Escuela de Economía
Facultad de Ciencia Económicas
Universidad de Costa Rica

Las curvas de indiferencia de la Función Leontief

Profesor Edgar Robles Cordero, Ph.D.
Teoría Microeconómica

Junio 2007

1. INTRODUCCIÓN

La función matemática de Leontief es parte de la familia de las funciones de “Elasticidad Constante de Sustitución” (CES por sus siglas en inglés) a la que pertenecen las funciones comunes Cobb-Douglas. Estas funciones se derivan de la función general:

$$U = [\alpha X^{-\rho} + (1-\alpha)Y^{-\rho}]^{-r/\rho}$$

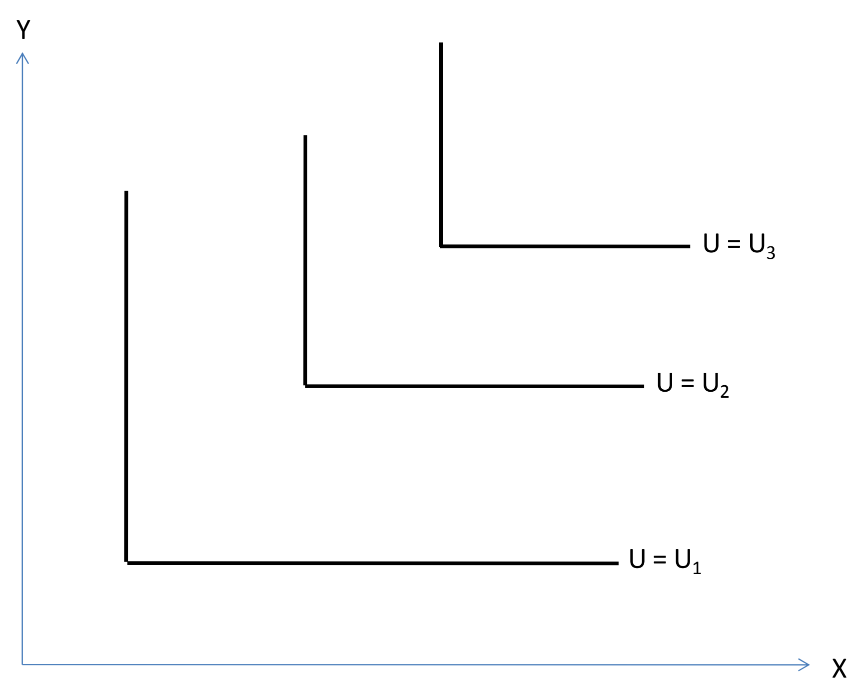
Donde X e Y son los dos bienes consumidos por un individuo, “r” representa el grado de homogeneidad de la función; α, que está entre cero y la unidad, representa un parámetro de distribución que explica la participación del bien en el consumo; y ρ es el parámetro que representa la elasticidad de sustitución.

La particularidad de la función de Leontief es que los bienes se consumen en proporciones fijas, por lo que no existe sustitubilidad entre los bienes. Esto quiere decir que los bienes representados por las funciones de Leontief son perfectos complementos. Por ejemplo, zapato izquierdo y zapato derecho, un marco de bicicleta y dos ruedas de bicicleta, son ejemplos de bienes perfectos complementos. La representación matemática general de la función está dada por:

$$U(X,Y) = \min(aX, bY) \tag{1}$$

Donde X e Y son los bienes que compra el consumidor y a y b son parámetros que representan qué tan importantes son los bienes para el consumidor. La función (1) se interpreta de forma tal que la utilidad del consumidor es igual al valor mínimo entre aX y bY. Este tipo de funciones de utilidad dan origen a curvas de indiferencia en forma de L, como se aprecia en el Gráfico 1.

Gráfico 1: Forma de la función de utilidad tipo Leontief



La función Leontief proviene de la teoría desarrollada por Wassily Leontief (1941), economista ruso, para exponer el caso de una función de producción que utiliza una proporción fija de los insumos. Como economista nacido durante la época de la cortina de hierro y bajo la inspiración de las teorías marxistas, Leontief quería desarrollar una teoría que desafiara las teorías tradicionales pues bajo proporciones fijas se rechaza la teoría de la productividad marginal imperante, pues en el óptimo para cualquier factor la productividad marginal es cero, o sea, a partir del vértice, la adición de cualquier factor no aumenta el volumen de producción. Posteriormente, en los años 30, Leontief se incorpora al personal docente de la Universidad de Harvard, donde desarrolla la metodología de la matriz insumo-producto, pilar fundamental de la contabilidad de las cuentas nacionales hasta nuestros días, lo que lo hizo ganar el premio Nobel en economía en 1973.

2. EL DIBUJO DE LA FUNCIÓN

A pesar de que las curvas derivadas de la función de Leontief facilitan el trabajo de encontrar el óptimo para el consumidor o para el productor, el dibujo de la función presenta alguna dificultad para el estudiante. Por ello es que en las siguientes páginas se desarrolla una metodología para dibujar curvas de indiferencia a partir de funciones diversas del tipo Leontief.

Se inicia con la función más simple en donde la utilidad, U, de un individuo depende de dos bienes X e Y de conformidad con la siguiente función:

$$U(X,Y) = \min\ (X,Y) \tag{2}$$

De previo es conocido que las funciones de Leontief producen curvas de indiferencia en forma de L como las del Gráfico 1, lo que significa que matemáticamente son discontinuas en el vértice formado por el segmento vertical y horizontal de esa L.

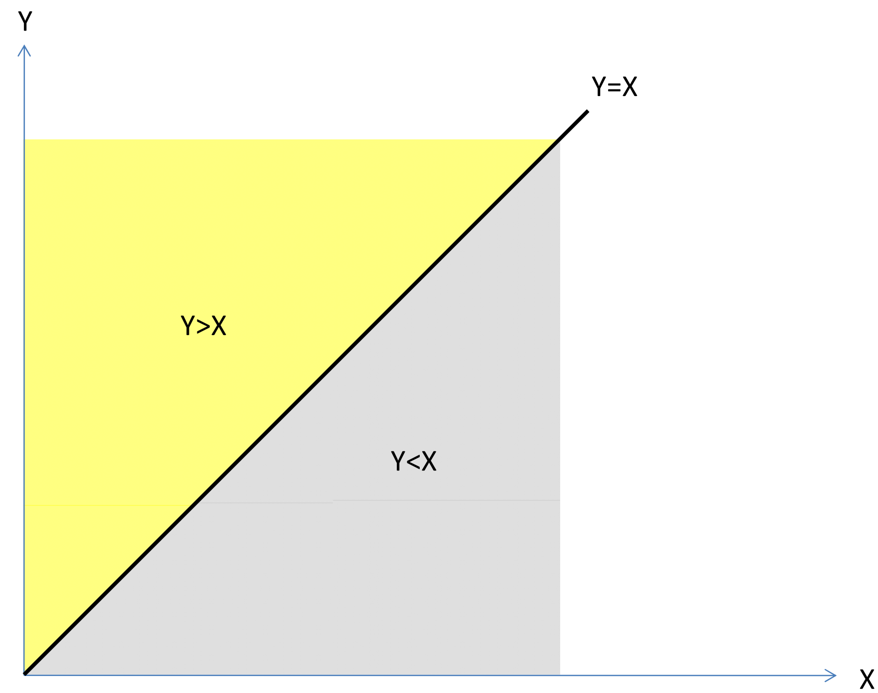
Para encontrar ese vértice siempre se deben igualar los dos elementos que se encuentran dentro de los paréntesis de la función, o sea, se igualan los valores que se encuentran a la derecha y a la izquierda de la coma dentro de la función de mínimo.

Además, la función de Leontief es homotética. Esto significa que cualquier rayo que sale del origen corta a todas las curvas de indiferencia en un punto en donde el valor de la pendiente es igual para todas las curvas. Por lo tanto, los vértices de todas las curvas de indiferencia generadas a partir de una función de Leontief se "expanden" a partir de un único rayo que sale del origen.

En resumen, el punto de partida para dibujar las curvas de Leontief es la igualación de los argumentos que están dentro de los paréntesis. En el caso de la función (2), el resultado es la igualdad X = Y, la cual es el rayo a partir del cual se van a "expandir" los vértices de todas las curvas de indiferencia.

Este rayo se dibuja en el Gráfico 2 y divide el mapa cartesiano en dos áreas. La de arriba (amarilla) corresponden a valores en donde Y > X y en el área de abajo se encuentran los puntos en donde X > Y.

Gráfico 2: Expansión de los vértices de la función U(X, Y) = min (X, Y)



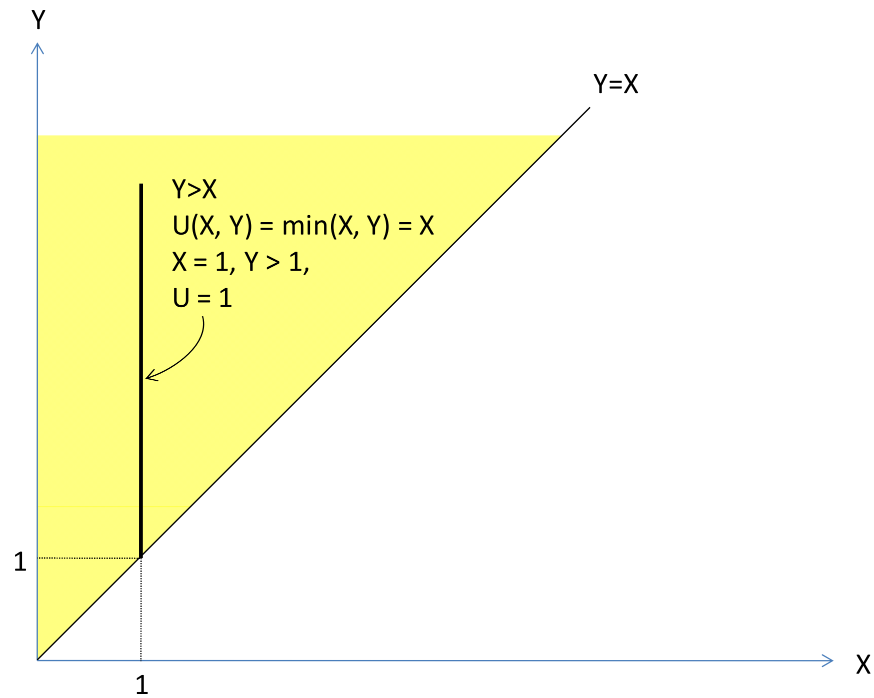
Como en el segmento de arriba Y > X, entonces en esa zona la función U(X, Y) = min (X, Y) se convierte en U(X, Y) = X[1]. O sea, el bien Y es neutral, la utilidad marginal de Y es cero, o el consumidor no obtiene ninguna utilidad al consumir unidades adicionales de Y a partir del vértice.

Entonces, si definimos un nivel de utilidad determinado, U_1, para dibujar una curva de indiferencia específica, debemos dibujar la función X = U_1. En el Gráfico 3, se dibuja la curva de indiferencia U = 1, para el segmento en donde Y > X. Esto da origen a la línea vertical X = 1, que se define a partir del punto en donde la línea toca la diagonal en el par (X, Y) = (1, 1).

La interpretación de este segmento es que cuando Y > 1, el consumidor no valora las unidades adicionales de Y que pueda recibir, por lo tanto, la utilidad es la misma para cualquier valor de Y mayor que 1.

[1] Matemáticamente la función U = X es incorrecta porque no es inyectiva, o sea, existe más de un valor de Y para un único valor de X. Así, la función inversa de X en términos de Y está indefinida.

Gráfico 3: Segmento de la curva de indiferencia U = 1, a partir de la función de utilidad min (X, Y), para los puntos en donde Y > X



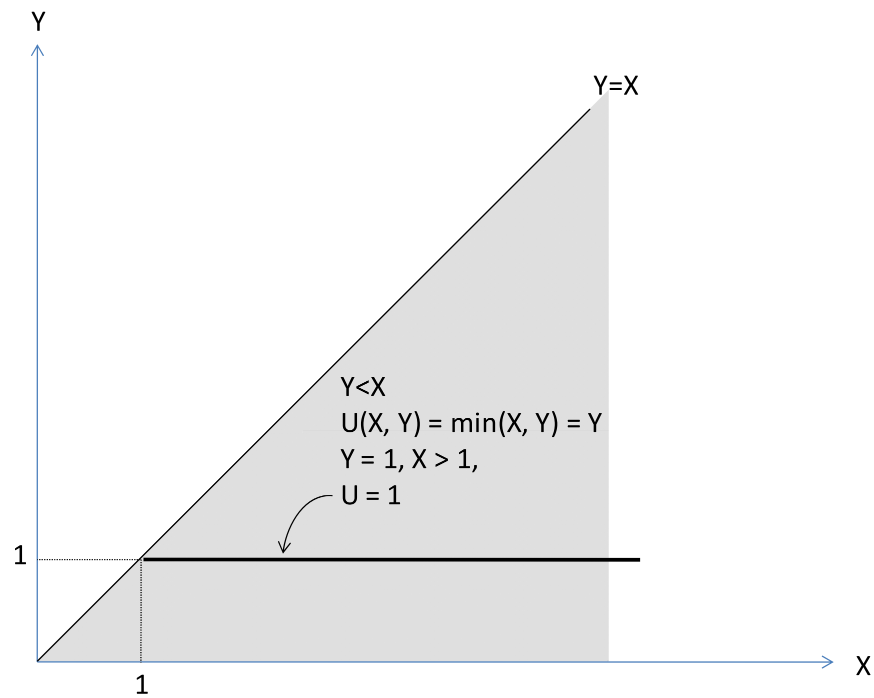
Si se sigue el mismo procedimiento, cuando nos ubicamos en el segmento cartesiano de abajo, en donde X > Y, la función de utilidad U (X, Y) = min (X, Y) se convierte en U(X, Y) = Y. O sea, en este caso X se convierte en un bien independiente, pues a partir del vértice, la utilidad marginal de X es cero y el consumidor no valora las unidades adicionales del bien X.

Del mismo modo, si definimos un nivel de utilidad determinado, U_1, para dibujar una curva de indiferencia específica, debemos dibujar la función Y = U_1. Al igual que en el caso previo, en el Gráfico 4, se dibuja la curva de indiferencia U = 1, para el segmento en donde X > Y. Esto da origen a la línea horizontal Y = 1, que se define a partir del punto en donde la línea toca la diagonal en el par (X, Y) = (1, 1).

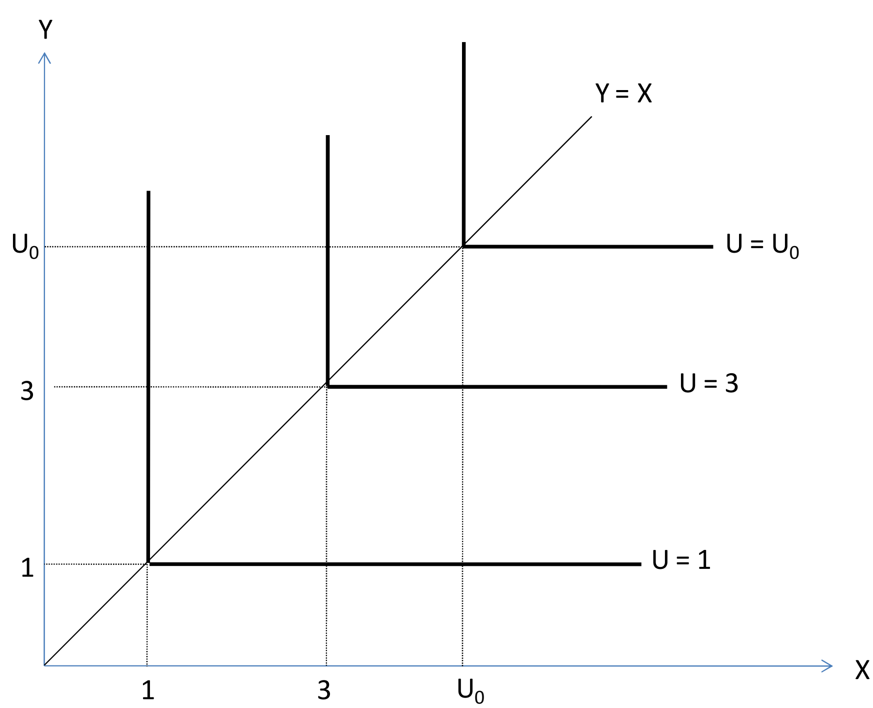
La interpretación de este segmento es igual que en el caso anterior; cuando X > 1, el consumidor no valora las unidades adicionales de X que pueda recibir, por lo tanto, la utilidad es la misma para cualquier valor de X mayor que 1.

Al unir los dos segmentos de la función U(X, Y) = min (X, Y), se obtiene la forma general de las curvas de indiferencia para cualquier valor determinado de la utilidad. Estas curvas se aprecian en el Gráfico 5. Se debe notar que la primer curva de indiferencia, que corresponde a la utilidad 0, coincide con los ejes X e Y, y el vértice se ubica en el par (0, 0).

<u>Gráfico 4</u>: Segmento de la curva de indiferencia U = 1, a partir de la función de utilidad min (X, Y), para los puntos en donde X > Y



<u>Gráfico 5</u>: Curvas de indiferencia para la función de utilidad min (X, Y)



Si se sigue este procedimiento es relativamente sencillo encontrar la forma de las curvas de indiferencia ante cualquier variación de la función de utilidad de Leontief previamente dibujada. Por ejemplo, en el Gráfico 6, se dibujan la curva de indiferencia para un valor de la utilidad 2 de la función de utilidad:

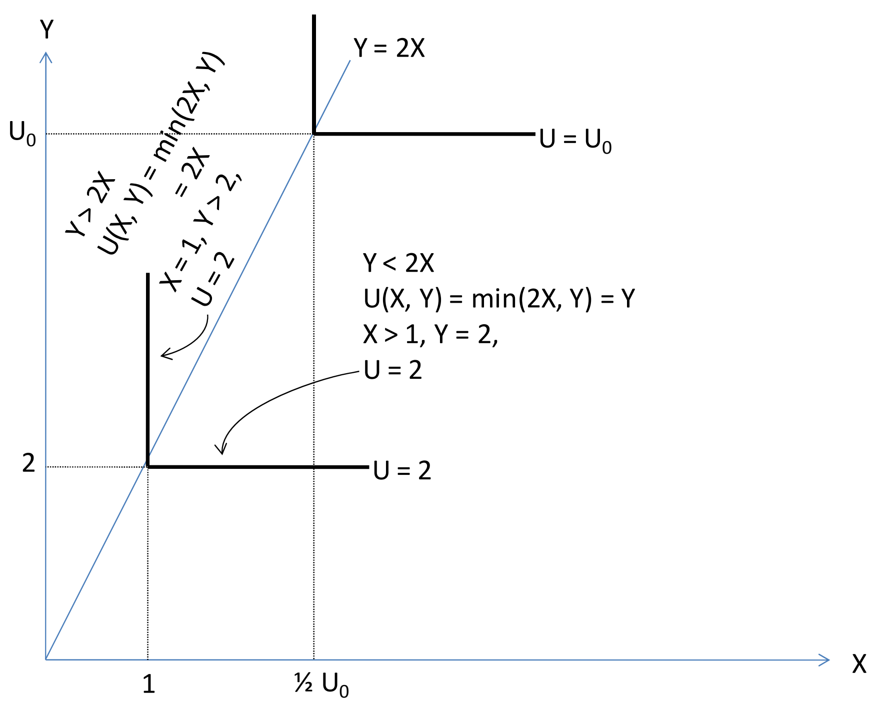
$$U(X, Y) = \min(2X, Y) \tag{3}$$

Previo a explicar la ubicación de las curvas de indiferencia, es importante entender la importancia de cada uno de los bienes para el consumidor cuyas preferencias se representan por la función de utilidad (3). De acuerdo con los argumentos de la función, en el óptimo, representado por el vértice, este consumidor necesita consumidor el doble de unidades de Y por cada unidad de X que consume. Por ejemplo, si se tratara de una bicicleta, X representa el marco de la bicicleta y Y representa 1 rueda de la bicicleta. En este caso, el consumidor compra un marco de bicicleta conjuntamente con dos ruedas.

Para dibujar las curvas de indiferencia a partir de la función de utilidad (3), primero se debe encontrar el rayo a partir las curvas de indiferencia. Para encontrar la ecuación de ese rayo, se igualan los argumentos que están dentro de la función de mínimo:

$$Y = 2X \tag{4}$$

<u>Gráfico 6</u>: Curvas de indiferencia para la función de utilidad min (2X, Y)



Cuando $Y > 2X$, o sea, aquellos puntos por encima del rayo $Y = 2X$, la función $U(X, Y) = \min(2X, Y)$ se convierte en $U(X, Y) = 2X$. Así si se busca dibujar la curva de indiferencia $U = 2$, entonces $2X = 2$, lleva a la ecuación $X = 1$, que es una línea vertical por encima del rayo de expansión, como se aprecia en el Gráfico 6.

Por otro lado si $Y < 2X$, esto es, si se está debajo del rayo $Y = 2X$, la función $U(X, Y) = \min(2X, Y)$ se convierte en $U(X, Y) = Y$. Por lo que si se quiere completar la curva de indiferencia $U = 2$, se debe dibujar una línea horizontal a la izquierda del rayo de expansión. Así las curvas de indiferencia mantienen su forma de L, solo que se expanden a lo largo de otro rayo, si se comparan con la dibujadas en el Gráfico 5.

El Gráfico 7 presenta una variación en la función de utilidad en cuanto a la proporción en que se consumen los bienes. Ahora las preferencias del consumidor se representan por:

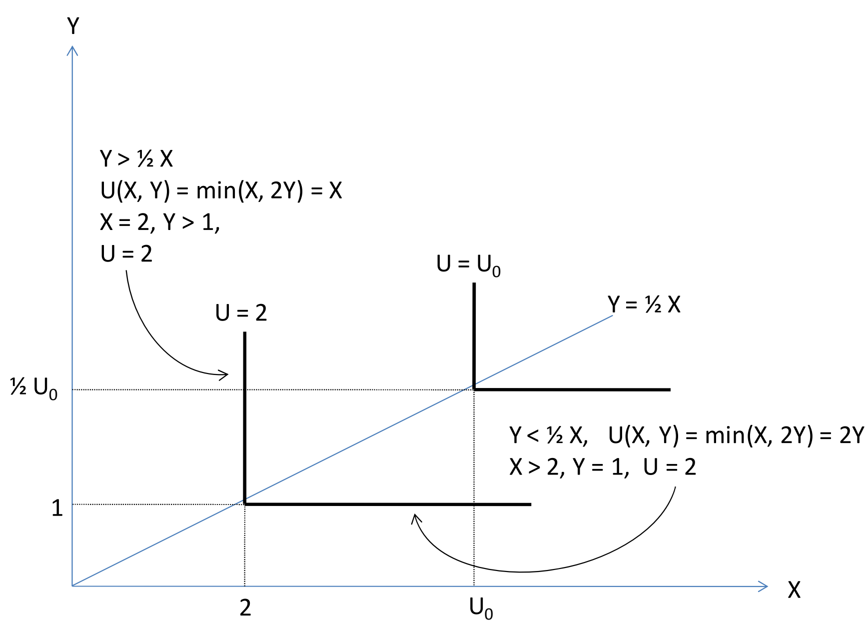
$$U(X, Y) = \min(X, 2Y) \tag{5}$$

Al igual que en los casos anteriores, las curvas de indiferencia que se generan a partir de esta función de utilidad se expanden a lo largo del rayo:

$$Y = ½ X \tag{6}$$

Así, por encima de este rayo las curvas de indiferencia son verticales y por debajo de este rayo son horizontales.

Gráfico 7: Curvas de indiferencia para la función de utilidad min (X, 2Y)



En resumen, la variación de las proporciones en las cuales se consumen los bienes no alteran las formas de las curvas de indiferencia, sino solamente el rayo a lo largo del cual se "expanden". Así, se puede generalizar que para cualquier función de utilidad:

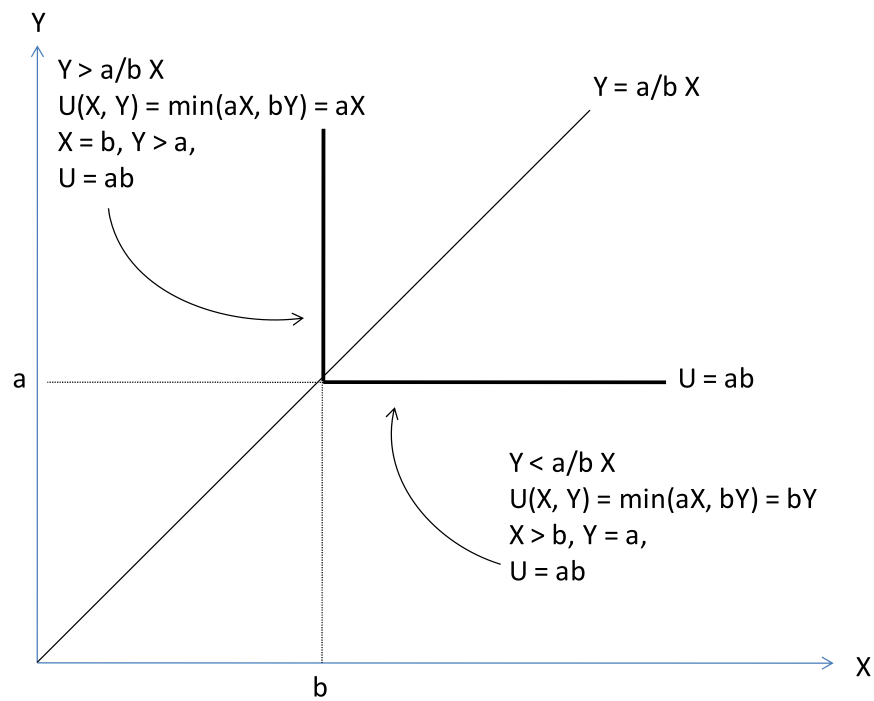
$$U(X, Y) = \min(aX, bY) \tag{7}$$

las curvas de indiferencia se expanden a lo largo del rayo:

$$Y = \frac{a}{b}X \tag{8}$$

Y son verticales por encima de este rayo y horizontales por debajo, como se aprecian el Gráfico 8.

Gráfico 8: Curvas de indiferencia para la función de utilidad min (aX, bY)



Una variación importante se presenta cuando las preferencias del consumidor están representadas por la función de utilidad (9):

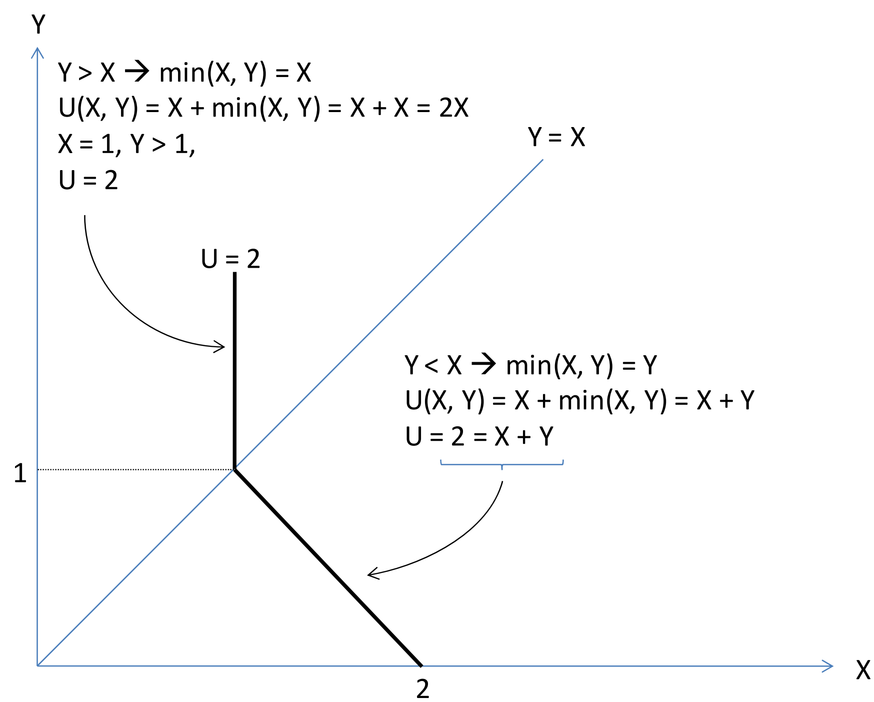
$$U(X, Y) = \min(X, Y) + X \tag{9}$$

Las curvas de indiferencia que surgen a partir de esta función de utilidad se siguen expandiendo a lo largo del rayo que surge de la igualación de los argumentos que están dentro de la función de mínimos. En este caso, los vértices de las curvas de indiferencia se ubican a lo largo de la ecuación Y = X.

Sin embargo, tal y como se aprecia en el Gráfico 9, las curvas de indiferencia ya no van a tener forma de L, pues cuando Y > X, la función U(X, Y) = min(X, Y) + X se convierte en U(X, Y) = X + X = 2X. O sea, por encima de la línea de expansión, las curvas de indiferencia siguen siendo verticales.

Sin embargo, cuando Y < X, la función U(X, Y) = min(X, Y) + X se convierte en U(X, Y) = Y + X, lo cual corresponde a una función de utilidad de dos bienes perfectos sustitutos. Esto quiere decir que arriba de la línea de expansión, los bienes para el consumidor son perfectos complementos y debajo de esta línea los bienes son perfectos sustitutos. En el Gráfico 9 se dibuja la curva de indiferencia U = 2, para esta función de utilidad.

Gráfico 9: Curvas de indiferencia para la función de utilidad X + min (X, Y)

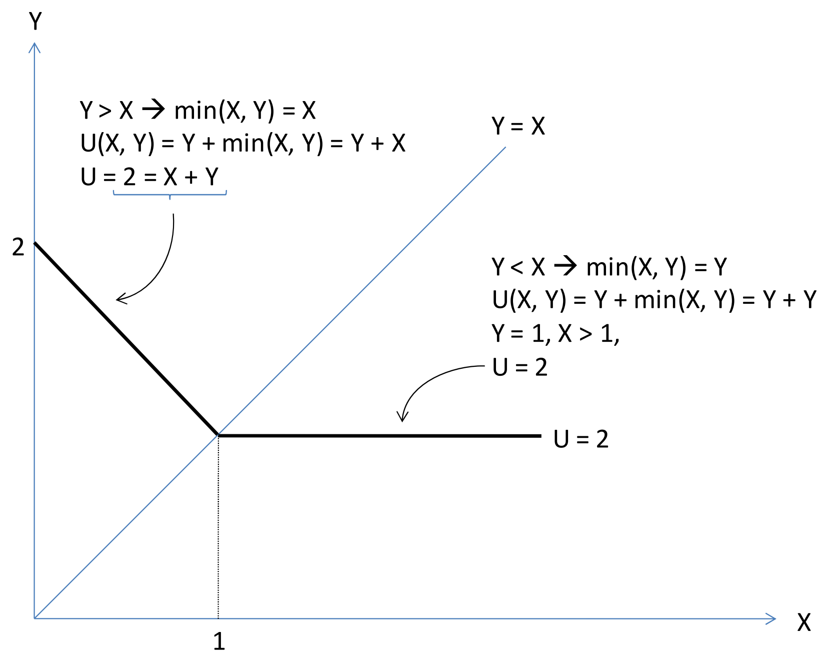


En el gráfico 10 se dibuja una curva de indiferencia para la función de utilidad (10), la cual es una variación básica del caso precedente.

$$U(X, Y) = \min(X, Y) + Y \qquad (10)$$

Como las curvas de indiferencia se expanden a lo largo del rayo Y = X, ahora por encima del rayo de expansión, cuando Y > X, U(X, Y) = X + Y, lo que convierte a los bienes en perfectos sustitutos para el consumidor; mientras que cuando Y < X, U(X, Y) = Y + Y = 2Y, o sea, líneas horizontales, o perfectos complementos. El gráfico 10 dibuja del mismo modo la curva de indiferencia U = 2.

Gráfico 10: Curvas de indiferencia para la función de utilidad Y + min (X, Y)



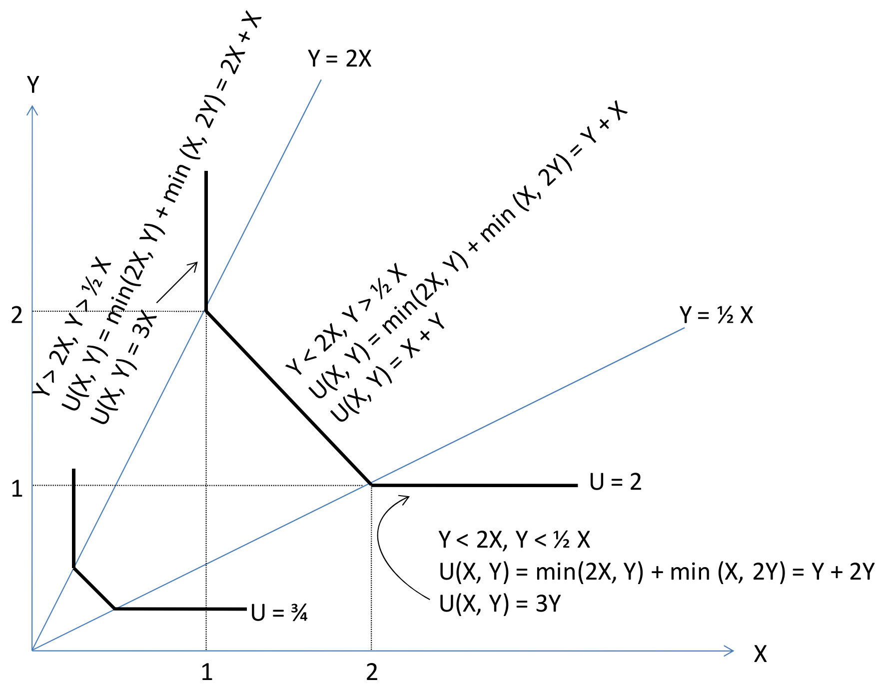
La función de utilidad (11) es una combinación de los casos expuestos hasta el momento en donde se suman dos funciones de perfectos complementos.

$$U(X, Y) = \min(2X, Y) + \min(X, 2Y) \tag{11}$$

Para dibujar las curvas de indiferencia que se derivan a partir de esta función se deben aplicar los mismos principios estudiados hasta el momento. O sea, hay que dibujar ahora dos rayos de expansión a lo largo de los cuales se expandirían las curvas de indiferencia si se trataran de funciones de utilidad individuales. Estos rayos son Y = 2X e Y = ½ X.

De este modo, el mapa cartesiano queda dividido en tres segmentos, como se muestra en el gráfico 11. En el segmento de arriba, Y > 2X e Y > ½ X; por lo tanto, U(X, Y) = min(2X, Y) + min(X, 2Y) se transforma en U(X, Y) = 2X + X = 3X, o sea, las curvas de indiferencia son línea verticales. En el segmento del medio Y < 2X pero Y > ½ X, por lo que U(X, Y) = min(2X, Y) + min(X, 2Y) se convierte en U(X, Y) = Y + X, o sea, una función de utilidad de perfectos sustitutos. Finalmente, en el segmento de abajo Y < 2X e Y < ½ X, por lo que U(X, Y) = min(2X, Y) + min(X, 2Y) se transforma en U(X, Y) = Y + 2Y = 3Y, o sea, líneas horizontales. En el gráfico 11 se dibuja la curva de utilidad U = 2.

Gráfico 11: Curvas de indiferencia para la función de utilidad min(2X, Y) + min (X, 2Y)



Las curvas representadas en el gráfico 11 son muy interesantes porque empiezan a formar la "convexidad" que normalmente distingue a las curvas de indiferencia. De hecho, si agregamos un tercer componente a la función de utilidad 11 para formar la función de utilidad 12:

$$U(X, Y) = \min(2X, Y) + \min(X, Y) + \min(X, 2Y) \tag{12}$$

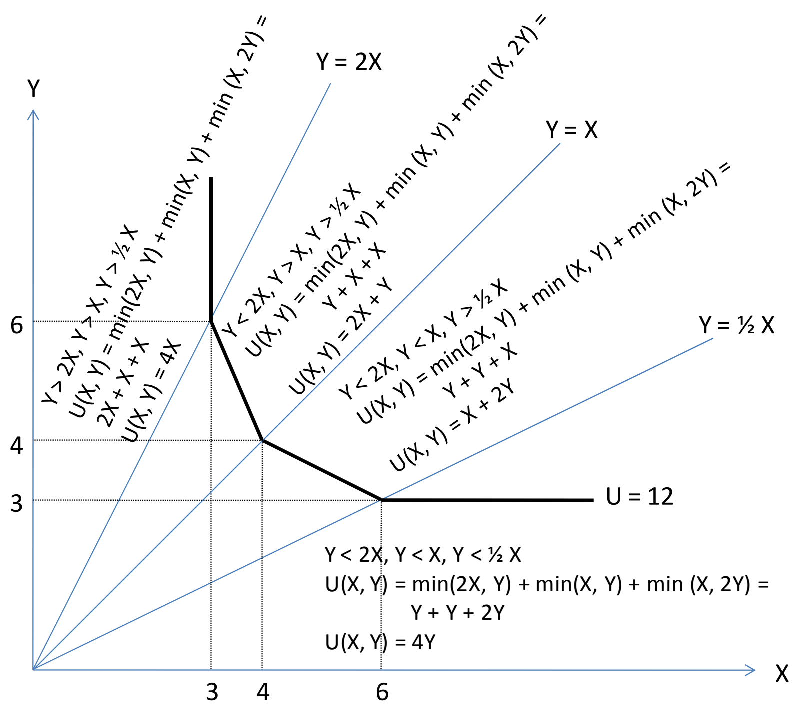
Así, ahora se tendrían 3 líneas de expansión que dividirían el mapa cartesiano en 4 segmentos y se formarían curvas de indiferencia como la mostrada en el gráfico 12. En el segmento de arriba Y > 2X, Y > X e Y > ½ X, por lo tanto la función U(X, Y) = min(2X, Y) + min(X, Y) + min(X, 2Y) se convierte en U(X, Y) = 2X + X + X = 4X, o sea curvas de indiferencia de líneas verticales. En el segmento superior del medio Y < 2X, Y > X e Y > ½ X, por lo que la función U(X, Y) = min(2X, Y) + min(X, Y) + min(X, 2Y) se transforma en U(X, Y) = Y + X + X = Y + 2X, o sea, una función de utilidad de perfectos sustitutos en donde el bien X es 2 veces más importante para el consumidor que el bien Y. En el segmento inferior del centro Y < 2X, Y < X e Y > ½ X y la función U(X, Y) = min(2X, Y) + min(X, Y) + min(X, 2Y) se convierte en U(X, Y) = Y + Y + X = 2Y + X, o sea, los bienes son perfectos sustitutos con la diferencia de que el bien Y es dos veces más importante para el consumidor que el bien X. Finalmente, en el segmento de abajo Y < 2X, Y < X e Y < ½ X, lo que hace que la función U(X, Y) = min(2X, Y) + min(X, Y) + min(X, 2Y) pase a ser U(X, Y) = Y + Y + 2Y = 4Y, o sea curvas de indiferencia de líneas horizontales.

En el gráfico 12 se dibuja una curva de indiferencia representativa correspondiente a un valor de la utilidad de 12, valor arbitrario utilizado para facilitar la identificación de los vértices de la función.

Se puede observar que esta curva se asemeja aun más a la convexidad tradicional de las curvas de indiferencia que lo observado en el gráfico 11.

Esto no tiene nada de sorprendente porque lo que se está haciendo al agregar más segmentos a la función de utilidad es permitirle al consumidor sustituir las proporciones en las que se consumen los bienes. Así, si existiera un infinito número de segmentos en la función de utilidad tipo Leontief, la curva de indiferencia resultante sería estrictamente convexa, o sea, el consumidor podría sustituir un bien por otro y permanecer sobre la misma curva de indiferencia.

Gráfico 12: Curvas de indiferencia para la función de utilidad min(2X, Y) +min(X, Y) + min (X, 2Y)



3. CURIOSIDADES

A continuación se expone un caso de una función de utilidad "curiosas" que surge de variaciones de las funciones estudiadas hasta el momento. Obsérvese la función de utilidad representada en (13):

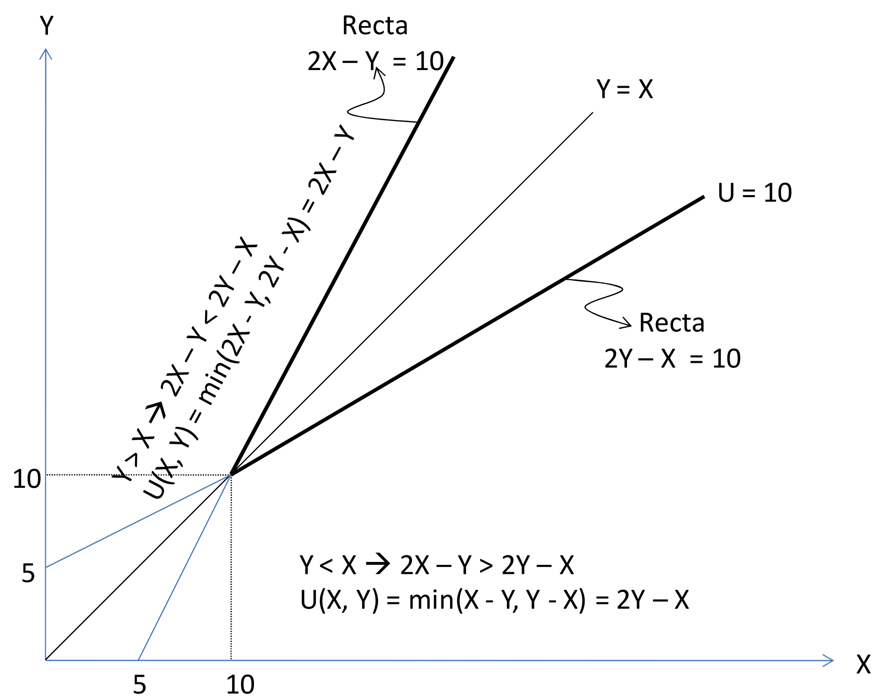
$$U(X, Y) = \min(2X-Y, 2Y-X) \qquad (13)$$

Al igual que en los casos precedentes, las curvas de indiferencia resultantes de esta función se "expanden" a partir del rayo que surge de la igualación de los argumentos que están dentro del paréntesis de la función de mínimo. Así, 2X – Y = 2Y – X da como resultado X = Y.

Entonces cuando Y > X, la función U(X, Y) = min(2X-Y, 2Y-X) se convierte en U(X, Y) = 2X-Y. Esta función produciría curvas de indiferencia lineales con pendiente positiva. O sea, uno de los artículos consumidos por esta persona es un mal. En el caso específico de esta función, es Y el que es un mal, pues adiciones en el consumo de Y disminuye la utilidad total del individuo.

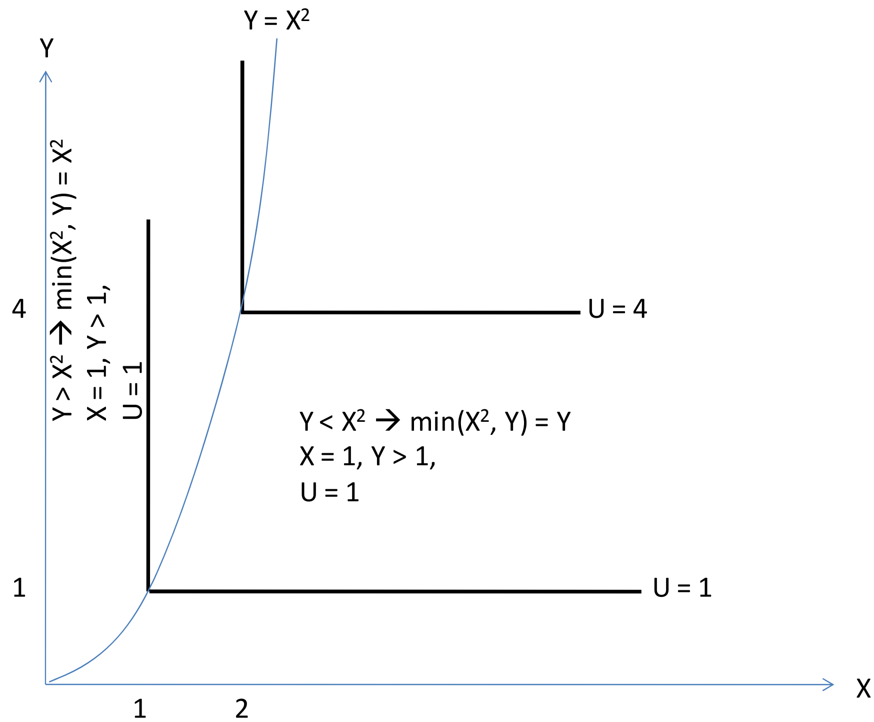
Cuando X > Y, la función U(X, Y) = min(2X-Y, 2Y-X) se convierte en U(X, Y) = 2Y-X, que también genera curvas de indiferencia con pendiente positiva, solo que en este caso, es X el mal. El gráfico 13 dibuja una curva de indiferencia correspondiente a esta función para un valor de la utilidad de 10, número que se escogió para facilitar los cálculos.

