Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Departamento de Matemática Aplicada
MA-1023 Cálculo con Optimización

SOLUCIONARIO SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

I ciclo 2024

Falso o verdadero (8 puntos)

Instrucciones. A continuación se le presentan cuatro proposiciones, para cada una indique, en su cuaderno de examen, si es verdadera (V) o falsa (F), debe justificar su respuesta. El puntaje de cada proposición es de dos puntos, uno por el acierto y otro por la justificación.

1. Considere la función $f(x,y,z) = \dfrac{\arctan(x)}{y+2z}$. El valor de $f_{zx}(0,1,1)$ corresponde a $\dfrac{-1}{9}$.

2. Considere la superficie $\mathcal{C} : z = x^2 + y^3$ y el punto $P = (1,1,2)$ sobre ella. El vector normal del plano tangente a $\mathcal{C}$ en P es $\vec{n} = (2,3,1)$.

3. Sea f una función de tres variables tal que P es un punto crítico. Si los menores de la matriz Hessiana de f para el punto P son $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 1$ y $\Delta_3 = -188$. P se clasifica como un punto mínimo.

4. Al conocer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, entonces el valor de convergencia de la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{3^{2n+1}(2n+1)}$ es $-\ln\left(\sqrt{2}\right)$

Solución.

1. **Falsa**. Se calcula primero f_z y luego f_{zx}, observe:
$$f_z = \frac{-2\arctan(x)}{(y+2z)^2} \Rightarrow f_{zx} = \frac{-2}{(y+2z)^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$
Ahora, $f_{zx}(0,1,1) = \dfrac{-2}{9}$

2. **Falsa**. Se define $F(x,y,z) = x^2 + y^3 - z$. El vector normal del plano tangente a $\mathcal{C}$ en P es el vector gradiente de F en P, es importante verificar que P se encuentra en $\mathcal{C}$. Observe:
$$\nabla F(P) = (F_x(P), F_y(P), F_z(P)) = (2\cdot 1, 3\cdot 1, -1) = (2,3,-1)$$

3. **Falsa.** Según el criterio de la Hessiana y la configuración de signos de los tres menores anteriores, se concluye que la matriz Hessiana no es ni positiva ni negativa, además $\Delta_3 \neq 0$, entonces P es un punto de silla.

4. **Verdadera.** Se toma $x = \dfrac{-1}{3}$, entonces

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{3^{2n+1}(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\sqrt{2}\right)$$

$\blacksquare$

Desarrollo (45 puntos)

Instrucciones. A continuación se le presentan cuatro ejercicios, en cada uno de ellos responda lo que se le solicita. No asuma que un proceso es muy obvio o que es innecesario anotarlo.

1. Considere la siguiente serie de potencias $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 6^n (x-1)^n}{n^2}$

   (a) **[8 puntos]** Calcule el dominio de convergencia de $S(x)$.

   (b) **[2 puntos]** ¿Cuál es el radio de convergencia de $S'(x)$? **Justifique su respuesta**.

   (c) **[2 puntos]** ¿Cuál es un intervalo donde $S'(x)$ es convergente? **Justifique su respuesta**.

Solución. Note que el centro es $a = 1$ y el término general sería $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 6^n}{n^2}$ donde $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot 6^{n+1}}{(n+1)^2}$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1} \cdot 6^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{(-1)^n \cdot 6^n}{n^2}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{6n^2}{(n+1)^2} = 6$$

El radio sería $R = \dfrac{1}{6}$ y un intervalo donde S es convergente es $\left]\dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{6}\right[$. Ahora, se estudia cada extremo:

- **Para** $x = \dfrac{5}{6}$**.** Se evalúa en $S(x)$, generando $S\left(\dfrac{5}{6}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^n \cdot \frac{(-1)^n}{6^n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Entonces $S\left(\dfrac{5}{6}\right)$ es una p-serie, con $p = 2 > 1$, convergente.

- **Para** $x = \dfrac{5}{7}$**.** Se evalúa en $S(x)$, generando $S\left(\dfrac{5}{7}\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 6^n \cdot \dfrac{1}{6^n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Se cumple que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ y $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ es decreciente, ya que $f'(x) = \dfrac{-2}{x^3} < 0$ para $x \geq 1$. Entonces por el criterio de series alternadas $S\left(\dfrac{5}{7}\right)$ es convergente.

El dominio de convergencia de $S(x)$ es $\left[\dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{6}\right]$.

