Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Departamento de Matemática Aplicada
MA-1023 Cálculo con Optimización

SOLUCIONARIO DEL PRIMER EXAMEN PARCIAL

I ciclo 2024

Desarrollo (48 puntos)

Instrucciones. A continuación se le presentan seis ejercicios, en cada uno de ellos responda lo que se le solicita. No asuma que un proceso es muy obvio o que es innecesario anotarlo.

1. **[9 puntos]** Considere la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{(x^2-1)^{300}} & \text{si} \quad x<1 \text{ y } x \neq -1 \\ \dfrac{2^x}{(2^x-1)(\ln(2^x-1))^2} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$.

   Determine si la integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)dx$ es divergente o convergente. En el caso de que sea convergente calcule el valor de convergencia.

   Solución. Como el intervalo de integración es $[2,+\infty[$ se toma $f(x) = \dfrac{2^x}{(2^x-1)(\ln(2^x-1))^2}$, entonces

$$\int_0^{+\infty} \frac{2^x}{(2^x-1)(\ln(2^x-1))^2}dx = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{2^x}{(2^x-1)(\ln(2^x-1))^2}dx$$

   Se resuelve la indefinida tomando $u = \ln(2^x-1)$ donde $du = \dfrac{2^x ln(2)}{2^x-1}dx$, es decir, $\dfrac{du}{\ln(2)} = \dfrac{2^x}{2^x-1}dx$, entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{2^x}{(2^x-1)(\ln(2^x-1))^2}dx &= \int \frac{1}{u^2}\frac{du}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}\int \frac{1}{u^2}du \\ &= \frac{-1}{\ln(2)u} = \frac{-1}{\ln(2)\ln(2^x-1)} + C\end{aligned}$$

   Así,

$$\begin{aligned}\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{2^x}{(2^x-1)(\ln(2^x-1))^2}dx &= \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{-1}{\ln(2)\ln(2^x-1)}\right]_2^a \\ &= \lim_{a\to+\infty}\left(\frac{-1}{\ln(2)\ln(2^a-1)} + \frac{1}{\ln(2)\ln(2^2-1)}\right) \\ &= 0 + \frac{1}{\ln(2)\ln(3)} = \frac{1}{\ln(2)\ln(3)}\end{aligned}$$

■

2. Resuelva lo siguiente:

   (a) **[7 puntos]** Utilice el método de inducción matemática para probar

   $$1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}=3-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \qquad \text{con } n\geq 1$$

   (b) **[4 puntos]** Utilice la parte anterior para calcular el límite de la sucesión

   $$a_n=\frac{1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}}{7\cdot 2^{n+1}+3^{n+1}} \qquad \text{con } n\geq 1$$

   (c) **[2 puntos]** Si a_n es estrictamente decreciente para todo $n\geq 1$, ¿cuál es una cota superior? y ¿cuál es una cota inferior?

Solución. Se aplica inducción sobre n, observe:

- **Para** $n=1$.

  $$3-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{1+1}=3-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=3-3\cdot\frac{4}{9}=\frac{5}{3}=3+\left(\frac{2}{3}\right)^{1}$$

  Se concluye que la proposición es válida para $n=1$.

- **Paso inductivo.** Suponga que

  $$1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}=3-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

  Hay que emostrar para $n+1$.

  $$\begin{aligned}1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}+\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} &\overset{H.I.}{=} 3-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\\ &=3-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\\ &=3-3\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=3-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

La propiedades es válida para todo $n\leq 1$. Por otro lado,

$$a_n=\frac{1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}}{7\cdot 2^{n+1}+3^{n+1}}=\frac{3-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{3^{n+1}\left(7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}=\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}$$

Aplicando el límite,

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}=0\cdot\frac{3-3\cdot 0}{7\cdot 0+1}=0$$

Por último, una cota superior se alcanza para $n=1$, es decir, $a_1=\dfrac{5}{111}$. Una cota inferior se obtiene en el resultado del límite, 0. ■

3. Considere la función $f(t) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{2t^2}{3}\right)$, donde la fórmula de Taylor con resto de Lagrange corresponde a:

$$f(t) = \frac{2t^2}{3} - \frac{4t^6}{81} + \frac{4\cos(\theta)t^{10}}{3645}, \text{ con } \theta \in V\left(0, \frac{2t^2}{3}\right)$$

(a) **[4 puntos]** Utilice los datos del enunciado para aproximar el valor de $\displaystyle\int_0^{\frac{8}{10}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2t^2}{3}\right)}{t}dt$.

(b) **[4 puntos]** Calcule una cota para el error cometido en la aproximación anterior.

(c) **[1 punto]** ¿Cuántos decimales se pueden garantizar en la aproximación de la parte (a)?