Gráfico 13: Curvas de indiferencia para la función de utilidad min(2X-Y, 2Y-X)



Otro caso es el de la función de utilidad U(X, Y) = min (X^2, Y), la cual genera curvas de indiferencia idénticas a las mostradas en el gráfico 8, con la diferencia que los vértices de estas curvas se expanden a los largo de la curva Y = X^2. Esto se puede apreciar en el gráfico 14.

<u>Gráfico 14</u>: Curvas de indiferencia para la función de utilidad max(X^2, Y)



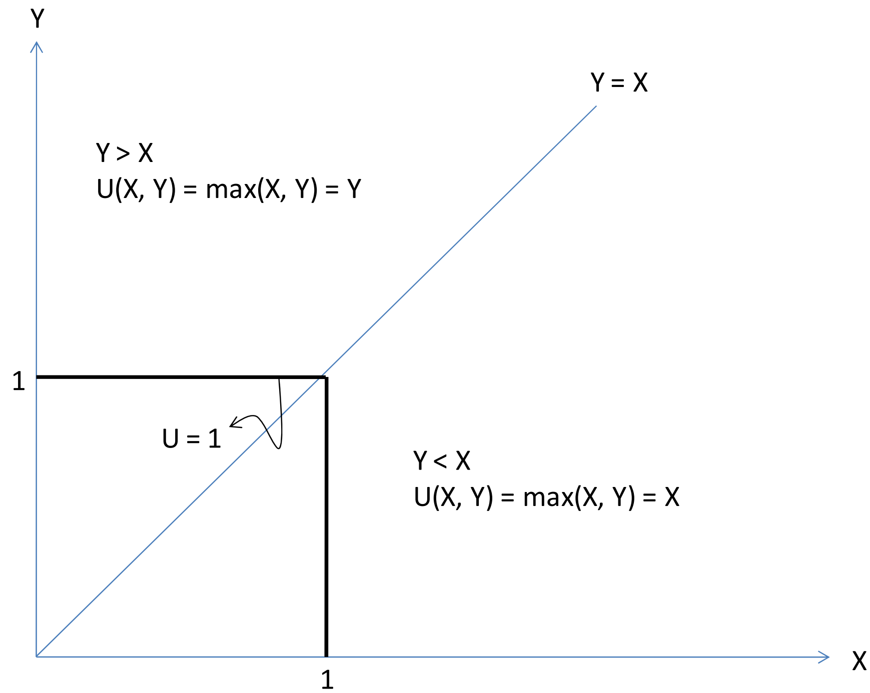
4. LA FUNCION MÁXIMO

Una variante de las funciones mínimo analizadas es la función máximo, como la representada en (14):

$$U(X, Y) = \max(X, Y) \tag{14}$$

Para encontrar las curvas de indiferencia correspondientes a esta función de utilidad, se sigue el mismo procedimiento al caso de las funciones mínimo, con la diferencia que la forma de las curvas de indiferencia van a ser de L invertida, tal y como se representa en el <u>gráfico 15</u>. Así, cuando Y > X, U(X, Y)=max(X, Y) se transforme en U(X, Y) = Y y cuando Y < X, U(X, Y)=max(X, Y) se convierte en U(X, Y) = X.

<u>Gráfico 15</u>: Curvas de indiferencia para la función de utilidad max(X, Y)



A partir de este punto se pueden encontrar combinaciones de funciones. Por ejemplo,

$$U(X, Y) = \max(X, Y) + \min(X, Y) \tag{15}$$

produce curvas de indiferencia como las mostradas en el gráfico 16. Si Y > X, U(X, Y) = max(X, Y) + min(X, Y) se transforma en U(X, Y) = Y + X. Y si Y < X, U(X, Y) = max(X, Y) + min(X, Y) se convierte en U(X, Y) = X + Y, lo que produce que estos bienes sean perfectos sustitutos para el consumidor.

Finalmente, la función (16), produce curvas de indiferencia como la mostrada en el gráfico 17, para un valor de la utilidad de 30.

$$U(X, Y) = \max(2X, Y) + \min(X, 2Y) \tag{16}$$

Gráfico 16: Curvas de indiferencia para la función de utilidad max(X, Y) + min (X, Y)

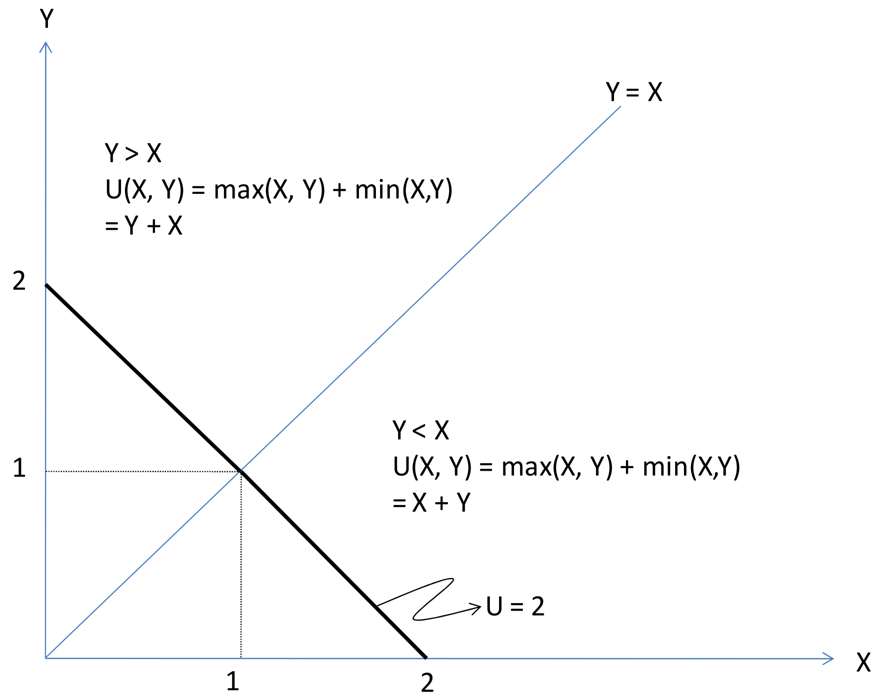
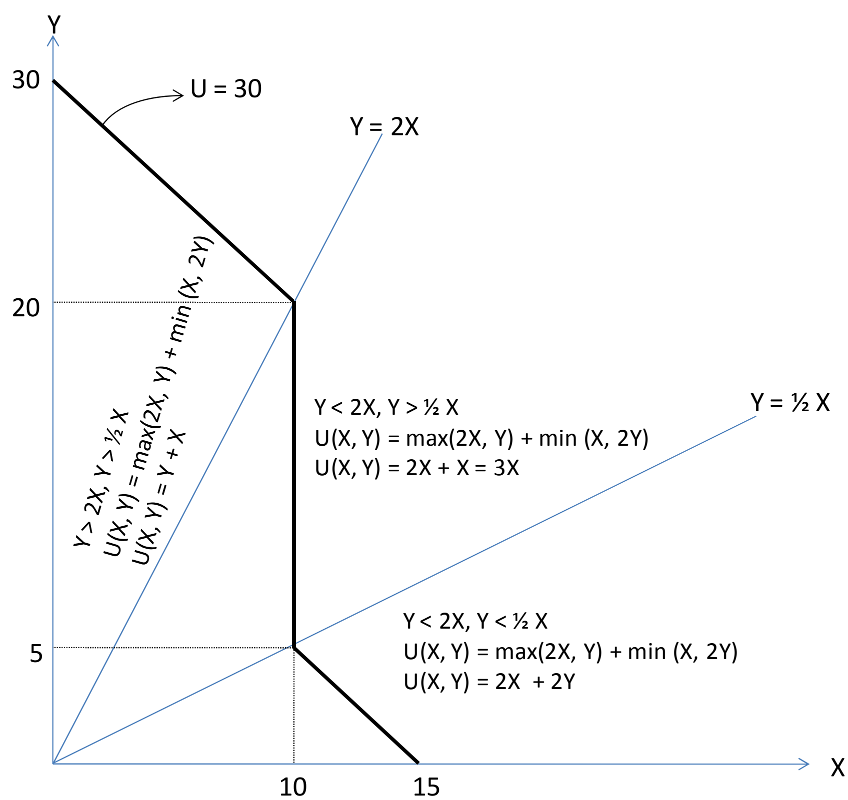


Gráfico 17: Curvas de indiferencia para la función de utilidad max(2X, Y) + min (X, 2Y)



5. CONCLUSION

Como se ha visto a lo largo de este documento. Es relativamente sencillo encontrar y dibujar las curvas de indiferencia correspondientes a la función de Leontief o de mínimo y sus combinaciones. El método general consiste en igualar los elementos que se encuentran a la derecha y a la izquierda de la coma dentro del paréntesis para encontrar la senda de expansión de los vértices de las curvas de indiferencia. A partir de allí se analizan los casos de los que sucede con la función de utilidad cuando se está por encima y por debajo del vértice o vértices de la función.

ESCUELA DE ECONOMÍA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EJERCICIOS DE MICROECONOMICA SOLUCIONADOS

Profesor Edgar Robles Cordero, Ph.D.

Marzo de 2011

CAPÍTULO 1
EL ÓPTIMO DEL CONSUMIDOR Y LA DEMANDA

TEMARIO

Los ejercicios de este capítulo consisten en encontrar el consumo óptimo de un consumidor por medio de la maximización de una función de utilidad sujeto a una restricción presupuestaria. Esta restricción presupuestaria normalmente se da en forma de un ingreso monetario, el cual debe ser distribuido en forma óptima entre todos los bienes que se incorporan dentro de la función de utilidad del individuo. Los ejercicios se pueden ordenar en dos subgrupos, aquellos que ven con la manipulación de curvas de indiferencia y la restricción presupuestarias y los que analizan la curva de demanda y sus elasticidades.

1.1 El óptimo del consumidor

Estos ejercicios pueden partir con una función de utilidad y una restricción presupuestaria, con el fin de encontrar las curvas de indiferencia y encontrar el óptimo del consumidor. Una vez hallado este óptimo, se puede hallar la curva de oferta-precio (con la cual se puede realizar una transformación para encontrar la curva de demanda), la curva de oferta-ingreso (con la cual se puede hallar la curva de Engels), y separar los efectos ingreso y de sustitución, ya sea utilizando el método de Hicks o el de Slutsky.

1.2 La función de demanda

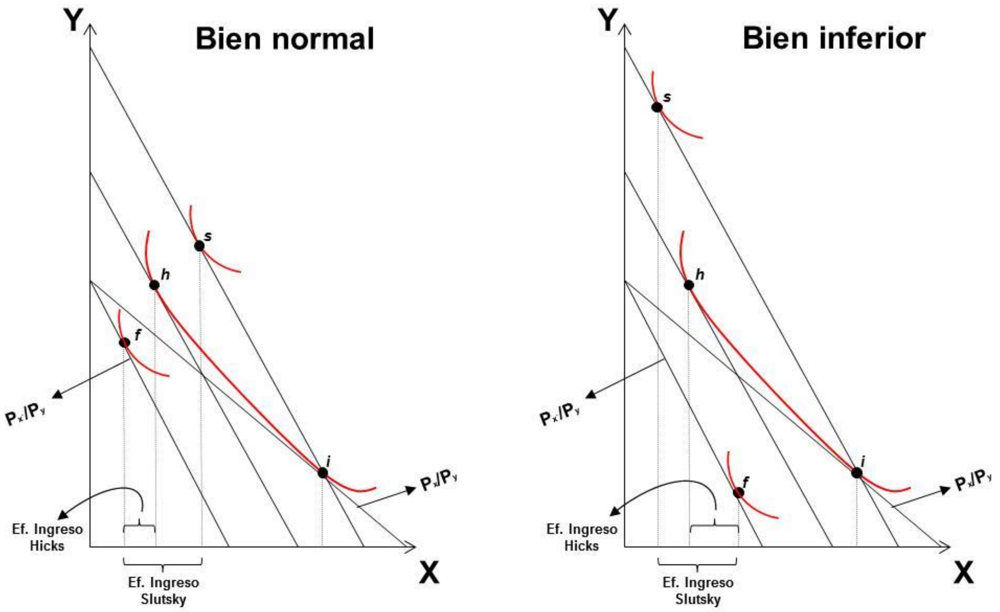
Cuando el precio no está especificado, se puede hallar la demanda marshalliana luego de encontrar el óptimo del consumidor. Esta demanda es la que incluye los efectos ingreso y de sustitución. Del mismo modo, se puede encontrar una demanda compensada, eliminando el efecto ingreso del efecto de los cambios provocados en el consumo por una variación en el precio. A partir de cualquier tipo de demanda, se pueden calcular las elasticidades precio o elasticidades cruzadas.

1.1 EL ÓPTIMO DEL CONSUMIDOR

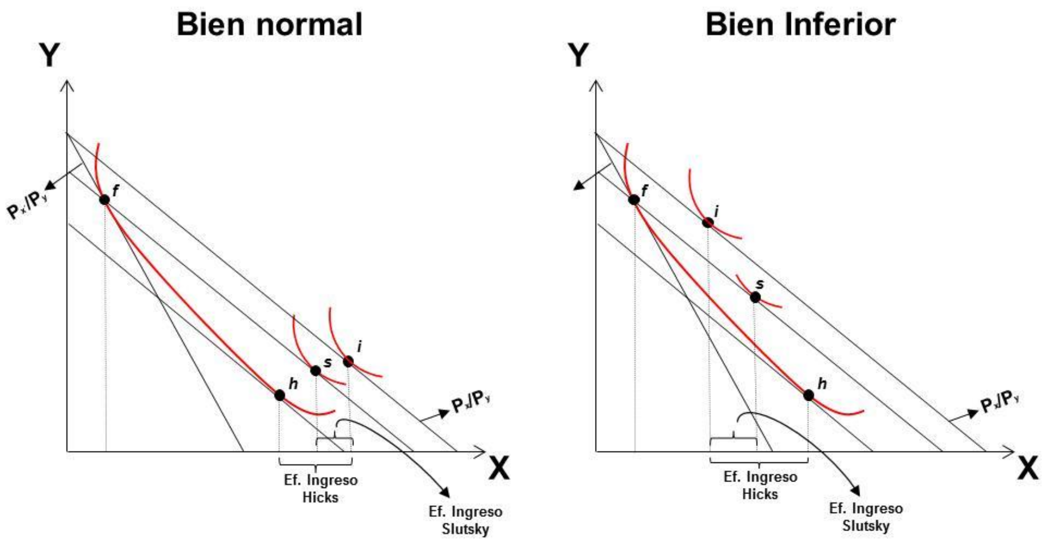
1.1.1 ¿Cuál efecto ingreso es superior, cuando se obtiene utilizando el método de Hicks o el de Slutsky?

Depende del tipo de variación que se utilice para obtener el efecto ingreso y sustitución. Si se usan variaciones compensadas (para llevar al consumidor a su estado inicial), el efecto ingreso bajo Slutsky es mayor que bajo Hicks, tanto para bienes normales como inferiores. Pero, si se utilizan las variaciones equivalentes (para dejar al consumidor en su estado final), el efecto ingreso es superior bajo Hicks que bajo Slutsky. En el gráfico de abajo se muestra el punto inicial como *i*, el final como *f*, la separación de slutsky como *s* y la separación de Hicks como *h*.

VARIACIONES COMPENSADAS



VARIACIONES EQUIVALENTES



1.1.2 ¿Qué es la curva de oferta ingreso y qué relación tiene con la curva de Engels?

La curva de oferta ingreso es la unión de todos los puntos de equilibrio que ocurre entre el consumo de dos bienes cuando el ingreso aumenta. Guarda una relación directa con la curva de Engels que relaciona el consumo de uno de los bienes con el ingreso. Así, si la curva de oferta ingreso tiene pendiente negativa, entonces la curva de Engels para alguno de los dos bienes tiene que tener también pendiente negativa, lo que representa que uno de los dos bienes es inferior.

1.1.3 ¿En una economía con únicamente dos bienes, pueden ambos bienes ser inferiores?

No. Si el consumidor gasta todo su ingreso se tiene que cumplir la siguiente ecuación: $\frac{PxX}{I}+\frac{PyY}{I}=1$, donde $\frac{PxX}{I}$ es la proporción del ingreso que el consumidor gasta en X y $\frac{PyY}{I}$ es la proporción del ingreso que el consumidor gasta en Y. Si X es un bien inferior, eso quiere decir que cuando el ingreso aumenta, disminuye el consumo de X por lo que la proporción gastada en X, $\frac{PxX}{I}$, cae. Entonces, necesariamente $\frac{PyY}{I}$ tiene que subir para sumar la unidad, o sea, que se gaste el 100% del ingreso. Esto significa que Y es un bien normal y superior.

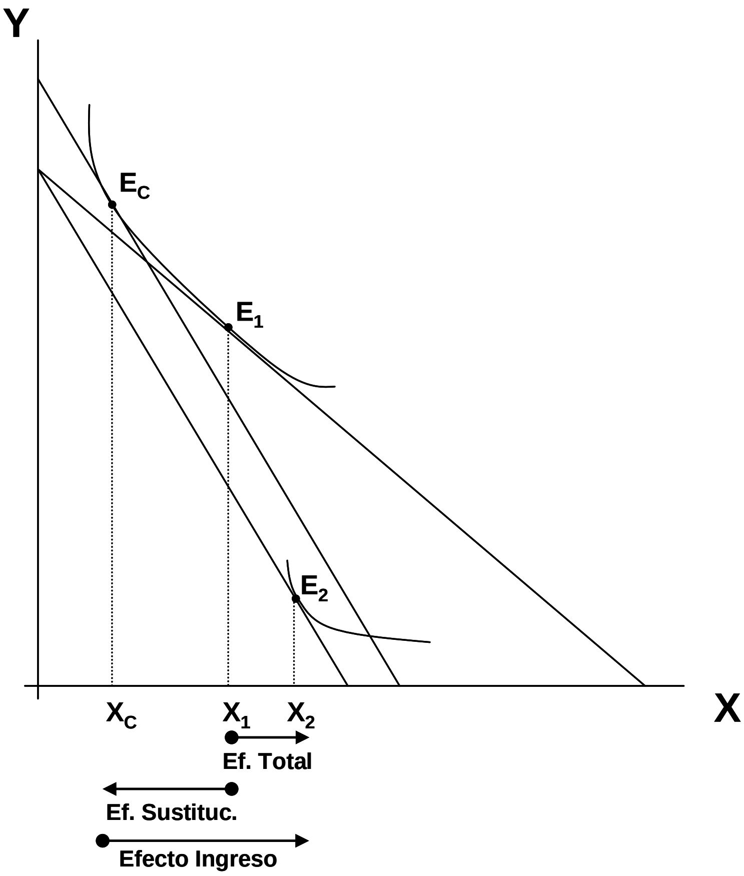
1.1.4 ¿Por qué un bien Giffen rompe con la Ley de la Demanda?

Porque es un bien inferior con un efecto ingreso muy fuerte que no solo va en la dirección opuesta al efecto sustitución, sino que además lo supera, lo que hace que cuando el precio aumenta también lo haga la cantidad demandada y viceversa.

1.1.5 ¿Puede una demanda compensada tener pendiente positiva?

No, el efecto sustitución hace que la cantidad demandada siempre varíe de forma inversa al cambio en el precio; esto ocurre porque siempre se tiende a sustituir el bien más caro por sustitutos más baratos. En el extremo de los casos, existen bienes que no tienen efecto sustitución, como en el caso de los perfectos complementos, pero no llegan a invertir la Ley de la Demanda.

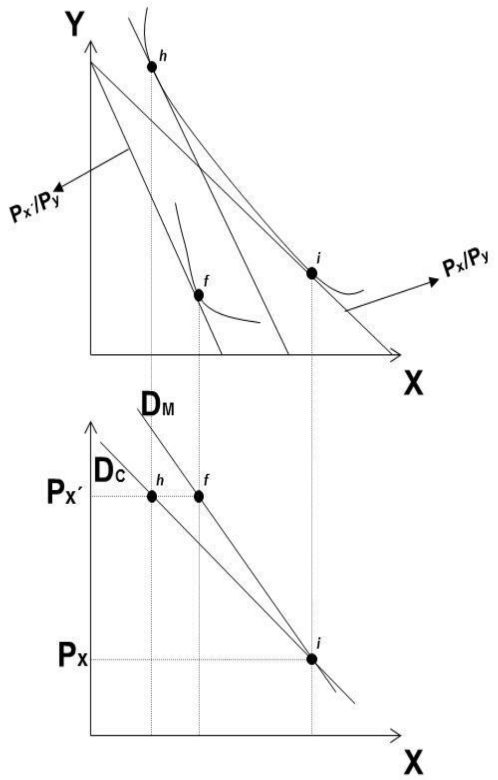
1.1.6 Demuestre que un bien Giffen es un bien inferior.



El bien Giffen es aquel que viola la Ley de la Demanda, esto es, cuando el precio sube, también lo hace la cantidad demandada. Lo anterior se muestra en el gráfico cuando se pasa del punto E_1 al punto E_2. Sin embargo, cuando se separa el efecto total en efecto ingreso y sustitución, se debe recordar que el efecto sustitución siempre tiene efecto negativo, o sea, existe una relación inversa entre la cantidad y el precio. Por lo tanto, el rompimiento de la Ley de la Demanda ocurre porque el efecto ingreso tiene signo opuesto al efecto sustitución y además lo sobrepasa. Esto quiere decir que el consumo aumenta cuando el ingreso cae, por lo que se trata de un bien inferior.

1.2 LA FUNCIÓN DE DEMANDA

1.2.1 Cuando se analiza la demanda de un bien inferior. ¿Cuál demanda es más elástica, la demanda total (marshalliana) o la demanda compensada?



La demanda compensada es la más elástica.

En el gráfico adjunto se muestra que X es un bien inferior pues al incrementarse el ingreso, el consumo de X disminuye de f a h.

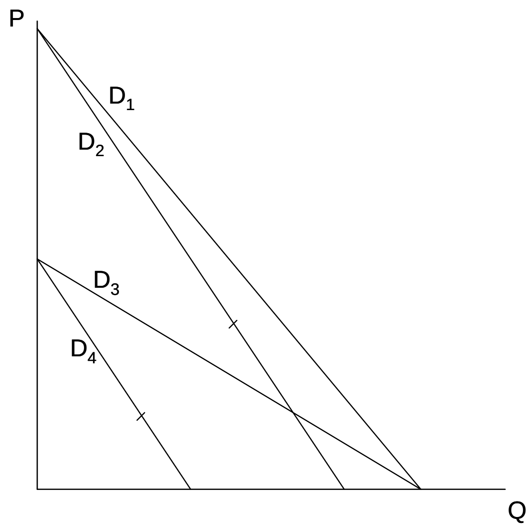
En el panel de abajo se presenta las variaciones totales y compensadas (a la Hicks) de la demanda. Acá se puede observar que la demanda total o marshalliana tiene menor sensibilidad a cambios en el precio, o sea D_M es más inelástica.

Esto se debe a que esta demanda suma el efecto ingreso que va en dirección opuesta al efecto sustitución.

1.2.2 Analice la siguiente afirmación: Si existen 100 consumidores, cada uno con una demanda con elasticidad igual a 1, entonces la agregación de la demanda de estos 100 consumidores también tendrá elasticidad igual a 1.

Es correcto, una demanda tiene elasticidad unitaria cuando P*q = k, o sea, cuando el consumidor siempre gasta un monto fijo k, independientemente del precio y la cantidad. Como q=k/P → Q=100q=100k/P, donde Q es la demanda agregada. Entonces, la demanda resultante dice que P*Q=100k, la cual también tiene elasticidad unitaria.

1.2.3 En el siguiente diagrama se presenta 4 demandas diferentes. Clasifíquelas de acuerdo a su elasticidad, desde la más elástica hasta la menos elástica.



La elasticidad de la demanda es igual a $\eta_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{P_1}{Q_1}$, donde P_1 y Q_1 son los precios de referencia en los que se quiere medir la elasticidad. Para un P_1 y Q_1 dados, si $\Delta Q = Q_1$ y $P_1 = \hat{P} - P_1$, donde $\hat{P}$ es la intersección de la curva de demanda en el eje del precio. Entonces $\eta_D = \frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_1}{\hat{P} - P_1}$, o sea, si P_1 está por encima del punto medio de la demanda, entonces se está en el tramo elástico de la demanda. Y si P_1 está por debajo del punto medio, entonces se está en el tramos inelástico de la demanda.

Es así que D_1 y D_2 tienen la misma elasticidad porque tienen el mismo punto de intersección en el eje del precio. Similarmente, D_3 y D_4 también tienen la misma elasticidad.

D_1 y D_2 son curvas más inelásticas que D_3 y D_4 porque por ejemplo, cuando D_1 y D_2 están en el punto medio (entre 0 y la intersección de las curvas con el eje del precio), D_3 y D_4 están apenas iniciándose lo que significa que están en su tramo elástico.

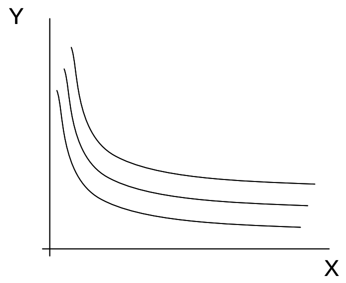
1.2.4 Considere la siguiente función de utilidad: U(X,Y) = $X^{1/2}Y^{1/4}$ y desarrolle los siguientes ítems:

a. Calcule la TMS.

La función de utilidad se puede transformar en U(X,Y) = $X^{2/3}Y^{1/3}$, por lo que la $TMS = -\frac{U_X}{U_Y} = -\frac{2Y}{X}$

b. Dibuje la forma de las curvas de indiferencia.

Las curvas son convexas aunque relativamente planas:



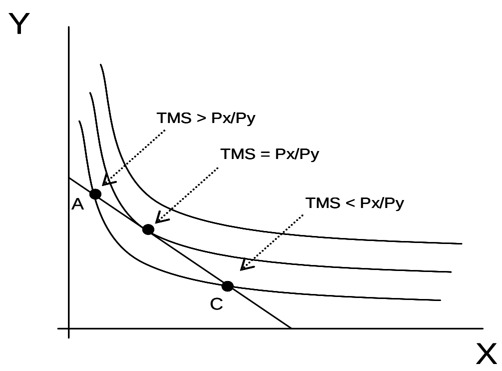
c. Si las cantidades que consume esta persona son 2 unidades de X y 4 unidades de Y, ¿qué valoraría más el consumidor: recibir una unidad adicional de X o recibir una unidad adicional de Y?

TMS (2,4) = - 2 (4) / 2 = - 4. Por tanto, una unidad extra de X le aumenta la utilidad en 4, mientras que una unidad extra de Y le aumenta la utilidad en 1. Esto quiere decir que prefiere una unidad extra de X. También puede observase que U(3,4) > U(2,5).

d. Asuma que la restricción presupuestaria está dada por PxX + PyY = I. Encuentre los puntos óptimos de consumo para X e Y.

$$X^* = \frac{2}{3}\frac{I}{P_X};\ Y^* = \frac{1}{3}\frac{I}{P_Y}$$

e. Represente el equilibrio del consumidor en un gráfico.



f. ¿Por qué estos puntos son óptimos para el consumir, o sea, por qué se trata de un equilibrio para el consumidor? Analice el equilibrio desde una perspectiva económica y no gráfica.

Este es el punto en donde se maximiza la utilidad total del consumidor, lo cual se logra cuando las utilidades marginales por colón son idénticas. Esto quiere decir que no se puede redistribuir el gasto para obtener una mayor satisfacción. Si se estuviera para arriba del equilibrio (como en el punto A), la utilidad marginal por colón de X sería mayor que la de Y, por lo que el consumidor ganaría al incrementar el consumo de X y bajar el de Y sin variar el gasto, ya que las utilidades marginales son decrecientes. Al mismo tiempo, si se estuviera por debajo del equilibrio (como en el punto C), la utilidad marginal por colón de X sería inferior a la de Y por lo que el consumidor ganaría satisfacción al dejar de comprar X para comprar más de Y, sin gastar más dinero, esto es, con el mismo presupuesto.

g. Si en el óptimo el consumo de X resulta ser de 2 unidades y el consumo de Y de 4 unidades, cuánto entonces debieron ser los precios relativos bajo los cuales el consumidor llegó a esta solución?

$$TMS = -4 = -\frac{P_X}{P_Y}$$

h. Siguiendo con los valores del punto g, si el Ingreso era de 1200 colones, entonces ¿cuánto fueron los precios absolutos?

Px * 2 + Py * 4 = 1200; Px = 4 Py → 8 P y + 4 Py = 1200 → Py = 100, Px = 400

i. Encuentre la ecuación de la curva de oferta precio de este consumidor.

Si el precio que cambia es el del bien X, la pendiente de la curva oferta precio es cero; si el precio que cambia es el del bien Y, la pendiente es infinito.

j. Encuentre la ecuación de la curva de oferta ingreso de este consumidor.

La curva sale del origen y pasa por el punto (X, Y) = (2,4), la pendiente es igual a 2.

k. Encuentre la ecuación de la curva de Engels para este consumidor.

$X^* = \frac{2}{3}\frac{I}{P_X} \rightarrow I = \frac{3}{2}XP_X$. La pendiente es igual a $I' = \frac{3}{2}P_X$.

$Y^* = \frac{1}{3}\frac{I}{P_Y} \rightarrow I = 3YP_Y$. La pendiente es igual a $I' = 3P_Y$.

l. Obtenga la elasticidad de las demandas de X e Y encontradas en el punto d. ¿Son estas demandas elásticas, inelásticas o unitarias?

$\frac{\Delta X}{\Delta P_X}\frac{P_X}{X}=-\frac{2}{3}\frac{I}{P_X^2}\frac{P_X}{X}=-\frac{2}{3}\frac{I}{P_X}\frac{1}{\frac{2}{3}\frac{I}{P_X}}=-1$. Este resultado se sabe de antemano porque el gasto es constante en las funciones de utilidad Cobb-Douglas. Lo mismo aplica con Y.

m. Obtenga la magnitud del efecto ingreso y el efecto sustitución de un cambio en el precio de X sobre el bien X.

$$X_A=\frac{2}{3}\frac{I}{P_A};\quad X_B=\frac{2}{3}\frac{I}{P_B};\quad \Delta I=X_A(P_B-P_A)=\frac{2}{3}\frac{I}{P_A}(P_B-P_A);\quad X_C=\frac{2}{3}\frac{I+\frac{2}{3}\frac{I}{P_A}(P_B-P_A)}{P_B}$$

$$X_C=\frac{2}{3}\left[\frac{I}{P_B}+\frac{2}{3}\frac{I}{P_AP_B}(P_B-P_A)\right]$$

$$\rightarrow E.I.=X_B-X_C=\frac{2}{3}\frac{I}{P_B}-\frac{2}{3}\left[\frac{I}{P_B}+\frac{2}{3}\frac{I}{P_AP_B}(P_B-P_A)\right]=-\frac{4}{9}\frac{I}{P_AP_B}(P_B-P_A)$$

$$\rightarrow E.S.=X_C-X_A=\frac{2}{3}\left[\frac{I}{P_B}+\frac{2}{3}\frac{I}{P_AP_B}(P_B-P_A)\right]-\frac{2}{3}\frac{I}{P_A}=\frac{2}{3}\left[\frac{I}{P_B}-\frac{I}{P_A}+\frac{2}{3}\frac{I}{P_AP_B}(P_B-P_A)\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{(P_A-P_B)}{P_AP_B}-\frac{2}{3}\frac{I}{P_AP_B}(P_A-P_B)\right]=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}\frac{(P_A-P_B)}{P_AP_B}\right]$$

n. Obtenga la magnitud del efecto ingreso y del efecto sustitución de un cambio en el precio de Y sobre el bien Y.

$$Y_A=\frac{1}{3}\frac{I}{P_A};\quad Y_B=\frac{1}{3}\frac{I}{P_B};\quad \Delta I=Y_A(P_B-P_A)=\frac{1}{3}\frac{I}{P_A}(P_B-P_A);\quad Y_C=\frac{1}{3}\frac{I+\frac{1}{3}\frac{I}{P_A}(P_B-P_A)}{P_B}$$

$$Y_C=\frac{1}{3}\left[\frac{I}{P_B}+\frac{1}{3}\frac{I}{P_AP_B}(P_B-P_A)\right]$$

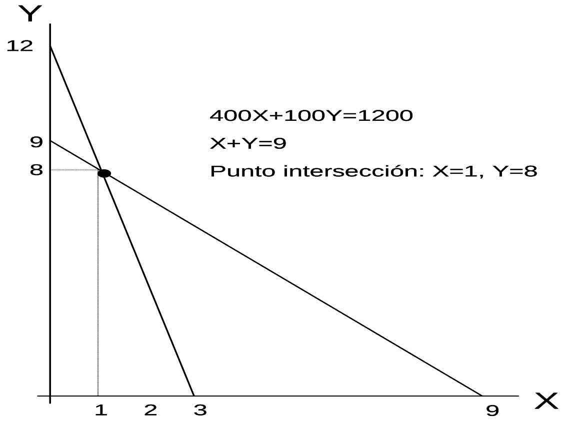
$$\rightarrow E.I.=Y_B-Y_C=\frac{1}{3}\frac{I}{P_B}-\frac{1}{3}\left[\frac{I}{P_B}+\frac{1}{3}\frac{I}{P_AP_B}(P_B-P_A)\right]=-\frac{1}{9}\frac{I}{P_AP_B}(P_B-P_A)$$

$$\rightarrow E.S.=Y_C-Y_A=\frac{1}{3}\left[\frac{I}{P_B}+\frac{1}{3}\frac{I}{P_AP_B}(P_B-P_A)\right]-\frac{1}{3}\frac{I}{P_A}=\frac{1}{3}\left[\frac{I}{P_B}-\frac{I}{P_A}+\frac{1}{3}\frac{I}{P_AP_B}(P_B-P_A)\right]=$$

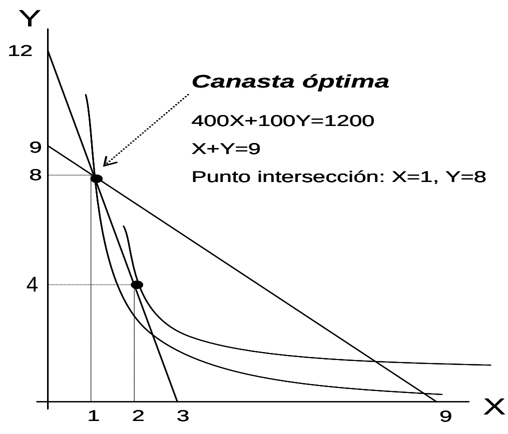
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{(P_A-P_B)}{P_AP_B}-\frac{1}{3}\frac{I}{P_AP_B}(P_A-P_B)\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}\frac{(P_A-P_B)}{P_AP_B}\right]$$

Suponga que los precios absolutos y el nivel de ingresos son como los encontrados en el punto h. Adicionalmente suponga que el consumidor presenta una restricción adicional y es que el mínimo de consumo que debe realizar sumando las unidades de X e Y tiene que ser superior a 9 unidades. Bajo estas circunstancias:

o. Dibuje el set de restricciones a las que se ve enfrentado el consumidor y sombree las áreas en donde este consumidor cumple con ambas restricciones.



p. Encuentre la canasta óptima para este consumidor. Dibújela en el gráfico.



CAPÍTULO 2
LAS PREFERENCIAS REVELADAS

TEMARIO

La teoría de las preferencias reveladas surge como una respuesta a las críticas a los modelos microeconómicos que tratan de medir la satisfacción de los individuos mediante la definición de funciones de utilidad y el uso de curvas de indiferencia.

Es por lo anterior, que la teoría de las preferencias reveladas se basa en la manipulación de restricciones presupuestarias con el fin de tratar de encontrar la revelación del consumidor de canastas de consumo preferidas.

Por tanto, los ejercicios de este capítulo se pueden clasificar en dos grupos: la demostración de los axiomas de las preferencias reveladas y el uso de la restricción presupuestaria para encontrar canastas preferidas.

2.1 Los axiomas de las preferencias reveladas

Estos ejercicios consisten en probar si se cumplen los axiomas débil y fuerte de las preferencias reveladas. Por lo general, se parte de canastas de consumo observadas para diferentes periodos o distintos consumidores, con el fin de determinar si existe revelación de unas canastas sobre otras y probar si existe consistencia con los axiomas de las preferencias reveladas.

2.2 La restricción presupuestaria

Los ejercicios de este apartado consisten en utilizar restricciones presupuestarias para encontrar revelación de canastas preferidas de un consumidor o grupo de consumidores. La variedad de ejercicios consiste en imponer restricciones adicionales al consumidor, como consumos mínimos o el establecimiento de impuestos, para determinar cuáles situaciones son mejores o peores para el consumidor.

2.3 Ejercicios a solucionar

2.1 LOS AXIOMAS DE LAS PREFENCIAS REVELADAS

2.1.1 Arándanos y bananos

José gasta todo su ingreso en arándanos y bananos. A continuación se presenta la información de su consumo en los años 2009, 2010 y 2011 y los precios de los arándanos, P_A, y de los bananos, P_B, en esos años.

Año	Arándanos (unidades)	P_A	Bananos (unidades)	P_B
2009	3	20	6	10
2010	8	10	2	35
2011	5	20	5	20

a. Usando la información del cuadro, ¿podría usted decir si José está mejor en 2010 que en 2009? ¿En 2011 que en 2009? ¿En 2011 que en 2010?

Canasta	Año	A	P_A	B	P_B	Costo Canasta 1	Costo Canasta 2	Costo Canasta 3
1	2009	3	20	6	10	120*	180	150
2	2010	8	10	2	35	240	150*	225
3	2011	5	20	5	20	180	200	200*

No se puede asegurar que José está mejor en 2009 que en 2010 o viceversa. Pero sí se puede asegurar que José está mejor en 2011 que en 2009 y al menos tan bien en 2011 que en 2010. Se cumple el ADPR.

b. ¿Cómo cambiaría su respuesta si el consumo de José en el año 2010 fuera 16 arándanos y 4 bananos?

Canasta	Año	A	P_A	B	P_B	Costo Canasta 1	Costo Canasta 2	Costo Canasta 3
1	2009	3	20	6	10	120*	360	150
2	2010	16	10	4	35	240	300*	225
3	2011	5	20	5	20	180	400	200*

Se podría asegurar que José está mejor en 2010 que en 2009 y 2011. Además, estaría mejor en 2011 que en 2009. Por lo tanto, 2010 > 2011 > 2009. Se cumple el ADPR.

2.1.2 Durante un periodo de 3 años, un individuo exhibe el siguiente comportamiento de consumo:

	P_X	P_Y	X	Y
Año 1	3	3	7	4
Año 2	4	2	6	6
Año 3	5	1	7	3

¿Es este comportamiento consistente con un consumidor que maximiza la utilidad?

Canasta	X	P_X	Y	P_Y	Costo Canasta 1	Costo Canasta 2	Costo Canasta 3
1	7	3	4	3	33*	36	30
2	6	4	6	2	36	36*	34
3	7	5	3	1	39	36	38*

Con la información del primer año se deduce que A>C, con la del segundo año que B>C, B≥A, y con la del tercer año que C>B. Por tanto, el comportamiento no es consistente con un consumidor que maximiza la utilidad.

2.1.3 Sea A la canasta (7,9), B la canasta (10,5) y C la canasta (6,6). Cuando los precios son (2,4), Betty escoge C. Cuando los precios son (12,3), ella escoge la canasta A. ¿Qué de lo siguiente es correcto?

a. A es directamente revelado a B.
b. A es indirectamente revelado a B.
c. C es directamente revelado a A.
d. B es directamente revelado a A.
● Ninguna de las anteriores

Canasta	Pa : (12,3)	Pc : (2,4)
A : (7,9)	111*	50
B : (10,5)	135	40
C : (6,6)	90	36*
	A>C	

2.1.4 Cuando los precios eran (3,1), Linda eligió la canasta (6,6). Ahora a los nuevos precios (Px,Py), ella eligió (5,8). Para que este comportamiento sea consistente con el ADPR se tiene que cumplir que:

● 2Py<Px
b. Px<2Py
c. 3Py<Px
d. Py=3Px
e. Ninguna de las anteriores.

		Pa	Pb
		(3, 1)	(Px, Py)
A	(6, 6)	24	6Px+6Py
B	(5, 8)	23	5Px+8Py

De la primera canasta se extrae que A > B. Por tanto, 6 Px+6 Py > 5 Px+8 Py para no romper el axioma. O sea, Px > 2 Py.

2.1.5 Con los precios (4,12), Henry escoge la canasta (9,4). Con los precios (8,4), Henry elige la canasta (2,9). ¿Es este comportamiento consistente con el axioma débil de las preferencias reveladas?

● Sí.
b. No.
c. Depende del ingreso.
d. Se necesita una tercera canasta para poder determinarlo.
e. Ninguna de las anteriores.

		Pa	Pb
		(4, 12)	(8, 4)
A	(9, 4)	84	88
B	(2, 9)	116	52

Como ninguna canasta se revela sobre otra, no se rompe con el axioma.

2.1.6 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

a. Si el axioma débil de las preferencias reveladas se cumple, también se cumple el axioma fuerte de las preferencias reveladas.
● Si el axioma fuerte de las preferencias reveladas se cumple, también se cumple el axioma débil de las preferencias reveladas.
● Si el axioma débil de las preferencias reveladas no se cumple, tampoco se cumple el axioma fuerte de las preferencias reveladas.
d. Si el axioma fuerte de las preferencias reveladas no se cumple, tampoco se cumple el axioma débil de las preferencias reveladas.

El axioma fuerte requiere del supuesto de transitividad, así que el rompimiento del débil no permite que el fuerte se cumpla. Igualmente, el cumplimiento del axioma fuerte implica el cumplimiento del axioma débil, pues lo que se necesita para que el primero se cumpla. Por tanto, la opción b y c son correctas.

2.1.7 Preferencias reveladas con precios indeterminados

Se ha observado que un consumidor compró las siguientes canastas de los bienes X_1, X_2 y X_3 cuando los precios eran los mostrados en la tabla de abajo. Note que los precios incluyen una variable α, β y μ que hay que determinar.

Canasta	P_1	P_2	P_3	X_1	X_2	X_3
A	**1**	**1+ α**	**8**	**2**	**1**	**3**
B	**4**	**1**	**4+ β**	**3**	**4**	**2**
C	**1+μ**	**1**	**2**	**2**	**6**	**2**

A. Si $\alpha = 1$, $\beta = 4$ y $\mu = 2$:

- **i. Rompe este comportamiento con el Axioma Débil de las Preferencias Reveladas.**
- **ii. Rompe este comportamiento con el Axioma Fuerte de las Preferencias Reveladas.**

Recuerde que el ADPR se rompe cuando las preferencias se revelan DIRECTAMENTE y son contradictorias, por ejemplo cuando A>B y B>A. Por su parte, el AFPR se rompe cuando las preferencias se revelan INDIRECTAMENTE y son contradictorias, por ejemplo A>B, B>C y C>A. Esto significa que el AFPR puede romperse y el ADPR puede cumplirse simultáneamente.

