

sustituyendo tenemos

$$\begin{cases} (s^2X - 1) - 2(sY) + Y = \dfrac{s}{s^2+4} \\ sX - sY = \dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2X + Y(1-2s) = \dfrac{s}{s^2+4} + 1 \\ sX - sY = \dfrac{1}{s-1} \end{cases}$$

de la segunda ecuación despejado X tenemos

$$X = \frac{1}{s(s-1)} + Y$$

sustituyendo en la primera ecuación

$$\begin{aligned} s^2X + Y(1-2s) &= \frac{s}{s^2+4} + 1 \\ s^2\left[\frac{1}{s(s-1)} + Y\right] + Y(1-2s) &= \frac{s}{s^2+4} + 1 \\ \frac{s}{s-1} + Ys^2 - 2s + 1 &= \frac{s}{s^2+4} + 1 \\ Y\left[(s-1)^2\right] &= \frac{s}{s^2+4} + 1 - \frac{s}{s-1} \\ Y(s-1)^2 &= \frac{-s-4}{(s^2+4)(s-1)} \\ Y &= \frac{-s-4}{(s^2+4)(s-1)^3} \end{aligned}$$

aplicando fracciones parciales tenemos

$$\frac{-s-4}{(s^2+4)(s-1)^3} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4}$$

Omitiremos los cálculos de la fracción parcial, y se obtiene

$$Y = \frac{3}{25(s-1)} + \frac{1}{5(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{25}\left(\frac{-3s-8}{s^2+4}\right)$$

Las primera es un exponencial, mientras que para la segunda y tercera son t^n trasladados, vea que

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{5(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3}\right\} &= e^t\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{5s^2} - \frac{1}{s^3}\right\} \\ e^t\left[\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{5s^2}\right\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}\right] &= e^t\left[\frac{t}{5} - \frac{1}{2}t^2\right] \end{aligned}$$

mientras que para la ultima trasformada tenemos que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{25}\left(\frac{-3s-8}{s^2+4}\right)\right\} = \frac{-1}{25}\left[3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} + 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2}\right\}\right]$$

$$= \frac{-1}{25}\Big(3\cos(2t) + 4\sin(2t)\Big)$$

y por lo tanto

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\Big\{Y\Big\} = \frac{3}{25}e^t + e^t\Big[\frac{t}{5} - \frac{1}{2}t^2\Big] + \frac{-1}{25}\Big(3\cos(2t) + 4\sin(2t)\Big)$$

Ahora debemos despejar X, de donde tenemos

$$X = \frac{1}{s(s-1)} + Y \qquad Y = \frac{-s-4}{(s^2+4)(s-1)^3}$$

sustituyendo tenemos

$$X = \frac{1}{s(s-1)} + \frac{-s-4}{(s^2+4)(s-1)^3} =$$

$$\frac{(s^2+4)(s-1)^2}{s(s-1)^3(s^2+4)} + \frac{s(-s-4)}{s(s-1)^3(s^2+4)}$$

$$= \frac{(s^2+4)(s^2-2s+1) - s^2 - 4s}{s(s-1)^3(s^2+4)} = \frac{s^4 - 2s^3 + 4s^2 - 12s + 4}{s(s-1)^3(s^2+4)}$$

$$= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{(s-1)^3} + \frac{Es+F}{s^2+4}$$

de igual manera omitimos el calculo de la fracción parcial, se obtiene

$$X = -\frac{1}{s} + \frac{28}{25(s-1)} + \frac{1}{5(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{-3s-8}{25(s^2+4)}$$

entonces

$$x = \mathscr{L}^{-1}\Big\{ -\frac{1}{s} + \frac{28}{25(s-1)} + \frac{1}{5(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{-3s-8}{25(s^2+4)}\Big\}$$

$$= -1 + \frac{28}{25}e^t + e^t\Big[\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{5s^2}\Big\} - \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{2}{s^3}\Big\}\Big] - \frac{3}{25}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{s}{s^2+4}\Big\} - \frac{4}{25}\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{2}{s^2+4}\Big\}$$

$$1 + \frac{28}{25}e^t + e^t\Big[\frac{t}{5} - \frac{1}{2}t^2\Big] - \frac{3}{25}\cos(2t) - \frac{4}{25}\sin(2t)$$

5.15. Tabla transformada de Laplace

$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\Big\{F(s)\Big\}$	$F(s) = \mathscr{L}\Big\{f(t)\Big\}$	Observación
1	$\frac{1}{s}$	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}$
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	$\alpha > -1$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	
$cos(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	
$\sin(kt)$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	
$f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	
$t^n f(t)$	$(-1)\frac{d^n}{ds^n}F(s)$	$n \in \mathbb{N}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(u)du$	$\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ debe existir
$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(s)G(s)$	
$f(t) * 1 = \int_0^t f(u)du$	$\frac{F(s)}{s}$	
$f(t)$ con periodo T	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}$	
$\delta(t-a)f(t)$	$f(a)e^{-as}$	$a > 0, f(t)$ continua en a

Referencias

[1] Calvo. M, Jimmy MA 1005 Apuntes del curso con múltiples ejemplos resueltos (2021). Escuela de Matemáticas, Universidad de Costa Rica

[2] Dennis G. Zill, Michael Cullen Matemáticas avanzadas para ingeniería vol 1 ecuaciones diferenciales (2018). Editorial McGraw Hill, tercera edición.