El radio de convergencia de $S'(x)$ es $R = \dfrac{1}{6}$, ya que es una herencia de $S(x)$, también se puede calcular $S'(x)$ y hacer los cálculos para encontrar el radio.

Por herencia de S un intervalo donde $S'(x)$ es convergente es $\left]\dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{6}\right[- \{1\}$ o cualquier subconjunto de éste intervalo. ■

2. Sea $f(x, y, z) = g\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, donde g es una función real de variable real tal que $g'(3) = \dfrac{1}{2}$.

   (a) **[4 puntos]** Calcule el vector gradiente de f en $P = (1, -1, -1)$.

   (b) **[3 puntos]** Calcule la derivada direccional de f en $P = (1, -1, -1)$ en la dirección $\vec{v} = (-1, -1, 2)$.

   (c) **[2 puntos]** ¿Cuál es la dirección donde la derivada direccional es mínima?

   (d) **[2 puntos]** ¿Cuál es el valor mínimo de la derivada direccional?

Solución. Se calcula el vector gradiente $\nabla f(x, y, z)$. Observe:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= g'\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot 2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1, -1) = g'(3) \cdot 2 = 1 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= g'\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot 2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1, -1) = g'(3) \cdot (-2) = -1 \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= g'\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot 2z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1, -1) = g'(3) \cdot (-2) = -1
\end{aligned}$$

Así,

$$\nabla f(1, -1, -1) = (1, -1, -1)$$

Por otro lado, como $\vec{v} = (-1, -1, 2)$ entonces $||\vec{v}|| = \sqrt{6}$. La derivada direccional viene dada por

$$D_{\vec{v}} f(P) = \frac{\nabla f(P) \bullet \vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{(1, -1, -1) \bullet (-1, -1, 2)}{\sqrt{6}} = \frac{-2}{\sqrt{6}}$$

Por tanto, la dirección donde la derivada direccional es mínima es en la del vector

$$\vec{w} = -\nabla f(1, -1, -1) = (-1, 1, 1)$$

y el valor mínimo es $-||\nabla f(1, -1, -1)|| = -\sqrt{3}$. ∎

3. **[10 puntos]** Considere la función implícita $z = f(x, y)$ definida por la ecuación

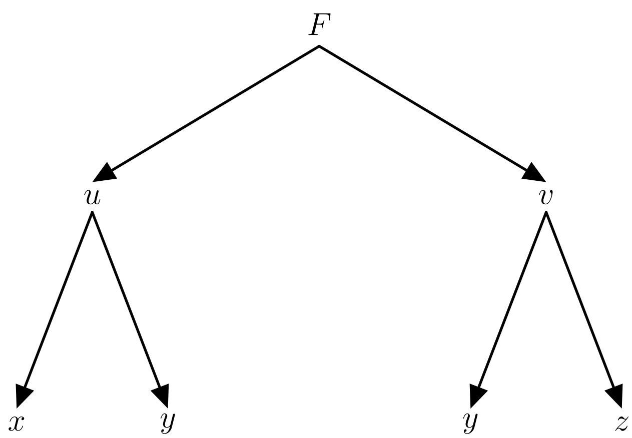
$$F\left(\ln\left(x^2+y^2\right), \ln\left(y^2+z^2\right)\right) = 0.$$

Muestre que se cumple la igualdad

$$\frac{y \cdot z_x}{x} - z_y = \frac{y}{z}$$

Solución. Se definen $u(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$ y $v(y,z) = \ln\left(y^2+z^2\right)$. Basta con calcular $z_x = -\dfrac{F_x}{F_z}$ y $z_y = -\dfrac{F_y}{F_z}$.

Observe que el diagrama de árbol de F es de la forma:



Así,

$$\begin{aligned}
F_x &= F_u \cdot u_x = F_u \cdot \frac{2x}{x^2+y^2} \\
F_y &= F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y = F_u \cdot \frac{2y}{x^2+y^2} + F_v \cdot \frac{2y}{y^2+z^2} \\
F_z &= F_v \cdot v_z = F_v \cdot \frac{2z}{y^2+z^2}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
z_x &= -\frac{\dfrac{2xF_u}{x^2+y^2}}{\dfrac{2zF_v}{y^2+z^2}} = \frac{-2xF_u \cdot \left(y^2+z^2\right)}{2zF_v \cdot \left(x^2+y^2\right)} = \frac{-xF_u \cdot \left(y^2+z^2\right)}{zF_v \cdot \left(x^2+y^2\right)} \\
z_y &= -\frac{\dfrac{2yF_u}{x^2+y^2} + \dfrac{2yF_v}{y^2+z^2}}{\dfrac{2zF_v}{y^2+z^2}} = -\frac{yF_u \cdot \left(y^2+z^2\right)}{zF_v \cdot \left(x^2+y^2\right)} - \frac{y}{z}
\end{aligned}$$