Cuando $\alpha = 1$, $\beta = 4$ y $\mu = 2$, el cuadro se resumiría en:

Canasta	P_1	P_2	P_3	X_1	X_2	X_3
A	1	2	8	2	1	3
B	4	1	8	3	4	2
C	3	1	2	2	6	2

De esto se extrae la siguiente información:

	Canasta A	Canasta B	Canasta C	Información revelada
Costo de la Canasta a P_1	**28**	27	30	A>B
Costo de la canasta a P_2	33	**32**	30	B>C
Costo de la canasta a P_3	13	17	**16**	C>A

- i. El ADPR no se rompe, pues no se da el caso de inconsistencia entre dos canastas, como por ejemplo A>B y B>A.
- ii. El AFPR sí se rompe porque no se cumple la transitividad. A>B, B>C, pero C>A.

B. Encuentre el rango de valores de α, β y μ que hace que (recuerde que los precios no pueden ser negativos):

- **i. Se cumpla el ADPR.**
- **ii. Se rompa del AFPR.**

Del cuadro:

Canasta	P_1	P_2	P_3	X_1	X_2	X_3
A	1	$1+\alpha$	8	2	1	3
B	4	1	$4+\beta$	3	4	2
C	$1+\mu$	1	2	2	6	2

se extrae la siguiente información:

	Canasta A	Canasta B	Canasta C	Información revelada
Costo de la Canasta a P_1	$\mathbf{27+\alpha}$	$23+4\alpha$	$24+6\alpha$	A>B si $\alpha<4/3$ A>C si $\alpha<3/5$
Costo de la canasta a P_2	$21+3\beta$	$\mathbf{24+2\beta}$	$22+2\beta$	B>A si $\beta<3$ B>C $\forall\ \beta$
Costo de la canasta a P_3	$9+2\mu$	$11+3\mu$	$\mathbf{12+2\mu}$	C>A $\forall\ \mu$ C>B si $\mu<1$

De la primera línea del cuadro se revela que:

a. A > B si $27+\alpha > 23+4\alpha \rightarrow$ si $\alpha < 4/3$
b. A > C si $27+\alpha > 24+6\alpha \rightarrow$ si $\alpha < 3/5$

De la segunda línea del cuadro se obtiene que:

a. B > A si $24+2\beta > 21+3\beta \rightarrow$ si $\beta < 3$
b. B > C si $24+2\beta > 22+2\beta \rightarrow$ lo cual se cumple para todo valor de β

De la tercera línea del cuadro se obtiene que:

a. C > A si $12+2\mu > 9+2\mu \rightarrow$ lo cual se cumple para todo valor de μ
b. C > B si $12+2\mu > 11+3\mu \rightarrow$ si $\mu < 1$

i. C > A y B > C para todos los valores, lo cual significa que en ningún caso A>C (o sea, se necesita $\boldsymbol{\alpha>3/5}$) y C>B (o sea, se necesita $\boldsymbol{\mu>1}$). Entonces, se cumple el ADPR si además de estas condiciones se dan los siguientes casos:
Caso 1: A>B y B no es mayor que A lo cual se cumple cuando $\alpha<4/3$ y $\beta>3$.
Caso 2: B>A y A no es mayor que B lo cual se cumple cuando $\alpha>4/3$ y $\beta<3$.
Caso 3: no hay relación entre A y B lo cual se cumple cuando $\alpha>4/3$ y $\beta>3$.

ii. Si el axioma débil se rompe, también se rompe el fuerte. Pero aun cumpliéndose el débil, el fuerte se puede romper si A>B, B>C y C>A, lo cual se cumple si $\alpha<4/3$.

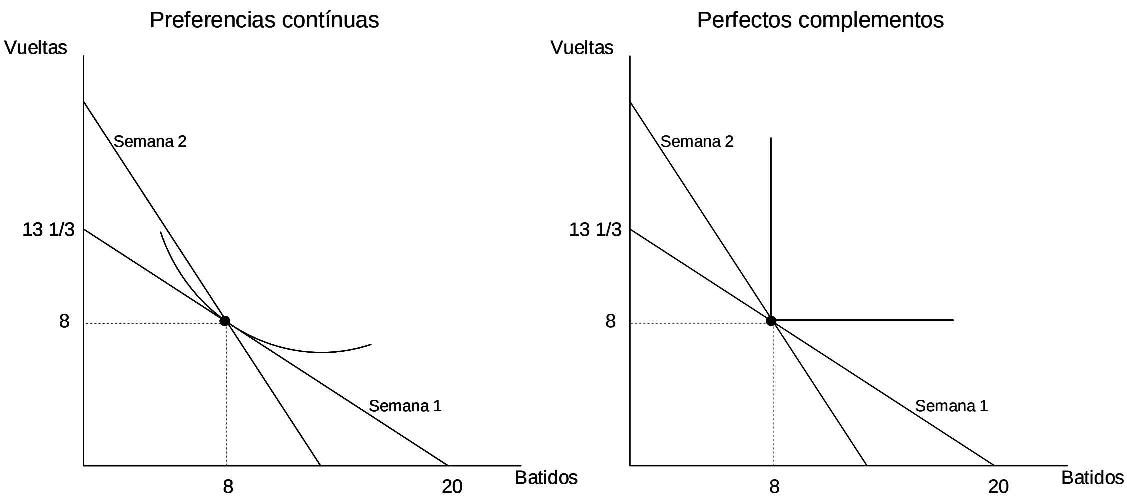
2.2 LA RESTRICCIÓN PRESUPUESTARIA

2.2.1 La diversión y el ADPR

a. **Cada fin de semana, Ella va al Parque Nacional de Diversiones (PND) y gasta todo su presupuesto de 40 mil colones. Solamente hay dos cosas en las que Ella gasta su dinero allí: en la montaña rusa y batidos de helados. En la semana 1, cuando la montaña rusa costaba 3 mil colones la vuelta y el batido de helados 2 mil colones, Ella compra 8 vueltas y 8 batidos.**

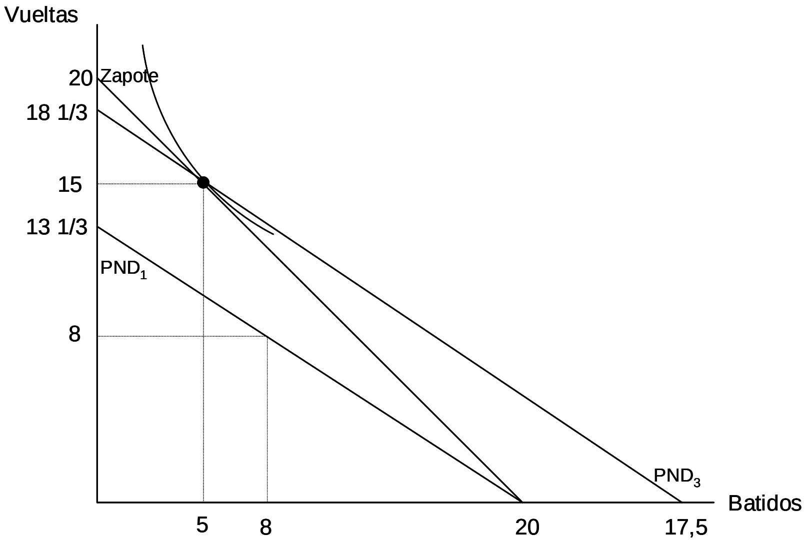
   En la semana 2, el PND cambia sus precios a 2 mil la vuelta y 3 mil los batidos. Asumiendo solamente que el Axioma Débil de las Preferencias Reveladas se cumple, ¿será posible para Ella estar estrictamente mejor en la semana 2? ¿Podría Ella estar estrictamente peor? ¿Podría Ella estar exactamente tan bien que en la semana 1 (o sea, indiferente)? Explique.

   Si las preferencias son convexas, Ella va a estar por lo menos tan bien como lo estaba en la Semana 1, pero no necesariamente va a estar estrictamente mejor. Si además las preferencias son continuas (o sea, no se trata por ejemplo de perfectos complementos), Ella va a estar estrictamente mejor, pues va a preferir ubicarse a la izquierda del punto original pero sobre la nueva restricción presupuestaria. Si por ejemplo, las preferencias son de perfectos complementos, Ella está tan bien como en la semana pasada.



b. **En la semana 3, el PND cambia sus precios de vuelta a 3 mil la vuelta y 2 mil el batido. Pero empieza a funcionar un nuevo parque de diversiones en Zapote. Allí, la montaña rusa y los batidos de helado cuestan ambos 2 mil colones cada uno. Si Ella fuera a Zapote compraría 15 vueltas en montaña rusa y 5 batidos de helado. Para competir, el PND ofrece la siguiente promoción: cualquier cliente que gaste al menos 40 mil colones recibirá 15 mil colones gratis en cupones para ser canjeados ya sea en la montaña rusa o en batidos de helados. ¿A cuál parque de diversiones iría Ella: a Zapote o al PND? Explique**

Si las preferencias son continuas y convexas se va a quedar en el PND, tal y como se puede apreciar en el gráfico, pues va a preferir ubicarse a la derecha del punto elegido en Zapote y sobre la restricción presupuestaria PND_3.



2.2.2 Si el Gobierno le diera un subsidio de $100 por mes para que usted lo gaste en vivienda y si usted pudiera gastar el resto de su ingreso en la forma en que usted quiera, el efecto de este subsidio diferiría del efecto de un incremento de $100 irrestricto de su ingreso solo si:

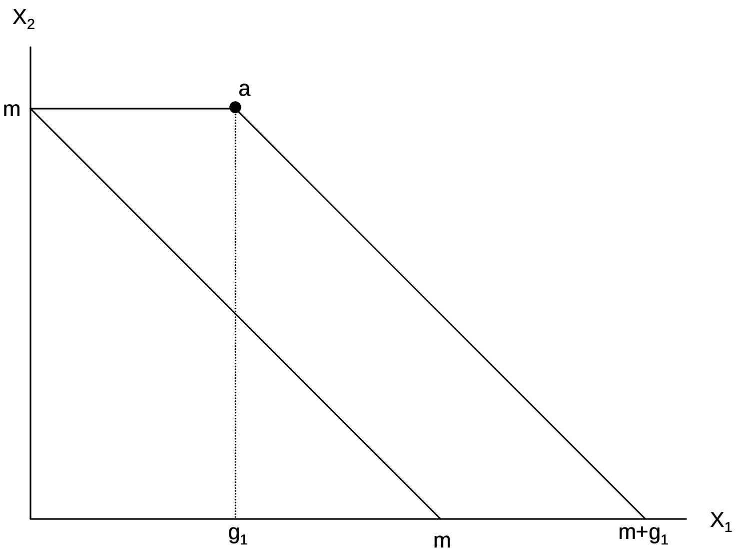
a. La vivienda fuera un bien inferior para usted.
b. La vivienda fuera un bien normal para usted.
● Usted gasta menos de $100 por mes en vivienda cuando usted recibe el incremento irrestricto de $100 en su ingreso.
d. Usted gasta más de $100 por mes en vivienda cuando usted recibe el incremento irrestricto de $100 en su ingreso.
e. Sus preferencias son nomotéticas.
f. Ninguna de las anteriores

Se afecta solo si usted gasta menos de los $100 en vivienda luego del impuesto pues de lo contrario, el subsidio indirecto sería igual a uno directo.

2.2.3 Un consumidor maximizador de la utilidad tiene preferencias estrictamente convexas y estrictamente monótonas y consume dos bienes, X_1 y X_2, cuyo precio es 1 en ambos casos. No puede consumir cantidades negativas de ninguno de los dos bienes. Tiene una renta anual de m. Su nivel actual de consumo es (X_1^*, X_2^*), donde $X_1^* > 0$, $X_2^* > 0$. Suponga que el próximo año, el consumidor recibirá una ayuda de $g_1 \leq X_1^*$, que debe gastar enteramente en el bien 1 (si lo desea, puede rechazar la ayuda).

a. ¿Verdadero o falso? Si el bien 1 es un bien normal, la influencia de la ayuda en su consumo debe ser igual que la influencia de una ayuda de la misma cuantía que no estuviera sujeta a ninguna limitación (o sea, que no se deba comprar solo el bien 1 con la ayuda). Demuestre su respuesta.

Verdadero. Como X_1^* está localizado a la derecha de g_1, bajo la nueva restricción presupuestaria el consumo final es superior a g_1, o sea, se localiza a la derecha del punto a sobre la nueva restricción presupuestaria y acepta toda la ayuda.



b. ¿Verdadero o falso? Si el bien 1 es un bien inferior para el consumidor anterior en todos los niveles de renta $m > X_1^* + X_2^*$, si recibe una ayuda de g_1 que debe gastarse en el bien 1, el efecto debe ser el mismo que el de una ayuda de la misma cuantía que no esté sujeta a limitaciones. Si esta afirmación es cierta demuéstrelo, sino muestre qué hará con la ayuda.

Falso. Todo depende del monto de la ayuda y de qué tan inferior sea el bien. Si la ayuda es muy pequeña en relación con el consumo inicial de X_1, o el bien no es tan inferior, para el consumidor la ayuda con limitaciones es equivalente a una ayuda sin limitaciones, de forma tal que el equilibrio final se puede ubicar a la derecha del punto a sobre la nueva restricción presupuestaria. Pero, si la ayuda es muy cercana a X_1^* o el bien es muy inferior, el equilibrio final se ubicará en el punto a, en donde el consumidor toma toda la ayuda, pero logra una menor satisfacción que si recibiera una ayuda irrestricta, lo cual le permitiría ubicarse a la izquierda de a, sobre la extensión de la curva a-(m+g_1), lo cual no puede hacer por la restricción impuesta.

2.3 EJERCICIOS A SOLUCIONAR

2.3.1 Guerra de precios entre supermercados

Megasuper y Perimercados han decidido entrar en una guerra de precios con el fin de atraer compradores a sus negocios. La estrategia que ha adoptado Perimercados es regalar las primeras cuatro unidades del bien X a aquellas personas que se acerquen al supermercado (cada persona puede recibir el regalo una única vez), mientras que Megasuper ofrece un descuento de 50% sobre todas las unidades, siempre y cuando la persona compre cuatro o más unidades. Un consumidor dispone de 5.000 colones y desea comprar X en un único supermercado, el precio sin descuentos es igual a 500 colones y es el mismo en ambos supermercados, entonces:

a. Dibuje los dos sets presupuestarios en un mismo gráfico.
b. ¿En cuál supermercado le conviene comprar a este consumidor?
c. Se ha observado que este consumidor en una oportunidad tenía 7.000 colones y acudió a Megasuper a comprar 15 unidades del bien X, mientras que en otra oportunidad, el consumidor tenía 5.000 colones y compró 6 unidades del bien X. ¿Es este comportamiento racional con un consumidor que optimiza su satisfacción y por tanto cumple con los axiomas de las preferencias reveladas?

2.3.2 Las preferencias reveladas – Teoría general

Se ha observado que una persona consume la canasta (X,Y) cuando los precios son (1,2). Pero cuando los precios son (Px,Py), esta misma persona elige la canasta (2,1).

a. ¿Qué tipo de relaciones deben existir para que se cumpla con el Axioma Débil de las Preferencias Reveladas?

Ahora asuma que se observa una tercera observación y esta persona consume la cantidad (X´,Y´) cuando se dan los precios (Px´,Py´).

b. ¿Qué tipo de relaciones deben existir para que se cumpla con el Axioma Fuerte de las Preferencias Reveladas?

2.3.3 Cumplimiento de las preferencias reveladas

a. Si o no: ¿Puede una persona que siempre cumple con el Axioma Débil de las Preferencias Reveladas, romper el Axioma Fuerte de las Preferencias Reveladas?
b. Falso o verdadero: Un individuo que maximiza su satisfacción SIEMPRE cumple con ambos axiomas de las preferencia reveladas.

CAPÍTULO 3
EL ÓPTIMO DE LA EMPRESA Y LA OFERTA

TEMARIO

Los ejercicios en este capítulo consisten en encontrar el óptimo del productor y a partir de allí encontrar la oferta de producto. Para el óptimo del productor se refuerza el concepto de la dualidad que existe entre la maximización de las ganancias y la minimización del costo. Es así que los ejercicios se dividen en dos grupos: en los que trabaja por encontrar el óptimo de la empresa y los que manipulan la oferta del productor.

3.1 El óptimo de la empresa

Estos ejercicios refuerzan los conceptos de las condiciones de equilibrio de la empresa, ya sea que minimizan los costos al productor, mediante la utilización de funciones de producción y restricciones presupuestarias, o bien la maximización de las ganancias por medio de la igualación del costo marginal del producto y el ingreso marginal. Algunas variaciones en los ejercicios pueden incorporar restricciones adicionales a la hora de producir.

3.2 La oferta de producto

En este segmento se trabajan con funciones de ofertas definidas y los ejercicios tienen por intensión mostrar las diferencias en la oferta de las empresas en el largo, corto y plazo inmediato.

3.3 Ejercicios a solucionar

3.1 EL ÓPTIMO DE LA EMPRESA

3.1.1 Pruebe matemáticamente que la minimización del costo y la maximización de la ganancia produce el mismo óptimo para el empresario.

Para un tomador de precios, la maximización del costo hace que el P=CM_Q, mientras que la minimización del costo produce que VPM_L=w.

$$P = CM_Q \rightarrow P = \frac{\Delta CT}{\Delta Q} \rightarrow P = \frac{\Delta(wL + rK)}{\Delta Q} \rightarrow P = w\frac{\Delta L}{\Delta Q} \rightarrow P = w\frac{1}{\Delta Q/\Delta L} \rightarrow P = \frac{w}{PM_L}$$
$$\rightarrow P * PM_L = w \rightarrow VPM_L = P$$

3.1.2 Una empresa se enfrenta a la siguiente función de producción Q = L^2 K, donde K y L son los insumos que la empresa emplea y r y w son los costos respectivos de esos insumos que adquieren en un mercado competitivo. Encuentre la función de CT y la curva de oferta de esta empresa.

El equilibrio de la empresa dice que para minimizar el costo:

$$TMST = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{2LK}{L^2} \equiv 2\frac{K}{L} = \frac{w}{r} \Rightarrow L = \frac{2rK}{w}$$
$$\Rightarrow CT = wL + rk \Rightarrow w\left(\frac{2rK}{w}\right) + rK = 3rK,$$
$$\Rightarrow Q = \left(\frac{2rK}{w}\right)^2 K = K^3\left(\frac{2r}{w}\right)^2 \Rightarrow K = Q^{1/3}\left(\frac{w}{2r}\right)^{2/3}$$
$$\Rightarrow CT = 3rQ^{1/3}\left(\frac{w}{2r}\right)^{2/3} = 3r^{1/3}\left(\frac{w}{2}\right)^{2/3} Q^{1/3}$$
$$CM = \frac{dCT}{dQ} = r^{1/3}\left(\frac{w}{2}\right)^{2/3} Q^{-2/3} = P$$

3.1.3 Explique cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que una empresa optimice ganancias y minimice el costo. Además de las condiciones matemáticas, usted debe dar las razones económicas.

a. El costo marginal debe ser igual al precio. Como el costo marginal es creciente, este el punto en donde se maximizan las ganancias. Si se detiene la producción antes de este punto, se están dejando de producir unidades que hubieran aumentado la ganancia total y si se produce más allá de ese punto, se están produciendo unidades con pérdida.
b. El costo marginal debe estar en su segmento creciente cuando iguale al precio, pues de lo contrario se maximizaría la pérdida.
c. El precio tiene que ser superior al mínimo del costo variable promedio pues sino es más ventajoso para la empresa cerrar la empresa y perder el costo fijo.

3.1.4 Funciones de producción – Dos factores variables

La función de producción de una granja de maíz está representada por el cuadro:

Producción de Maíz (q) para diferentes unidades de insumos de tierra (a) y trabajo (b)

Tierra	Trabajo, horas - hombre por día (b)					
(Ha)	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	240	360	360	240	0
2	0	270	480	630	720	750
3	0	280	520	720	880	1000
4	0	285	540	765	960	1125
5	0	288	552	792	1008	1200

a. **Con esta información, encuentre una buena <u>aproximación numérica</u> para los productos marginales del trabajo y la tierra, cuando se están utilizando 2 unidades de trabajo y 2 unidades de tierra.**

Si se parte del punto (Ha, b) = (2, 2), el PM de la tierra es 40 unidades adicionales de producto cuando se contrata una unidad adicional de tierra y el PM del trabajo es 150 unidades adicionales de producto.

b. **Asuma que la tierra permanece fija en 2 Ha. Tabule la demanda de trabajo (b) de la firma si el maíz se vende a ¢1 la unidad. Encuentre la ecuación que representa todos los puntos encontrados.**

Tierra	Trabajo, horas - hombre por día (b)					
(Ha)	0	1	2	3	4	5
2	0	270	480	630	720	750
PM_b	-	270	210	150	90	30

VPM = 330 – 60 b

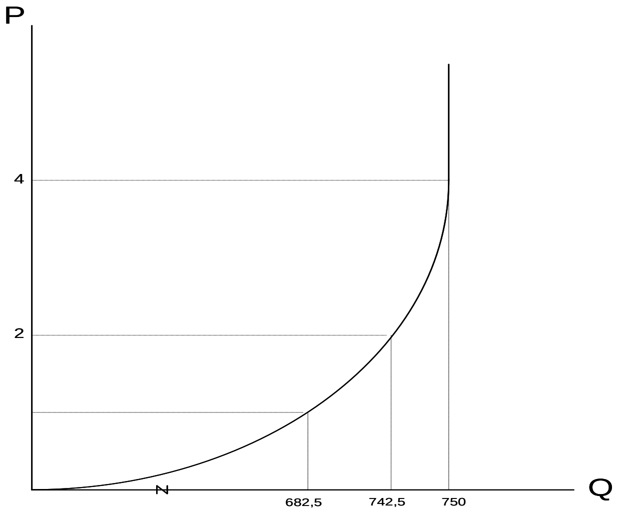
c. **De nuevo asuma que la tierra permanece fija en 2 Ha. Encuentre los puntos de oferta de maíz de la firma si el precio del trabajo es de ¢120 la hora. Exprese la cantidad ofrecida (q) como una función del precio (p). En los ejes q y p, dibuje la curva correspondiente a los puntos encontrados. ¿Cuál es el límite superior de producto que esta firma va a producir?**

$P * PM_b = w \rightarrow P * PM_b = 120 \rightarrow P * (330 - 60\ b) = 120 \rightarrow 330 - 60\ b = 120 / P$

$\rightarrow b = 11/2 - 2 / P$

Como la función de producción es $300b - 30\ b^2$ (esta función de producción se obtuvo por aproximación, pues no puede encontrarse integrando la función de producto marginal pues existe una discontinuidad pues el producto marginal está indefinido para valores de trabajo igual a 0):

	Precio por unidad (p)					
	0	1	2	3	4	5
b (w=120)	-	3,5	4,5	4,83	5	5,1
q	-	682,5	742,5	749,16	750	749.7



El límite superior de producción es:

$$\frac{dq}{db} = 300 - 60b = 0 \rightarrow b = 5 \rightarrow Q(5) = 300(5) - 30(25) = 750$$

d. Determine la ecuación de oferta por maíz de la firma.

$$q = 300\left(\frac{11}{2} - \frac{2}{p}\right) - 30\left(\frac{11}{2} - \frac{2}{p}\right)^2 = 1650 - \frac{600}{p} - 30\left(\frac{121}{4} - \frac{22}{p} + \frac{4}{p^2}\right) =$$

$$1650 - \frac{600}{p} - \frac{1815}{2} + \frac{660}{p} - \frac{120}{p^2}$$

$$q = \frac{1485}{2} + \frac{60}{p} - \frac{120}{p^2}$$

3.1.5 Una empresa se enfrenta a la siguiente función de producción Q = $L^{1/3}$ $K^{2/3}$, donde K y L son los insumos que la empresa emplea y r y w son los costos respectivos de esos insumos que adquieren en un mercado competitivo. Encuentre la función de CT y la curva de oferta de esta empresa.

El equilibrio de la empresa dice que para minimizar el costo:

$$TMST = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}L^{-2/3}K^{2/3}}{\frac{2}{3}L^{1/3}K^{-1/3}} \equiv \frac{1}{2}\frac{K}{L} = \frac{w}{r} \Rightarrow K = \frac{2wL}{r}$$

$$\Rightarrow CT = wL + r\left(\frac{2wL}{r}\right) = 3wL,$$

$$\Rightarrow Q = L^{1/3}\left(\frac{2wL}{r}\right)^{2/3} = L\left(\frac{2w}{r}\right)^{2/3} \Rightarrow L = Q\left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3}$$

$$\Rightarrow CT = 3wQ\left(\frac{r}{2w}\right)^{2/3} = 3w^{1/3}\left(\frac{r}{2}\right)^{2/3}Q$$

$$CM = \frac{dCT}{dQ} = 3w^{1/3}\left(\frac{r}{2}\right)^{2/3} = P$$

(La curva de CM igualada al precio es la oferta de la empresa)

3.1.6 ¿Cuál es la equivalencia que existe entre el producto marginal y el costo marginal?

$$CM = \frac{\Delta CT}{\Delta Q} = \frac{\Delta(w * L + r * \overline{K})}{\Delta Q} = \frac{w\Delta L}{\Delta Q} = \frac{w}{\frac{\Delta Q}{\Delta L}} = \frac{w}{PM_L}$$

3.1.7 Analice la siguiente afirmación: Cuando para una empresa el costo promedio es decreciente, es necesario que el costo marginal también sea decreciente

Esta afirmación es falsa. Cuando el costo promedio es decreciente lo único que se requiere es que el costo marginal sea inferior al costo promedio, pudiendo el costo marginal ser creciente o decreciente. Esta es una relación netamente matemática, pues para que el promedio baje, el aporte marginal debe ser menor al promedio.

3.1.8 Explique por qué el producto promedio sigue creciendo después de que el producto marginal ha llegado a su máximo y es decreciente.

Simplemente porque el producto marginal, a pesar de ser decreciente, sigue siendo superior al producto promedio, lo que lo hace crecer.

3.1.9 Los retornos a escala y el costo marginal

Una empresa que enfrenta retornos a escala constantes conforme aumenta su producción, presenta curvas de costo marginal y de costo total promedio de largo plazo con pendiente cero.

Esta afirmación es verdadera si se asume que la industria se enfrenta a costos constantes. O sea, una empresa que presenta retornos constantes a escala puede aumentar el producto aumentando en la misma proporción todos los insumos. Si los costos de los factores son constantes, esto se traduce en una curva de costo total con pendiente fija, lo que hace que el costo marginal y el promedio tengan pendiente cero.

3.2 LA OFERTA DE PRODUCTO

3.2.1 ¿Cuánto cuesta alimentar una vaca?

Milagro, la vaca Holstein que fue raptada por un taxista pirata, vive en un terreno muy grande pero que tiene solo algunos parches de pasto. Cuando ella encuentra una nueva área con pasto, la cantidad de pasto que consume es igual a la raíz cuadrada del número de horas, h, que ella gasta pastando allí. Para Milagro, encontrar un nuevo montículo de pasto para comer le toma una hora. Como Milagro no tiene bolsillos, la moneda en la cual se mide su costo es el tiempo.

a. **¿Cuál es el costo total de Milagro en encontrar un nuevo montículo de pasto y conseguir *Y* unidades de pasto de ese montículo?**

CT = 1+ Y^2, pues Y = $h^{½}$ y el tiempo en encontrar un nuevo montículo es 1 + h.

b. **Encuentre una expresión para el costo marginal y el costo promedio por montículo de pasto como función de la cantidad de pasto que ella consigue en cada montículo.**

CM = 2Y; CP = 1/Y + Y.

c. **¿Cuánto tiempo Milagro gastaría en cada montículo de pasto si ella quiere maximizar la cantidad de alimento que consume?**

1 Hora. Este es el punto de equilibrio de largo plazo de la vaca, al cual llega ubicándose en el mínimo del costo promedio. O sea, al minimizar CP = 1/Y + Y, se obtiene un valor de Y = 1, h = 1, de acuerdo con la función de producción Y = $h^{½}$.

Desde el punto de vista intuitivo, al ser la función de producción Y = $h^{½}$, Y > h para valores de h entre 0 y 1: y Y < h, para valores de h mayores a 1. Esto significa que en el primer tramo (menos de 1 hora por montículo), la vaca obtiene más pasto que el tiempo que invierte, pero después de la hora, obtiene menos pasto que el tiempo que invierte, por lo que le conviene moverse y buscar otro montículo.

3.2.2 Oferta con restricciones a la entrada

Uno de los supuestos para determinar la curva de oferta de largo plazo de una industria que opera en un mercado competitivo es que los costos de entrada y salida no existen. Supongamos que levantamos este supuesto y ahora existe un costo fijo –K- para entrar a la industria y un costo fijo –L- para salir de la misma. Analice,

a. ¿Cómo variaría la curva de oferta de largo plazo de esta industria si asumimos que los costos de producción son constantes?

La oferta de la industria presentaría pendiente positiva, aun en presencia de una industria con costos constantes, ya que cuando sube la demanda y las empresas generan una utilidad, no pueden entrar todas las empresas necesarias para llevar el precio de vuelta al valor inicial, pues las ganancias iguales a cero se alcanzan a precios mayores por los costos de entrada; esto quiere decir que las empresas siguen entrando hasta que las ganancias de las empresas que ya estaban en el mercado sean iguales a K, el costo fijo por entrar. De la misma forma, cuando la demanda disminuye, las empresas tendrían una pérdida y no podrán abandonar el mercado inmediatamente a menos de que las pérdidas sean superiores a L, el costo fijo por salir.

b. Indique cuál es el efecto sobre el número de empresas de la industria, el precio y la utilidad de una empresa representativa si: i. aumenta la demanda de la industria. ii. si disminuye la demanda de la industria.

Comparando la situación con la ausencia de barreras a la entrada y salida:

Número de empresas en la industria:

i. La cantidad sería menor, pues pueden entrar menos empresas.
ii. La cantidad sería mayor, pues hay empresas que no pueden salir.

Precio:

i. El precio sería mayor pues la restricción a la entrada impide que entren nuevas empresas para disminuir el precio de equilibrio.
ii. El precio sería menor pues la restricción a la salida le impide a algunas empresas salir y aumentar el precio de equilibrio.

Utilidad de una empresa:

i. La utilidad sería positiva hasta por un monto K pues la barrera de la entrada impide que entren nuevas empresas, baje el precio y lleve la utilidad a cero.
ii. La utilidad sería negativa hasta por un monto L pues la barrera a la salida impide que salgan empresas, suba el precio y lleven la utilidad a cero.

3.2.3 La oferta de corbatas en el largo plazo

Una industria de corbatas pintadas, perfectamente competitiva, tiene una importante cantidad de posibles nuevos competidores. Cada empresa tiene una estructura idéntica de costos y el costo medio a largo plazo está en su punto mínimo con una producción de 20 unidades (q = 20). El costo medio mínimo es de 10 dólares por unidad. La demanda total de mercado está dada por Q = 1 500 – 50P

a. ¿Cuál será la curva de oferta de la industria en el largo plazo?

En una industria de costos constantes en un mercado competitivo, cada empresa tiene ganancias iguales a cero, por lo que la curva de oferta de largo plazo es P=10.

b. ¿Cuál será el precio de equilibrio a largo plazo (P*)?, ¿La producción total de la industria (Q*)?, ¿La producción de cada empresa (q_i*)?, ¿La cantidad de empresas?, ¿La utilidad de cada empresa?

P*=10, Q*=1000, q_i*=20, n=50 empresas y utilidad de cero por empresa.

c. ¿La curva de costo total a corto plazo ligada con la producción de equilibrio de cada empresa a largo plazo está dada por CT_{cp}= ½ q^2 + 10 q + 200. Calcule las curvas de costos marginales y medios a corto plazo. ¿En qué nivel de producción de corbatas el costo medio a corto plazo llega al mínimo?

CM = q + 10; CP = ½ q + 10 + 200/q; Min CP: ½ -200/q^2 = 0 → q^2 = 400 → q=20.

d. Calcule la curva de oferta a corto plazo para cada empresa y la curva de oferta de la industria a corto plazo.

q = P – 10, Q=50q=50P-500

e. Suponga ahora que las corbatas pintadas se ponen de moda y que la función de demanda del mercado se desplaza hacia arriba a Q = 2 000 – 50P. Usando esta nueva curva de demanda, conteste el inciso b para el muy corto plazo cuando las empresas no pueden cambiar la cantidad de producto producida.

En el muy corto plazo la oferta Q*=1000 → P*=20, q_i*=20, n=50 y π_i^*= -200.

f. Use la curva de oferta de la industria a corto plazo para volver a calcular las respuestas del inciso b, a corto plazo.

50P – 500 = 2000 – 50P → P* = 25, Q* = 750, q_i*=15, n=50, π_i^*= -87,5

g. ¿Cuál es el nuevo equilibrio de largo plazo para la industria? Calcule todas las variables que encontró en el punto b.

P*=10, Q*=1500, q_i*=20, n=75, π_i^*= 0

3.2.4 ¿Cuál es la equivalencia que existe entre el ingreso marginal y el precio?

$$IM = \frac{\Delta IT}{\Delta Q} = \frac{\Delta(P*Q)}{\Delta Q} = \frac{P\Delta Q}{\Delta Q} + \frac{Q\Delta P}{\Delta Q} = P + P\frac{Q\Delta P}{P\Delta Q} = P + P\frac{1}{\eta_D} = P(1+\frac{1}{\eta_D})$$

3.2.5 Analice la siguiente afirmación: Si existen dos empresas idénticas en el mercado, es más eficiente desde el punto de vista de minimización de costos que ambas empresas suplan al mercado en lugar de que solo una de ellas lo haga.

Depende de la estructura de costos de la industria. Si el costo marginal es creciente la afirmación es correcta y el equilibrio de mercado va a indicar que las dos empresas pueden competir y es más eficiente que lo hagan. Pero, si la industria tiene costos decrecientes, entonces lo más eficiente es que solo una de las empresas supla el mercado pues el costo marginal y el costo promedio de producción en menor cuando solo opera una empresa en comparación de cuando operan dos empresas.

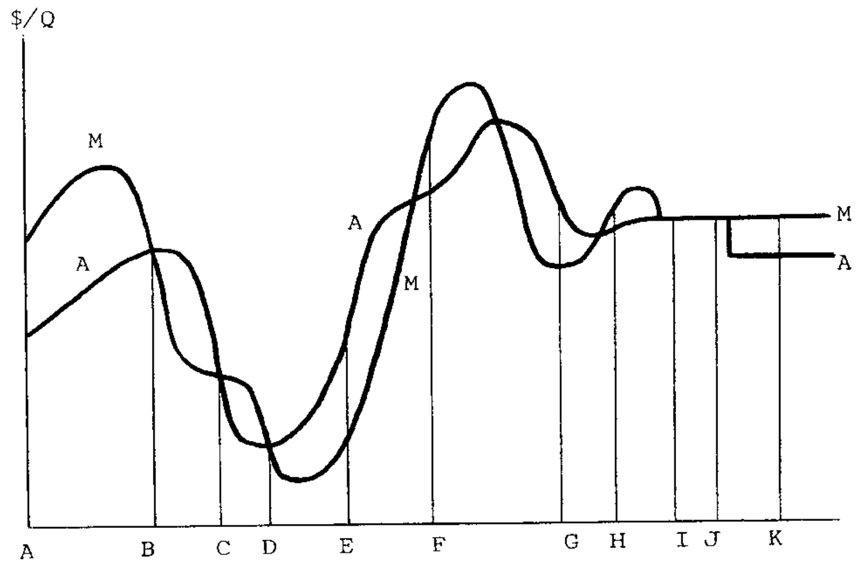
3.3 EJERCICIOS A SOLUCIONAR

3.3.1 La oferta en el largo plazo

a. ¿Por qué la curva de oferta tiende a ser más elástica conforme aumenta el plazo del análisis?
b. Suponga que la curva de oferta de largo plazo es plana (perfectamente elástica). Falso o verdadero: esto quiere decir que desde el punto de vista de minimización de costo, da igual que solamente exista una cantidad limitada de empresas idénticas en la economía (digamos 10 empresas) que una cantidad ilimitada (o sea, libre entrada de empresas).
c. ¿Por qué en el equilibrio competitivo, las empresas en el largo plazo operan en el punto de cero ganancias?
d. ¿Qué es una renta Ricardiana?

3.3.2 COSTO MARGINAL Y COSTO PROMEDIO

El siguiente gráfico muestra una función marginal (M) y una función promedio (A). Dadas las relaciones que deben existir entre las funciones marginales y las funciones promedio, indique qué porciones de este gráfico son imposibles, indicando en qué rangos la relación entre las dos funciones son inconsistentes y por qué.



CAPÍTULO 4
EL MERCADO DE TRABAJO

TEMARIO

En este capítulo se incluyen los ejercicios relacionados con el equilibrio en el mercado de trabajo. Por un lado, los ejercicios utilizan el equilibrio de la empresa desarrollado en el capítulo 3 para obtener la demanda de trabajo, con la variante de que se incluye el caso del monopsonio, o sea, la existencia de un solo comprador de insumos.

Por otro lado, los ejercicios utilizan la teoría del consumidor desarrollada en el capítulo 1, para obtener un óptimo de elección entre ocio y trabajo y obtener de esta forma la oferta de trabajo. En este caso también se incluyen ejercicios en donde existe un único oferente de trabajo o un único vendedor del producto, o sea, la presencia de monopolistas, tanto en el mercado de trabajo como de producto.

Finalmente, los ejercicios hacen interactuar la demanda y la oferta de trabajo, bajo diferentes estructuras de mercado, para encontrar el equilibrio en este mercado.

4.1 EJERCICIOS RESUELTOS

4.1.1 Demanda de trabajo en el corto plazo

Una firma competitiva tiene una función de producción que se puede describir así:

> ***"La producción semanal es la raíz cuadrada del mínimo del número de unidades de capital y del número de unidades de trabajo empleadas por semana"***

Suponga que en el corto plazo la firma usa 16 unidades de capital, pero puede variar la cantidad de trabajo libremente.

i. Encuentre la fórmula que mejor describa el producto marginal del trabajo en el corto plazo como una función de la cantidad de trabajo utilizada. Usted debe especificar si existen rangos para esta función.

$$Q = \sqrt{\min(K, L)}, K = 16 \rightarrow Q = \sqrt{\min(16, L)}$$

Cuando $L \leq 16 \rightarrow PM_L = \frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}}$; cuando $L > 16 \rightarrow PM_L = 0$

ii. Si el salario es w = 1 y el precio de una unidad del bien producido es P = 4, ¿cuánto trabajo demandará la firma en el corto plazo?

$w = P * PM_L \rightarrow 1 = 4 * \frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} \rightarrow L^* = 4$

iii. Responda el inciso ii si w = 1 y P = 10.

$1 = 10 * \frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} \rightarrow L^*$ daría igual a 25, pero como la PM es cero después de la unidad 16, entonces solo se contratan 16 unidades.

iv. Encuentre la ecuación de demanda de trabajo de la firma en el corto plazo como una función de P y w.

$$w = P \frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} \rightarrow L^{-\frac{1}{2}} = 2 \frac{w}{P} \rightarrow L = \frac{P^2}{4w^2}$$

4.1.2 Combinación de monopsonio y monopolio

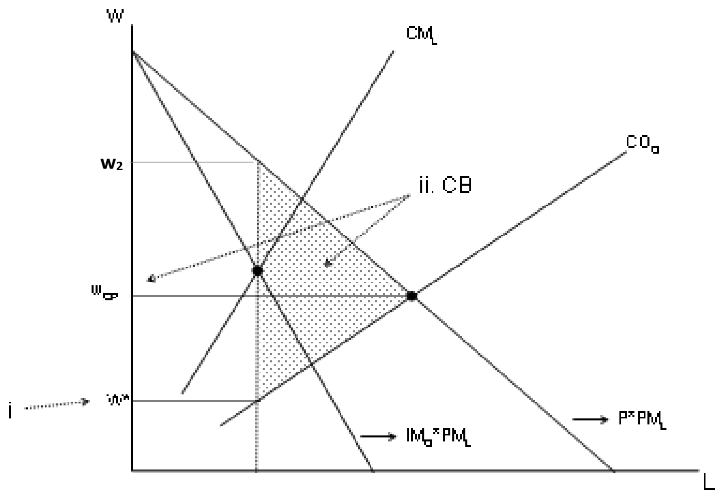
Existe una empresa que es monopolio en el mercado de producto y monopsonio en el mercado de insumos. Explique claramente en un mismo gráfico,

i. ¿Cuál sería la solución de equilibrio en el mercado de insumos?

ii. ¿Cómo difiere la solución encontrada del punto de equilibrio bajo competencia perfecta y cuál es el costo de bienestar asociado con esta estructura de mercado?

iii. ¿Cómo afectaría el empleo y al desempleo la regulación de salarios?

i y ii.



iii. Si el salario está entre w* y w_{CP}, se aumenta el empleo y no hay desempleo. El empleo máximo se alcanza con un salario w_{CP}, que es el punto de competencia perfecta, el cual además no se podría alcanzar si no se regula el precio en el mercado de producto. Si el salario está entre w_{CP} y w_2, el empleo aumenta pero se crea desempleo. Si el salario es superior a w_2, disminuye el empleo y hay desempleo.

4.1.3 El mercado laboral en equilibrio

a. La oferta de Trabajo

Un consumidor tiene una función de utilidad entre el ocio y el ingreso representada por la función U = ln O + ln I, donde O es el ocio que disfruta e I es el ingreso de la persona. Suponiendo que la persona dispone de 24 horas al día para distribuir entre el Ocio y el Trabajo y que posee un ingreso autónomo de Io, se le pide lo siguiente:

i. Escriba la restricción presupuestaria de esta persona.

I = w*L + Io

ii. Encuentre la relación óptima entre ocio e ingreso de esta persona que maximiza su satisfacción.

U_O/U_I = I/O = w → I = O*w

iii. Encuentre la oferta de trabajo de esta persona como función solamente del salario y del ingreso autónomo.

(24-L)w = w*L + Io → 24w – w*L = w*L + Io → 2w*L = 24w - Io → L = 12 - Io/2w

b. La Demanda de Trabajo

Una firma que contrata a trabajadores como el amigo del apartado anterior posee una función de producción que depende de los insumos capital (K) y trabajo (L) y que está representada por la función $y = K^{½} L^{½}$. Así las cosas:

i. Encuentre el producto marginal del trabajo y el producto marginal del capital e indique si estos son crecientes, constantes o decrecientes.

$PM_L = ½ K^{½} L^{-½}$, $PM_K = ½ L^{½} K^{-½}$. Son decrecientes pues $\partial PM_L / \partial L < 0; \partial PM_K / \partial K < 0$

ii. Si en el corto plazo la cantidad de capital está fijada en 16 unidades, entonces encuentre la demanda de trabajo de la empresa como una función solamente del salario y del precio del bien que produce la empresa (P).

$PM_L = ½\ 16^{½} L^{-½} = 2/L^{½} \rightarrow VPM_L = w \rightarrow 2P/L^{½} = w \rightarrow L = 4(P/w)^2$.

c. Equilibrio en el mercado de trabajo

Ahora que tiene una oferta (punto a.iii) y una demanda (punto b.ii) encuentre el salario de equilibrio en el mercado laboral, asumiendo que el ingreso autónomo (Io) es igual a 8. Como recomendación no despeje el salario (w) sino déjelo como una función implícita del precio (P) del producto solamente y del salario, pues posteriormente podrá encontrar la solución numérica. Para los más minuciosos, simplemente se debe asumir que se trata de un consumidor y un productor representativos, para no complicar el ejercicio al tener que obtener la oferta y demanda agregada de mercado.

$4(P/w)^2 = 12 - 4/w \rightarrow (P/w)^2 = 3 - 1/w \rightarrow P^2 = 3w^2 - w$ (Equil. en mercado de insumos)

d. La oferta de producto

Dada la función de producción establecida en el punto b, encuentre:

i. El costo total de la empresa como una función solamente del salario y del nivel de producto, de forma que la cantidad del insumo (L) no debe aparecer en la función de costo total. Asuma que cada unidad de capital cuesta ¼.

