Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Departamento de Matemática Aplicada
MA-1023 Cálculo con Optimización

TERCER EXAMEN PARCIAL

I ciclo 2024

Puntaje total: 50 puntos **Tiempo dispuesto: 3 horas** **Fecha: 03 de julio**

Instrucciones generales

Esta es una prueba de carácter individual y debe ser contestada únicamente en su cuaderno de examen. Si alguna parte de una respuesta no está bien justificada, puede ver afectado su puntaje. Si la respuesta por desorden o escritura no es entendible, dicha respuesta no será calificada. Trabaje con bolígrafo de tinta azul o negra indeleble. El uso de corrector o lápiz restringe su derecho a reclamos posteriores. Puede usar calculadora científica no programable. Su teléfono celular deberá estar apagado. La nota máxima que se puede obtener es de 100, incluyendo los puntos de la pregunta opcional.

Falso o verdadero (8 puntos)

Instrucciones. A continuación se le presentan cuatro proposiciones, para cada una indique, en su cuaderno de examen, si es verdadera (V) o falsa (F), debe justificar su respuesta. El puntaje de cada proposición es de dos puntos, uno por el acierto y otro por la justificación.

1. Al usar coordenas polares la expresión $\sqrt{x^2+y^2}$ se convierte en r^2.
2. El resultado de $\displaystyle\int_1^3\int_4^7 \sqrt{x}+y\,dydx = 31-6\sqrt{3}$.
3. Una expresión que permite calcular el volumen del sólido que se encuentra entre las superficies $z = 9-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}$ y $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$, cuando $(x,y)\in R : x^2+y^2\leq 16$, es la siguiente $\displaystyle\iint_R \sqrt{36-x^2-y^2}-9+\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}dA$
4. Según el teorema de Fubini se cumple $\displaystyle\int_{-1}^2\int_0^1\int_0^2 f(x,y,z)dxdzdy = \int_0^2\int_{-1}^2\int_0^1 f(x,y,z)dzdydx$

Solución.

1. **Falsa**. En coordenas polares tenemos que $\sqrt{x^2+y^2}=r$.
2. **Falsa**. $\displaystyle\int_1^3\int_4^7 \sqrt{x}+y\,dydx = 31+6\sqrt{3}$.
3. **Falsa**. Como las superficies están centradas en el origen, basta con evaluar las en $(x,y)=(0,0)$ para saber cual es la superfcie de más altura en z (No contemplamos casos donde las alturas de las regiones cambien, dependiendo de la parte de la región que se evalúe). Por lo que la integral doble para encontrar el volumen entre dos superficies sería $\displaystyle\iint_R 9-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}-\sqrt{36-x^2-y^2}dA$.
4. **Verdadera**. $0\leq x\leq 2$, $-1\leq y\leq 2$, $0\leq z\leq 1$.

Desarrollo (42 puntos)

Instrucciones. A continuación se le presentan cuatro ejercicios, en cada uno de ellos responda lo que se le solicita. No asuma que un proceso es muy obvio o que es innecesario anotarlo.

1. Considere el siguiente problema: Maximizar xy; sujeta a $3x+5y \leq 750$; $x \leq 150$; $x, y \geq 0$

   (a) **[4 puntos]** Plantee las condicciones de Karush-Kuhn-Tucker.

   (b) **[6 puntos]** Resuelva el problema dado.

   Sugerencia. No tiene sentido intentar $x=0$ o $y=0$, esto porque podríamos tener $U=xy=0$ y eso NO maximiza la función.

   Solución.

   Considere la función Lagrangeana. $L = xy + \lambda(750-3x-5y) + \beta(150-x)$.
   Entonces la condiciones de KKT querían

$$\begin{aligned}
L_x =& y-3\lambda-\beta & \leq 0, \quad & x \geq 0, \quad & xL_x = 0 \\
L_y =& x-5\lambda & \leq 0, \quad & y \geq 0, \quad & yL_y = 0 \\
L_\lambda =& 750-3x-5y & \geq 0, \quad & \lambda \geq 0, \quad & \lambda L_\lambda = 0 \\
L_\beta =& 150-x & \geq 0, \quad & \beta \geq 0, \quad & \beta L_\beta = 0
\end{aligned}$$