Se calcula $\dfrac{y}{x} \cdot z_x - z_y$:

$$\begin{aligned}
\frac{y}{x} \cdot z_x - z_y &= \frac{y}{x} \cdot \left(\frac{-xF_u \cdot (y^2 + z^2)}{zF_v \cdot (x^2 + y^2)} \right) - \left(-\frac{yF_u \cdot (y^2 + z^2)}{zF_v \cdot (x^2 + y^2)} - \frac{y}{z} \right) \\
&= \frac{-yF_u \cdot (y^2 + z^2)}{zF_v \cdot (x^2 + y^2)} + \frac{yF_u \cdot (y^2 + z^2)}{zF_v \cdot (x^2 + y^2)} + \frac{y}{z} \\
&= \frac{y}{z}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

4. Considere la función $f(x, y) = 3x^2 - x + y^2 + 1$.

   (a) **[10 puntos]** Utilice el método de multiplicadores de Lagrange para calcular todos los puntos críticos de f sujetos a la condición $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, debe calcular los respectivos multiplicadores.

   (b) **[4 puntos]** Utilie el criterio de la Hessiano Orlado para clasificar el punto $(1, 0)$.

Solución. Se define la función de Lagrange como

$$\mathcal{L}(\lambda, x, y) = 3x^2 - x + y^2 + 1 + \lambda\left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right)$$

con la restricción $g(x, y) = x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 1$. Se calculan las derivadas parciales de $\mathcal{L}$, observe:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_x &= 6x - 1 + 2x\lambda \\
\mathcal{L}_y &= 2y + \frac{\lambda y}{2} \\
\mathcal{L}_\lambda &= x^2 + \frac{y^2}{4} - 1
\end{aligned}$$

Basta con resolver el sistema $\mathcal{L}_x = 0$, $\mathcal{L}_y = 0$ y $\mathcal{L}_\lambda = 0$; es decir,

$$6x + 2x\lambda = 1 \tag{1}$$
$$4y + \lambda y = 0 \tag{2}$$
$$4x^2 + y^2 = 4 \tag{3}$$

De (2) se tiene que $y(4 + \lambda) = 0$, entonces se generan dos casos cuando $y = 0$ ó $\lambda = -4$.

Caso 1. Si $y = 0$, entonces de (3) se tiene $4x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 1$. Se generan los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$, ahora de la ecuación (1) se encuentran los respectivos multiplicadores, entonces

- Para $(1, 0)$, entonces $6 + 2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-5}{2}$.
- Para $(-1, 0)$, entonces $-6 - 2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-7}{2}$

Caso 2. Si $\lambda = -4$, entonces de la ecuación (1) se tiene $6x + 2x(-4) = 1 \Rightarrow x = \dfrac{-1}{2}$. De la ecuación (3) se tiene $4 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$. Los puntos son $\left(\dfrac{-1}{2}, \sqrt{3}\right)$ y $\left(\dfrac{-1}{2}, -\sqrt{3}\right)$.

En resúmen se tienen cuatro puntdo críticos condicionados.

$$\begin{gathered}
\left(\frac{-5}{2}, 1, 0\right) \\
\left(\frac{-7}{2}, -1, 0\right) \\
\left(-4, \frac{-1}{2}, \sqrt{3}\right) \\
\left(-4, \frac{-1}{2}, -\sqrt{3}\right)
\end{gathered}$$

Se alcula la matriz Hessiana Orlada de $\mathcal{L}$, entonces

$$H_O = \begin{pmatrix} 0 & 2x & \frac{y}{2} \\ 2x & 6+2\lambda & 0 \\ \frac{y}{2} & 0 & 2+\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$$

Como el punto $(1,0)$ tiene multiplicador $\lambda = \dfrac{-5}{2}$, entonces

$$H_O\left(\frac{-5}{2},1,0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Al haber 2 variables y 1 restricción se debe calcular el último menor, observe:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -3$$

Al ser negativo, entonces se concluye que $(1,0)$ es un mínimo sujeto a la restricción $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$. ■

La Matemática es el lenguaje en el que los dioses hablan con la gente.
Platón.