$y = 4 L^{½} \rightarrow L = y^2/16$; $CT = r\,16 + w\,L = r\,16 + w\,y^2/16 = 4 + w\,y^2/16$

ii. El costo promedio.

$CP = 4/y + w\,y/16$

iii. El costo marginal.

$CM = w\, y / 8$

iv. El punto de cierre y el punto de cero ganancias.

Punto de cero ganancia = min CP → $-4/y^2 + w/16 = 0$ → $64 / w = y^2$ → $y = 8/w^{½}$
Punto de cierre = min CVP → $y = 0$.

v. Encuentre la función de oferta de la empresa, esta función tiene que ser dependiente solo del nivel salario (w) y precio del producto (P).

$P = wy / 8$ → $y = 8P/w$

e. La demanda de producto

i. En el mercado de producto, asuma que el consumidor típico posee una demanda representada por la función y = 16 / P. Encuentre la elasticidad de la demanda.

$Py = 16$ → La elasticidad es igual a -1 pues el gasto total es constante a cualquier precio.

ii. En términos generales explique cuál es la relación entre la elasticidad de la demanda y el ingreso marginal y ejemplifique particularmente con la demanda expuesta en el punto i.

Cuando la demanda es inelástica, el gasto total y el precio se mueven en la misma dirección; cuando la demanda es elástica, el gasto total y el precio se mueven en dirección opuesta. En el caso particular de la demanda del punto i, la elasticidad es constante e igual a -1, por lo que el gasto siempre será el mismo independientemente del precio.

f. Equilibrio en el mercado de producto.

Ahora que tiene una oferta de producto (punto d.v) y una demanda de producto (punto e.i.), encuentre el precio de equilibrio en el mercado de producto, el cual va a estar en función del salario solamente. Nuevamente, debe asumir que se trata de un consumidor representativo y un productor representativo, o sea, de que ninguno tiene poder de mercado.

$P / w = 16 / P$ → $P^2 = 16w$ → $P = 4\, w^{½}$

g. Equilibrio simultáneo

Como en el punto c.i encontró el salario de equilibrio (w*) en el mercado de insumos en función de P y en el punto f.i. encontró el precio de equilibrio (P*) en el mercado

de producto en función de w, ahora tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Así las cosas:

i. **Encuentre el nivel absoluto de equilibrio del precio del producto (P*), la cantidad de equilibrio de producto (y*), el salario de equilibrio (w*) y el nivel de contratación de equilibrio (L*).**

$2w = 3w^2 - w \rightarrow w^* = 1 \rightarrow P^2=2 \rightarrow P^* = 2^{½} \rightarrow y^*=8*2^{½} \rightarrow L^* = 8$

ii. **¿Qué sucede con el precio (P*) y la cantidad de producto de equilibrio (y*), cuando se pone un impuesto del 100% sobre el precio? Analice solo el mercado de producto.**

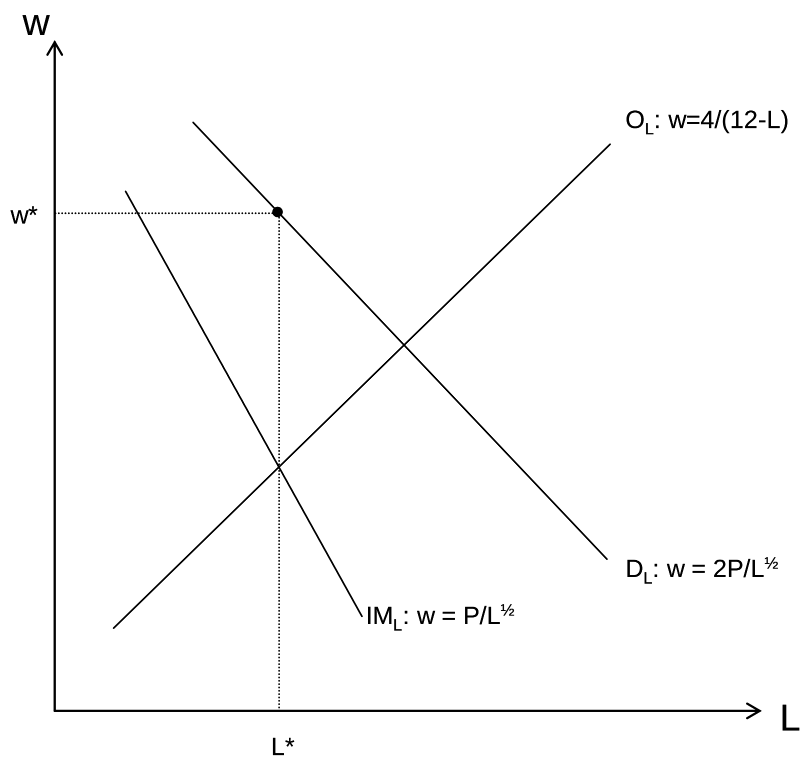
Oferta: $y = 8P \rightarrow P_O= y/8$. Ahora $P_D=2P_O \rightarrow P_D = y/4$: nueva oferta.
$y / 4 = 16 / y \rightarrow y^* = 8$; $P_D^*= 2$; $P_O^*= 1$

iii. **¿Qué proporción del impuesto paga el consumidor y qué proporción el productor?**

El monto de la recaudación del impuesto es 8X1=8. El consumidor paga $(2-2^{½})X8$ del impuesto y el productor paga $(2^{½}-1)X8$ del impuesto. O sea, el consumidor paga el 58,6% del impuesto.

h. Monopolio en el mercado de insumo.

Asuma que nuestro trabajador representativo posee poder de mercado y se convierte en un monopolista en el mercado de insumo. ¿Cómo variaría el equilibrio encontrado en el punto g.i.?



$$\frac{P}{L^{1/2}} = \frac{4}{12-L} \Rightarrow (12-L)P = 4L^{1/2} \Rightarrow (12-L)^2 P^2 = 16L \Rightarrow 144 - 24L + L^2 - \frac{16}{P^2}L = 0$$

$$L^2 - \left(24 + \frac{16}{P^2}\right) L + 144 = 0$$

$$L^* = \frac{\left(24 + \frac{16}{P^2}\right) \pm \sqrt{\left(24 + \frac{16}{P^2}\right)^2 - 4*144}}{2}$$

$$w^* = \frac{2P}{\left[\frac{\left(24 + \frac{16}{P^2}\right) \pm \sqrt{\left(24 + \frac{16}{P^2}\right)^2 - 4*144}}{2}\right]^{1/2}}$$

$$P^2 = 2w$$

$$\mathrm{w} = \frac{2(2\mathrm{w})^{1/2}}{\left[\frac{\left(24 + \frac{8}{\mathrm{w}}\right) \pm \sqrt{\left(24 + \frac{8}{\mathrm{w}}\right)^2 - 576}}{2}\right]^{1/2}} \Rightarrow \mathrm{w}^2 = \frac{16\mathrm{w}}{\left(24 + \frac{8}{\mathrm{w}}\right) \pm \sqrt{\left(24 + \frac{8}{\mathrm{w}}\right)^2 - 576}} \Rightarrow \mathrm{w} = \frac{16}{24 + \frac{8}{\mathrm{w}} \pm \sqrt{\left(24 + \frac{8}{\mathrm{w}}\right)^2 - 576}}$$

$$\Rightarrow w = \frac{2}{3 + \frac{1}{\mathrm{w}} \pm \sqrt{\left(3 + \frac{1}{\mathrm{w}}\right)^2 - 9}} \Rightarrow w = \frac{2}{3 + \frac{1}{\mathrm{w}} \pm \sqrt{\frac{6}{\mathrm{w}} + \frac{1}{w^2}}} \Rightarrow 3w + 1 \pm \sqrt{6w+1} = 2 \Rightarrow 3w - 1 \pm \sqrt{6w+1} = 0 \Rightarrow w^* = \frac{4}{3}$$

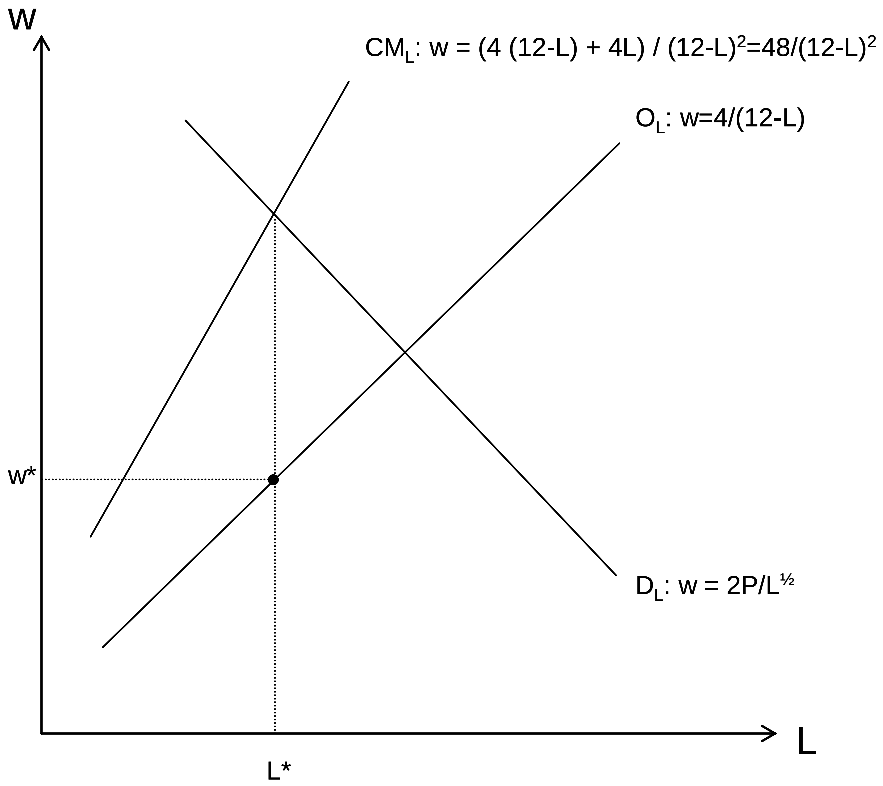
$$P^* = \sqrt{\frac{2*4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

$$w = \frac{P}{L^{1/2}} \Rightarrow L^* = \left(\frac{P}{w}\right)^2 = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{16}{9}} = \frac{3}{2}$$

$$y^* = 4*\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} = 2\sqrt{6}$$

i. Monopsonio en el mercado de insumo

En lugar de lo ocurrido en el punto h, asuma que nuestro productor representativo posee poder de mercado y se convierte en el único contratante de mano de obra (monopsonio) en el mercado de insumos. ¿Cómo variaría el equilibrio encontrado en el punto g.i?



$$\frac{48}{(12-L)^2}=\frac{2P}{L^{1/2}}\Rightarrow 24L^{1/2}=P(12-L)^2\Rightarrow 24L^{1/2}=P(144-24L+L^2)\Rightarrow L^{1/2}=P(6-L+\frac{L^2}{24})$$

$$\Rightarrow L=P^2\left(6-L+\frac{L^2}{24}\right)^2\Rightarrow L=P^2\left(36+L^2+\frac{L^4}{576}-12L+\frac{12L^2}{24}-\frac{2L^3}{24}\right)$$

$$\Rightarrow L=P^2\left(\frac{L^4}{576}-\frac{2L^3}{24}+\frac{3L^2}{2}-12L+36\right)\Rightarrow\left(\frac{L^4}{576}P^2-\frac{L^3}{12}P^2+\frac{3L^2}{2}P^2-(12P^2+1)L+36P^2\right)=0$$

$$L=\frac{12w-4}{w},P^2=2w$$

$$\left(\frac{\frac{(12w-4)^4}{w^4}}{576}2w-\frac{\frac{(12w-4)^3}{w^3}}{12}2w+\frac{3\frac{(12w-4)^2}{w^2}}{2}2w-(24w+1)\frac{(12w-4)}{w}+72w\right)=0$$

$$\left(\frac{(12w-4)^4}{288w^3}-\frac{(12w-4)^3}{6w^2}+\frac{3(12w-4)^2}{w}-\frac{(24w+1)(12w-4)}{w}+72w\right)=0$$

$$w^*=0{,}56520692$$

$$L^*=12-\frac{4}{w}=4{,}92294585$$

$$P^*=1{,}06320922$$

$$y^*=3{,}0072098$$

j. Pérdida de bienestar

En la pregunta g encuentre el valor numérico de la pérdida de bienestar.

$$\int_{8}^{8\sqrt{2}} \frac{16}{y} dy - \int_{8}^{8\sqrt{2}} \frac{y}{8} dy$$

4.1.4 ¿Por qué razón se afirma que la curva de oferta de trabajo se invierte?

Porque el efecto ingreso y el efecto sustitución van en direcciones opuestas, si se considera que tanto el ocio como el ingreso son bienes normales. El efecto ingreso indica que a mayor salario, se consume más ocio y más ingreso. El efecto sustitución dice que a mayor salario, se consume más ingreso y menos ocio. Por lo tanto, para salarios elevados el efecto ingreso puede sobrepasar al efecto sustitución y por ello la curva de oferta puede presentar esa inversión.

CAPÍTULO 5
EL EQUILIBRIO EN EL MERCADO

TEMARIO

En el presente capítulo se analiza el equilibrio que ocurre en mercados competitivos. Por lo general, se inicia con una oferta y una demanda, y se encuentra el equilibrio. A partir de este punto se incorpora un cambio a nivel de oferta y demanda para analizar la transición hacia el nuevo equilibrio.

5.1 Equilibrio entre oferta y demanda

Dentro de las variaciones a los ejercicios se producen restricciones impuestas por el gobierno como por ejemplo impuestos y límites cuantitativos o interdicción. También se analiza el efecto de los aranceles sobre el equilibrio de mercado y los efectos sobre el bienestar, un tema que será tratado con mayor extensión en el capítulo 6.

5.2 Ejercicios a solucionar

5.1 EL EQUILIBRIO DE LA OFERTA Y LA DEMANDA

5.1.1 Demanda de bacalao

Suponga que la curva de demanda diaria de bacalao en Cabo Mayo está dada por: Q_D = 1 600 – 600P, donde Q_D es la demanda en kilos por día y P es el precio por kilo.

a. Si los bancos pesqueros llevan a tierra 1 000 kilos en un día, ¿cuál será el precio?

1000 = 1 600 – 600P → P = 1

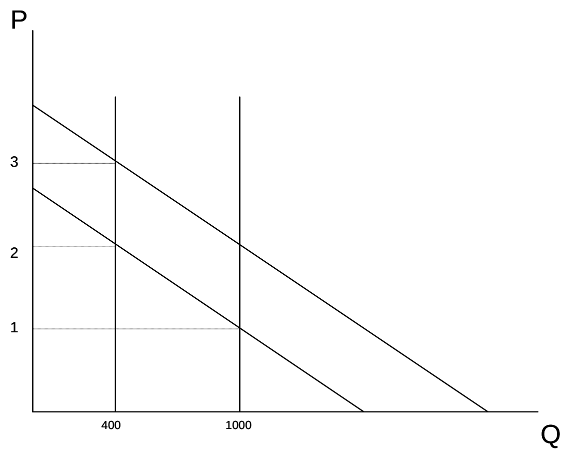
b. Si la cantidad que pescan bajara a 400 kilos ¿cuál sería el precio?

400 = 1 600 – 600 P → P = 2

c. Suponga que la demanda de bacalao cambia a Q_D = 2 200 – 600P. ¿Cómo cambiaría su respuesta al inciso b?

400 2 200 – 600 P → P = 3

d. Haga un gráfico con todos sus resultados.



Suponga ahora que la demanda de bacalao vuelve a ser la del punto a, pero suponga que los pescadores de Cabo Mayo pueden, a cierto costo, optan por vender todo lo que han pescado en otro mercado. Concretamente, suponga que la cantidad que venderán en Cabo Mayo está dada por Q_O = -1 000 + 2 000P para $Q_O \geq 0$, donde Q_O es la cantidad ofrecida en kilos y P es el precio por kilo.

e. ¿Cuál es el precio más bajo al que se ofrecerá el bacalao en el mercado de Cabo Mayo?

Q = 0 cuando P = ½.

f. Dada la curva de demanda de bacalao, ¿cuál será el precio de equilibrio?

-1000 + 2000 P = 1600 – 600 P → P = 1

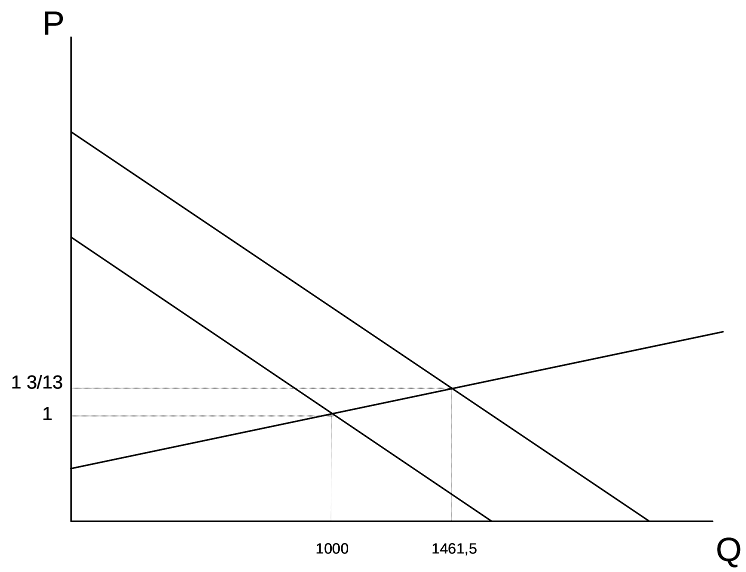
g. Suponga que la demanda vuelve a ser la representada en el punto c. ¿Cuál será el nuevo precio de equilibrio?

-1000 + 2000 P = 2200 – 600 P → P = 1 3/13

h. Explique por qué el precio del inciso g subirá menos que en el inciso c.

Porque la pendiente de la curva de oferta no es perfectamente inelástica, o sea, porque la cantidad ofrecida reacciona positivamente al incremento en el precio, lo cual hace que el precio suba menos.

i. Haga un gráfico con los resultados.



5.1.2 Demanda de radios

La demanda nacional para los radios portátiles está dada por Q = 5 000 – 100 P, donde el precio P es medido en dólares y la cantidad Q es medida en miles de radios por año. La curva de oferta nacional para los radios está dada por Q = 150 P.

a. ¿Cuál es el equilibrio del mercado nacional de los radios portátiles?

5 000 – 100 P = 150 P → P = 20, Q = 3000

b. Suponga que los radios portátiles pueden ser importados a un precio mundial de 10 dólares por unidad. Si el comercio no tuviera obstáculos, ¿cuál sería el nuevo equilibrio del mercado? ¿Cuántos radios portátiles serían importados?

Q_D = 5 000 – 100 (10) = 4 000, Q_O = 150 (10) = 1 500 → M = 2 500

c. Si los productores nacionales de radios portátiles consiguieran que se aplicara un arancel de 5 dólares, ¿Cómo cambiaría el equilibrio de mercado? ¿Cuánto se captarían por concepto de ingresos arancelarios? ¿Qué tanto superávit del consumidor sería trasladado a los productores nacionales? ¿Cuál sería la pérdida de bienestar del arancel?

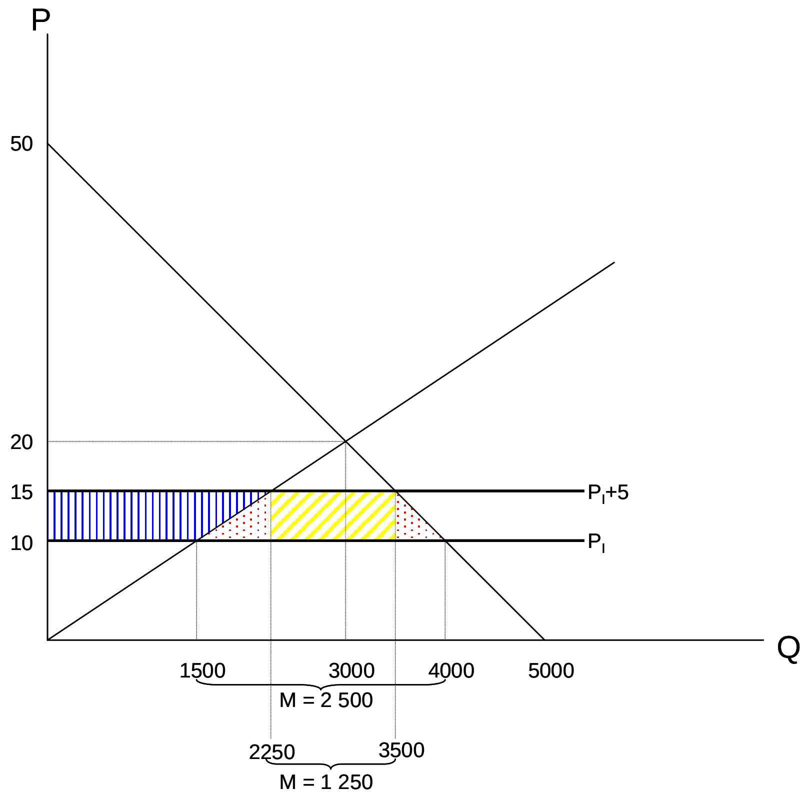
P = 15, Q_D = 5 000 – 100 (15) = 3 500, Q_O = 150 (15) = 2 250 → M = 1 250,

R = 1 250 (5) = 6 250.

El excedente del consumidor que se traslada a los productores nacionales sería (1500+2250)*5/2 = 9 375

Pérdida de bienestar 500 *5 /2 + 750*5/2 =3125

d. Haga un gráfico con sus resultados.



e. ¿Cómo cambiarían sus respuestas a este problema si el gobierno llegara a un arreglo con los proveedores extranjeros para limitar “voluntariamente” a 1 250 000 al año la cantidad de radios que se pueden vender en el país? Explique cómo esto difiere del caso de un arancel.

La solución del mercado sería que se vendería la misma cantidad de radios que en caso descrito en c y a un precio de $15 por radio; pero, en este caso, no existiría recaudación de impuestos, sino que esa área se la apropiarían los importadores de radios. Como los importadores de radios son extranjeros, esto significa que la pérdida para este país en particular habría que aumentarla en el monto del área amarilla, o sea, la recaudación de impuestos, por lo que la pérdida de bienestar total es ahora el área amarilla más el área roja: $9.375.000

5.1.3 Competencia en el mercado de la leche

Suponga que la demanda de leche en Costa Rica está representada por la siguiente ecuación: Q = 9 / P, donde Q es la demanda de millones de litros de leche por día y P es el precio por litro de leche en cientos de colones.

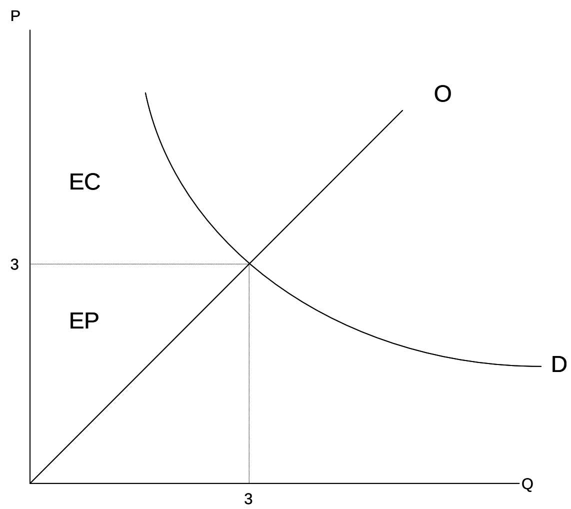
a. ¿Cuál es la elasticidad de la demanda de esta función?

$$\frac{\Delta Q}{\Delta P}\frac{P}{Q} = -9\frac{1}{P^2}\frac{P}{\frac{9}{P}} = -1$$

b. La oferta de leche en Costa Rica está representada por la ecuación: Q = P. Suponga que la economía está cerrada a las importaciones. ¿Cuál es el precio de la leche y la cantidad de equilibrio, el excedente del consumidor y el del productor? Ilustre sus resultados en un gráfico.

9/P = P → P = 3; Q = 3. Excedente del productor = 3*3/2 = 4,5;

Excedente del consumidor = $\int_3^\infty \frac{9}{P}dP = [9\ln P]_3^\infty = \infty$



c. Suponga que el precio internacional de la leche es P_I = 2 (o sea, 200 colones el litro). Si no existieran restricciones al comercio, ¿cuál sería el consumo de leche, las importaciones, la producción local y cómo varían los excedentes del consumidor y productor?

Q_D = 9/2 = 4,5; Q_O = 2; M =2,5; $\Delta EP = -\frac{(3+2)}{2} = -2{,}5$;

$$\Delta EC = \int_2^3 \frac{9}{P}dP = [9\ln P]_2^3 = 9\ln\frac{3}{2} = 3{,}6$$

d. Suponga que Costa Rica impone una cuota de 1 millón de litro por día sobre las importaciones de leche. ¿Cuál sería el nuevo precio pagado por los consumidores, asumiendo que los derechos de la cuota son asignados a los importadores de leche? ¿Cuánto cambian los excedentes del consumidor y productor encontrados en el punto c? ¿Cuál es el efecto sobre el bienestar de la economía?

9/P = P + 1 → P^2 + P - 9 = 0 → P = $\frac{-1+\sqrt{1+36}}{2} = 2{,}54$; Q_D = 9/2.54 = 3,54; Q_O = 2,54; M =1; $\Delta EP = \frac{(2.54+2)}{2} * 0{,}54 = +1{,}2293$

1.2258

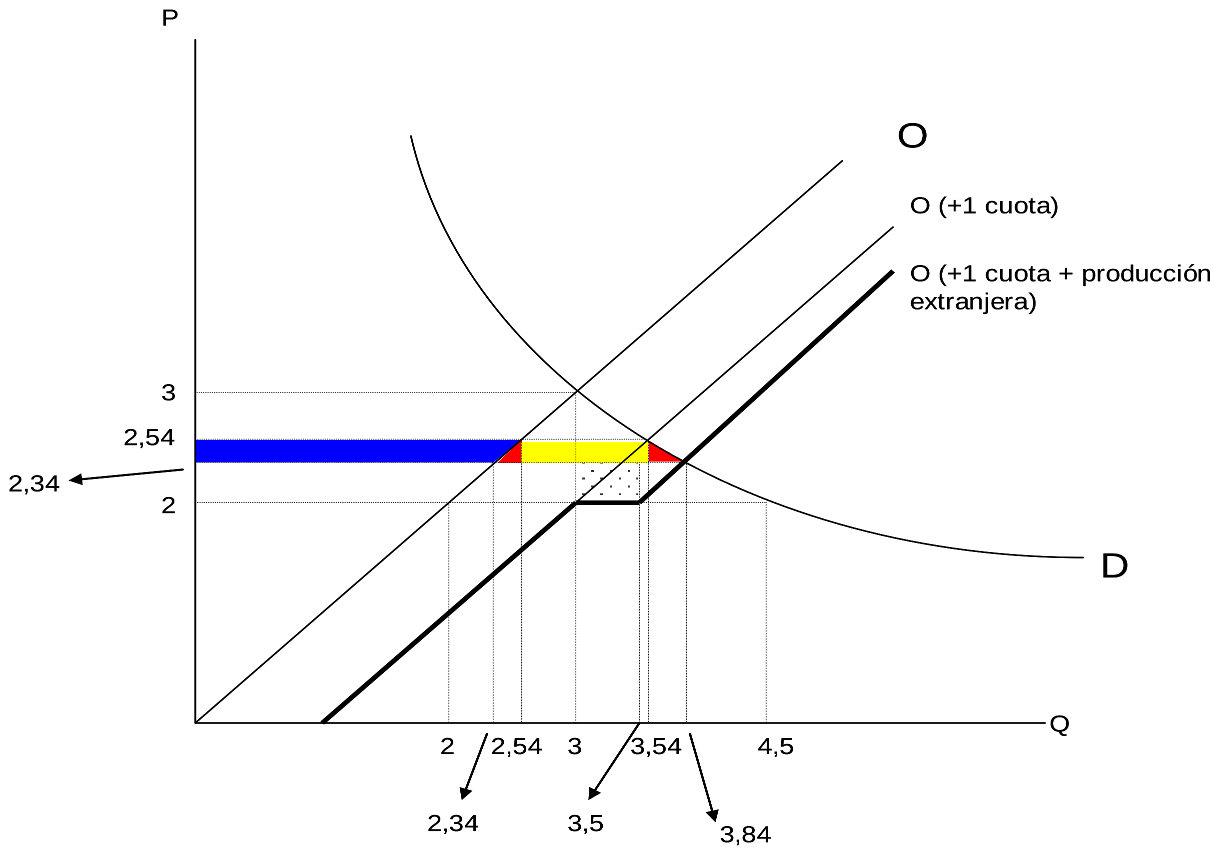
$$\Delta EC = -\int_{2}^{2.54} \frac{9}{P} dP = [9 \ln P]_2^{2.54} = 9 \ln \frac{2.54}{2} = -2{,}1512\,;$$

Pérdida de bienestar = -1,2258 + 2,1512 = 0,9254

e. Suponga que debido al alto precio de la leche en Costa Rica, los importadores de leche deciden abrir fábricas procesadoras en Costa Rica, así que ahora la oferta de leche en el país es la suma de los productores costarricenses y los productores extranjeros. Suponga que los productores extranjeros empiezan a producir un total de 500.000 litros de leche por día a un costo de 200 colones por litro. ¿Cuál es el nuevo precio de equilibrio en el mercado? Dibuje la curva de oferta agregada en el mercado y muestre el punto de equilibrio. Indique en este gráfico, por separado, el excedente del productor de los productores nacionales y el de los productores extranjeros? ¿Qué sucede con el excedente del consumidor en comparación con el punto d?

9/P = P+0,5+1 → P^2 + 1,5 P – 9 = 0 → P = $\frac{-1.5+\sqrt{2.25+36}}{2} = 2{,}34$; Q_D = 9/2.3423 = 3,84; Q_O=2,34; Q_{EXT} = 0,5; M =1; $\Delta EP = -\frac{(2.54+2{,}34)}{2} * 0{,}2 = -0{,}488$ (Área azul); EP extranjeros = 0.5*0.34=0.17 (área punteada en negro);

$$\Delta EC = \int_{2.34}^{2.54} \frac{9}{P} dP = [9 \ln P]_{2.34}^{2.54} = 9 \ln \frac{2.54}{2.34} = 0{,}738$$ (Áreas azul, rojas y amarilla)



5.1.4 El concepto del equilibrio de mercado.

a. Explique qué es un equilibrio de mercado.

Es el punto en donde coinciden los deseos de los consumidores y los productores, en donde todo lo que los productores producen es comprado y todo lo que los consumidores desean es vendido. Un mercado en equilibrio es estable, o sea, si existe un precio mayor al equilibrio habría un exceso de oferta y el precio baja y si existe un precio por debajo del de equilibrio se genera un exceso de demanda y el precio sube.

b. ¿Por qué la oferta de un producto tiene pendiente positiva?

En el corto plazo, la curva de oferta de una empresa se deriva de la curva de costo marginal. Así, la pendiente de la oferta tiene pendiente positiva porque el costo marginal es creciente y esto ocurre por un problema físico de saturación del factor fijo.

c. ¿Por qué la demanda de un producto tiene pendiente negativa?

Por la combinación de dos efectos. Primero, el efecto ingreso hace que cuando el precio suba el ingreso fijo alcance para menos, o sea, el poder adquisitivo disminuye cuando sube el precio, lo que ocasiona que el consumidor compre menos de todos los bienes. Segundo, el efecto sustitución hace que el consumidor tienda a sustituir un bien cuyo precio subió por otros sustitutos que son relativamente más baratos.

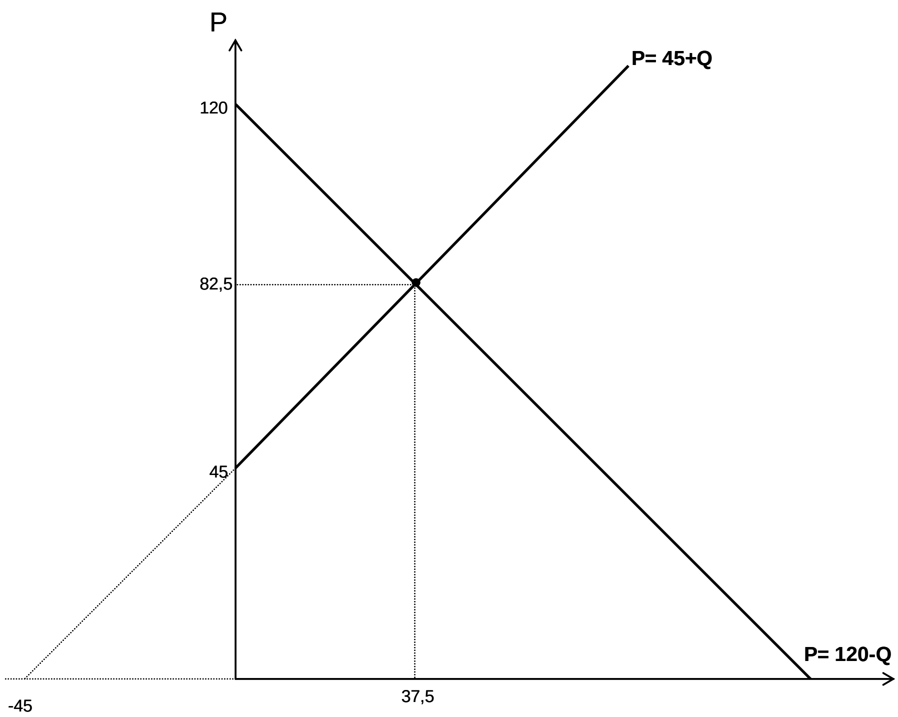
5.1.5 ¡Y usted creía que sabía todo sobre oferta y demanda!

a. <u>Oferta y Demanda simple</u>: En una industria competitiva, suponga que la oferta y la demanda son:

P = 120 - Q (Demanda)

P = 45 + Q (Oferta)

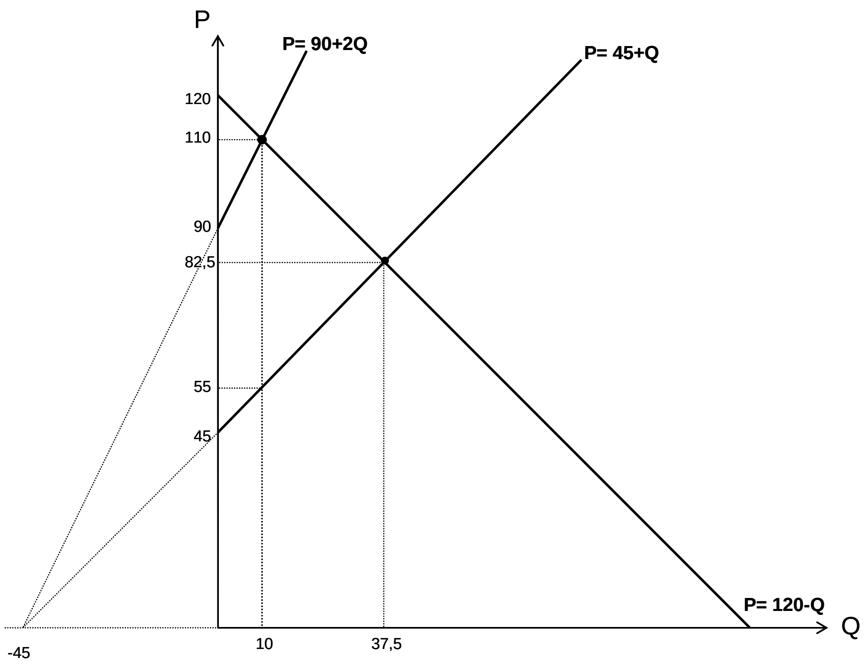
Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio, el Ingreso Total (IT), y los excedentes del consumidor (EC) y del productor (EP) asociados con el equilibrio. Haga un gráfico que muestre estas magnitudes geométricamente.



IT = P X Q = 82,5 X 37,5 = 3.093,75
EC = (120-82,5) X 37,5/2 = 703,125
EP = (82,5- 45) X 37,5/2 = 703,125

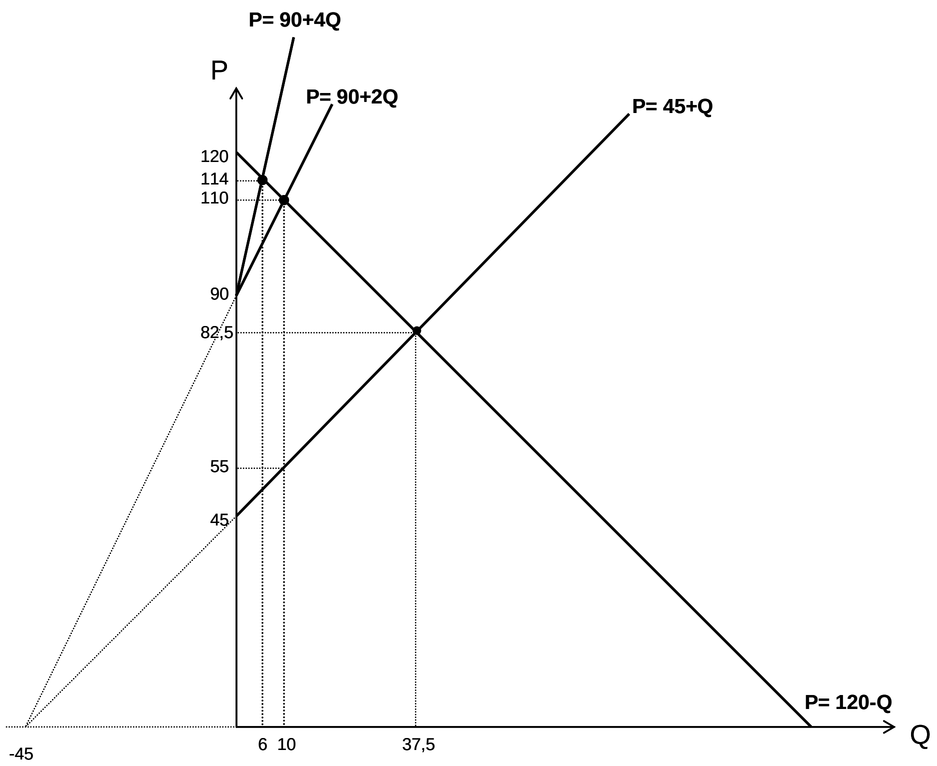
b. Efecto de un Impuesto: Imagínese ahora que el gobierno trata de desincentivar el consumo de este bien utilizando un impuesto alto. Específicamente, el 50% de lo que recibe el productor de los consumidores tiene que ser pagado como impuesto. Por ejemplo, si una unidad es vendida al consumidor por ¢80, la mitad es para productor y el resto para el gobierno). Defina P+ como el precio bruto de impuesto que los consumidores pagan y P- como el precio neto de impuesto que los productores reciben.

Bajo el supuesto de que el impuesto es perfectamente realizable sin costo alguno, encuentre los valores de equilibrio para: P-, P+, Q, IT, EC, EP y el impuesto recolectado (T). Dibuje estos resultados en el mismo gráfico del inciso a. (Recomendación: Varíe la curva de oferta y no la de demanda).



IT = P X Q = 55 X 10 = 550
EC = (120-110) X 10/2 = 50
EP = (55- 45) X 10/2 = 50
T = (110 – 55) X 20 = 550

c. **Efecto de la Interdicción: Suponga que en lugar del impuesto, ahora el gobierno declara ilegal este bien y trata de reducir su consumo interceptando los envíos de oferta de producto entre el productor y el consumidor. Específicamente, asuma que el 50% de la cantidad manufacturada es interceptada por la policía. De nuevo, exprese este mercado en términos de las ecuaciones de oferta y demanda, y encuentre los valores de equilibrio asociados con P (existe un solo precio en este caso), Q_m y Q_e (las respectivas cantidades manufacturadas y entregadas al consumidor), donde $Q_m = 2\,Q_e$, el IT, el EC y el EP. (Asuma que por cada unidad producida, el productor incurre en los mismos costos tanto en el caso en que la unidad es satisfactoriamente entregada al consumidor como en el caso en que la unidad es interceptada por la policía). Dibuje la solución en el mismo gráfico de los incisos a y b, mostrando como la demanda efectiva cambia.**



IT = P X Q = 114 X 6 = 684
EC = (120-114) X 6/2 = 18
EP = ((114-45)+(114-51)) X 6/2 = 396

d. En este caso, el 50% de interdicción de la cantidad producida es más eficaz en términos de reducción del consumo, que un impuesto de 50% sobre el precio que el consumidor paga. Muy detalladamente, explique ¿Por qué motivo ocurre esto? (Clave: Compare las curvas de oferta de las partes b y c)

Porque el productor tiene que cobrar el doble por la mitad de la producción que llega al mercado. Al mirar las curvas, en el caso de interdicción no solo se cobra el doble como en el caso del impuesto, sino que la pendiente de la curva de oferta se duplica en comparación con el impuesto. Esto causa que el precio suba más con la interdicción que con el impuesto.

CAPÍTULO 6
EL BIENESTAR

TEMARIO

Los ejercicios de este capítulo utilizan el concepto de excedentes del consumidor y productor en un mercado competitivo como una forma de medir el bienestar de una economía.

Así, a partir del mercado competitivo se establecen diferentes situaciones que imposibilitan alcanzar el óptimo y los ejercicios proponen encontrar el costo en bienestar ocasionado por esas situaciones.

6.1 El costo en bienestar de distorsiones en el mercado

En la mayoría de los ejercicios el costo en bienestar es causado por diferentes políticas públicas, como la existencia de impuestos y subsidios. En este sentido se deben encontrar los excedentes originales y compararlos con la situación distorsionada, considerando las posibles recaudaciones tributarias o costos ocasionados por los subsidios.

Del mismo modo, el gobierno también puede imponer diferentes políticas públicas destinadas a incentivar la producción local o restringir el consumo de las personas, o favorecer cierto tipo de industrias en el país.

6.2 Ejercicios a solucionar

6.1 EL COSTO EN BIENESTAR DE DISTORSIONES EN EL MERCADO

6.1.1 El costo en bienestar de un impuestos

Derive la fórmula para encontrar el costo en bienestar de un impuesto en función de las elasticidades de oferta (ε_o) y demanda (η_D) de un bien.