Solución. Note que $\dfrac{f(t)}{t} = \dfrac{2t}{3} - \dfrac{4t^5}{81} + \dfrac{4\cos(\theta)t^9}{3645}$. Aplicando la integral se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{8}{10}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2t^2}{3}\right)}{t}dt &= \int_0^{0.8} \frac{2t}{3} - \frac{4t^5}{81} + \frac{4\cos(\theta)t^9}{3645}dt \\
&= \left[\frac{t^2}{3} - \frac{2t^6}{243} + \frac{2\cos(\theta)t^{10}}{18225}\right]_0^{0.8} \\
&= \frac{(0.8)^2}{3} - \frac{2\cdot(0.8)^6}{243} + \frac{2\cos(\theta)\cdot(0.8)^{10}}{18225} \\
\int_0^{\frac{8}{10}} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2t^2}{3}\right)}{t}dt &\approx \frac{(0.8)^2}{3} - \frac{2\cdot(0.8)^6}{243} = \frac{801808}{3796875} = 0.211175769547325\ldots
\end{aligned}$$

Por otro lado, para estudiar la cota para el error se toma $R = \dfrac{2\cos(\theta)\cdot(0.8)^{10}}{18225}$ con $\theta \in V\left(0, \dfrac{32}{75}\right)$, entonces

$$\varepsilon = \left|\frac{2\cos(\theta)\cdot(0.8)^{10}}{18225}\right| = \frac{2\cdot(0.8)^{10}}{18225}\cdot|\cos(\theta)| \leq \frac{2\cdot(0.8)^{10}}{18225} = \frac{2097152}{177978515625} = 0.0000117831750233196\ldots$$

La cota del error cometido garantiza como mínimo cuatro decimales en la aproximación. ■

4. **[6 puntos]** Utilice los desarrollos limitados para calcular el $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x\cos(2x)}{\sqrt[3]{1+4x} - 1 - \frac{4x}{3} + \frac{16x^2}{9}}$

Solución. Tome $\cos(w) = 1 - \dfrac{w^2}{2!} + o(w^2)$, $w \to 0$. Ahora, $w = 2x$, entonces

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(2x) \\ &= 1 - 2x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

Luego,

$$(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + \frac{5u^3}{81} + o(u^3)$$

tomando $u = 4x$

$$(1+4x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{4x}{3} - \frac{16x^2}{9} + \frac{320x^3}{81} + o(x^3)$$

Resolviendo el límite se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x - x\cos(2x)}{\sqrt[3]{1+4x} - 1 - \frac{4x}{3} + \frac{16x^2}{9}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - x\left(1 - 2x^2 + o(x^2)\right)}{1 + \frac{4x}{3} - \frac{16x^2}{9} + \frac{320x^3}{81} + o(x^3) - 1 - \frac{4x}{3} + \frac{16x^2}{9}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x - x + 2x^3 + o(x^3)}{\frac{320x^3}{81} + o(x^3)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + o(x^3)}{\frac{320x^3}{81} + o(x^3)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(2 + o(1)\right)}{x^3\left(\frac{320}{81} + o(1)\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{2 + o(1)}{\frac{320}{81} + o(1)} = \frac{81}{160} \end{aligned}$$

■

5. **[6 puntos]** Muestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot e^n}{n+2024}$ es divergente, utilizando los criterios vistos en clase. **Debe justificar todos los procedimientos.**

   Solución. Se utiliza el método de comparación directa (CD) y luego el de comparación al límite (CL).

   - **CD.** Note que $1 \leq n \Rightarrow 1 \leq \sqrt{n}$ y la exponencial al ser creciente se tiene que $e \leq e^n$, específicamente, $1 < e \leq e^n$. Entonces,

   $$\frac{1}{n+2024} < \frac{\sqrt{n} \cdot e^n}{n+2024} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2024} < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot e^n}{n+2024}$$

     Donde $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2024}$ es divergente por ser p-serie con $p = 1$ o haciendo un cambio de índice $\displaystyle\sum_{n=2025}^{+\infty} \frac{1}{n}$ se deduce que es divergente. Por el citerio de comparación directa la original es divergente.

   - **CL.** Tome $a_n = \dfrac{\sqrt{n} \cdot e^n}{n+2024}$ y $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, entonces

   $$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}\cdot e^n}{n+2024}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot e^n}{n+2025} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n \cdot e^n}{n+2024} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2024} \cdot e^n \\ &= 1 \cdot +\infty = +\infty \end{aligned}$$

     Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es una p-serie divergente, con $p = \dfrac{1}{2}$, y por el criterio del límite se comprueba que la serie original es divergente.

■

6. **[5 puntos]** Explique qué tipo de serie es $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+12}-\sqrt{n+13}}{\sqrt{(n+13)(n+12)}}$ y halle el valor de convergencia.

Solución. Note que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{n+12}-\sqrt{n+13}}{\sqrt{(n+13)(n+12)}} &= \frac{\sqrt{n+12}-\sqrt{n+13}}{\sqrt{n+13}\cdot\sqrt{n+12}} \\
&= \frac{\sqrt{n+12}}{\sqrt{n+13}\cdot\sqrt{n+12}} - \frac{\sqrt{n+13}}{\sqrt{n+13}\cdot\sqrt{n+12}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+13}} - \frac{1}{\sqrt{n+12}} \\
&= -\left(\frac{1}{\sqrt{n+12}} - \frac{1}{\sqrt{n+13}}\right)
\end{aligned}$$

La serie se transforma en:

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+12}-\sqrt{n+13}}{\sqrt{(n+13)(n+12)}} = -\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+12}} - \frac{1}{\sqrt{n+13}}\right)$$

Observe que la serie es telescópica, pues al tomar $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+12}}$, entonces

$$b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1+12}} = \frac{1}{\sqrt{n+13}}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
-\sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+12}} - \frac{1}{\sqrt{n+13}}\right) &= -\left(b_4 - \lim_{n\to+\infty} b_n\right) \\
&= -\left(\frac{1}{\sqrt{4+12}} - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+13}}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{-1}{4}
\end{aligned}$$

■