   Como $x \neq 0$ y $y \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned}
L_x =& y-3\lambda-\beta = 0 \\
L_y =& x-5\lambda = 0
\end{aligned}$$

   de donde $\dfrac{y-\beta}{3} = \dfrac{x}{5}$

   - si $\lambda=0$ y $\beta=0 \Longrightarrow$ y = 0 y $x=0$, lo que no es posible.
   - si $\lambda=0$ y $\beta \neq 0 \Longrightarrow L_\beta = 0 = 150-x \Longrightarrow x = 150$, pero por otro lado $x=5\lambda=0$, lo que no contradictorio.
   - si $\lambda \neq 0$ y $\beta = 0 \Longrightarrow 3x = 5y$, además $L_\lambda = 0 = 750-3x-5y \Longrightarrow 750-6x = 0 \Longrightarrow x = 125 \Longrightarrow y = 75$ y $\lambda = \frac{x}{5} = 25$. finalmente $L_\beta = 150-125 \geq 0$. Obtenemos el punto

$$\boxed{(x,y) = (125,75) \text{ con } \lambda = 25 \text{ y } \beta = 0}$$

   - si $\lambda \neq 0$ y $\beta \neq 0 \Longrightarrow L_\beta = 0 \Longrightarrow x = 150$, además $L_\lambda = 0 \Longrightarrow 750-3x-5y = 0 \Longrightarrow y = 60 \Longrightarrow \lambda = \frac{x}{5} = 30.$. Pero note que $\beta = y-3\lambda = 60-3\cdot 30 = -30$, lo que nos da una contradicción.

2. Considere las siguientes integrales dobles

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)dxdy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{-\sqrt{y-1}} f(x,y)dxdy + \int_1^2 \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)dxdy$$

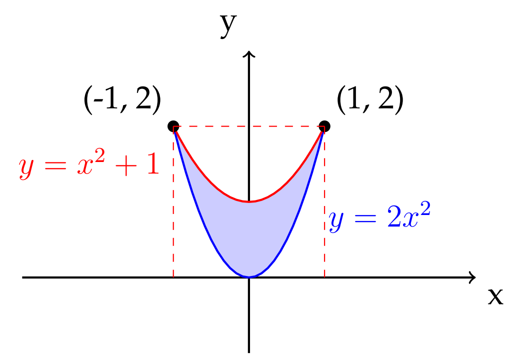
   De acuerdo con los datos de las integrales anteriores, desarrolle lo que se le solicita en cada caso.

   (a) **[5 puntos]** Dibuje y sombree la región de integración.

   (b) **[3 puntos]** Plantee la(s) integral(es) doble(s) que se obtiene(n) al cambiar el orden de integración.

(c) **[4 puntos]** Calcule la integral I tomando $f(x,y) = \frac{1}{\left(1+x-\frac{x^3}{3}\right)^2}$ y usando el orden de integración $dydx$.

Solución.
(a)



(b) $I = \displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2} f(x,y)dydx$

(c) $I = \displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2} \frac{1}{\left(1+x-\frac{x^3}{3}\right)^2}dydx = \int_{-1}^{1}\frac{1-x^2}{\left(1+x-\frac{x^3}{3}\right)^2}dx$, aplicamos el cambio de variable $u = 1+x-\frac{x^3}{3} \implies du = (1-x^2)dx$, entonces $I \doteq \displaystyle\int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} \doteq \frac{-1}{1+x-\frac{x^3}{3}}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{12}{5}$.

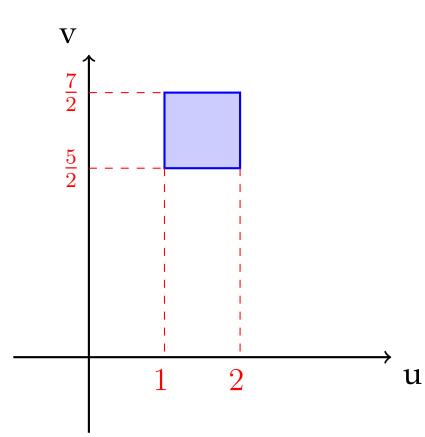
3. Sea R la región del primer cuadrante limitada por las dos hipérbolas $\sqrt{xy} = 1$, $\sqrt{xy} = 2$ y las rectas $y - x = \frac{5}{2}$, $y - x = \frac{7}{2}$.

   (a) **[3 puntos]** Mediante el cambio de variable $u = \sqrt{xy}$ y $v = y - x$, dibuje la región de integración en las nuevas variables.

   (b) **[4 puntos]** Verifique que el Jacobiano corresponde a $\dfrac{2\sqrt{xy}}{y+x}$.

   (c) **[4 puntos]** Utilice las dos partes anteriores para calcular $\displaystyle\iint_R \frac{y^2-x^2}{2\sqrt{xy}}dxdy$

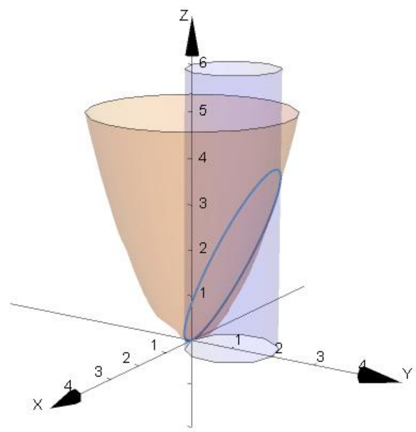
Solución.
(a)