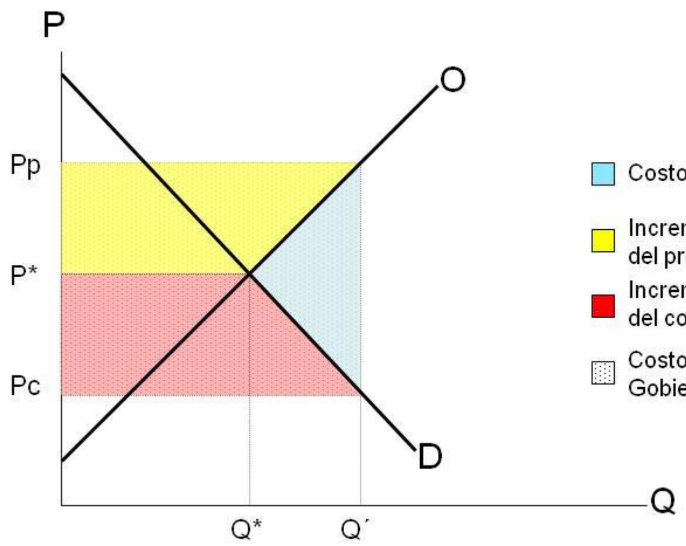
$$CB = -\frac{1}{2}\Delta Q \Delta P = -\frac{1}{2}\frac{\Delta Q}{\Delta P}\Delta P^2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\Delta P}{\Delta Q}}T^2,$$

$$\Delta P = T = P_C - P_O = \Delta P_C - \Delta P_O,$$
$$\Delta P_C = P_C - P^*,$$
$$\Delta P_O = P_O - P^*$$

$$CB = -\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\Delta P_C - \Delta P_O}{\Delta Q}}T^2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{Q\Delta P_C}{P\Delta Q} - \frac{Q\Delta P_O}{P\Delta Q}}\frac{Q}{P}T^2 = -\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{\eta_D} - \frac{1}{\varepsilon_O}}\frac{Q}{P}T^2$$

6.1.2 El costo en bienestar de un subsidio

Encuentre el costo en bienestar que produce un subsidio por unidad vendida de un bien. Lo debe encontrar gráficamente y matemáticamente.



$$CB = \frac{1}{2}\Delta Q \Delta P = \frac{1}{2}\frac{\Delta Q}{\Delta P}\Delta P^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\Delta P}{\Delta Q}}S^2,$$

$$\Delta P = S = P_P - P_C = \Delta P_P - \Delta P_C,$$
$$\Delta P_P = P_P - P^*,$$
$$\Delta P_C = P_C - P^*$$

$$CB = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{\Delta P_P - \Delta P_C}{\Delta Q}}S^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{Q\Delta P_P}{P\Delta Q} - \frac{Q\Delta P_C}{P\Delta Q}}\frac{Q}{P}S^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_O} - \frac{1}{\eta_D}}\frac{Q}{P}S^2$$

6.1.3 La incidencia de los impuestos

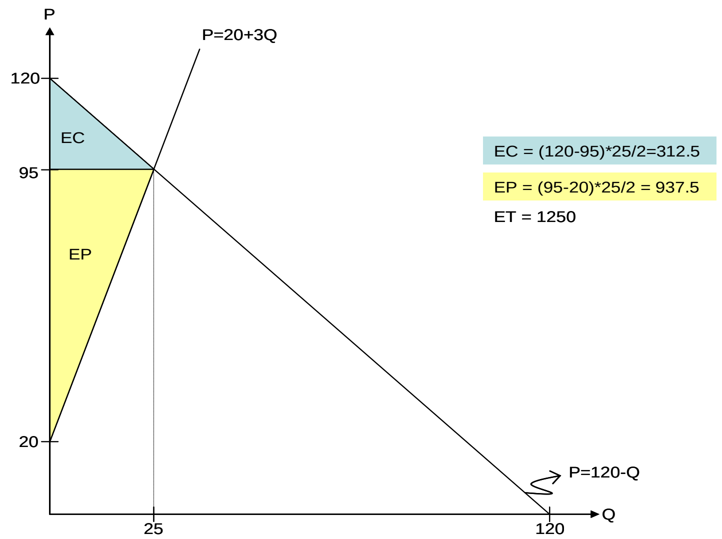
¿Cuál es la relación que existe entre las elasticidades de la demanda y de la oferta y la incidencia de un impuesto, o sea, quién paga una mayor parte del impuesto (productor o consumidor)?

Entre mayor sea la elasticidad del individuo, menor será la incidencia del impuesto sobre ese individuo. O sea, para una demanda fija, entre más elástica sea la oferta menor será la proporción del impuesto que el oferente paga. Y para una oferta fija, entre más elástica sea una demanda, menor será la proporción del impuesto que paga el demandante.

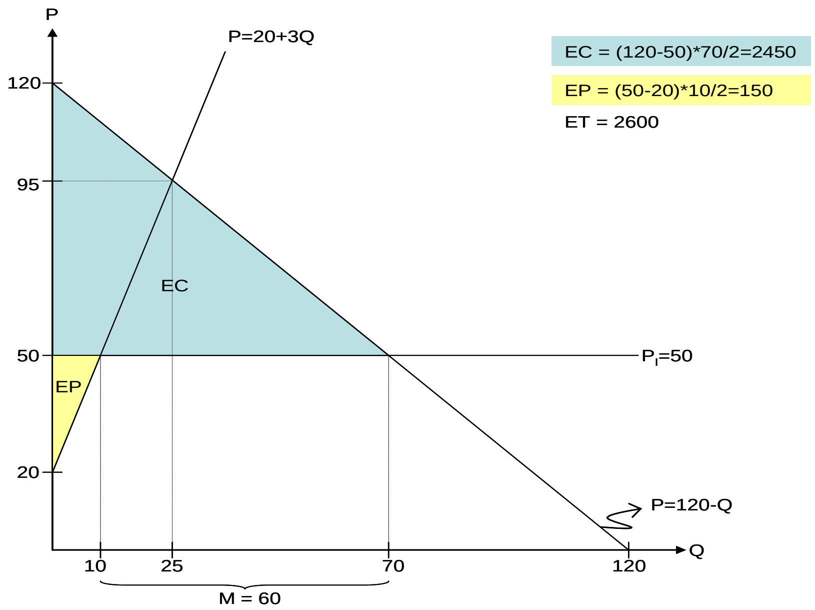
6.1.4 Los aranceles son malos

Un país presenta una demanda por el bien X representada por la función inversa P = 120 –Q y una oferta representada por P = 3Q + 20.

a. **Encuentre los valores de equilibrio para precio y cantidad y dibújelos en un gráfico. Calcule el valor de los excedentes del productor y consumidor y súmelos.**



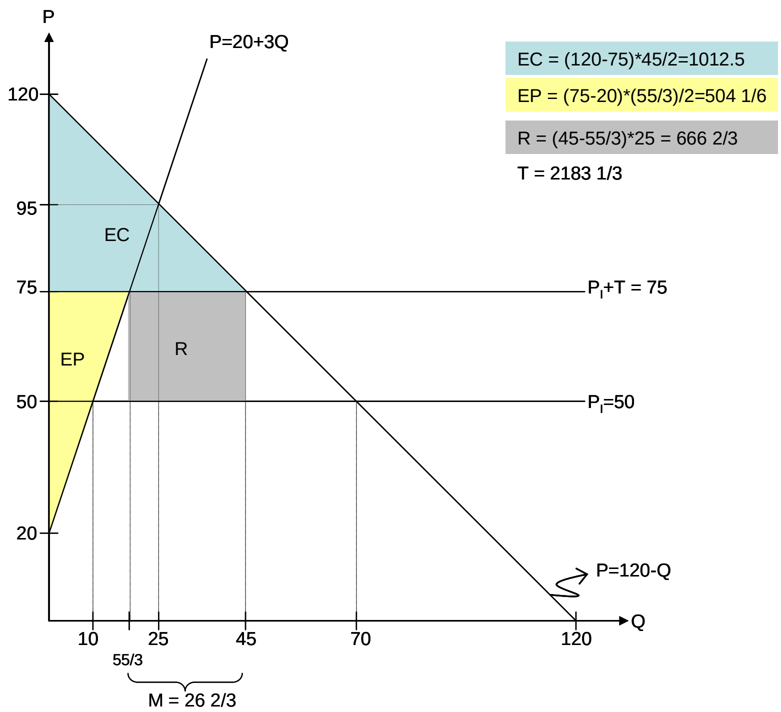
b. Ahora suponga que los consumidores pueden importar toda la cantidad del bien X que deseen sin pagar ningún tipo de impuesto a un precio igual a 50 por unidad. Encuentre la cantidad consumida por los demandantes, la cantidad producida localmente y las importaciones (diferencia entre el consumo y la producción local). Calcule los nuevos excedentes del consumidor y del productor y súmelos.



c. ¿Es la libre importación ventajosa para el país? ¿Quién gana y quién pierde con las importaciones?

Es ventajosa como un todo para el país, ganan los consumidores, pierden los productores.

d. Ahora suponga que para proteger a los productores locales, el gobierno decide poner un impuesto de 25 por unidad importada de X, de forma tal que el costo ahora es de 75 en lugar de 50. Encuentre la cantidad consumida por los demandantes, la cantidad producida localmente y las importaciones (diferencia entre el consumo y la producción local). Calcule los nuevos excedentes del consumidor y del productor, así como los impuestos recaudados por el gobierno y súmelos.



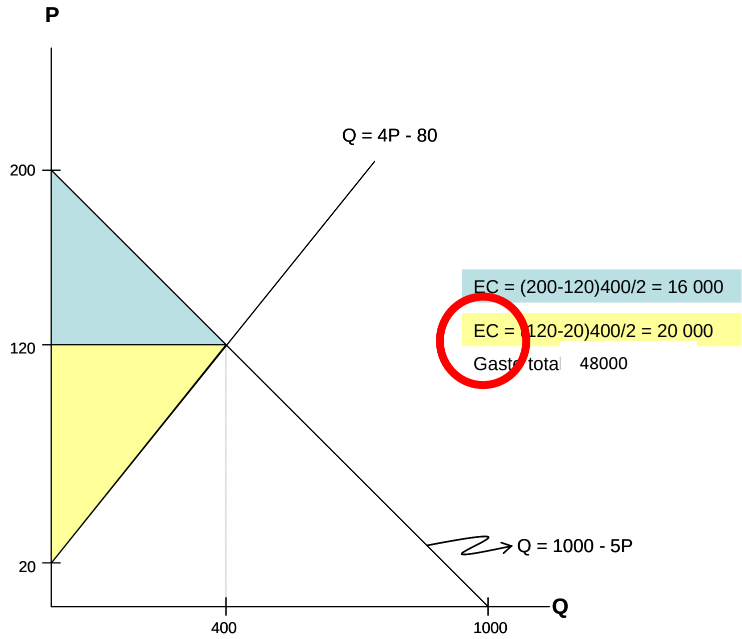
e. **¿Es el impuesto ventajoso para el país? ¿Quién gana y quién pierde con el impuesto? ¿Logró el gobierno su objetivo de proteger a los productores locales? ¿A qué costo? ¿Qué conclusiones generales puede obtener de la existencia de impuestos a las importaciones?**

El impuesto es desventajoso para el país porque se pierde excedente total, ganan los productores pero pierden más los consumidores. El gobierno logra incentivar la producción local pero a un costo elevado. Los impuestos a las importaciones conllevan a una pérdida social.

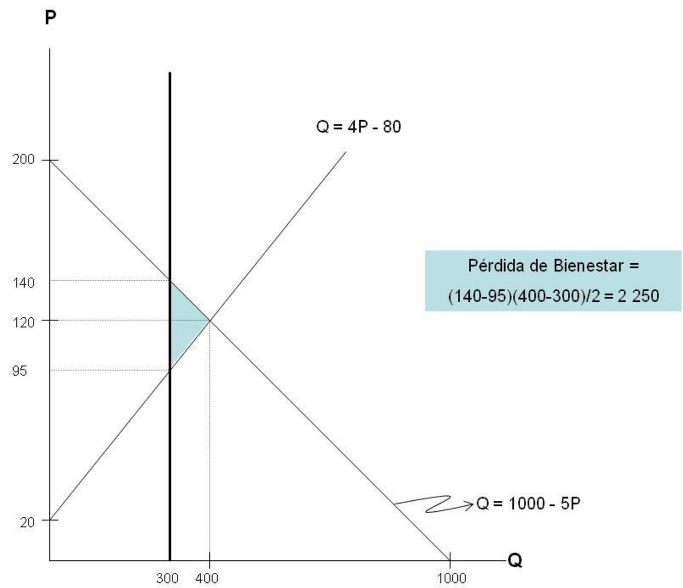
6.1.5 El mercado del bróculi

Suponga que la demanda de brócoli está dada por Q=1 000 – 5P, donde Q es la cantidad por año medida en cientos de toneladas y P es el precio en dólares por cien toneladas. La curva de oferta de largo plazo del brócoli está dada por Q=4P – 80.

a. **Encuentre la cantidad de equilibrio, el precio de equilibrio, el gasto total, el excedente del productor y el excedente del consumidor.**



b. ¿Qué parte del excedente del consumidor y del productor se perdería si en este mercado solo se permite producir Q=300.



c. Demuestre cómo la asignación de la pérdida total del excedente del consumidor y del productor descrito en el inciso b depende del precio de venta del brócoli. ¿Cómo compartirían la pérdida si P=140?¿Si P=95?

Si el precio de equilibrio se mantuviera en el valor original de 120, el consumidor acarrearía 20x100/2=1000 dólares de pérdida y el productor 25x100/2=1250 dólares de pérdida.

Entre más alto sea el precio, el consumidor perderá más, por ejemplo si el precio es 140, el consumidor perdería 7000 dólares ((140-120)(300+400)/2), mientras que el productor habría ganado 4750 dólares ((140-120)300-1250).

Entre más bajo sea el precio, el productor perderá más, por ejemplo si el precio es 95, el productor perdería 8 750 dólares ((120-95)(300+400)/2), mientras que el consumidor ganaría 6500 dólares ((120-95)300-1000).

Como puede apreciarse, la pérdida total siempre va a ser la misma, pero esta pérdida va a afectar al consumidor o al productor dependiendo del precio, e incluso puede llegar a afectar a alguno de estos individuos en un monto mayor al de la pérdida total.

d. ¿Cuál es la pérdida total del excedente del productor y del consumidor si Q=400? Demuestre que esa pérdida es independiente del precio de venta del brócoli.

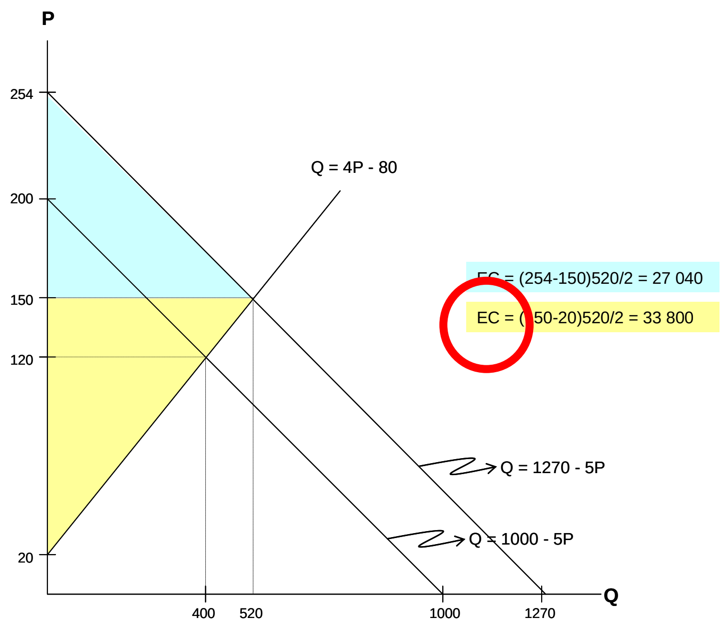
La pérdida es cero y el precio no podría ser distinto al de equilibrio.

e. Haga un gráfico con los resultados

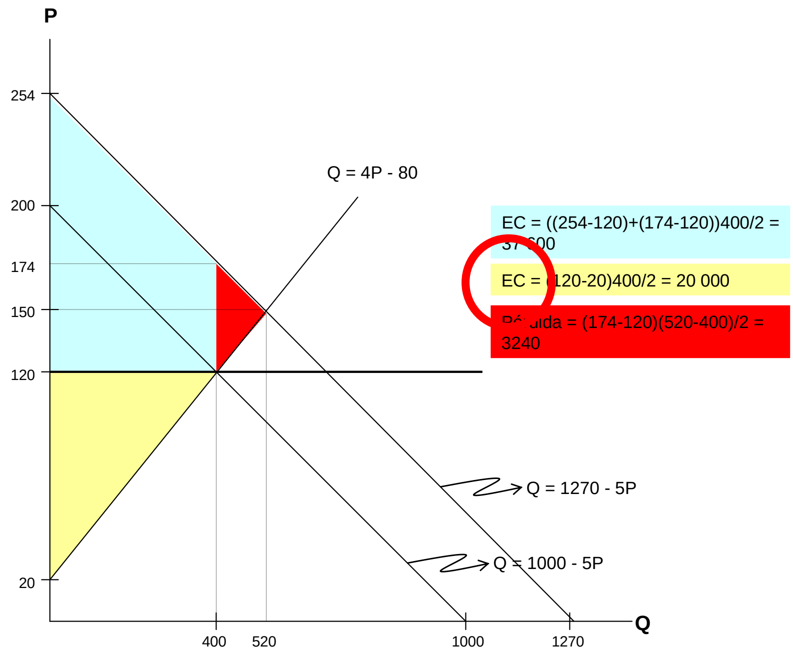
Ver puntos a y b.

f. Suponga que la demanda de brócoli ha aumentado a Q = 1 270 – 5P. ¿Cuál sería el nuevo precio y la cantidad de equilibrio?

g. ¿Cuáles serán los nuevos excedentes del productor y consumidor?



h. **Suponga que el gobierno ha impedido que el precio del brócoli suba de su nivel de equilibrio encontrado en a. Describa cómo variarían los excedentes del productor y del consumidor y cuál sería la pérdida de bienestar.**



i. **Regrese ahora a la curva de demanda original del punto a y suponga que el gobierno instituye un impuesto de 45 dólares por cada cien toneladas sobre el brócoli.**

i. **¿Cómo afectaría este impuesto el precio pagado por el consumidor, el precio recibido por el productor y la cantidad de equilibrio?**

$$Q = 1000 - 5P_D$$
$$Q = 4P_O - 80$$
$$P_D = P_O + 45$$
$$1000 - 5P_O - 225 = 4P_O - 80 \rightarrow P_O = 95, P_D = 140, Q = 300$$

ii. **¿Cómo sería compartida la carga de este impuesto entre los demandantes y oferentes de brócoli? ¿Cuál individuo tiene la curva más inelástica: el consumidor o el productor?**

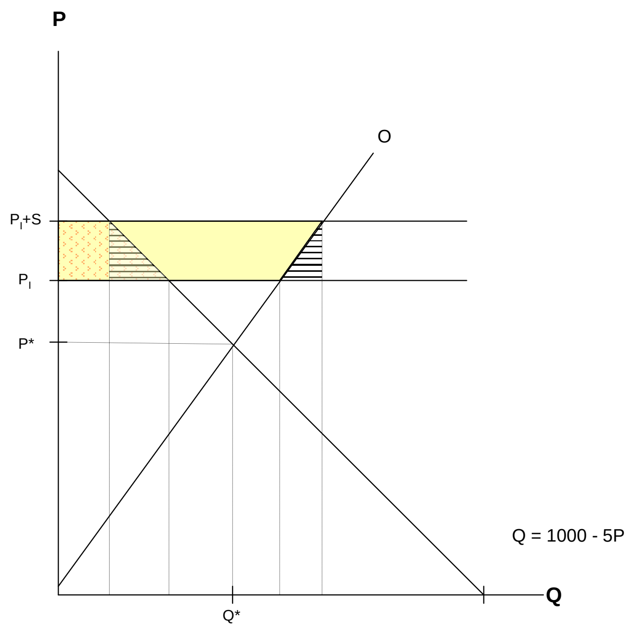
La recaudación total es 45x300 = 13 500, el consumidor paga (140-120)*300 = 6 000, el productor paga (120-95)x300 = 7 500. El productor tiene la curva más inelástica pues carga con un mayor porcentaje del impuesto.

iii. **¿Cuál es el costo en bienestar del impuesto?**

El costo en bienestar del impuesto es 45 x 100 /2 = 2 250

6.1.6 Costo en bienestar de un subsidio a los exportadores

Demuestre en un gráfico el costo en bienestar que ocasiona un subsidio sobre el precio de las exportaciones. Para esto debe asumir que el bien se vendería a P* si no existiera comercio y a P_I cuando hay comercio. $P_I > P^*$. Explique de dónde surge ese costo en bienestar.



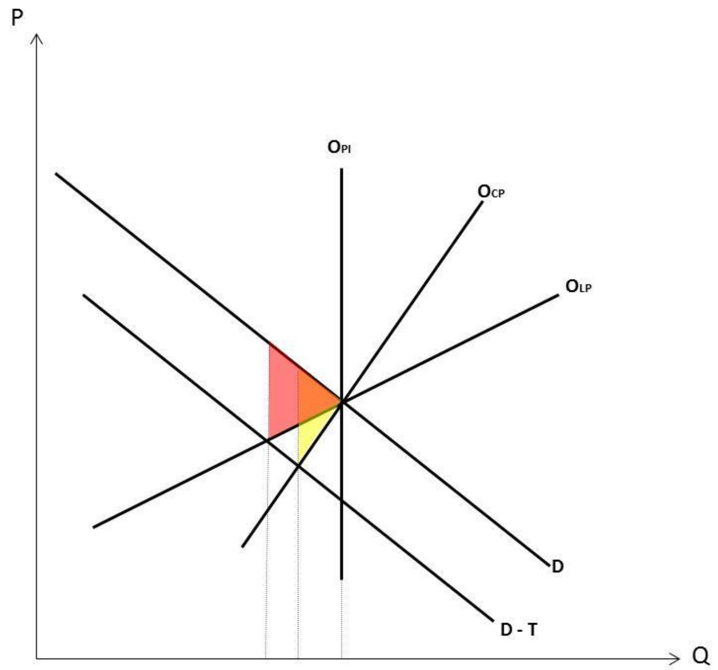
El área amarilla es la ganancia en excedente del productor; el área rojo punteada el la pérdida de excedente del consumidor; por lo que en neto, el excedente del consumidor y productor conjuntamente se incrementa en el área que está en amarillo puro. Pero a esto se le resta el costo del subsidio, por lo que la pérdida neta es igual a los dos triángulos con rayas negras.

Esta pérdida surge porque se reduce consumo que era valorado más que el valor de los recursos que se liberaron para exportar más, y porque se incrementa la producción a un costo superior que lo que el país recibe en divisas.

6.1.7 El costo en bienestar en el corto plazo y largo plazo

Falso o verdadero: En un modelo de equilibrio parcial, el costo en bienestar generado por un impuesto es mayor en el corto plazo que en el largo plazo.

Esta afirmación es falsa. En cuanto menor sea el plazo, la oferta es menos elasticidad con lo que consecuentemente el costo en bienestar generado por el impuesto es menor en el corto plazo y mayor en el largo plazo. En el gráfico se puede apreciar que en el largo plazo el área del triángulo que representa el CB es mayor en el largo plazo que en el corto plazo, pues la altura del triángulo es la misma pero la base es mayor en el largo plazo. En el plazo inmediato no hay costo en bienestar.



6.2 EJERCICIOS A RESOLVER

6.2.1 El costo en bienestar de políticas públicas

Ejemplifique en un gráfico cómo se visualizaría el costo en bienestar de las siguientes políticas públicas, basado en un modelo de equilibrio parcial.

a. Generalización del impuesto sobre el valor agregado sobre bienes que hoy no pagan impuesto de ventas.

b. Impuesto a la entrada de capitales especulativos del exterior.

c. Subsidio sobre la tasa de interés para vivienda a las familias con menores recursos.

d. Exoneración del impuesto sobre la renta de las empresas que se ubican en zona franca.

e. El gobierno limita el consumo a 10 unidades del bien por persona (debe analizar todos los posibles casos).

f. El gobierno confisca la mitad de lo producido a los oferentes.

g. El Gobierno establece un impuesto al consumo por un monto fijo T por unidad comprada y, al mismo tiempo, le da al productor un subsidio idéntico –por un monto fijo T- por unidad producida. En este caso, ¿depende el efecto sobre el bienestar de las elasticidades de oferta y demanda?

6.2.2 ¿Son los subsidios mejores que los impuestos?

A partir de un mismo precio y cantidad de equilibrio para un bien X, ¿qué es más conveniente desde el punto de vista de bienestar económico, imponer sobre un mercado un impuesto de monto T o dar un subsidio de monto S? Puede comprobar su respuesta utilizando gráficos o las respuestas encontradas en los incisos a y b.

6.2.3 El costo en bienestar de los impuestos al comercio

Mediante la utilización de gráficos de oferta y demanda, resuelva los siguientes casos, encontrando el costo en bienestar (si existe) de los siguientes impuestos y subsidios:

a. En algunos países se les devuelve a los turistas en el aeropuerto, previo a abordar el avión, el monto pagado durante su estancia de los impuestos sobre las ventas o el Impuesto al Valor Agregado (IVA). Sin embargo, el vendedor local no tiene forma de determinar si el turista va o no va a solicitar la devolución del impuesto. Utilizando un modelo de equilibrio parcial, determine si esta política tiene algún efecto sobre el bienestar de los consumidores (extranjeros), los productores locales y el bienestar general de la economía. Para facilitar los gráficos, analice el caso como si se trataran consumidores locales, o sea, no asuma que existe un precio internacional diferente al local).

b. En Costa Rica, el depósito libre de Golfito exonera de impuestos los bienes importados que allí se expenden. Analice bajo un modelo de equilibrio general, el efecto de esta política sobre el bienestar de la economía y explique qué se prefiere desde el punto de vista económico: la existencia del depósito libre o su clausura.

c. Utilizando un modelo de equilibrio parcial, analice el caso de un país que posee poder monopólico sobre el bien que exporta, o sea, un país que puede afectar el precio internacional si reduce la oferta exportable de ese bien. Explique si es posible que el bienestar del país aumente cuando se pone un impuesto a las exportaciones.

CAPÍTULO 7
EL MONOPOLIO

TEMARIO

.

7.1

.

7.2 La oferta de producto

.

7.3 Ejercicios a solucionar

1. EL MONOPOLIO Y LA ASISTENCIA AL FUTBOL

La asistencia a un partido de la Liga depende del número de juegos ganados por el equipo al año y del costo de las entradas al estadio. La función de demanda que enfrenta la Liga es q = N (20 - p), donde q es el número de tiquetes (en cientos de miles) vendidos por año, p es el precio del tiquete y N es la fracción que representa el porcentaje de juegos ganados por el equipo. La liga puede incrementar el número de juegos que gana contratando a mejores jugadores. Si el equipo gasta C millones de dólares en jugadores, ganará la fracción .7 – 1/C de sus juegos. Sobre el rango relevante, el costo marginal de vender una entrada al estadio extra es cero.

a. Encuentre la ecuación de las ganancias de la Liga como función del precio de la entrada y el gasto en jugadores.

$q = N (20 – p)$; $N = .7 – 1/C$
$\pi = (.7 – 1/C) * (20-p)\, p - C$

b. Encuentre el precio que maximiza el ingreso total.

$\partial\pi /\partial p = (.7 – 1/C)[(20-p)-p] = 0 \rightarrow 2p = 20 \rightarrow p^* = 10.$

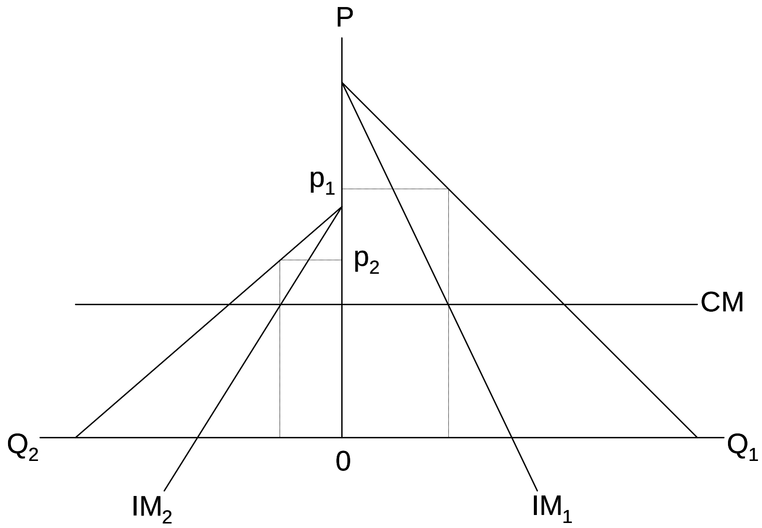
c. Encuentre el gasto en jugadores y la fracción de juegos ganados que maximiza las ganancias de la Liga.

$\pi = (.7 – 1/C) * (20-p)\, p – C$; $p = 10 \rightarrow \pi = (.7 – 1/C)*100 – C$; $\partial\pi /\partial C = 100/C^2 -1 = 0 \rightarrow$

$C^* = 10$

2. **Un monopolista discrimina entre dos tipos de consumidores, a cuál de ellos le va a cobrar un mayor precio: a los consumidores con la demanda más elástica o a los que tienen la demanda más inelástica?**

Le cobra más a los que tienen demanda más inelástica, tal y como se puede ver en el gráfico.



3. **Analice la siguiente afirmación: El monopolio solo puede existir en mercados en donde el tramo de la demanda es elástica.**

Es correcto. El equilibrio del monopolista ocurre en donde el IM = CM. Como el IM es negativo cuando la curva de demanda es inelástica, un monopolista nunca operará en el tramo inelástico de la demanda.

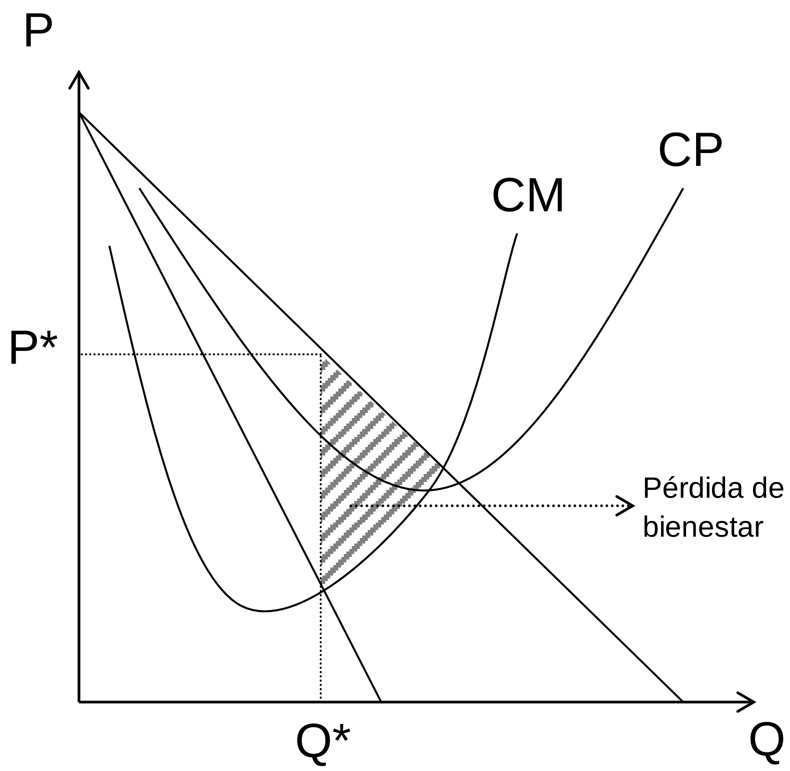
4. **Analice la siguiente afirmación: En una industria con costos decrecientes y en donde todas las empresas son idénticas (o sea, que tienen la misma estructura de costos), es preferible que solamente exista un único proveedor del bien.**

Correcto desde el punto de vista del sacrificio de recursos para la sociedad, pues el CT total de producir una cantidad X de producto es inferior al CT sumado de dos empresas que produce cada una cantidad de X/2.

5. **Analice la siguiente afirmación: Cuando un monopolista se enfrenta a un grupo de consumidores con una demanda con elasticidad unitaria, existen múltiples puntos de equilibrio para el monopolista**

Es falso, porque el monopolista tiene un costo que generalmente es creciente. Como el IM=0 cuando la demanda tiene elasticidad unitaria, entonces el equilibrio se da en donde el CM=IM=0, lo cual ocurre por lo general cuando la producción se acerca también a 0.

6. **Ejemplifique la pérdida de bienestar que una sociedad enfrenta cuando existe un monopolio simple, o sea, un monopolio que no discrimina entre consumidores.**



CAPÍTULO 8
EL EQUILIBRIO GENERAL

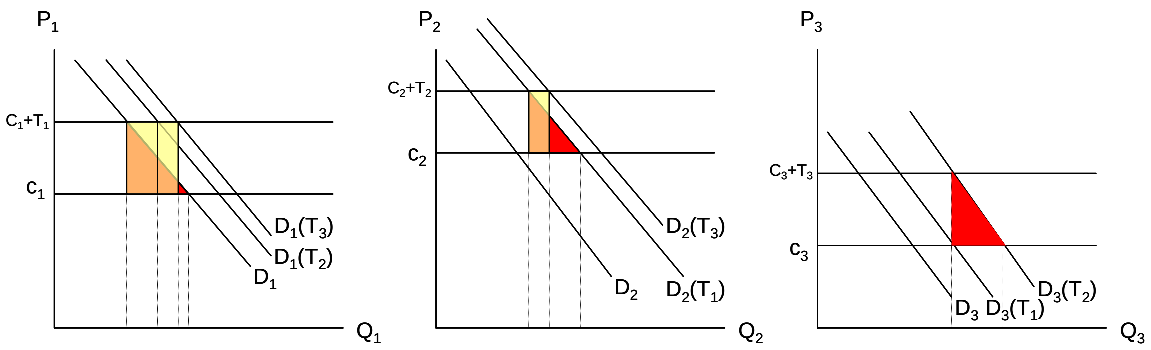
TEMARIO

8.1 EL COSTO EN BIENESTAR DE LOS IMPUESTOS

8.1.1 Costo en bienestar en equilibrio general con costos no unitarios

El costo en bienestar de un modelo de equilibrio general es igual a $-\frac{1}{2}\sum_i \sum_j S_{ij} T_i T_j , S_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial P_j}$. En este ejercicio se supone que la oferta de cada uno de los bienes es perfectamente elástica y que el costo marginal era igual a 1. **¿Cómo cambiaría esta fórmula si se supone que el costo marginal de producir el bien *i* sigue siendo constante pero ahora es igual a C_i ?**

El resultado es el mismo:



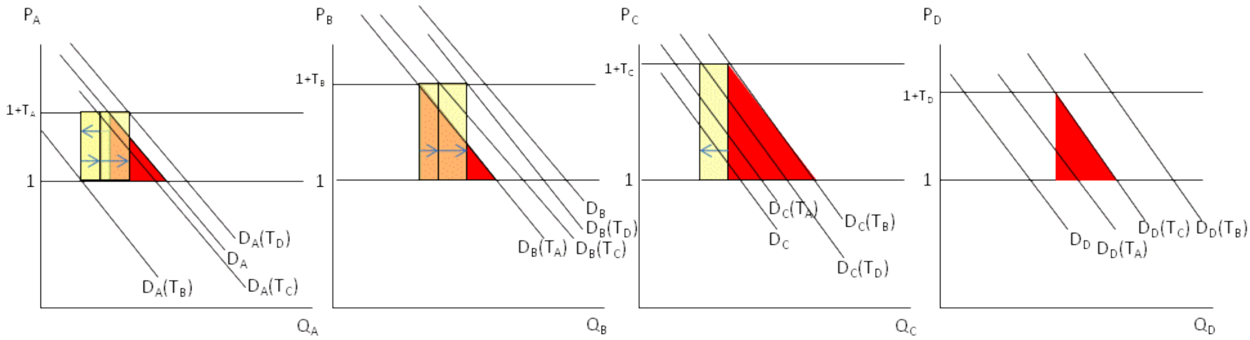
$$CB = \frac{1}{2} S_{11} T_1^2 + S_{12} T_1 T_2 + S_{13} T_1 T_3 + \frac{1}{2} S_{22} T_2^2 + S_{23} T_2 T_3 + \frac{1}{2} S_{33} T_3^2$$

porque no se afecta la propiedad de que las elasticidades cruzadas son iguales: S_{ij}=S_{ji},, la cual es una característica de las demandas compensadas.

8.1.2 Costo en bienestar del equilibrio general con bienes complementarios

En una economía existen 4 bienes solamente: A, B, C y D. A y B son complementarios entre sí, al igual que C y D. Sin embargo, A y B son sustitutos con los bienes C y D. Asuma que el costo marginal de producir todos los bienes es constante e igual a 1. Si se establecen impuestos sobre cada uno de estos bienes T_A, T_B, T_C y T_D, todos diferentes:

a. **Mediante el uso de gráficos ejemplifique el costo en bienestar de estos impuestos bajo un modelo de equilibrio general indicando en el gráfico de oferta y demanda de cada bien los costos y beneficios derivados de los impuestos especificados.**



b. Derive la fórmula que permitiría cuantificar el costo en bienestar de los impuestos. ¿Podría el costo en bienestar ser negativo (o sea, que este grupo de impuestos deje a la sociedad con una ganancia en bienestar)?

$$
\begin{aligned}
CB = -\frac{1}{2}(&S_{11}T_1^2 + S_{12}T_1T_2 + S_{13}T_1T_3 + S_{14}T_1T_4 + S_{22}T_2^2 + S_{21}T_2T_1 + S_{23}T_2T_3 \\
&+ S_{24}T_2T_4 + S_{33}T_3^2 + S_{31}T_3T_1 + S_{32}T_3T_2 + S_{34}T_3T_4 + S_{44}T_4^2 \\
&+ S_{41}T_4T_1 + S_{42}T_4T_2 + S_{43}T_4T_3)
\end{aligned}
$$

8.1.3 EL COSTO EN BIENESTAR EN EL EQUILIBRIO GENERAL

a. Una economía se compone de tres bienes cuyas demandas están representadas por las siguientes ecuaciones:

$$X_1 = 4 - P_1 + 3P_2 - P_3$$

$$X_2 = 6 + 3P_1 - \frac{1}{2}P_2 + 2P_3$$

$$X_3 = 10 - P_1 + 2P_2 - P_3$$

Los bienes se producen con tecnologías tales que los costos marginales son constantes, de forma que el $CM_1 = 1$, $CM_2 = 2$ y el $CM_3 = 3$. Si se impone un impuesto sobre cada uno de los bienes en donde $T_1 = 2T_2 = 4T_3$. Calcule el costo en bienestar de la tributación considerante el equilibrio general.

$$CB = -\frac{1}{2}(-1)T_1^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)T_2^2 - \frac{1}{2}(-1)T_3^2 - 3T_1T_2 + 1T_1T_3 - 2T_2T_3$$

$$= \frac{1}{2}T_1^2 + \frac{1}{16}T_1^2 + \frac{1}{32}T_1^2 - \frac{3}{2}T_1^2 + \frac{1}{4}T_1^2 \boxed{-\frac{T_1^2}{16}} = -\frac{29}{32}T_1^2$$

b. En el caso de que los impuestos sobre los bienes no son unitarios, o sea, por unidad de producto, sino porcentuales o ad-valorem, demuestre que la fórmula que mide el costo en bienestar de los impuestos pasa de ser: CB = $-\frac{1}{2}\sum_i\sum_j S_{ij}T_iT_j$, pasa a ser CB = $-\frac{1}{2}\sum_j\sum_{i<j} S_{ij}(t_i - t_j)^2 C_iC_j, S_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial P_j}$, donde t_i es el impuesto porcentual sobre el bien i y C_i es el costo marginal constante de producir el bien i. Para encontrar la solución le puede resultar útil recordar que: $C_it_i = T_i; S_{ij} = S_{ji}; \sum_j C_jS_{ij} = \sum_i C_iS_{ij} = 0$, lo que en el caso de tres bienes significa que: $C_1S_{11} + C_2S_{12} + C_3S_{13} = 0$. Para ayudarse a encontrar la solución puede utilizar el caso de una economía con 3 bienes.

$$CB = -\frac{1}{2}S_{11}T_1^2 - \frac{1}{2}S_{22}T_2^2 - \frac{1}{2}S_{33}T_3^2 - S_{12}T_1T_2 - S_{13}T_1T_3 - S_{23}T_2T_3$$

$$C_1S_{11} + C_2S_{12} + C_3S_{13} = 0$$

$$C_1S_{12} + C_2S_{22} + C_3S_{32} = 0$$

$$C_1S_{13} + C_2S_{23} + C_3S_{33} = 0$$

$$CB = -\frac{1}{2}\left(\frac{-C_2S_{12} - C_3S_{13}}{C_1}\right)C_1^2t_1^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{-C_1S_{12} - C_3S_{23}}{C_2}\right)C_2^2t_2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{-C_1S_{13} - C_2S_{23}}{C_3}\right)C_3^2t_3^2 + \cdots$$

$$\cdots - S_{12}C_1t_1C_2t_2 - S_{13}C_1t_1C_3t_3 - S_{23}C_2t_2C_3t_3$$

$$CB = \frac{1}{2}C_1C_2S_{12}t_1^2 + \frac{1}{2}C_1C_3S_{13}t_1^2 + \frac{1}{2}C_1C_2S_{12}t_2^2 + \frac{1}{2}C_2C_3S_{23}t_2^2 + \frac{1}{2}C_1C_3S_{13}t_3^2 + \frac{1}{2}C_2C_3S_{23}t_3^2 + \cdots$$

$$\cdots - C_1C_2S_{12}t_1t_2 - C_1C_3S_{13}t_1t_3 - C_2C_3S_{23}t_2t_3$$

$$CB = \frac{1}{2}S_{12}C_1C_2\left(t_1^2 - 2t_1t_2 + t_2^2\right) + \frac{1}{2}S_{13}C_1C_3\left(t_1^2 - 2t_1t_3 + t_3^2\right) + \frac{1}{2}S_{23}C_2C_3\left(t_2^2 - 2t_2t_3 + t_3^2\right)$$

$$CB = \frac{1}{2}S_{12}C_1C_2\left(t_1 - t_2\right)^2 + \frac{1}{2}S_{13}C_1C_3\left(t_1 - t_3\right)^2 + \frac{1}{2}S_{23}C_2C_3\left(t_2 - t_3\right)^2$$

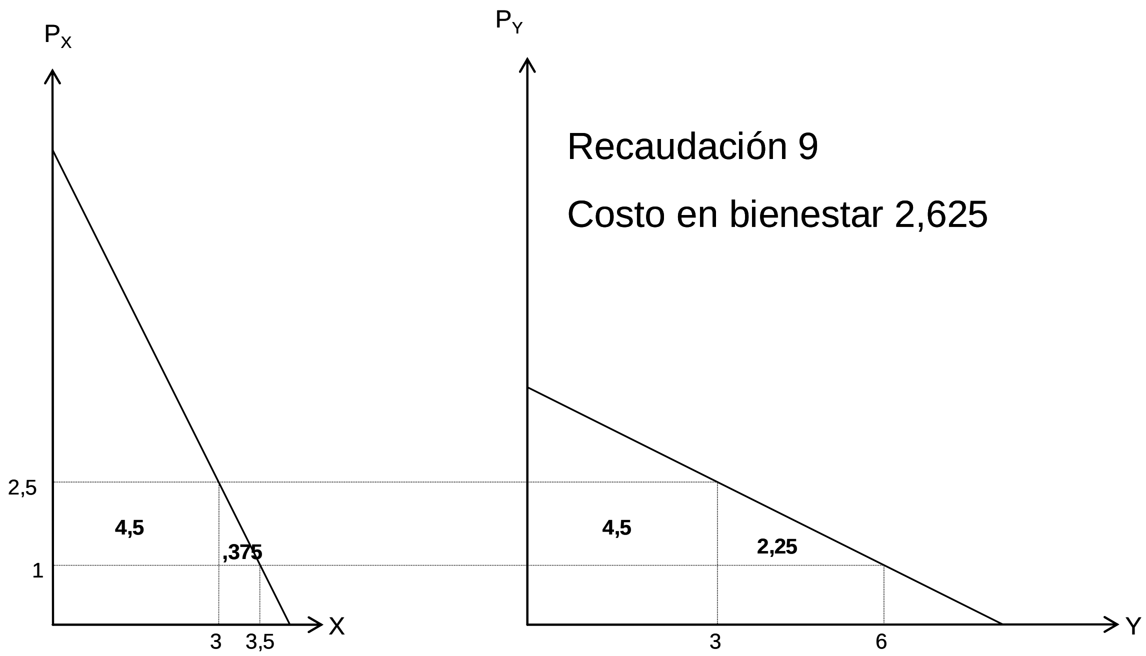
c. En el caso expuesto en el punto a, calcule el costo en bienestar si el impuesto sobre el bien 1 es del 100%, sobre el bien 2 es del 200% y sobre el bien 3 es del 300%.

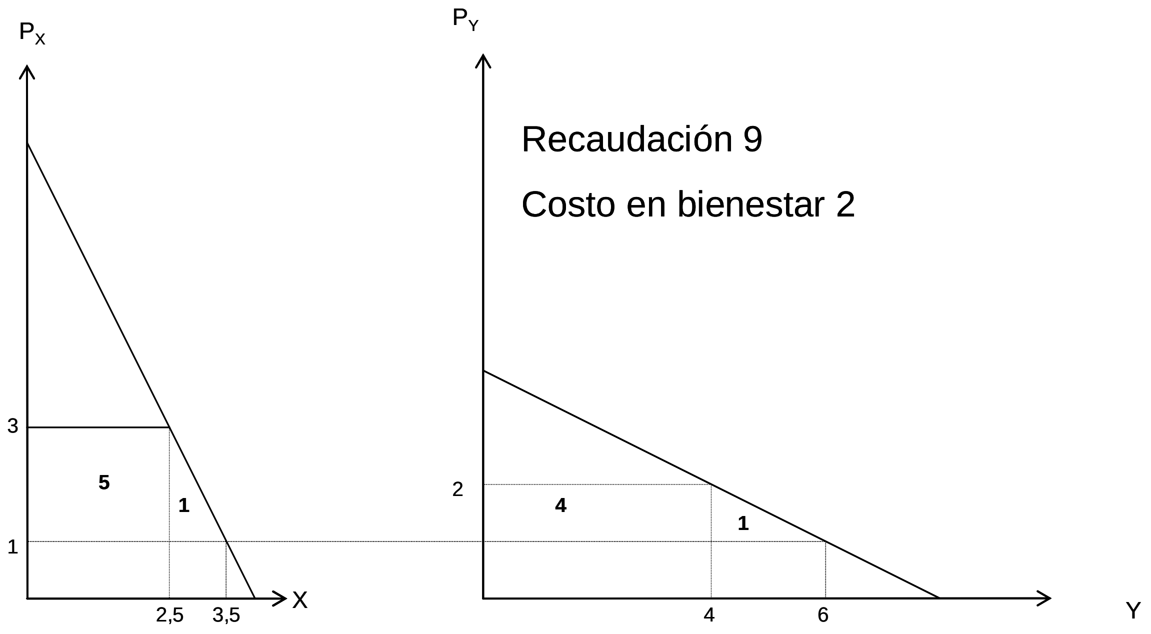
$$CB = -\frac{1}{2}3(1)(2)(1-2)^2 - \frac{1}{2}(-1)(1)(3)(1-3)^2 - \frac{1}{2}(2)(2)(3)(2-3)^2 = -3.5$$

8.1.4 La ley de Ramsey

En 1927 Frank Ramsey diseñó un modelo de equilibrio general para minimizar el costo en bienestar del establecimiento de impuestos sobre todos los bienes. En su artículo, Ramsey explicó que si un gobierno desea recaudar un monto determinado por medio de impuestos y el fin del sistema tributario es causar el menor impacto sobre el bienestar económico, los impuestos que se apliquen sobre los bienes no pueden ser iguales, sino que se debe de tasar más a aquellos bienes que son más inelásticos y menos a los que son más elásticos.

a. Mediante la utilización de gráficos de oferta y demanda (puede asumir solamente la existencia de dos bienes), explique intuitivamente este concepto, mostrando cómo las áreas del costo en bienestar se minimizan cuando se establece un impuesto unitario mayor al bien más inelástico. Un ejemplo numérico puede ser aconsejable en donde se plantee la necesidad de recolectar cierto monto en impuestos y se debe diseñar un paquete de impuestos diferenciados entre los dos bienes para recolectar ese monto, tomando en consideración las elasticidades de oferta y demanda.





Tal y como se puede observar en el primer juego de gráficos, si se pone un impuesto igual a los dos tipos de bienes, se recauda 9 y se genera un costo en bienestar de 2,625. Sin embargo, se puede recaudar lo mismo y tener un menor costo en bienestar si se tasa más fuerte al bien más inelástico (X) como se muestra en el segundo juego de gráficos.

b. Utilizando la expresión de que el costo en bienestar es $-\frac{1}{2}\sum_i \sum_j S_{ij} T_i T_j, S_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial P_j}$, pruebe que la minimización del costo en bienestar lleva a que la tasa óptima es $\frac{T_i}{T_j} = \frac{\eta_j}{\eta_i}$, donde η_i y η_j representan las elasticidades de demanda de los bienes i y j respectivamente. Para ello, se debe de definir el *Lagrangiano* para minimizar el costo en bienestar sujeto a la restricción presupuestaria según la cual la recaudación es igual al monto del impuesto multiplicado por el consumo de cada uno de los bienes ($\sum X_i T_i = R$). Para obtener este resultado, le puede ser útil asumir que la oferta es perfectamente elástica y que el costo marginal en todos los bienes es 1. Además recuerde que $\Delta X_i = \sum_j S_{ij} T_j$. Por facilidad puede trabajar el caso de que solo existen dos o tres bienes.

$$\zeta = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_j S_{ij} T_i T_j + \lambda\left(R - \sum X_i T_i\right)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial T_i} = \sum_j S_{ij} T_j - \lambda \left(X_i - \sum_j S_{ij} T_j \right) = 0$$

$$(1+\lambda) \sum_j S_{ij} T_j = \lambda X_i$$

$$(1+\lambda) \Delta X_i = \lambda X_i$$

$$\frac{\Delta X_i}{X_i} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)}$$

$$\frac{\Delta X_i}{X_i} \frac{P_i}{\Delta P_i} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)} \frac{P_i}{\Delta P_i}$$

$$\eta_i = \frac{\lambda}{(1+\lambda)} \frac{P_i}{T_i} \Rightarrow T_i = \frac{\lambda}{(1+\lambda)} \frac{P_i}{\eta_i}$$

De forma similar: $\eta_j = \frac{\lambda}{(1+\lambda)} \frac{P_j}{T_j} \Rightarrow T_j = \frac{\lambda}{(1+\lambda)} \frac{P_j}{\eta_j}$

Por lo tanto, si partimos de precios iniciales unitarios: $\frac{T_i}{T_j} = \frac{\eta_j}{\eta_i}$

8.2 LA CAJA DE EDGEWORTH

8.2.1 Curvas de indiferencia especiales

Dos individuos A y B consumen solamente dos bienes X e Y, y tienen las siguientes funciones de utilidad (U) y las siguientes dotaciones (w):

$U_A(X_A, Y_A) = \min(2X_A, Y_A) + \min(X_A, 2Y_A)$ $\quad w_A = (10, 0)$
$U_B(X_B, Y_B) = X_B + Y_B$ $\quad w_B = (0, 20)$

a. Calcule los precios de equilibrio y las cantidades que cada individuo consume en el equilibrio

No existe una única solución, sino que hay un rango de precios factibles que estas dos personas pueden pactar, pues $P_X/P_Y \in [0,1]$. El equilibrio final se encuentra en el triángulo definido por la intersección del área de comercio y la zona de contrato. Así por ejemplo, si el equilibrio estuviese a lo largo de la línea verde que se muestra en el gráfico (no solo allí puede estar, pero este es solo un ejemplo numérico):

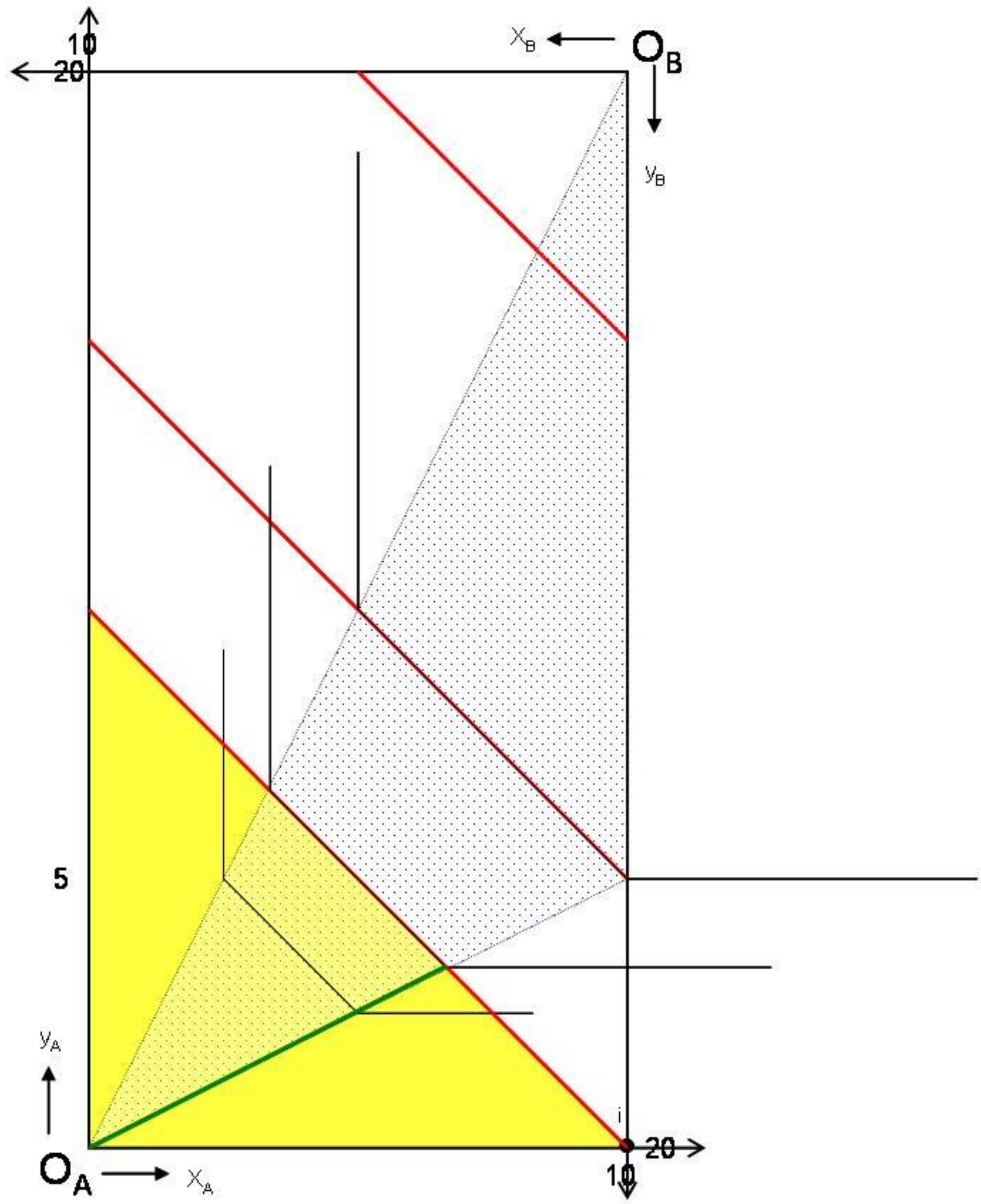
$X_A = 2Y_A$. $\quad \frac{P_X}{P_Y}X_A + Y_A = 10\frac{P_X}{P_Y} \rightarrow \quad \frac{P_X}{P_Y}X_A + \frac{1}{2}X_A = 10\frac{P_X}{P_Y} \quad \rightarrow$

$$X_A = \frac{10\frac{P_X}{P_Y}}{\frac{P_X}{P_Y} + \frac{1}{2}}, \frac{P_X}{P_Y} \in [0,1]$$

$$Y_A = \frac{1}{2}X_A = \frac{5\frac{P_X}{P_Y}}{\frac{P_X}{P_Y} + \frac{1}{2}}, \frac{P_X}{P_Y} \in [0,1]$$

b. Dibuje un diagrama de Edgeworth y señale el punto inicial, el punto final, el área de comercio y la curva o área de contrato indicando cualquier discontinuidad que presente.

i. El punto inicial está representado por i en el gráfico en la esquina inferior derecha.
ii. El punto final está representado por la línea verde.
iii. En amarillo está representada el área de comercio.
iv. El área de contrato es la zona de puntos azules.



c. **La dotación global de esta economía es (10, 20). Suponga que esta cantidad es repartida aleatoriamente entre ambos individuos. ¿Cuál es la probabilidad de que con esta cantidad determinada aleatoriamente exista la posibilidad de que ocurra un intercambio mutuamente beneficioso?**

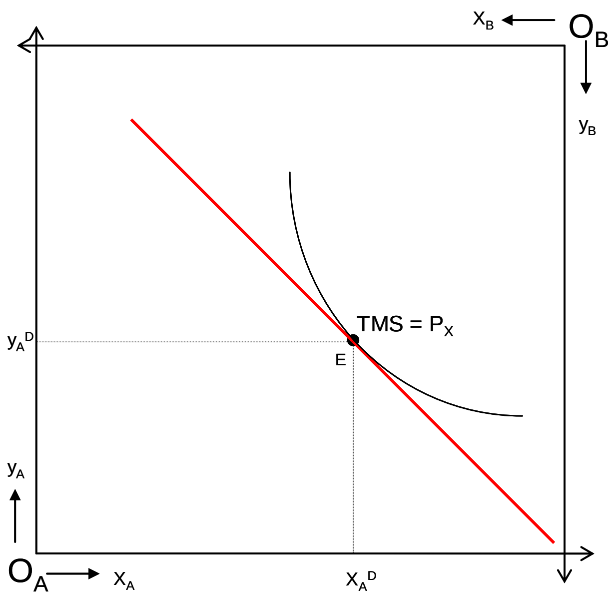
Esto es igual al complemento del área de puntos azules entre el total del área de la caja. El área de la caja es 20 * 10 = 200, el área de la zona de contrato es 15 * 10 / 2 = 75. Por lo tanto, la probabilidad de que en una distribución aleatoria, exista comercio es 1 – 75/200 = 62,5%.

8.2.2 La decisión de no comerciar

Aun cuando los mercados están abiertos y disponibles, en ciertas circunstancias un individuo puede encontrar beneficioso no involucrarse en el comercio. En cada una de las siguientes situaciones, deje a X ser el bien transable y a Y ser el numerario. En sus diagramas coloque a Y en el eje vertical.

Ana tiene una dotación positiva E = (X_a,Y_a). Pero al precio existente en el mercado, Px, ella no quiere comprar ni vender X.

a. Ilustre la situación en un diagrama con los ejes X, Y.

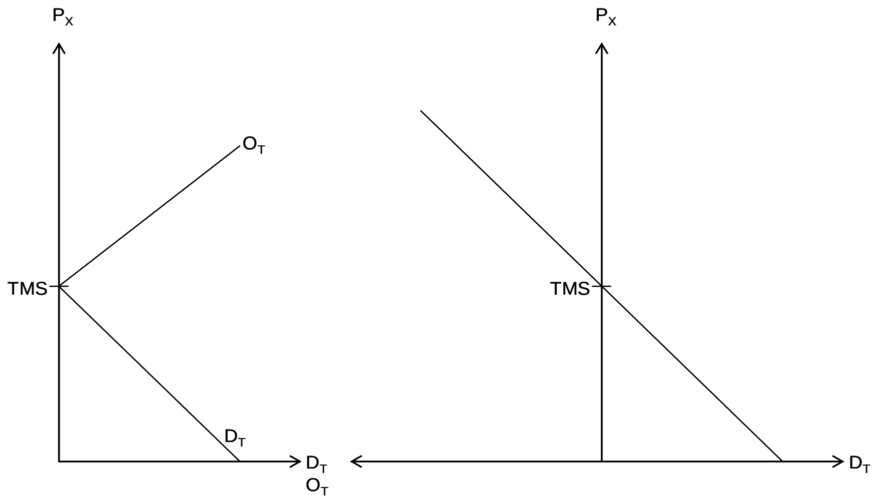


b. Considere la magnitud de su Tasa Marginal de Sustitución, TMS, en el punto de la dotación inicial E. Específicamente, si las circunstancias son las señaladas con anterioridad, ¿es la TMS del individuo mayor, menor, mayor igual, menor igual o igual a Px?

En E: Px=TMS.

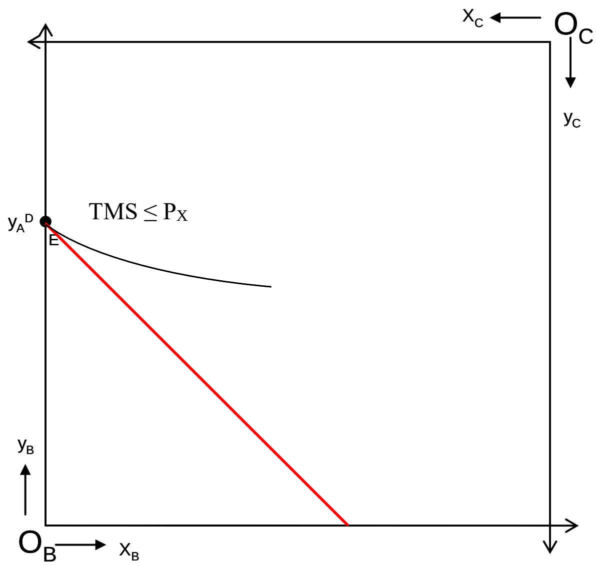
c. En un diagrama de oferta y demanda transadas, con Px en el eje vertical y X_t en el horizontal, dibuje la situación del individuo según lo encontrado en a y b.

Dos formas de hacer el gráfico de forma correcta, una es usando D_T y O_T; y la otra es usando D_T positiva y negativa.



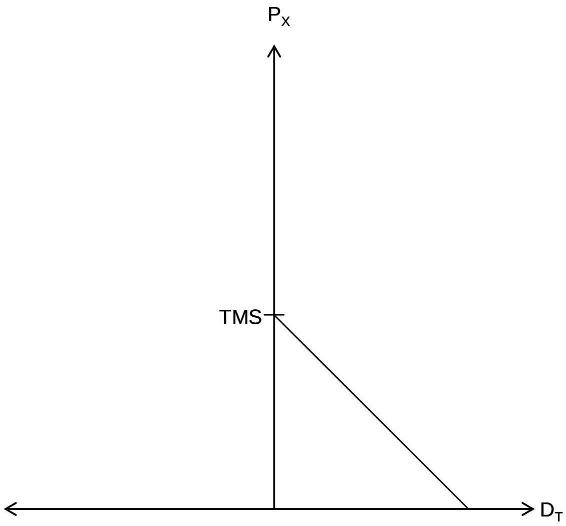
d. Betty tiene una dotación inicial E = (X_b,Y_b), donde Y_b es positivo pero X_b es cero. Al precio existente, Px, Betty tampoco prefiere comerciar. Responda las mismas preguntas a, b y c.

a.



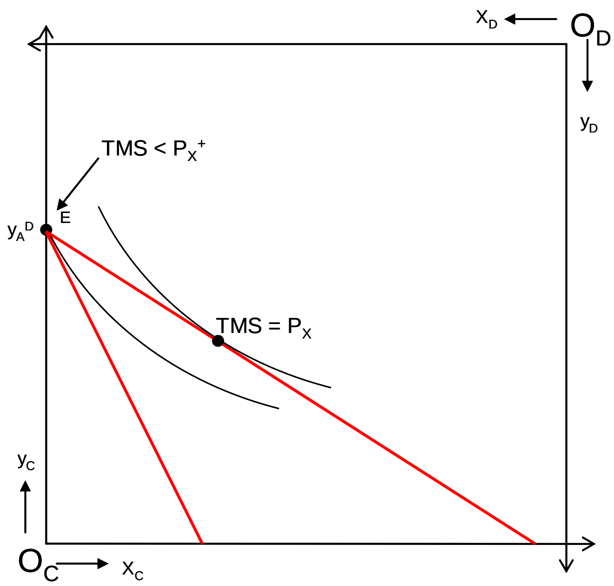
b. Px ≥ TMS≤

c.



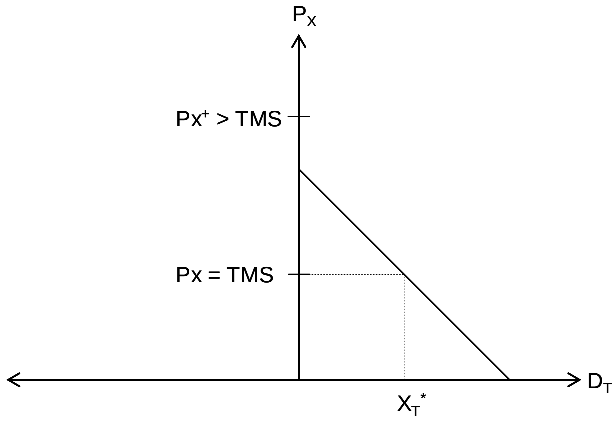
e. Carlos tiene una dotación como la de Betty. Sin embargo a diferencia de Betty, al precio inicial en el mercado, Px, Carlos <u>sí</u> desea comerciar. Específicamente, a Px, Carlos va a ser un comprador neto de X. No obstante, un impuesto proporcional por transacciones es establecido y le aumenta el costo a Carlos a Px^+. A este precio superior, Carlos no desea comerciar. Responda las mismas preguntas a, b y c, con la excepción de que en la b compare la TMS con Px y Px^+.

a.



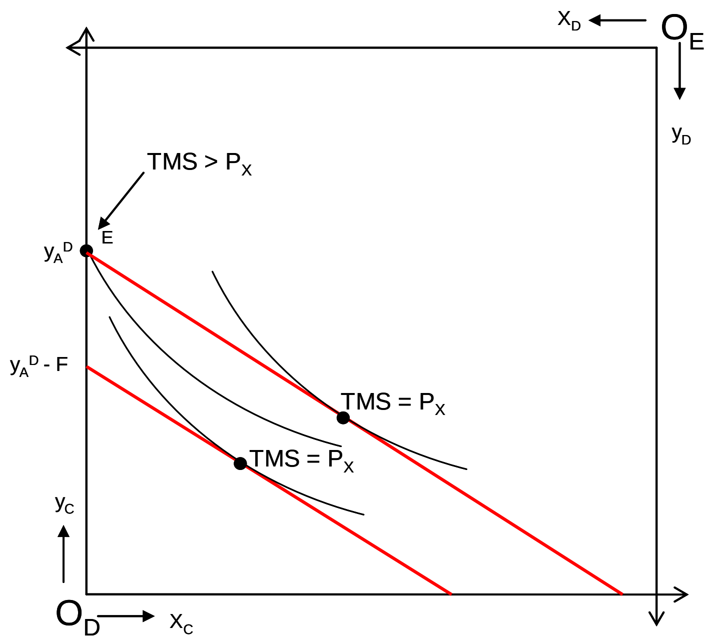
b. En E: Px < TMS < Px^+

c.



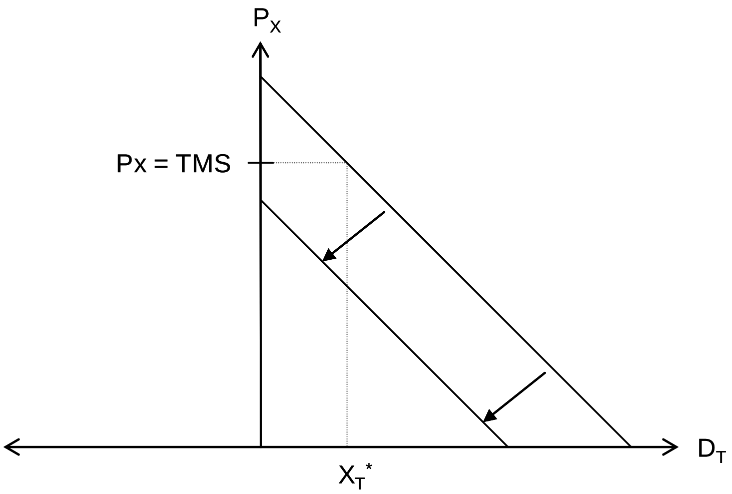
f. Doris tiene también una dotación como la de Carlos y la de Betty. Inicialmente, al igual que Carlos, ella sería una compradora neta de X. Pero en su caso ella tiene que pagar un impuesto de <u>suma fija</u> sobre las transacciones que realice, el cual es un monto fijo F pagado en unidades del bien Y. Esto es, su dotación se mantiene en Y_d si no compra nada, pero si ella transa su dotación se reduce a Y_d-F para comprar la cantidad deseada de X. Ahora, a pesar de que el precio que enfrenta es el mismo, Px, ella prefiere no comerciar. Responda al igual que en a, b y c.

a.



b. En E: Px < TMS

c.



8.2.3 Solución generalizada para Cobb - Douglas

Suponga que existe una economía con solo dos individuos Ana y Betty, quienes consumen solamente dos bienes X e Y. La funciones de utilidad de estas dos personas están representadas por:

$U_A = 1/5 \ln X + 4/5 \ln Y$
$U_B = 4/5 \ln X + 1/5 \ln Y$

La economía como un todo es dotada de 100 unidades de X y 50 unidades de Y. Suponga que Ana es dotada de α unidades de X y β unidades de Y

a. Encuentre la curva de contrato de esta economía.

$$\frac{Y_A}{4X_A} = \frac{4Y_B}{X_B} \rightarrow \frac{Y_A}{4X_A} = \frac{4(50 - Y_A)}{(100 - X_A)} \rightarrow 100Y_A - X_A Y_A = 800X_A - 16X_A Y_A$$

$$\rightarrow Y_A(100 + 15X_A) = 800X_A \rightarrow Y_A = \frac{160X_A}{(20 + 3X_A)}$$

b. Encuentre los precios relativos de equilibrio de esta economía.

$$X_A + X_B = 100$$

$$X_A = \frac{1}{5}\left(\frac{\alpha P_X + \beta P_Y}{P_X}\right), X_B = \frac{4}{5}\left(\frac{(100-\alpha)P_X + (50-\beta)P_Y}{P_X}\right)$$

$$\frac{1}{5}\left(\frac{\alpha P_X + \beta P_Y}{P_X}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{(100-\alpha)P_X + (50-\beta)P_Y}{P_X}\right) = 100$$

$$\frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{5}\beta\frac{P_Y}{P_X} + 80 - \frac{4}{5}\alpha + 40\frac{P_Y}{P_X} - \frac{4}{5}\beta\frac{P_Y}{P_X} = 100$$

$$\frac{P_Y}{P_X}\left(40 - \frac{3}{5}\beta\right) = 20 + \frac{3}{5}\alpha \rightarrow \frac{P_Y}{P_X} = \frac{\left(20 + \frac{3}{5}\alpha\right)}{\left(40 - \frac{3}{5}\beta\right)} = \frac{100 + 3\alpha}{200 - 3\beta}$$

c. Ahora asuma que Ana tiene 80 unidades de X y 10 unidades de Y. Encuentre el equilibrio de mercado y dibuje este punto inicial y el punto final en un diagrama de Edgeworth.

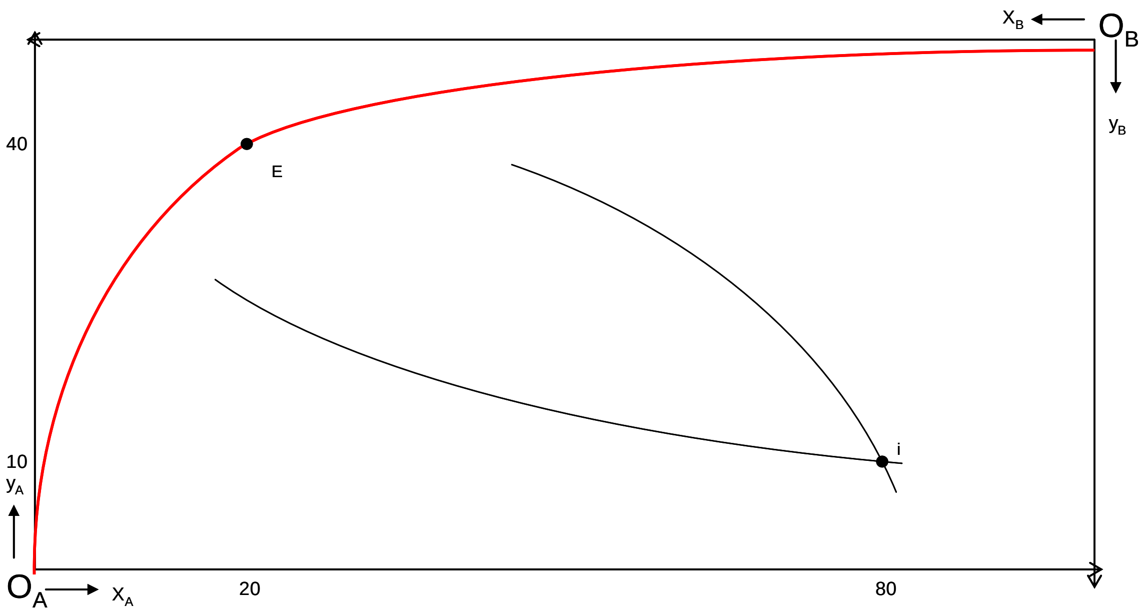
$$\frac{P_Y}{P_X} = \frac{(100 + 3(80))}{(200 - 3(10))} = \frac{340}{170} = 2$$

$$X_A = \frac{1}{5}\left(\frac{80P_X + 10P_Y}{P_X}\right) = 16 + 2(2) = 20$$

$$Y_A = 4X_A\frac{P_X}{P_Y} = 4(20)\left(\frac{1}{2}\right) = 40$$

$$X_B = 80$$

$$Y_B = 10$$



d. Muestre matemáticamente que cuando dos individuos tienen funciones de utilidad Cobb-Douglas idénticas $U = X^{\alpha}Y^{1-\alpha}$, la curva de contrato es una línea recta de origen a origen y existe un único precio de equilibrio para cualquier dotación inicial.

Curva de contrato

$$\frac{\alpha Y_A}{(1-\alpha)X_A} = \frac{\alpha Y_B}{(1-\alpha)_B} \rightarrow \frac{Y_A}{X_A} = \frac{(\overline{Y}-Y_A)}{(\overline{X}-X_A)} \rightarrow Y_A\overline{X} - X_AY_A = X_A\overline{Y} - X_AY_A$$

$$\rightarrow Y_A\overline{X} = X_A\overline{Y} \rightarrow Y_A = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}}X_A$$

Esto significa que la curva de contrato es una línea de esquina a esquina con pendiente igual a la razón de dotaciones globales, o sea, la diagonal.

Precios relativos

$$X_A + X_B = \overline{X}$$

$$X_A = \alpha\left(\frac{\overline{X}_A P_X + \overline{Y}_A P_Y}{P_X}\right), X_B = \alpha\left(\frac{(\overline{X}-\overline{X}_A)P_X + (\overline{Y}-\overline{Y}_A)P_Y}{P_X}\right)$$

$$\alpha\left(\frac{\overline{X}_A P_X + \overline{Y}_A P_Y}{P_X}\right) + \alpha\left(\frac{(\overline{X}-\overline{X}_A)P_X + (\overline{Y}-\overline{Y}_A)P_Y}{P_X}\right) = \overline{X}$$

$$\alpha\overline{X}_A + \alpha\overline{Y}_A\frac{P_Y}{P_X} + \alpha\overline{X} - \alpha\overline{X}_A + \alpha\overline{Y}\frac{P_Y}{P_X} - \alpha\overline{Y}_A\frac{P_Y}{P_X} = \overline{X}$$

$$\alpha\overline{Y}\frac{P_Y}{P_X} = (1-\alpha)\overline{X} \rightarrow \frac{P_X}{P_Y} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)}\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}$$

O sea, los precios dependen solamente de la dotación global y no de la dotación individual.

8.2.4 El equilibrio general del intercambio

Dos consumidores A y B, que se alimentan solo de los bienes X e Y, tienen las siguientes funciones de utilidad (U) y las siguientes dotaciones (w):

$U_A(X_A, Y_A) = \alpha \ln X_A + (1 - \alpha) \ln Y_A$ $\qquad w_A = (0, 1)$
$U_B(X_B, Y_B) = \min(X_B, \ln Y_B)$ $\qquad w_B = (2, 0)$

a. Calcule los precios relativos de equilibrio y las cantidades que cada individuo consume.

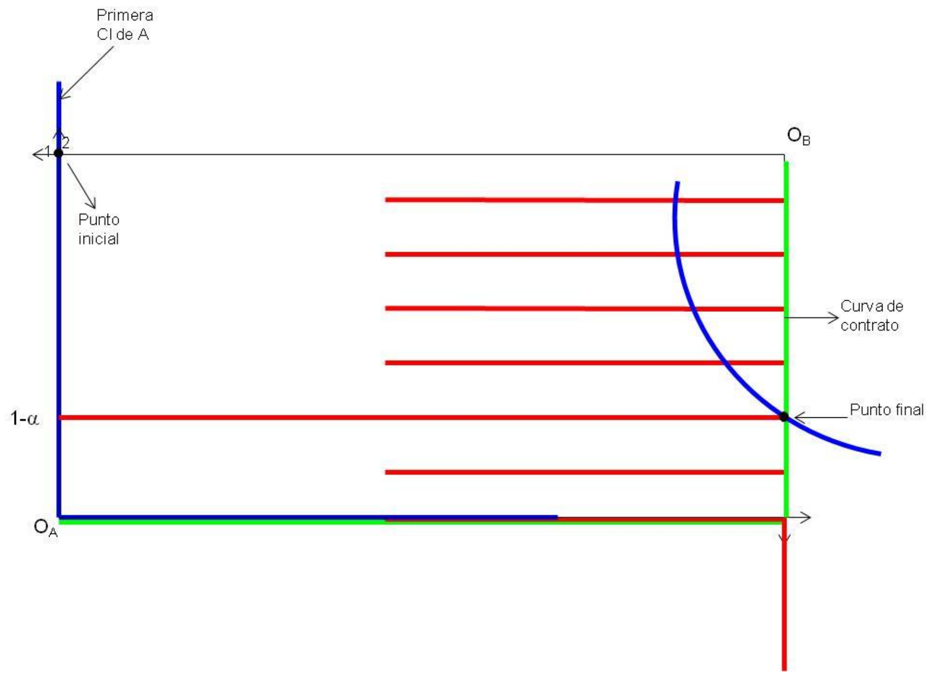
$$Y_A + Y_B = 1$$
$$(1-\alpha)\frac{P_Y}{P_Y} + \frac{2P_X}{P_Y} = 1 \rightarrow (1-\alpha) + 2\frac{P_X}{P_Y} = 1 \rightarrow \frac{P_X}{P_Y} = \frac{\alpha}{2}$$
$$Y_A = (1-\alpha)$$
$$Y_B = \alpha$$
$$X_A = \alpha \frac{P_Y}{P_X} = 2$$
$$X_B = 0$$

b. Dibuje un diagrama de Edgeworth y señale el punto inicial, el punto final, el área de comercio y la curva de contrato.

Cuando $Y_B<1$, el consumidor B tiene utilidad negativa y el consumidor solo prefiere consumir el bien Y. No obstante, ese malestar va a ir decayendo conforme el consumo de B se acerca a la unidad de Y y la utilidad se acerca a 0. Entonces, entre 0 y 1, la función, $U_B(X_B, Y_B) = \min(X_B, \ln Y_B) = \ln Y_B$, o sea, B solo valora Y, por lo que la valoración de X es cero para B → TMS = 0.

Por su parte, A solo tiene Y y obtiene una utilidad de 0 → TMS = ∞.

Así el área de comercio es toda la caja y la curva de contrato son los bordes inferiores y derechos de la caja, pero sin tocar el vértice superior derecho.



c. Encuentre la ecuación que representa la curva de contrato, indicando las posibles discontinuidades que pueda presentar.

$Y_A = 0 \quad 0 \leq X_A \leq 2$

$X_A \rightarrow \infty \quad 0 \leq Y_A < 1$

8.2.5 El significado de la tasa marginal de sustitución en el consumo

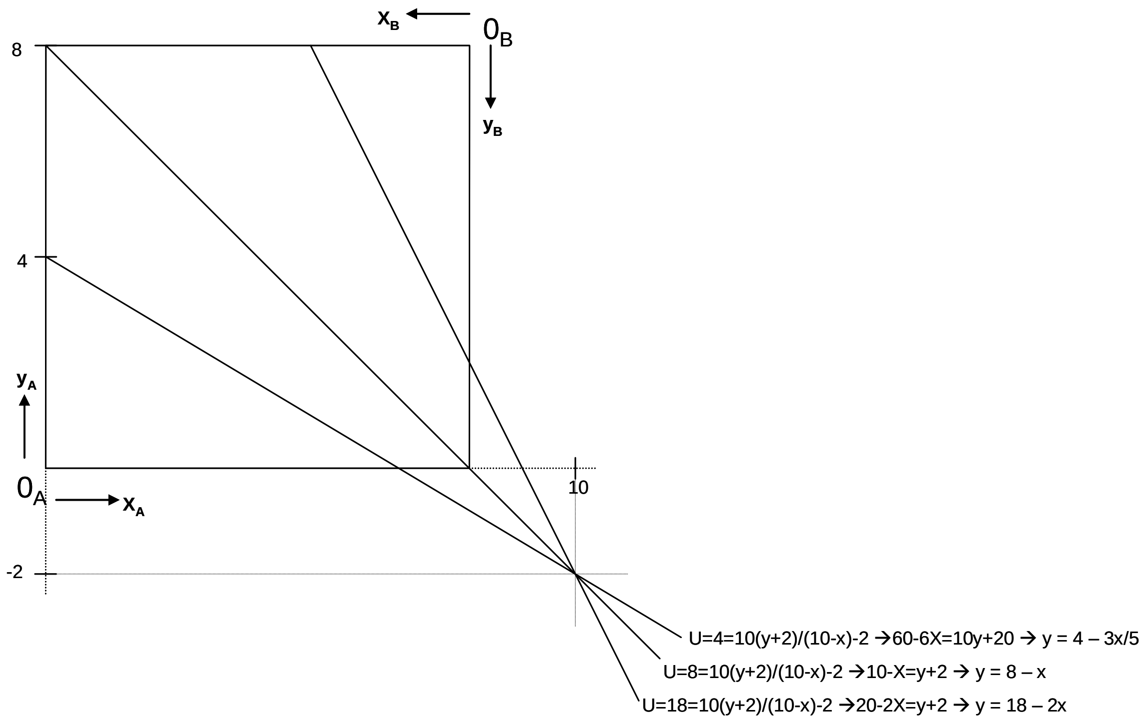
Considere el caso de una economía en la que hay 15 consumidores y 2 bienes. El consumidor 3 tiene la siguiente función de utilidad $U_3(X_3,Y_3) = \ln X_3 + \ln Y_3$. En una determinada asignación eficiente en el sentido de Pareto E*, el consumidor 3 tiene (10,5). ¿Cuáles son los precios competitivos que dan lugar a la asignación E*?

$$TMS = \frac{Y_3}{X_3} = \frac{P_X}{P_Y} \rightarrow \frac{P_X}{P_Y} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

8.2.6 Una curva de contrato peculiar

Ana y Betty desean comerciar entre sí. Ana tiene la función de utilidad representada por $U(x_A, y_A) = 10\frac{(y_A+2)}{(10-x_A)} - 2$, mientras que Betty tiene una función de utilidad representada por $U(x_B, y_B) = x_B + y_B$

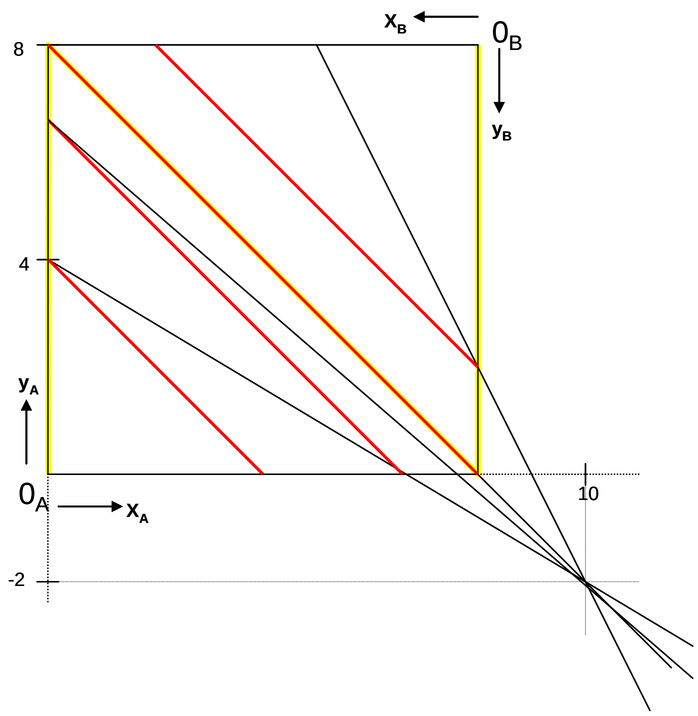
a. **Dibuje las curvas de indiferencia de Ana para U = 4, U = 8 y U = 18.**



b. **Confirme que todas las curvas de indiferencia de Ana pasan a través de un mismo punto.**

Igualando dos líneas cualesquiera, todas se cruzan en el punto (x,y)=(-2,10)

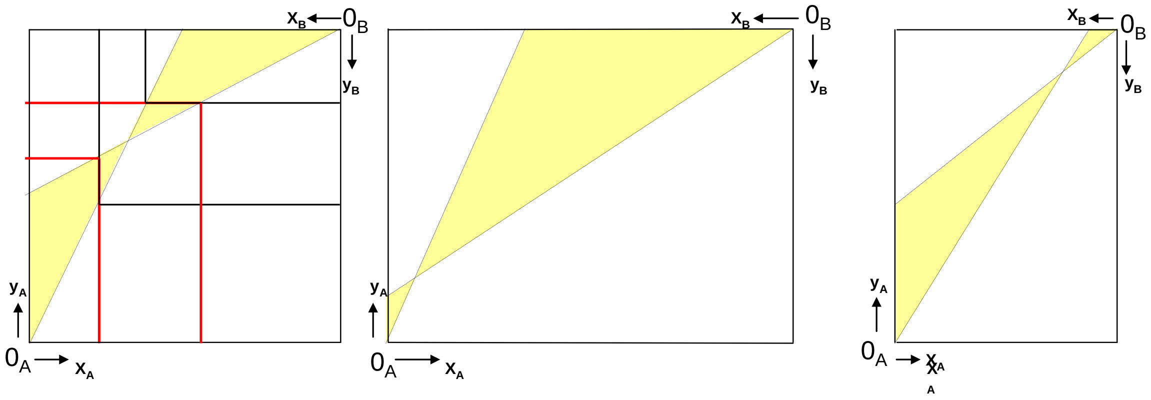
c. **Dibuje la curva de contrato que resulta del comercio entre Ana y Betty suponiendo que las dotaciones globales son tales que $\overline{X} = \overline{Y}$**



8.2.7 Curvas de contrato especiales

Encuentre las curvas de contrato cuando interrelacionan dos individuos con las siguientes características. En cada caso usted debe analizar todas las combinaciones cuando $\overline{X} = \overline{Y}, \overline{X} > \overline{Y}, \overline{X} < \overline{Y}$ **:**

a. $U(x_A, y_A) = \min(2x_A, y_A), U(x_B, y_B) = \min(x_B, 2y_B)$.



b. $U(x_A, y_A) = x_A^{\alpha} \times y_A^{1-\alpha}, U(x_B, y_B) = x_B^{\beta} \times y_B^{1-\beta}$ **. Indique bajo qué condiciones la curva de contrato estará bajo la diagonal. Recuerde que** $\overline{X} = \overline{X}_A + \overline{X}_B, \overline{Y} = \overline{Y}_A + \overline{Y}_B$

$$\frac{\alpha y_A}{(1-\alpha)x_A} = \frac{\beta y_B}{(1-\beta)x_B} \rightarrow \frac{\alpha y_A}{(1-\alpha)x_A} = \frac{\beta(\overline{y} - y_A)}{(1-\beta)(\overline{x} - x_A)}$$

$$\rightarrow (1-\beta)\overline{x}\alpha y_A - \alpha(1-\beta)x_A y_A = \beta\overline{y}(1-\alpha)x_A - \beta(1-\alpha)x_A y_A$$

$$\rightarrow y_A = \frac{\beta\overline{y}(1-\alpha)x_A}{(1-\beta)\overline{x}\alpha - \alpha(1-\beta)x_A + \beta(1-\alpha)x_A}$$

$$\rightarrow y_A = \frac{\beta\overline{y}(1-\alpha)x_A}{(1-\beta)\overline{x}\alpha + (\beta - \alpha)x_A}$$

Para saber si esta curva de contrato está por encima o por debajo de la diagonal habría que obtener la segunda derivada de esta ecuación y conocer su signo:

$$y_A^{'} = \frac{\beta \bar{y}(1-\alpha)\left((1-\beta)\bar{x}\alpha + (\beta-\alpha)x_A\right) - (\beta-\alpha)\beta\bar{y}(1-\alpha)x_A}{\left[(1-\beta)\bar{x}\alpha + (\beta-\alpha)x_A\right]^2}$$

$$= \frac{\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\bar{x}\bar{y}}{\left[(1-\beta)\bar{x}\alpha + (\beta-\alpha)x_A\right]^2}$$

$$y_A^{''} = -\frac{\alpha\beta(1-\alpha)(1-\beta)\bar{x}\bar{y}(\beta-\alpha)}{\left[(1-\beta)\bar{x}\alpha + (\beta-\alpha)x_A\right]^3}$$

- Si $\alpha = \beta$ el valor de la segunda derivada es 0, lo que significa que se trata de una línea que va de vértice a vértice.
- Si $\alpha < \beta$, tanto el numerador como el denominador de esta fracción es positivo, por lo que el valor de la segunda derivada es negativo, lo que significa que la curva de contrato está por encima de la diagonal.
- Lo contrario ocurre cuando $\alpha > \beta$. El numerador es negativo, pero el denominador es positivo, por lo que la segunda derivada es positiva. O sea, la curva de contrato está por debajo de la diagonal.