(b) $J(x,y) = \left|\begin{smallmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{smallmatrix}\right| = \left|\begin{smallmatrix} \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} & \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right| = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y+x}{\sqrt{xy}}\right) \Longrightarrow J(u,v) = \dfrac{1}{J(x,y)} = \dfrac{2\sqrt{xy}}{y+x}$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{(y-x)(y+x)}{2\sqrt{xy}} \frac{2\sqrt{xy}}{y+x} dvdu = \int_1^2 \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} vdvdu = 3$

4. **[9 puntos]** Utilice coordenadas cilíndricas para hallar el valor de la integral triple $\displaystyle\iiint_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dV$ donde T es el sólido que se encuentra bajo el paraboloide $z = x^2+y^2$, sobre el plano xy y dentro del cilindro $x^2+y^2 = 2y$.



Sugerencia. $\text{sen}^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$

Solución.
La región queda descrita de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \theta \leq \pi \\
0 \leq & r \leq 2\,\text{sen}(\theta) \\
0 \leq & z \leq r^2
\end{aligned}
$$

y la integral

$$
\begin{aligned}
I = & \int_0^{\pi} \int_0^{2\,\text{sen}(\theta)} \int_0^{r^2} dzdrd\theta = \int_0^{\pi} \int_0^{\text{sen}(\theta)} r^2 drd\theta = \int_0^{\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\,\text{sen}(\theta)} d\theta = \\
= & \frac{8}{3} \int_0^{\pi} \text{sen}^3(\theta) d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi} (1-\cos^2(\theta))\,\text{sen}(\theta) d\theta = \frac{32}{9}
\end{aligned}
$$

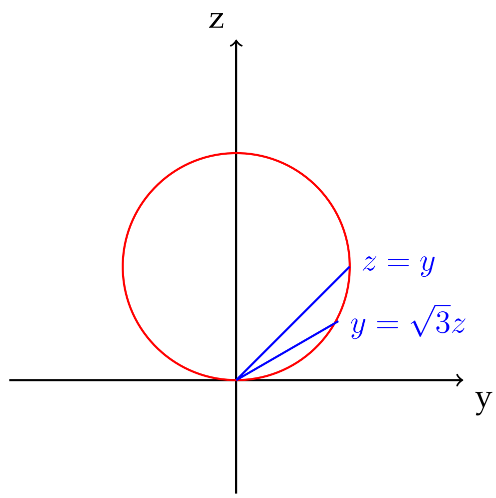
En la última integral se usa la sustitución $u = \cos(\theta)$

$\boxed{\textbf{Opcional}}$ Considere el sólido T que se encuentra dentro de la esféricas $x^2+y^2+(z-a)^2 = a^2, a \in \mathbb{R}^+$, que está fuera del cono $z^2 = x^2+y^2$, pero dentro del cono $3z^2 = x^2+y^2$, y sobre el plano xy.

1. **[7 puntos]** Utilice coordenadas esféricas para encontrar el volumen del solido T.

2. **[2 puntos]** ¿Cuál es el valor de a de modo que el volumen del sólido sea igual a π, es decir, $V(T) = \pi$?.

Solución.
Usando coordenadas esféricas
$x = r\cos(\theta)\operatorname{sen}(\phi)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\phi)$ y $z = r\cos(\phi)$
Primero hacemos el corte $x = 0$



Despejando el radio de la esfera trasladada
$x^2 + y^2 + z^2 - 2az + a^2 = a^2 \Longrightarrow r^2 - 2ar\cos(\phi) = 0 \Longrightarrow r = 2a\cos(\phi)$
Para encontrar los ángulos, en el caso del ángulo formado por la recta $z = y$ es $\phi_1 = \frac{pi}{4}$, ya que es la recta identidad que parte el cuadrante en 2. El otro ángulo se encuentra considerando la recta $y = \sqrt{3}z$, si $z = 1$ entonces $y = \sqrt{3}$, podemos formar el triángulo con catetos z, y y se usa trigonometría para encontrar $\phi_2 = \frac{\pi}{3}$.Luego, la integral queda

$$
\begin{aligned}
I = &\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2a\cos(\phi)} r^2\operatorname{sen}(\phi)\,dr\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{sen}(\phi)\frac{r^3}{3}\bigg|_0^{2a\cos(\phi)} d\phi\,d\theta \\
=&\frac{8a^3}{3}2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{sen}(\phi)\cos^3(\phi)\,d\phi = -\frac{16a^3\pi}{3\cdot 4}\frac{-3}{16} = \frac{a^3}{4}\pi
\end{aligned}
$$

en la última integral se utiliza la sustitución $u = \cos(\phi)$. Entonces para que $V(T) = \pi$ se tiene que tener $a = \sqrt[3]{4}$