8.2.7 Individuos quasi lineales

Gabriel y Paula intercambian los bienes X e Y. Las preferencias de Gabriel están dadas por la función de utilidad $U_G(X_G, Y_G) = X_G + 2\sqrt{Y_G}$, mientras que las preferencias de Paula están representadas por $U_P(X_P, Y_P) = X_P + 4\sqrt{Y_P}$. La dotación inicial de Gabriel es $\bar{X}_G = 8, \bar{Y}_G = 12$, mientras que la dotación inicial de Paula es $\bar{X}_P = 8, \bar{Y}_P = 4$. Con esta información encuentre:

a. La curva de contrato.
b. Los precios de equilibrio.
c. Los cantidades de bienes que se van a intercambiar.
d. ¿Cuál de los dos individuos gana más con el intercambio?

Para Gabriel:

$$Y_G^{1/2} = \frac{Px}{Py} \rightarrow Y_G = \left(\frac{Px}{Py}\right)^2,$$

$$P_X X_G + P_Y \left(\frac{P_X}{P_Y}\right)^2 = 8P_X + 12P_Y \rightarrow P_X X_G + \frac{P_X^2}{P_Y} = 8P_X + 12P_Y$$

$$\rightarrow X_G = 8 + 12\frac{P_Y}{P_X} - \frac{P_X}{P_Y}$$

Para Paula:

$$\frac{Y_P^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{Px}{Py} \rightarrow Y_P = \left(\frac{2Px}{Py}\right)^2,$$

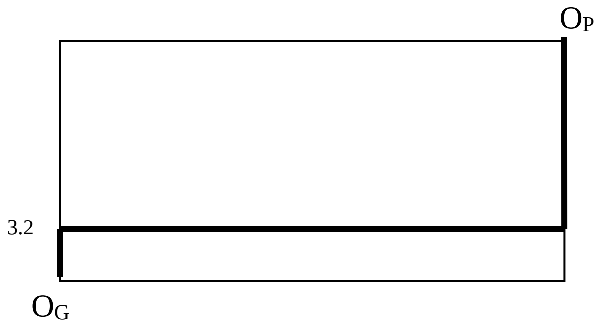
$$P_X X_P + P_Y \left(\frac{2P_X}{P_Y}\right)^2 = 8P_X + 4P_Y \rightarrow P_X X_P + \frac{4P_X^2}{P_Y} = 8P_X + 4P_Y$$

$$\rightarrow X_P = 8 + 4\frac{P_Y}{P_X} - \frac{4P_X}{P_Y}$$

a. Curva de contrato:

$$Y_G^{\frac{1}{2}} = \frac{Y_P^{\frac{1}{2}}}{2}, Y_G + Y_P = 16$$

$$4Y_G = Y_P, Y_G = \frac{16 - Y_G}{4}, \rightarrow Y_G = \frac{16}{5}$$



b. Equilibrio en precios:

$$Y_G + Y_P = 12 + 4 = 16$$

$$\left(\frac{Px}{Py}\right)^2 + \left(\frac{2Px}{Py}\right)^2 = 16 \rightarrow 5\left(\frac{Px}{Py}\right)^2 = 16 \rightarrow \left(\frac{Px}{Py}\right)^2 = \frac{16}{5} \rightarrow \frac{Px}{Py} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

c. Cantidades:

$$Y_G^{\frac{1}{2}} = 2Y_P^{\frac{1}{2}}, Y_G + Y_P = 16$$

$$Y_G = 4Y_P = 4(16 - Y_G)$$

$$Y_G = \frac{16}{5}, Y_P = \frac{64}{5}$$

$$X_G = 8 + 12\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{4}{\sqrt{5}} = 8 + \frac{11}{\sqrt{5}} = 12.92$$

$$X_P = 8 + 4\frac{\sqrt{5}}{4} - \frac{16}{\sqrt{5}} = 8 - \frac{11}{\sqrt{5}} = 3.08$$

Gabriel entrega 8.8 unidades de Y a cambio de 4.92 unidades de X.

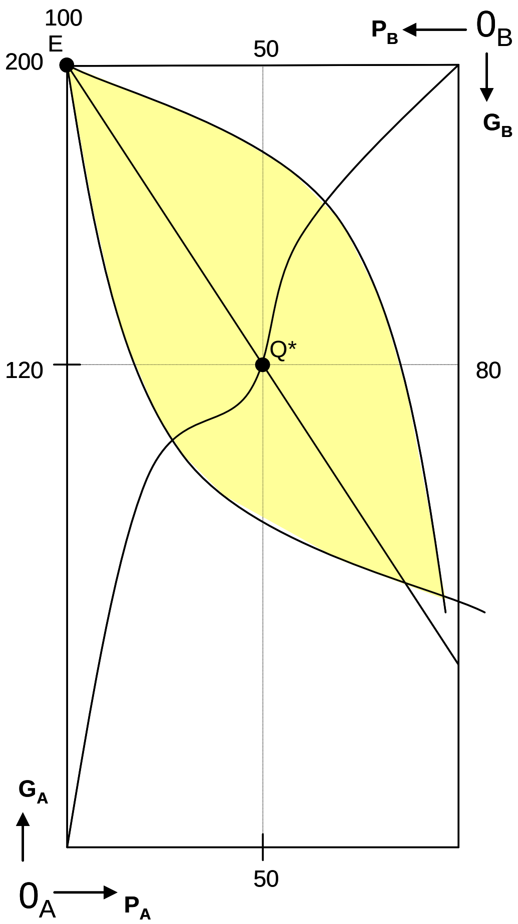
d. Utilidades

	Antes del comercio	Después del comercio
Gabriel	$8+2\sqrt{12}=14.93$	$12.92+2\sqrt{\frac{16}{5}}=16.50$
Paula	$8+4\sqrt{4}=16$	$3.08+4\sqrt{\frac{64}{5}}=17.39$

Aunque ambos ganan, Gabriel tiene el mayor incremento absoluto en la utilidad.

8.2.8 Los orígnenes del intercambio o ¡Vive la différence!

a. En una caja de Edgeworth, ponga el origen de Ana en la esquina inferior izquierda y a Betty en la esquina superior derecha. Ana es dotada solamente de g_Aº = 200 unidades de grano G (medido en el eje vertical), mientras que Betty es dotada solamente de p_Bº = 100 unidades de pescado P. Suponga que el equilibrio conlleva que Ana sacrifica 80 unidades de grano a cambio de 50 unidades de pescado. Ud. tiene suficiente información para mostrar en su diagrama: (i) La dotación inicial E, (ii) la posición de equilibrio Q*, (iii) la línea presupuestaria de equilibrio y (iv) las cantidades intercambiadas de P y G. También, a pesar de que ud. no tiene suficiente información para determinar específicamente lo siguiente, dibuje en el mismo diagrama una posible representación para: (v) las curvas de indiferencia que pasan por la dotación inicial, (vi) la región de mutuo beneficio y (vii) la curva de contrato.

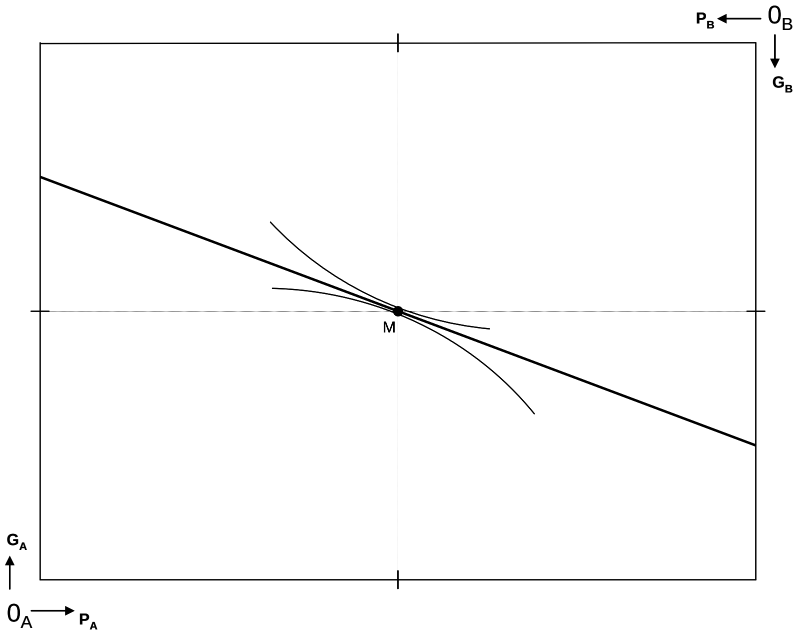


b. Ahora suponga que Ana y Betty tienen dotaciones iniciales idénticas (por lo tanto, la dotación inicial se encuentra localizado en el centro de la caja de Edgeworth M). Suponga también que Ana y Betty tienen <u>preferencias idénticas.</u> Específicamente, sus TMSc son:

$TMSc^A = g_A / 2\, p_A$ (para Ana) y $TMSc^B = g_B / 2\, p_B$ (para Betty)

i. Numéricamente, cuáles son los valores de las pendientes de las curvas de indiferencia de Ana y Betty en el punto M? Ilustre en un diagrama.

En el punto M, el valor de las pendientes de las curvas de indiferencia son $\frac{g_A}{2p_A} = \frac{P_p}{P_g} = \frac{G}{2P}$, donde G y P son las dotaciones globales de grano y pescado.



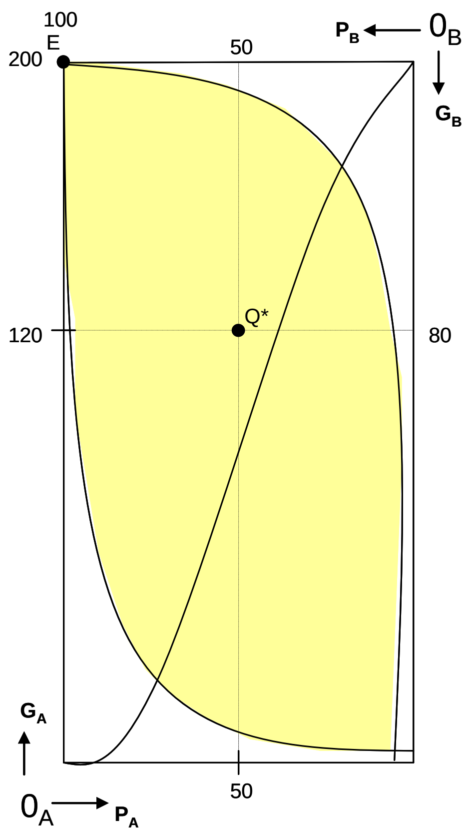
ii. Puede ud. decir algo acerca del precio de equilibrio P_g / P_p? Ilustre en su diagrama la línea de presupuesto a través del punto M.

Es igual a 2P/G.

c. Devuélvase a la dotación inicial de la parte A. En la parte A no se hizo ningún supuesto acerca de las preferencias, pero suponga ahora que cada persona tiene relativamente preferencias más fuertes hacia el bien del cual no fue dotado.

i. Realice un gráfico revisado que muestre lo que este supuesto implica sobre: (i) Si las curvas de indiferencia para ambas partes son ahora relativamente con mayor o menor pendiente, o si para una parte tiene mayor pendiente y para la otra menor pendiente; (ii) Si la curva de contrato CC se ubicará hacia el noroeste de la caja de Edgeworth, o hacia el sureste. Justifique su respuesta.

Las curvas de indiferencia aumentan de pendiente para Ana y disminuyen de pendiente para Betty porque ahora cada una está dispuesta a sacrificar una gran cantidad del bien del que fueron dotados por una pequeña cantidad del otro bien. Esto quiere decir que la curva de contrato va a tender a ubicarse hacia el sureste.



ii. Con este tipo de preferencias, ¿esperaría ud. observar una cantidad de intercambio relativamente más grande o más pequeña? ¿Es posible que no exista comercio del todo?

El área de comercio aumenta de forma significativa, lo que significa que existe la tendencia a que aumente la cantidad transada.

c. **Responda la misma pregunta de C suponiendo ahora que cada individuo tiene preferencias relativamente más fuertes hacia el bien del cual fue dotado.**

En este caso pasa el efecto opuesto, las curvas de indiferencia se hacen más planas para Ana y con mayor pendiente para Betty, por lo que la curva de contrato se movería hacia el noroeste, se reduzca la zona de comercio, la cantidad comerciada y si los cambios son muy pronunciados, existe la posibilidad de que no exista comercio del todo, si cada individuo prefiere solo el bien que tiene.

d. **En términos generales, en una situación de esquina como la representada en la parte A, suponga que la dotación inicial de Betty inesperadamente se dobla. Podría esta situación llevarla a una posición de equilibrio peor en términos de bienestar que la que obtuvo antes de que se doblara la dotación?**

Si las curvas de indiferencia son convexas no podría quedar en una peor situación porque se parte del principio de que más es preferido a menos.

8.2.9 El equilibrio general con curvas de indiferencia cóncavas

Suponga que un consumidor presenta preferencias representadas por la función de utilidad $U_A = X_A^2 + Y_A^2$.

a. Esta persona está tratando de establecer relaciones comerciales con el individuo B, quien tiene preferencia representadas por la curva de utilidad $U_B = X_B + Y_B$. Las dotaciones de cada individuo son tales que A tiene toda la cantidad de X que existe entre estos dos individuos, y B tiene toda la cantidad de Y que existe entre ambos individuos; o sea, $w_A = (\bar{X}, 0)$, $w_B = (0, \bar{Y})$.

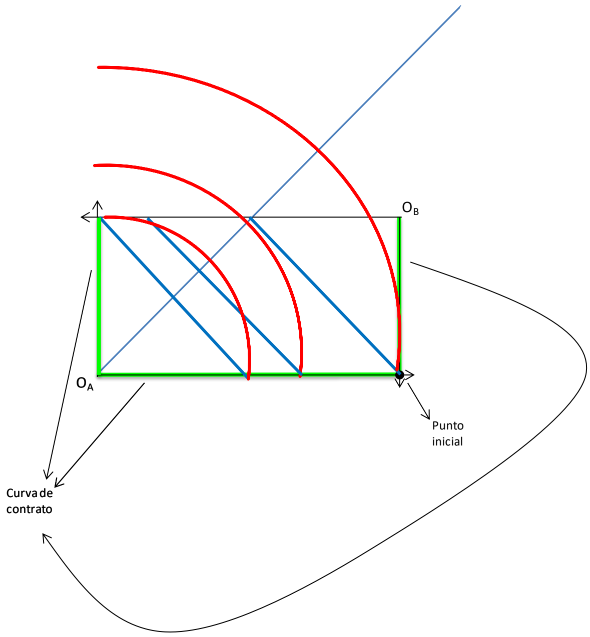
i. Dibuje la zona de comercio a partir de esta dotación inicial.

No hay zona de comercio

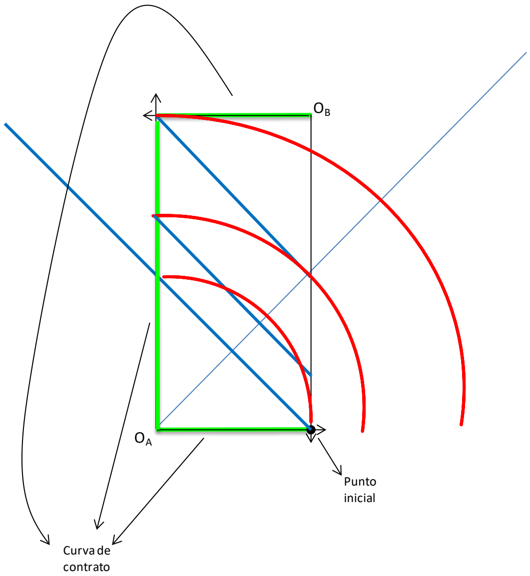
ii. Encuentre y dibuje el conjunto de contrato (curva o zona).

El conjunto de contrato se visualiza en los siguientes gráficos en color verde.

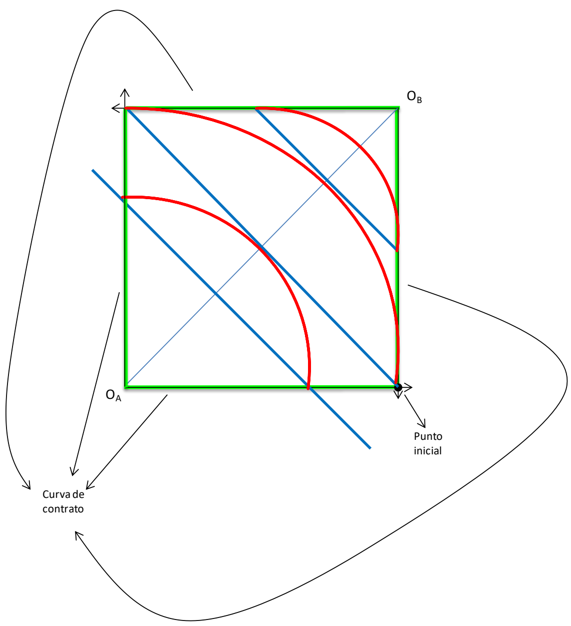
$$\bar{X} > \bar{Y}$$



$$\bar{X} < \bar{Y}$$



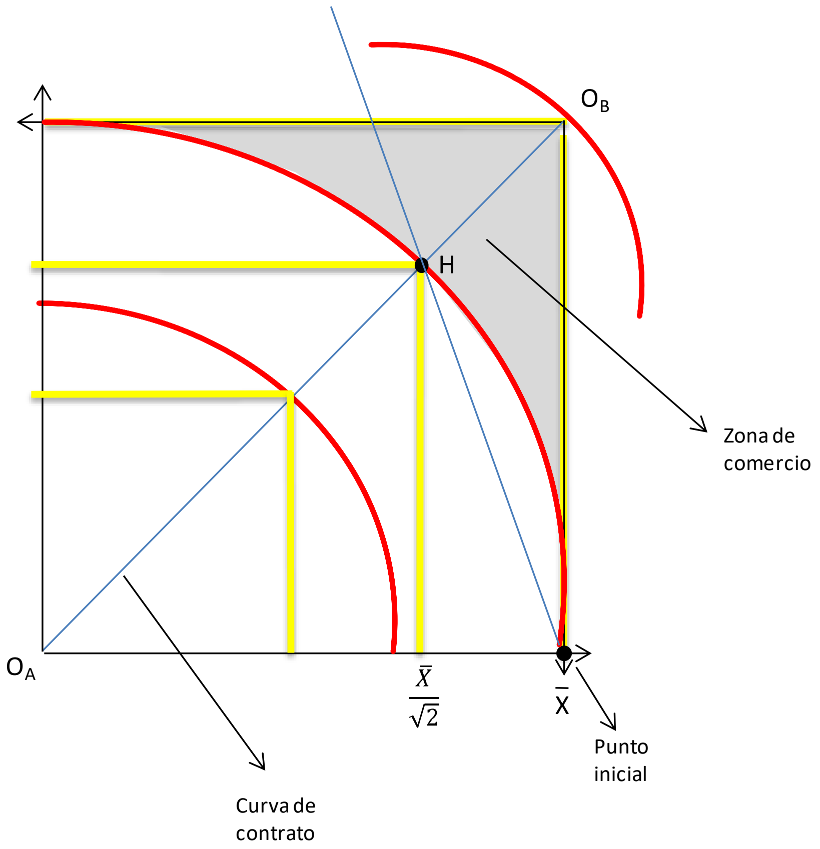
$$\bar{X} = \bar{Y}$$



iii. Encuentre los precios de equilibrio.

No existen precios de equilibrio en este caso pues no hay comercio posible para esta dotación.

b. Conteste los mismos incisos de la pregunta a, si las preferencias del individuo B estuvieran representadas por $U_B = \min(X_B, Y_B)$.



La curva de contrato en la diagonal (en una caja cuadrada). A partir de la dotación inicial, la zona de comercio se presenta por el área gris, lo que quiere decir que el equilibrio final se debe ubicar entre el punto H y el punto 0$_B$. Si el equilibrio final se ubica en O$_B$, eso quiere decir que los precios relativos $\frac{P_X}{P_Y} \to \infty$ y si se ubican en H, los precios relativos es la pendiente de la línea que va entre $(\bar{X}, 0)$ y el punto H, en donde $U = \bar{X}^2 = X^2 + Y^2, X = Y \to)\bar{X}^2 = 2X^2 \to X = \frac{\bar{X}}{\sqrt{2}}$, por lo tanto el punto H es el par $(X, Y) = \left(\frac{\bar{X}}{\sqrt{2}}, \frac{\bar{X}}{\sqrt{2}}\right)$. Con estos pares, los precios relativos $\frac{P_X}{P_Y}$ son: $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{0 - \frac{\bar{X}}{\sqrt{2}}}{X - \frac{\bar{X}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$. Por lo tanto $\frac{P_X}{P_Y} \epsilon \left[\frac{1}{\sqrt{2}-1}, \infty\right[$

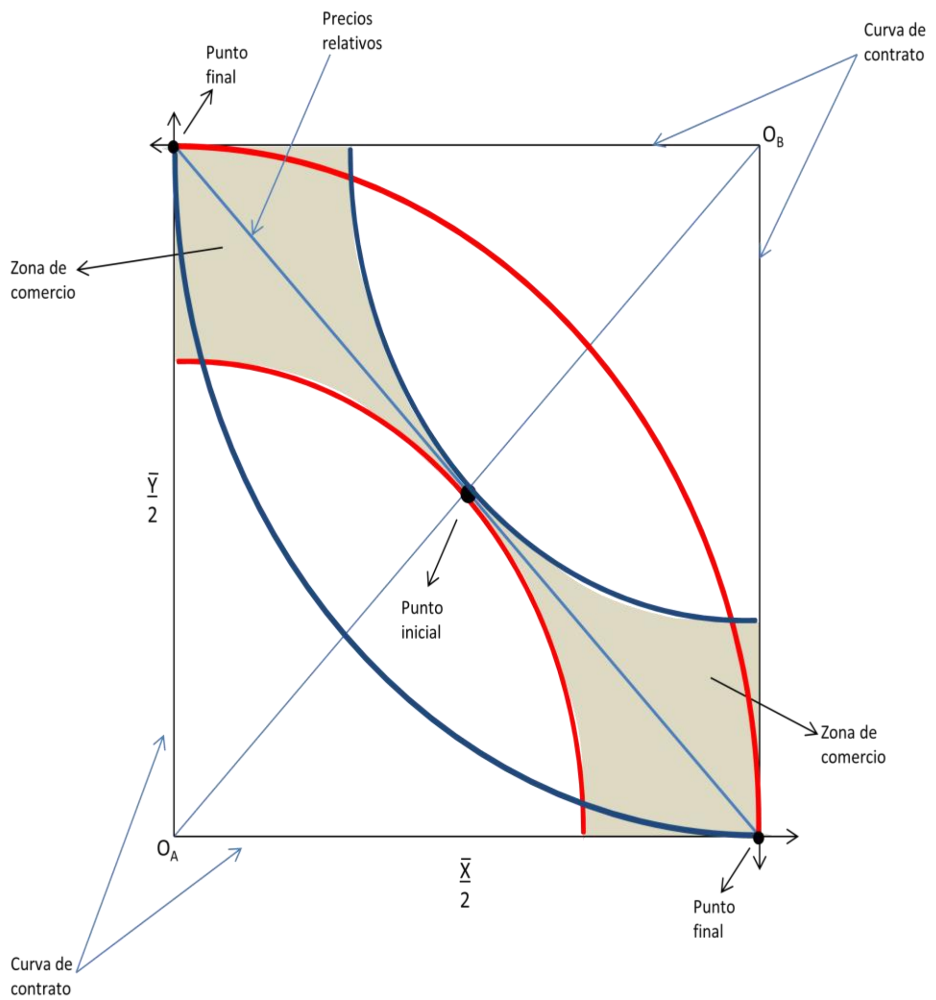
8.2.10 El intercambio entre cubistas

En el país Cubista todos los individuos son idénticos. De hecho, las preferencias de cada uno de los individuos es la misma y está representada por la función de utilidad $U_i(X,Y) = X^2 + Y^2$. Igualmente, los individuos son dotados cada uno con la misma cantidad de X y de Y. Tome dos individuos representativos de X es igual a la dotación global de Y).

i. Dibuje la Caja de Edgeworth, indicando las curvas de indiferencia de los individuos y el punto inicial.

Las curvas de indiferencia del individuo A vienen representadas en rojo y las de B en azul. Como las curvas son cóncavas, las soluciones serán de esquina.

ii. Encuentre y dibuje la zona de comercio a partir de la dotación inicial.
iii. Encuentre y dibuje el conjunto de contacto.
iv. Encuentre los precios de equilibrio o el rango de los mismos.

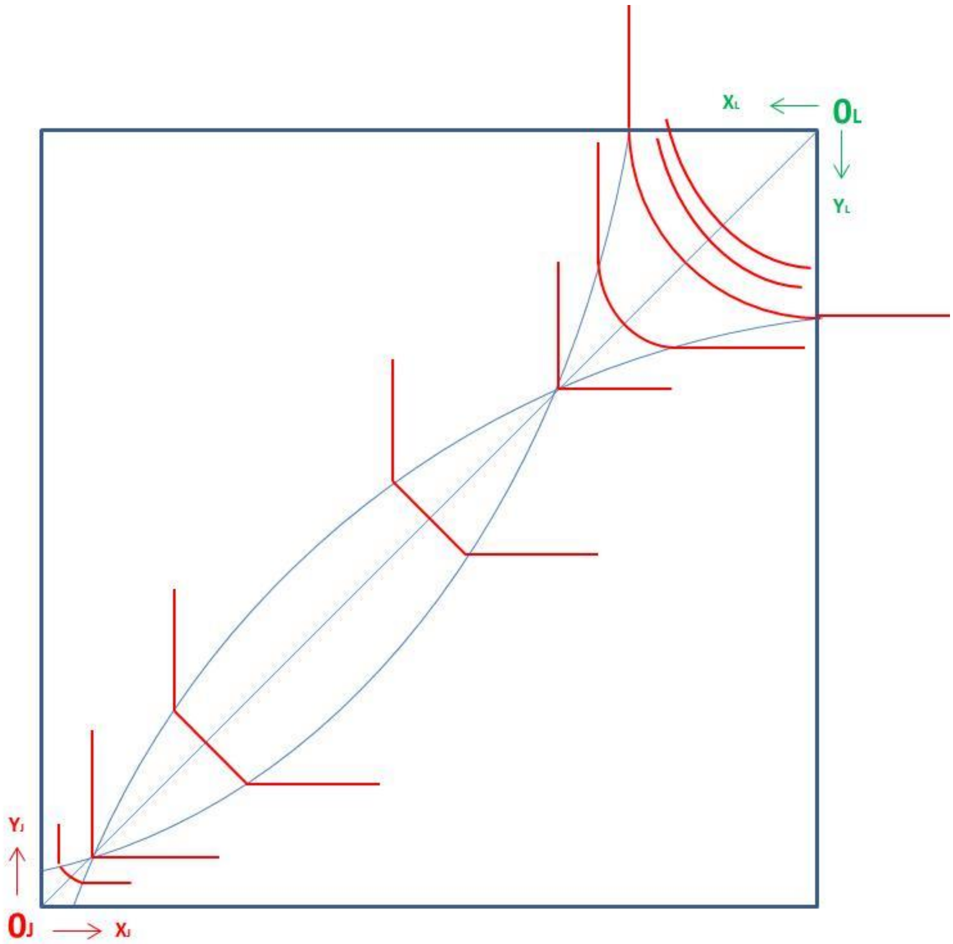


8.2.11 El equilibrio general entre exponenciales

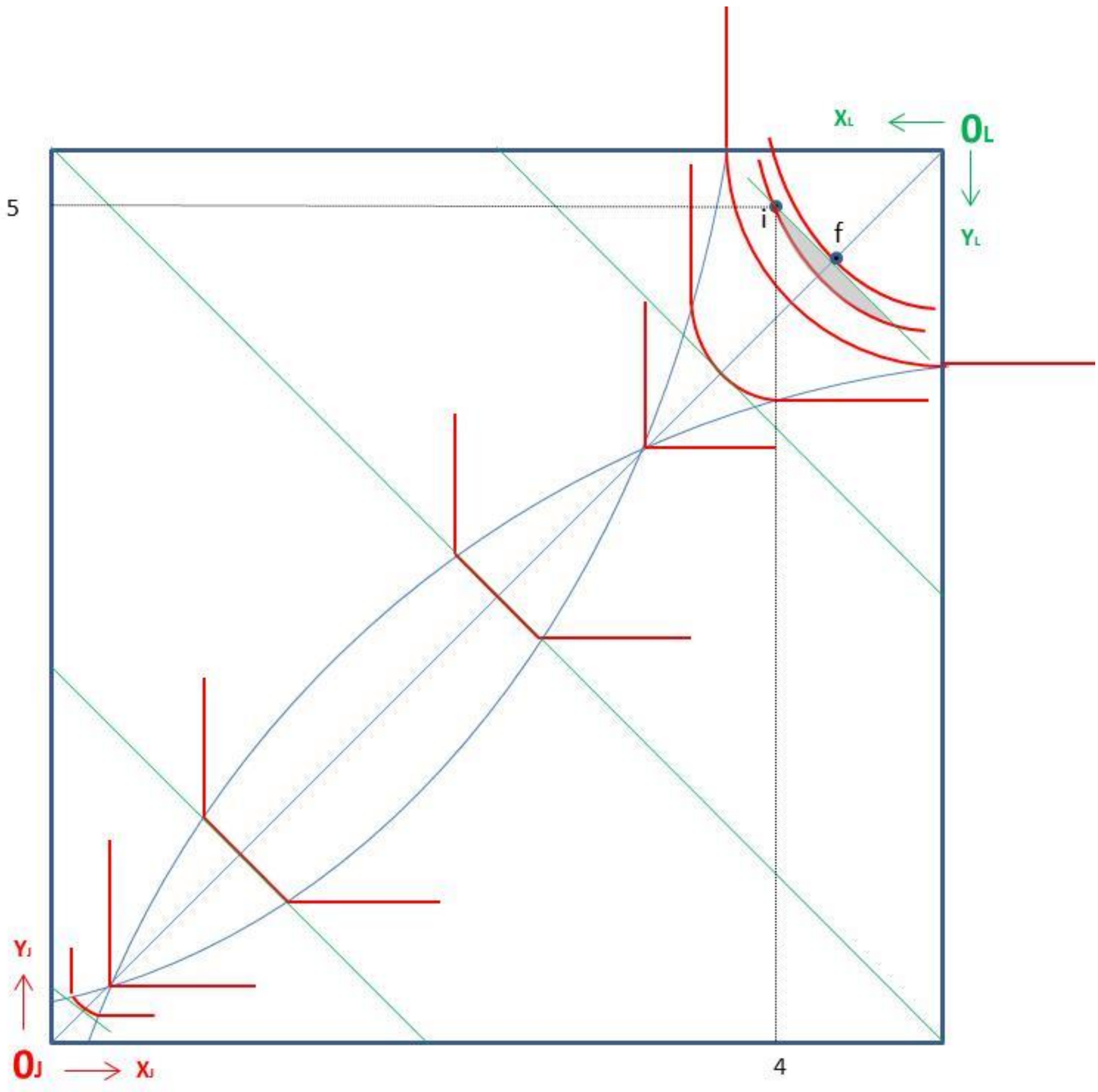
José consume solo los bienes X e Y. Sus preferencias están representadas por:

$$U_J = \min\left(X_J - 2, lnY_J\right) + \min\left(lnX_J, Y_J - 2\right)$$

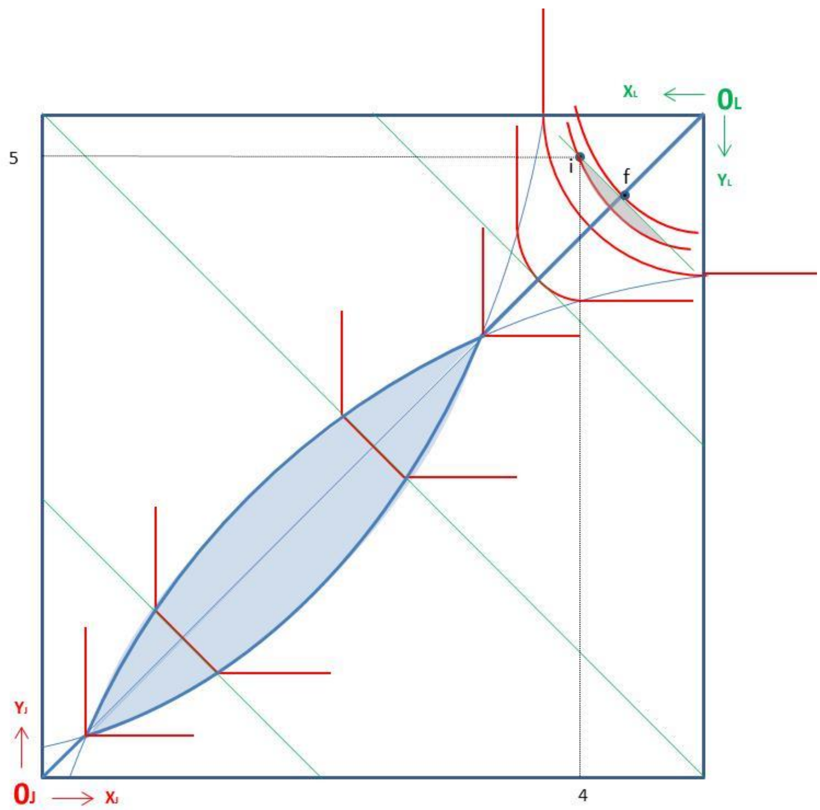
a. Dibuje las curvas de indiferencia de José (Ayuda: Puede ser útil saber que la igualdad $e^{(x-2)} = lnx + 2$ tiene dos soluciones X_1=0,15859434 y X_2=3,14619322).



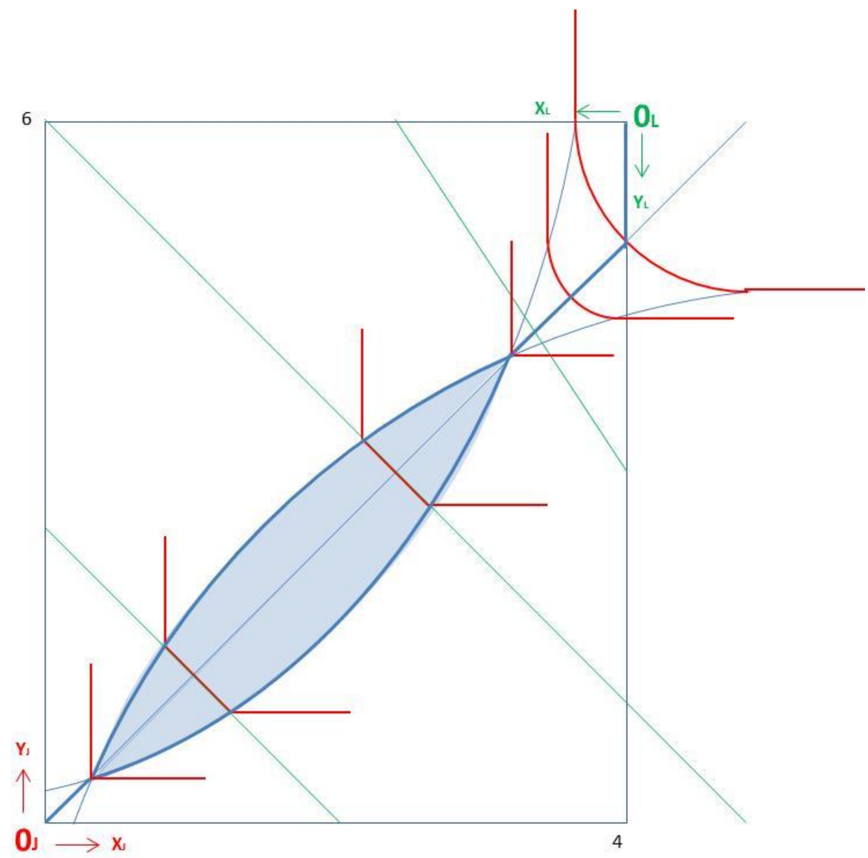
b. José posee 4 unidades del bien X y 5 unidades del bien Y. Él está pensando en la posibilidad de realizar intercambio con Luis, quien posee 2 unidades de X y 1 unidad de Y. Además, Luis posee preferencias representadas por: $U_L = X_L + Y_L$. A partir de esta situación inicial, ubique en una caja de Edgeworth la zona de comercio, los precios de equilibrio y la solución final.



c. En esa misma Caja dibuje el conjunto de puntos de contrato para estos dos individuos, indicando claramente si los orígenes para cada individuo son parte de la curva de contrato.



d. ¿Cómo cambiaría su respuesta en c. si las dotaciones globales cambiaran a 4 de X y 6 de Y?



8.2.12 La diferencia de comerciar

Falso o verdadero: Es posible para dos personas con las mismas preferencias pero con dotaciones distintas comerciar, al igual que es posible que dos personas con diferentes preferencias pero con la misma dotación no comerciar.

La afirmación es correcta. Lo que importa a la hora de intercambiar es que las TMS sean distintas, por lo que no tiene importancia si presentan las mismas preferencias y diferentes dotaciones. Por ejemplo, dos personas con funciones de utilidad tipo Cobb-Douglas idénticas, tendrán TMS distintas si las dotaciones iniciales son idénticas. Igualmente, es posible encontrar a dos personas con preferencias distintas, con la misma dotación y que partan de un punto sobre la curva de contrato con lo cual no sería beneficioso para ambas comerciar. El ejemplo sería una persona con preferencias de sustitutos perfectos con relación de sustitución -1 y otro individuo con preferencias Cobb-Douglas, en una caja cuadrada e independientemente de los exponentes.

8.3 LA ECONOMIA DE ROBINSON CRUSOE

8.3.1 Robinson Crusoe descubre el comercio interislas

a. Robinson Crusoe produce y consume Cocos y Pescado en una pequeña isla en medio del Pacífico. El trabaja 10.000 horas al año y sus funciones de producción están dadas por:

$$\mathrm{C} = \sqrt{\frac{1}{4}\mathrm{Lc}} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{P} = \sqrt{\frac{1}{3}\mathrm{Lp}}$$

donde Lc y Lp son las horas al año dedicadas en cada una de las actividades productivas. Las preferencias de Robinson Crusoe están representadas por U = $C^{1/4}$ $P^{3/4}$.

i. Encuentre la ecuación para la curva de posibilidades máximas de producción, la tasa marginal de transformación y la TMSc de Robinson Crusoe.

Curva de Transformación: $L_C + L_P = 10.000 \Rightarrow 4C^2 + 3P^2 = 10.000$

TMT: $\dfrac{\Delta C}{\Delta P} = \dfrac{6P}{8C} = \dfrac{3P}{4C}$

TMSc: $\dfrac{\Delta C}{\Delta P} = \dfrac{UM_P}{UM_C} = \dfrac{3C}{P}$

ii. Como Robinson Crusoe vive completamente aislado, el solo puede comer lo que produce. Encuentre el óptimo de producto y consumo para Robinson Crusoe. Hablar de precios en un contexto de un individuo que vive solo no tiene sentido, pero puede usted pensar en cuál es el costo de oportunidad de producir una unidad de X en el punto de equilibrio, lo cual sería equivalente a los precios relativos? Dibuje sus resultados en un diagrama con la cantidad de cocos en el eje vertical y la de pescado en el eje horizontal.

$$\frac{3P}{4C} = \frac{3C}{P} \Rightarrow 3P^2 = 12C^2 \Rightarrow P^2 = 4C^2$$

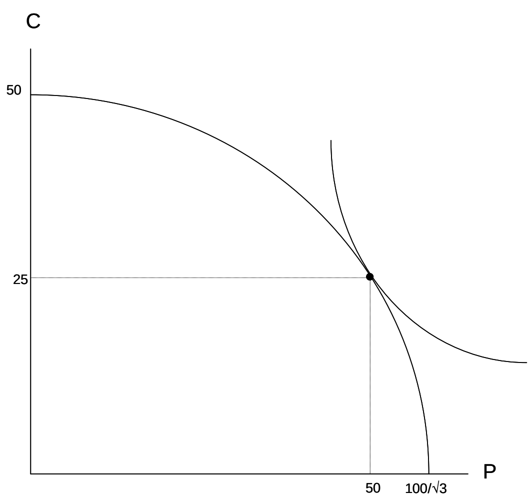
$$4C^2 + 3P^2 = 10.000 \Rightarrow P^2 + 3P^2 = 10.000$$

$$\Rightarrow P^2 = 2.500$$

$$P = 50$$

$$C = 25$$

$$\frac{P_P}{P_C} = \frac{75}{50} = \frac{3}{2}$$



b. Suponga que Robinson Crusoe descubre que existen otras islas cercanas con las cuales puede intercambiar.

i. ¿Para qué rango de precios, Robinson estaría dispuesto a intercambiar cocos por pescado y viceversa?

Él estaría dispuesto a entregar cocos a cambio de pescado cuando el precio relativo Pp/Pc < 3/2
Él estaría dispuesto a entregar pescado a cambio de cocos cuando el precio relativo Pp/Pc > 3/2

ii. Suponga que el precio de equilibrio que prevalece en el mercado entre islas es de Pc/Pp=2. ¿Cuál sería la solución eficiente para RC?

Punto de producción: TMT = Pp/Pc

$$\frac{3P}{4C} = \frac{1}{2} \Rightarrow 3P = 2C$$

$$4C^2 + 3P^2 = 10.000 \rightarrow 9P^2 + 3P^2 = 10.000 \rightarrow 12P^2 = 10.000$$

$$P^2 = \frac{2500}{3} \rightarrow P = \tfrac{50}{\sqrt{3}} \approx 28{,}9; C = 25\sqrt{3} \approx 43{,}3$$

Estos puntos se convierten en la dotación de RC, por lo que su restricción presupuestaria sería:

$$2C + P = 2 * 25\sqrt{3} + \frac{50}{\sqrt{3}} = \frac{200}{\sqrt{3}} \approx 115{,}5$$

Punto de consumo: TMSc = Pp/Pc

$$\frac{3C}{P} = \frac{1}{2} \rightarrow P = 6C$$

$$2C + P = \frac{200}{\sqrt{3}} \rightarrow 8C = \frac{200}{\sqrt{3}} \rightarrow C = \frac{25}{\sqrt{3}} \approx 14{,}4; P = \frac{150}{\sqrt{3}} \approx 86{,}6$$

c. Calcule la utilidad de Robinson de las partes a y b y explique qué es lo que hace que Robinson esté mejor en una situación que en la otra.

$$U_A = 25^{1/4} 50^{3/4} = 42{,}04$$

$$U_B = 14{,}4^{1/4} 86{,}6^{3/4} = 55{,}33$$

RC está mejor en la opción b, porque se ha especializado en el bien que tenía ventaja comparativa y está intercambiando este bien por el que es relativamente más barato que además es el bien que él más valora. De hecho, por medio del intercambio, él obtiene más barato el bien que el valora el triple en comparación con el otro.

d. Analice como afectaría la solución de equilibrio, la siguiente situación: *<u>(se elimina, está mal redactada)</u>*

i. **Unos piratas interceptan el comercio de Robinson con las otras islas y le piden 1 coco por cada pescado que vende/compra.**

Antes RC tenía que entregar 1 coco por cada 2 pescados que compraba; ahora, tendrá que entregar 3 cocos por esos 2 pescados porque los piratas se van a dejar 2, o sea, cada pescado le va a costar 1,5 cocos. Así las cosas la nueva restricción presupuestaria definida a partir del punto de producción encontrada en b ii sería:

$$\frac{3C}{P}=\frac{3}{2}\rightarrow P=2C$$

$$C+\frac{3}{2}P=25\sqrt{3}+\frac{3}{2}\frac{50}{\sqrt{3}}=\frac{150}{\sqrt{3}}\rightarrow 4C=\frac{150}{\sqrt{3}}\rightarrow C=\frac{75}{2\sqrt{3}}\approx 21{,}7;P=\frac{75}{\sqrt{3}}\approx 43{,}3$$

$U_C=21{,}7^{1/4}43{,}3^{3/4}=36{,}4$ Lo que quiere decir que RC está mejor sin comercio y decide producir y consumir 25 cocos y 50 pescados, pues los piratas le arruinan el negocio.

ii. **Los mismos piratas en lugar de cobrarle por unidad vendida, le piden la mitad de los cocos que intercambia por pescados.**

Esto quiere decir que si antes se cambiaban 1 cocos por 2 pescados, ahora tendrá que entregar 2 cocos por los mismos 2 pescados, pues la mitad se lo dejan los piratas. O sea, el precio relativo es 1.

$$\frac{3C}{P}=1\rightarrow P=3C$$

$$C+P=25\sqrt{3}+\frac{50}{\sqrt{3}}=\frac{125}{\sqrt{3}}\rightarrow 4C=\frac{125}{\sqrt{3}}\rightarrow C=\frac{125}{4\sqrt{3}}\approx 18{,}0;P=\frac{375}{4\sqrt{3}}\approx 54{,}1$$

$U_D=18^{1/4}54{,}1^{3/4}=41{,}1$. Peor aun, RC está mejor sin comercio y decide producir y consumir 25 cocos y 50 pescados, pues los piratas le arruinan el negocio.

8.4 EJERCICIOS A RESOLVER

8.4.1 Costo en bienestar de los impuesos en el equilibrio general

En un mercado de tres bienes, represente gráficamente el costo en bienestar de un sistema tributario bajo las siguientes condiciones:

a. El bien 1 y el bien 3 son sustitutos. El bien 2 es complementario.
b. Hay un impuesto por unidad sobre el bien 1 y 2, pero un subsidio sobre el bien 3.
c. Todos los bienes presentan demandas normales.
d. Todos los bienes tienen costos marginales de producción constantes e iguales a 1.

8.4.2 Una caja de Edgeworth conocida

En una economía existen dos individuos, A y B, cuyas preferencias están representadas por las siguientes funciones de utilidad:

$U_A = min\left(e^{Y_A+2X_A}, e^{2Y_A+X_A}\right),\ U_B = X_B + Y_B$.

Asuma que el individuo A es dotado de 20 unidades de X y 0 de Y, mientras que el individuo B es dotado de 10 unidades de Y y 0 de X. Así las cosas, encuentre:

e. Los precios de equilibrio y la curva de contrato. Dibuje en una caja de Edgeworth sus resultados y añada el punto inicial y punto final.
f. Como cambiarían sus respuestas en a. si las preferencias del individuo B fueran

$$U_B = 2X_B + Y_B$$

8.4.3 El equiblirio general entre individuos convexos: ¿es possible una solución de esquina?

En una economía existen dos grupos de consumidores (A y B). Los consumidores tipo A tienen preferencias que están representadas por $U_A = X_A^{1/2} + Y_A^{1/2}$, mientras que los consumidores tipo B tienen preferencias representadas por $U_B = X_B^{1/2}Y_B^{1/2}$. Asuma que ambos tipo de consumidores son dotados de cantidades positivas de ambos bienes, pero que la dotación es distinta para los consumidores tipo A y aquellos tipo B. Así las cosas, encuentre:

a. Los precios de equilibrio y la curva de contrato.
b. Dibuje en una caja de Edgeworth sus resultados y añada el punto inicial y punto final.

8.4.4 Un equilibrio general con muchos individuos

Considere una economía en donde existen 4 consumidores y 2 bienes sujetos al intercambio. Los consumidores son A, B, C y D y los dos bienes son X e Y. Suponga que la función de utilidad y las dotaciones iniciales están dadas por:

$$U_A(X_A, Y_A) = X_A\ ,\ \omega_A = (0,1); \quad U_B(X_B, Y_B) = Y_B\ ,\ \omega_B = (1,0)$$
$$U_C(X_C, Y_C) = X_C\, Y_C\ ,\ \omega_C = (0,1); \quad U_D(X_D, Y_D) = e^{X_D Y_D},\ \omega_D = (2,0)$$

Encuentre los precios del equilibrio competitivo y el set de todos los óptimos de Pareto.

8.4.5 Caja de Edgeworth con soluciones múltiples

Utilizando el instrumental de caja de Edgeworth de la siguiente economía de dos individuos A y B que consumen los bienes X e Y, encuentre:

$$U_A(X_A, Y_A) = \left[X_A^{-2} + \left(\frac{12}{37}\right)^3 Y_A^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}, \qquad w_A = (1,0)$$

$$U_B(X_B, Y_B) = \left[\left(\frac{12}{37}\right)^3 X_B^{-2} + Y_B^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}, \qquad w_B = (0,1)$$

a. El equilibrio general (cantidades y precios de equilibrio) y la curva de contrato.
b. Dibuje en un diagrama los resultados, agregando además el punto inicial y final, así como la zona de comercio.

8.4.6 Diferentes tipos de equilibrio general: comerciar o no comerciar

En cada uno de los siguientes casos se le pide que construya la Caja de Edgeworth e indique:

i. El punto inicial y la relación que existe entre la tasa marginal de sustitución de los dos individuos (o sea, cuál individuo tiene la TMS mayor que el otro) y de ser el caso, el respectivo valor numérico.
ii. La zona de comercio.
iii. El equilibrio final.
iv. Los precios de equilibrio.
v. La curva (zona) de contrato.

a. En la situación inicial, que es un punto que se encuentra dentro de la Caja, todos desean comerciar y ambos individuos presentan curvas de indiferencia estrictamente convexas.

b. El punto inicial se encuentra dentro de la Caja, nadie desea comercial y ambos individuos presentan curvas de indiferencia son estrictamente convexas.
c. El punto inicial se encuentra en uno de los vértices de la Caja de Edgeworth y todos quieren comerciar, a pesar de que las preferencias de ambos individuos se representan para bienes perfectamente sustitutos.
d. El punto inicial se encuentra en uno de los vértices de la Caja de Edgeworth y nadie quiere comerciar, y las preferencias de ambos individuos se representan para bienes perfectamente sustitutos.
e. El punto inicial es un punto que se encuentra dentro de la Caja y todos quieren comerciar, a pesar de que las curvas de indiferencia son tangentes en el punto inicial, pero, ninguno tiene preferencias para perfectos complementos.

8.4.7 De nuevo los individuos cuasi lineales

En esta pregunta usted debe utilizar el instrumental de caja de Edgeworth. Analice el equilibrio que existiría entre dos individuos los cuales presentan las siguientes funciones de utilidad:

$$U_A = X_A + lnY_A$$
$$U_A = X_B + lnY_B$$

a. Asuma que los individuos son dotados de alguna cantidad de los dos únicos bienes que consumen y que en la situación inicial desean comerciar. Bajo estas condiciones encuentre:
   i. El punto inicial y el valor de la TMS de cada individuo en ese punto.
   ii. La zona de comercio.
   iii. El equilibrio final.
   iv. Los precios de equilibrio.
   v. La curva (zona) de contrato.

b. Encuentre nuevamente los puntos especificados en el inciso A, si la función de utilidad del individuo B fuera:

$$U_B = lnX_B + Y_B$$

8.4.8 El intercambio entre individuos con igual riqueza

En esta pregunta usted debe utilizar el instrumental de caja de Edgeworth.
En el país EQUAL todos los consumidores reciben del gobierno todos los meses una misma dotación de los dos únicos bienes que consumen: A y B. Existen solamente dos tipos de consumidores y se está analizando la posibilidad de que intercambien entre ellos. Un primer tipo de consumidores –X– presenta funciones de utilidad representada por:

$$U_X = A_X^{\beta} B_X^{\beta}$$

mientras que el otro tipo de consumidores –Y– presenta preferencias representadas por la función de utilidad:

$$U_Y = \max\{\min(2A_Y, B_Y)\, ; \min(A_Y, 2B_Y)\}$$

a. Bajo estas condiciones encuentre:

   i. El punto inicial y el valor de la TMS de cada individuo en ese punto.
   ii. La zona de comercio.
   iii. El equilibrio final.
   iv. Los precios de equilibrio.
   v. La curva (zona) de contrato.

b. ¿Cómo cambiarían sus respuestas en A si las preferencias de los individuos en Y estuvieran representadas por la función de utilidad:

$$U_Y^l = \min\{\max(2A_Y, B_Y)\, ; \max(A_Y, 2B_Y)\}$$

8.4.9 El equilbrio general entre amigos y amigas

Dos amigos, un hombre y una mujer, derivan utilidad de realizar fiestas en sus respectivas casas. Sin embargo, para que sean todo un éxito, ellos quisieran que a sus fiestas asistieran cierta cantidad de hombres y de mujeres. De esta forma, la función de utilidad de estos dos amigos está representada por:

$$U_i = \min(2X_i - Y_i, 2Y_i - X_i)\,, \quad i = H, M$$

Para colmo de males, el amigo hombre solo conoce amigos varones e igualmente la amiga mujer solo conoce a amigas mujeres. Así las cosas, los dos amigos deben intercambiarse a sus respectivos amigos para que asistan a las fiestas una combinación de hombres y mujeres. Entonces, en una caja de Edgeworth encuentre:

   i. El punto inicial.
   ii. El punto final.
   iii. La zona de comercio.
   iv. La curva (zona de contrato).
   v. El precio o rango de precios de intercambio.

si,

   a. La cantidad de amigos del amigo es igual a la cantidad de amigas de la amiga.
   b. La cantidad de amigos del amigo es mayor a la cantidad de amigas de la amiga.
   c. La cantidad de amigos del amigo es menor a la cantidad de amigas de la amiga.

8.4.10 Una caja de Edgeworth interesante

Dos individuos A y B consumen solamente dos bienes X e Y, y tienen las siguientes funciones de utilidad (U) y las siguientes dotaciones (w):

$$U_A(X_A, Y_A) = \min(2X_A, Y_A) + \min(X_A, 2Y_A) \qquad w_A = (10, 0)$$
$$U_B(X_B, Y_B) = X_B + Y_B \qquad w_B = (0, 20)$$

a. Calcule los precios de equilibrio y las cantidades que cada individuo consume en el equilibrio.
b. Dibuje un diagrama de Edgeworth y señale el punto inicial, el punto final, el área de comercio y la curva o área de contrato indicando cualquier discontinuidad que presente.
c. La dotación global de esta economía es (10, 20). Suponga que esta cantidad es repartida aleatoriamente entre ambos individuos. ¿Cuál es la probabilidad de que con esta cantidad determinada aleatoriamente exista la posibilidad de que ocurra un intercambio mutuamente beneficioso?

8.4.11 Costos de transacción y crecimiento empobrecedor

A continuación se le presentan unos casos hipotéticos que usted debe analizar utilizando el modelo de equilibrio general del comercio internacional.

a. El crecimiento empobrecedor es un caso ampliamente estudiado en el tema del desarrollo económico. Este es el caso de un país que logra crecimiento económico, o sea, expansión de la curva de transformación, solamente en el bien que exporta. Pero el crecimiento de la producción es tan fuerte, que ocasiona una disminución en el precio internacional del producto que exporta a tal punto que causa una disminución en el bienestar de los consumidores. Así las cosas, ejemplifique en un modelo de equilibrio general, en donde X es el bien exportado, el caso del crecimiento empobrecedor.
b. Los costos de transacción son otro caso en donde se puede dar una disminución en las ganancias del intercambio pues cuando existe un costo por transar, se reducen las posibilidades de comercio. Asuma que existen costos de transacción que afectan el precio de compra y de venta de los bienes. Así,

   i. Ejemplifique, cómo los costos de transacción pueden reducir el bienestar económico.
   ii. Ejemplifique un caso en donde los costos de transacción elimina todas las posibilidades de comercio.

CAPÍTULO 9
LA INCERTIDUMBRE

TEMARIO

.

9.1 A

.

9.2 B

.

9.3 Ejercicios a solucionar

1. JUAN, LAS PAPAS Y LAS FRESAS

Los meteorólogos están prediciendo que existe un 50% de probabilidad de que exista sequía en la próxima cosecha agrícola. Asuma que el Agricultor Juan maximiza su función de utilidad esperada U(W) = ln W de acuerdo con Von-Neumann-Morgenstern y que su riqueza inicial es igual a $0.

a. ¿Es Juan averso al riesgo o no? Demuestre su respuesta

Es averso al riesgo pues:
$$dU/dW = 1/W > 0$$
$$d^2U/dW^2 = -1/W^{\boxed{2}} < 0$$

Juan tiene la posibilidad de elegir entre dos productos para sembrar en su tierra papas y fresas y las ganancias que recibiría respectivamente serían las siguientes dependiendo de la probabilidad de lluvia:

	Lluvia normal	Sequía
Papas	$5 000	$40 000
Fresas	$20 000	$12 000

b. ¿Si Juan puede elegir sembrar un único producto, cuál de los dos cultivos elegiría?

$$E[U(P)] = \frac{1}{2}\ln 5000 + \frac{1}{2}\ln 40000 = 9.5569$$
$$E[U(F)] = \frac{1}{2}\ln 20000 + \frac{1}{2}\ln 12000 = 9.6481$$

Escoge sembrar fresas porque la utilidad esperada es mayor.

c. Asuma ahora que Juan puede sembrar la mitad de su terreno de Fresas y la otra mitad de Papas. ¿Cuál cosecha le brinda el mejor ingreso esperado (solo Fresas, solo Papas, 50-50)? ¿Cuál opción de cosecha escogería?

Solo papas = ½ 5000 + ½ 40000 = 22500
Solo fresas = ½ 20000 + ½ 12000 = 16000
Mitad papas – mitad fresas = ½ 2500 + ½ 20000 + ½ 10000 + ½ 6000 = 19250

$$E[U(1/2\,P, 1/2\,F)] = \frac{1}{2}\ln 12500 + \frac{1}{2}\ln 26000 = 9.80$$
Escoge la opción de 50-50.

d. Ahora asuma que Juan puede elegir cualquier combinación de cosecha entre Papas y Fresas, con la única condición de que siembre el 100% de la tierra. ¿Qué

combinación de cosecha entre Papas y Fresas maximiza la utilidad esperada de Juan?

$$E[U(\alpha P,(1-\alpha)F)] = \frac{1}{2}\ln[\alpha 5000 + (1-\alpha)20000] + \frac{1}{2}\ln[\alpha 40000 + (1-\alpha)12000]$$

$$\partial E[U(\alpha P,(1-\alpha)1/2\,F)]/\partial\alpha = \frac{1}{2}\frac{5000-20000}{\alpha 5000 + (1-\alpha)20000} + \frac{1}{2}\frac{40000-12000}{\alpha 40000 + (1-\alpha)12000} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-15000}{20000-15000\alpha} + \frac{28000}{12000+28000\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{7}{3+7\alpha} = \frac{3}{4-3\alpha} \Rightarrow 28-21\alpha = 9+21\alpha$$

$$\Rightarrow 42\alpha = 19 \Rightarrow \alpha = \frac{19}{42} \approx 45{,}2\%$$

45,2% es el porcentaje óptimo de terreno que cultiva de papas

e. Finalmente, asuma que Juan decide sembrar la mitad de su tierra con Fresas y la otra mitad con Papas. Ahora él tiene la opción de comprar un seguro para las Fresas. Este seguro le cuesta $5.000 y le paga $10.000 en caso de que haya una sequía. ¿Debería Juan comprarlo?

$$E[U(F)] = \frac{1}{2}\ln 7500 + \frac{1}{2}\ln 31000 = 9.63$$

La utilidad es menor que sembrando 50-50, por lo tanto prefiere diversificar el producto en lugar de comprar el seguro.

2. LA SEÑORA NEBLINA

La señora Neblina planea un viaje por todo el mundo. La utilidad del viaje es una función de la cantidad que gastará en este (Y) y está dada por U(Y) = log Y. La señora Neblina tiene 10.000 dólares para gastar en el viaje.

a. **Si existe 25% de probabilidad de que la señora Neblina pierda 1 000 dólares de su dinero en el viaje, ¿cuál es la utilidad esperada del viaje?**

   $E(U) = 0{,}75 * \log 10000 + 0{,}25 \log (9000) = 3{,}98856$

b. **Suponga que la señora Neblina puede comprar un seguro contra la pérdida de los 1 000 dólares con una prima actuarialmente justa de 250 dólares. ¿Estaría dispuesta a comprar ese seguro? Demuestre su respuesta.**

   Sí porque se asegura un ingreso de 9750, lo cual le depara una utilidad de 3,98900, lo cual es superior a la utilidad esperada encontrada en a.

c. **¿Cuál es el monto máximo que la señora Neblina estaría dispuesta a pagar para asegurar sus 1 000 dólares?**

   Para obtener la respuesta hay que elevar 10 al resultado de la pregunta a, para obtener el ingreso cierto equivalente para esta persona. La diferencia de este valor a los 10.000 dólares es el seguro máximo que está dispuesta a pagar 10.000-9740,03746=259,96254.

d. **Suponga que las personas que compran un seguro suelen ser menos cuidadosas con su dinero que las que no lo contratan y suponga que hay 30% de probabilidad de que pierdan los 1 000 dólares. ¿Cuál será la prima del seguro actuarialmente justo? ¿La señora Neblina pagaría un seguro en esta situación?**

   El seguro actuarialmente juste sería igual a la pérdida esperada : 0,30 * 1 000 = 300. Este monto resulta superior a lo que la señora Neblina está dispuesta a pagar según la pregunta c.

3. Incertidumbre

Suponga que Paula tiene una función de utilidad dada por U(I) = **100 - [100,000/I]**, donde I representa su ingreso semanal.

a) Paula actualmente tiene un ingreso de 20,000 colones por semana. Sin embargo, a ella le ofrecen la posibilidad de tomar un nuevo trabajo que le paga 25.000 colones con probabilidad 50% y 15.000 colones con probabilidad 50%. ¿Debe ella aceptar el nuevo trabajo?

$$100-\left(\frac{100000}{20000}\right)\ =95>94\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\left(100-\frac{100000}{25000}\right)+\frac{1}{2}\left(100-\frac{100000}{15000}\right)$$

Paula NO debería aceptar el trabajo.

b) ¿Es Paula aversa, neutral o amante del riesgo?

Es aversa al riesgo. $U^{\prime}=\frac{100000}{I^2}$; $\qquad U^{\prime\prime}=-\frac{100000}{I^4}$

c) i. Si a Paula la obligan a tomar el trabajo descrito en (a), ¿estaría Paula dispuesta a comprar un seguro para protegerla del ingreso variable asociado con el nuevo trabajo? Si es así, ¿cuál sería el monto máximo del seguro que ella está dispuesta a pagar?

6.250

ii. Si Paula no acepta el trabajo descrito en (a), encuentre el monto de dinero que habría que pagarle como monto fijo (seguro negativo) para que ella sea indiferente entre la opción de ingreso fijo y el trabajo ofrecido.

$$95\ =\frac{1}{2}\left(100-\frac{100000}{25000+X}\right)+\frac{1}{2}\left(100-\frac{100000}{15000+X}\right)$$

➔ $5=\left[\frac{50000}{25000+X}\right]+\left[\frac{50000}{15000+X}\right]$

➔ $1=\left[\frac{10000}{25000+X}\right]+\left[\frac{10000}{15000+X}\right]$

➔ $1=10000\left[\frac{(15000+X)+(25000+X)}{(25000+X)(15000+X)}\right]$

➔ $1=10000\left[\frac{40000+2X}{375000000+40000X+X^2}\right]$

➔ $375000000+40000X+X^2=400000000+20000X$

➔ $X^2+20000X-25000000=0$

➔ $X^2 + 20000X - 25000000 = 0$

➔ X = $\frac{-20000 \pm \sqrt{400000000+4(25000000)}}{2}$

➔ X = $\frac{-20000 \pm \sqrt{500000000}}{2}$

➔ X = $\frac{-20000 \pm 10000\sqrt{5}}{2}$

➔ X = 1180,34

➔ Habría que darle por lo menos 1180,34 para que sea indiferente entre el ingreso variable de 15,000 y 25,000 y un ingreso fijo de 20.000.

Suponga ahora que Paula tiene la opción de tomar un puesto como asistente ejecutiva que paga 62.000 colones por semana con certidumbre o iniciar la carrera de abogacía. Si Paula estudia leyes, exista una probabilidad de 50% de ganar 45.000 colones por semana y 50% de chance de ganar 80.000 colones la semana. La función de utilidad de Paula está representada ahora por U(I) = $\sqrt{\ }$ **I,** donde I representa el ingreso semanal

d) Dado que Paula es aversa al riesgo, ¿debería ella aceptar el puesto como asistente ejecutiva o estudiar leyes?

$$\sqrt{62000} = 249 > 247{,}49 = \frac{1}{2}\sqrt{45000} + \frac{1}{2}\sqrt{80000}$$

Acepta el puesto de asistente ejecutiva.

e) Asuma que el puesto de asistente ejecutiva ya no es una opción para Paula. ¿Cuánto estaría ella dispuesta a pagar como máximo por un seguro que la proteja del ingreso variable asociado con la carrera de abogacía?

$$247{,}49 = \sqrt{I}$$

$$61250 = I$$

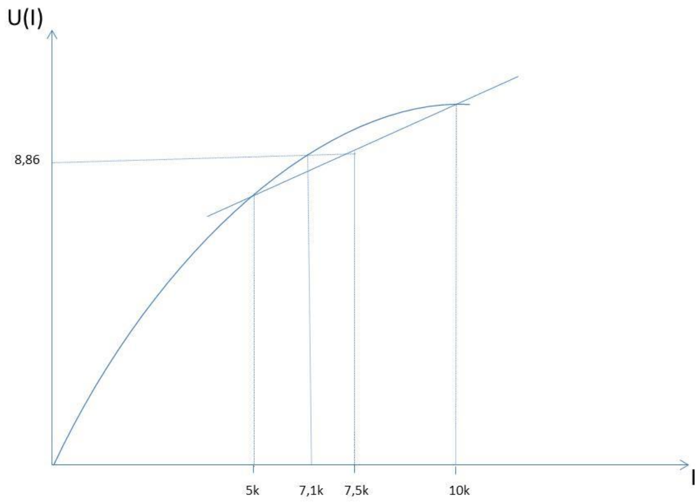
Por tanto, el ingreso fijo que es indiferente al variable es 61,250. Así, el monto máximo que ella está dispuesta a pagar por un seguro de 35.000 es 18.750 (62,500 – 61,250 = 1,250).

4. OPCIONES DE ASEGURAMIENTO

Una persona tiene sus preferencias representadas por la función de utilidad U(Y) = ln Y, donde Y representa el nivel de ingreso de la persona. Esta persona tiene un ingreso de \$10.000 y se enfrenta a una posible pérdida del 50% de su ingreso (o sea, \$5.000 de su riqueza) con una probabilidad p.

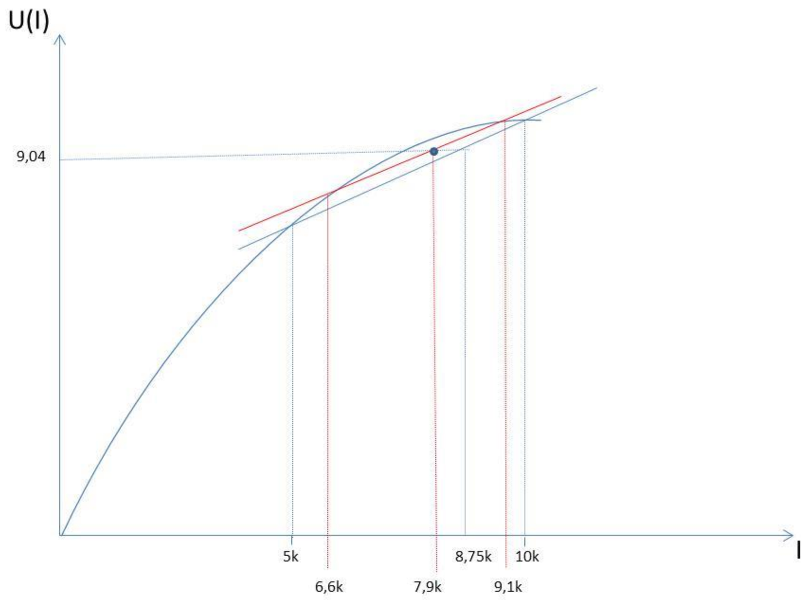
a. Si la probabilidad de pérdida es igual a ½, ¿Cuánto es el monto máximo de dinero que esta persona está dispuesta a pagar por un seguro que le repone el <u>100%</u> de la posible pérdida? Dibuje los resultados en un gráfico.

U(E) = ½ ln 10.000 + ½ ln 5.000 = 8,863767
ln (10.000 – X) = 8,863767 → 10.000 - X = 7.071,07   R/. La persona está dispuesta a pagar como máximo \$2.928,93 por una póliza que pague \$5.000 de pérdida.

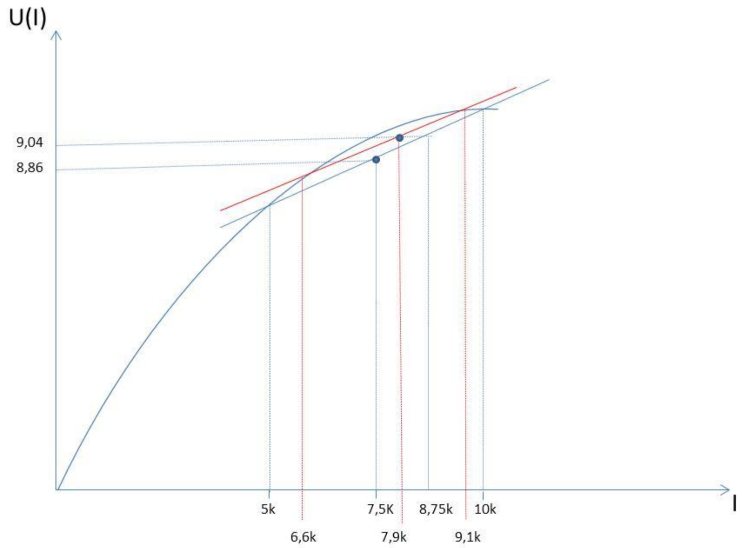


b. Si la probabilidad de pérdida es igual a ¼, ¿Cuánto es el monto máximo que esta persona está dispuesta a pagar por un seguro que le repone el <u>50%</u> de la posible pérdida? Dibuje los resultados en un gráfico.

Sin seguro U(E) = ¾ ln 10.000 + ¼ ln 5.000 = 9,037054
Con seguro U(E) = ¾ ln (10.000 - X) + ¼ ln (7.500 – X) = 9,037054,
→ ln $(10.000 - X)^3$ (7.500 – X) = 36,148214
→ $(10.000 - X)^3$ (7.500 – X) = 5.000.000.000.000.000 → X = 888,977



c. **Si la persona pudiera escoger entre los escenarios planteados en a y b, ¿cuál de los dos escogería? Dibuje los resultados en un gráfico.**
Están mejor en el escenario del inciso b.



d. **Asuma que se ofrece un seguro que protege a un individuo del <u>100%</u> de la pérdida y este seguro cuesta $3000. ¿Cuánto tendría que ser la probabilidad mínima de ocurrencia de la desgracia para que esta persona decida adquirir este seguro a esta prima? ¿Es posible que se ofrezca este seguro en el mercado?**

U(E) = (1-p) ln 10.000 + p ln 5.000 = ln 7.000 → p = (ln2 + ln5 - ln7)/ln2 = 0,5146
El pago esperado de este seguro es 5.000 * 0,5146 =2.572,87, mientras que el costo de la prima es 3.000, por lo que sí es posible que este seguro se ofrezca en el mercado.

e. **Asuma en su lugar que el seguro que se ofrece protege al individuo solo del <u>50%</u> de la pérdida y este seguro cuesta $1500. ¿Cuánto tendría que ser la**

probabilidad mínima de ocurrencia de la desgracia para que esta persona decida adquirir este seguro a esta prima? ¿Es posible que se ofrezca este seguro en el mercado?

U(E) = (1-p) ln 10.000 + p ln 5.000 = (1-p) ln 8.500 + p ln 6.000

P = (2 ln2 + ln5 – ln17)/(2 ln2 + ln3 –ln17) = 0,471287
Este seguro tiene un pago esperado de $1.178,22 y cuesta $1.500, por lo que es factible que una compañía de seguros lo ofrezca en el mercado.

5. LAS PARADOJAS DE LA INCERTIDUMBRE

i. LA PARADOJA DE ALLAIS

El siguiente ejercicio se relaciona con la llamada “Paradoja de Allais”. Suponga que usted debe escoger entre los siguientes dos juegos:

Juego A: Recibe $1 millón con probabilidad 100%.
Juego B: Se le paga $5 millones con probabilidad 10%, $1 millón con probabilidad 89% y nada con probabilidad 1%.

Anote el juego que prefiere y examine a continuación los siguientes dos juegos:

Juego C: Se le paga $1 millón con probabilidad 11% y nada con probabilidad 89%.
Juego D: Se le paga $5 millones con probabilidad 10% y nada con probabilidad 90%.

Anote de nuevo el juego preferido. Tal vez usted sea como la mayoría de las personas, que normalmente prefiere estrictamente el juego A al juego B y el juego D al juego C. Demuestre que este razonamiento es inconsistente con el Teorema de la utilidad esperada de Von Neumann – Morgenstern.

ii. LA PARADOJA DE ELLSBERG

El siguiente ejercicio se relaciona con la llamada “Paradoja de Ellsberg”. Suponga que una bolsa contiene 300 bolas, de las cuales 100 son rojas y 200 son azules o verdes. A usted se le ofrece escoger entre los siguientes dos juegos:

Juego A: Se le paga $1,000 si saca una bola roja de la bolsa.
Juego B: Se le paga $1,000 si saca una bola azul de la bolsa.

Anote el juego que prefiere y examine a continuación los siguientes dos juegos:

Juego C: Se le paga $1,000 si saca una bola que no sea roja de la bolsa.
Juego D: Se le paga $1.000 si saca una bolsa que no sea azul de la bolsa.

La mayoría de las personas prefiere estrictamente el juego A al juego B y el juego C al juego D. Sin embargo, este razonamiento es inconsistente y usted debe demostrarlo. Para ello, utilice el teorema de VNM y asuma que U(0) = 0. Para ayudarse, puede utilizar la siguiente notación:

p(R) = probabilidad de que la bola que salga sea roja.
p(-R) = probabilidad de que la bola que salga no sea roja.
P(A) = probabilidad de que la bola que salga sea azul.
P(-A) = probabilidad de que la bola que salga no sea azul.

6. ADICCIÓN AL JUEGO

Una persona tiene sus preferencias representadas por la función de utilidad $U(Y) = Y^2$, donde Y representa el nivel de ingreso de la persona. Esta persona va a un casino con $200 y se encuentra con un juego en el cual debe apostar $100 para atinar si sale una bolita roja o una bolita negra de una tómbola. Existe una misma cantidad de bolitas rojas y bolitas negras. Si atina el color de la bolita se gana $100, de lo contario pierde los $100.

a. ¿Cuánto es el monto máximo de dinero que esta persona está dispuesta a pagar por entrar en este juego?
b. Si este juego fuera gratis y quisiéramos impedir que esta persona se involucre en él, ¿cuánto dinero tendríamos que pagarle a esta persona?
c. Represente sus resultados en un gráfico.

7. INCERTIDUMBRE

a. Demuestre aritméticamente o mediante el uso de gráficos cómo la diversificación del riesgo deja a una persona adversa al riesgo en una mejor situación en comparación con la no diversificación.
b. Demuestre aritméticamente o mediante el uso de gráficos cómo la diversificación del riesgo deja a una persona amante al riesgo en una peor situación en comparación con la no diversificación.
c. Demuestre aritméticamente o mediante el uso de gráficos que una persona está dispuesta a pagar montos mayores por cubrirse ante un evento catastrófico entre mayor sea su aversión al riesgo.
d. Falso o verdadero: Una persona que es neutral al riesgo nunca compraría una póliza de seguros.

CAPÍTULO 10
LA ECONOMIA EN EL TIEMPO

TEMARIO

.

10.1 A

.

10.2 B

En este segmento se trabajan con funciones de ofertas definidas y los ejercicios tienen por intención mostrar las diferencias en la oferta de las empresas en el largo, corto y plazo inmediato.

10.3 Ejercicios a solucionar

1. EL WHISKEY ESCOCÉS

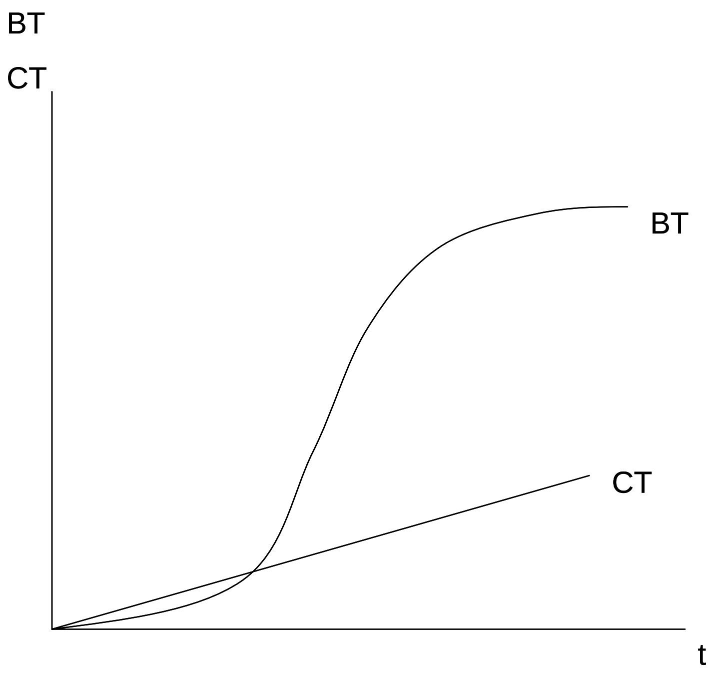
El whiskey escocés aumenta de valor conforme envejece. Un dólar invertido en whiskey hoy, vale $V(t)=e^{2\sqrt{t}-0.15t}$ dólares en el tiempo t. Si la tasa de interés de mercado es 5%.

a. ¿Cuál es el momento óptimo para vender el licor?

$$VP=e^{2\sqrt{t}-0.15t}e^{-rt}$$
$$\partial VP/\partial t=(t^{-1/2}-0{,}15)e^{2\sqrt{t}-0.15t}e^{-rt}-re^{2\sqrt{t}-0.15t}e^{-rt}=0$$
$$\Rightarrow (t^{-1/2}-0{,}15)=r\Rightarrow t^{-1/2}-0{,}15=0{,}05\Rightarrow t^{-1/2}=0{,}2\Rightarrow t^{1/2}=5\Rightarrow t=25$$

b. Exprese implícitamente (no haga cálculos), cómo cambiaría su respuesta si existiera un costo de almacenaje que está dado por 150t. Muestre sus resultados en un gráfico (No la respuesta exacta, sino como se verían las curvas de costo total y de beneficio total).

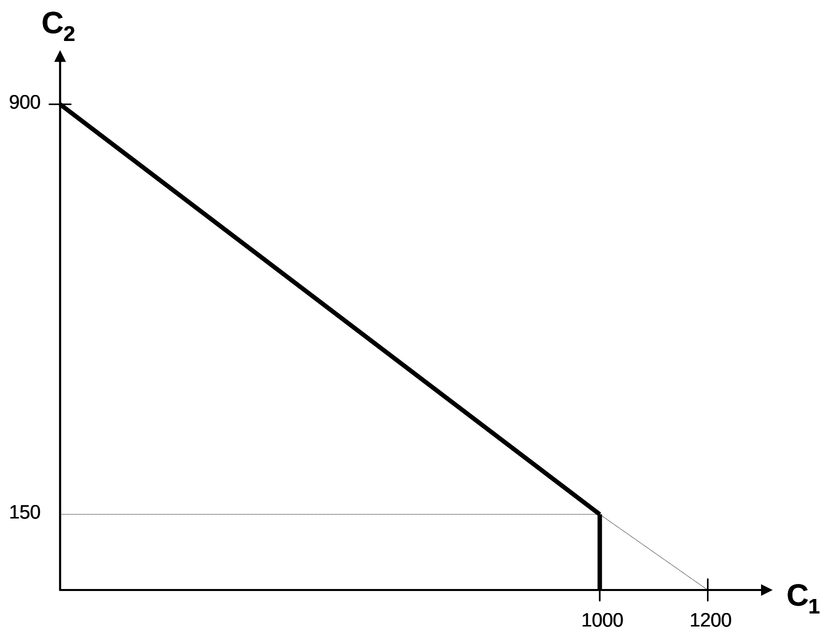
$$VP=(e^{2\sqrt{t}-0.15t}-150t)e^{-rt}$$
$$\partial VP/\partial t=(t^{-1/2}-0{,}15)e^{2\sqrt{t}-0.15t}e^{-rt}-re^{2\sqrt{t}-0.15t}e^{-rt}-150e^{-rt}=0$$
$$\Rightarrow (t^{-1/2}-0{,}15-r)e^{2\sqrt{t}-0.15t}=150$$
$$\Rightarrow (t^{-1/2}-0{,}20)e^{2\sqrt{t}-0.15t}=150$$



2. ELECCION INTERTEMPORAL

Los habitantes de una aldea aislada solamente cultivan maíz. Las buenas cosechas se alternan con las malas cosechas: este año la cosecha será de 1.000 kilos y el año próximo será de 150 kilos. No mantienen intercambios comerciales con el mundo exterior. El maíz se puede almacenar de un año para otro, pero las ratas devoran el 25% de lo almacenado en un año. Los aldeanos tienen una función de utilidad Cobb-Douglas $U(C_1,C_2)= C_1*C_2$, donde C_1 representa el consumo de este año y C_2 el consumo del próximo año.

a. Trace la recta presupuestaria que muestre las posibilidades de consumo de los aldeanos, representando en el eje horizontal el consumo de este año y en el eje vertical el consumo del próximo año. Indique con números los puntos en los cuales la recta presupuestaria corta los ejes.



b. Encuentre el consumo óptimo de maíz para cada uno de los años.

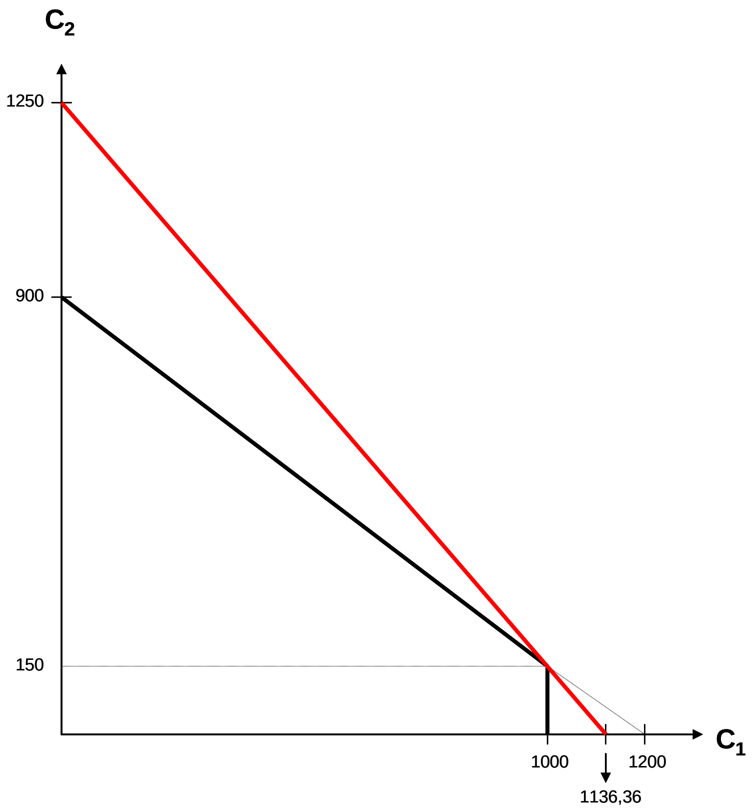
$$(1+r)C_1 + C_2 = (1+r)I_1 + I_2, r = -25\% \rightarrow 0{,}75 * C_1 + C_2 = 0{,}75 * 1000 + 150 = 900, C_1 \leq 1000$$

$$\frac{3}{4}C_1 + C_2 = 900, C_1 \leq 1000,$$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{2}C_1 = 900 \rightarrow C_1 = 600, C_2 = 450$$

c. Suponga que se construye una carretera dirigida a la aldea de manera que los habitantes pueden comerciar con el resto del mundo. Ahora podrán comprar y vender maíz al precio de 1 peso por cada kilo y también pedir prestado y prestar dinero a un tipo de interés del 10%. Represente en el mismo gráfico de i, pero en otro color, la nueva recta presupuestaria de los aldeanos. Encuentre la cantidad consumida en cada periodo.



$$1{,}1 * C_1 + C_2 = 1{,}1 * I_1 + I_2 \rightarrow 1{,}1 * C_1 + C_2 = 1250$$

$$\frac{C_2}{C_1} = 1{,}1$$

$$2{,}2C_1 = 1250 \rightarrow C_1 = 568{,}18, C_2 = 625$$

3. NO HAY COMO VIVIR EL PRESENTE

a. Un individuo vive por tres periodos y gana un salario de w en cada uno de ellos. La tasa de interés es cero y la tasa de descuento de un periodo a otro es ½ (tasa a la cual este individuo descuenta la utilidad entre periodos). Cuando él está joven, él no piensa más allá de la edad intermedia por lo que su función de utilidad está dada por:

U1(c1, c2, c3) = ln c1+ ½ ln c2,

¿Cuánto ahorra o pide prestado este individuo en el periodo 1?

$$C_1 + C_2 = 3w, \ldots\ldots\ldots\ldots, U(C_1, C_2) = \ln C_1 + \frac{1}{2}\ln C_2,$$

$$TMS = {}^{UM_1}\!\!\diagup_{UM_2} = {}^{2C_2}\!\!\diagup_{C_1} = 1 \Rightarrow 2C_2 = C_1$$

$$\frac{3}{2}C_1 = 3w \Rightarrow C_1 = 2w$$

El consumidor pide prestado del tercer periodo el equivalente a un salario –*w*-

b. Sin embargo, cuando él está en la edad intermedia, el individuo empieza a preocuparse por el futuro cuando sea viejo y su función de utilidad es:

U2(c1, c2, c3) = ln c2+ ½ ln c3,

¿Cuánto ahorra o pide prestado este individuo en el periodo 2?

$$C_2 + C_3 = w, \ldots\ldots\ldots\ldots, U(C_2, C_3) = \ln C_2 + \frac{1}{2}\ln C_3,$$

$$TMS = {}^{UM_1}\!\!\diagup_{UM_2} = {}^{2C_3}\!\!\diagup_{C_2} = 1 \Rightarrow 2C_3 = C_2$$

$$\frac{3}{2}C_2 = w \Rightarrow C_2 = \frac{2}{3}w$$

El consumidor ahorra un tercio de *w* y lo consume en el tercer periodo

c. Suponga en cambio que el individuo en sus momentos más racionales de su juventud, él se da cuenta de su inconsistencia intertemporal y por lo tanto busca maximizar:

U1(c1, c2, c3) = ln c1+ ½ U2,

Ahora, ¿Cuánto ahorra o pide prestado este individuo en el periodo 1?

$$C_1 + C_2 + C_3 = 3w, \ldots\ldots\ldots\ldots, U(C_1, C_2) = \ln C_1 + \frac{1}{2}\ln C_2 + \frac{1}{4}\ln C_3,$$

$$TMS = {UM_1}/{UM_2} = {2C_2}/{C_1} = 1; \Rightarrow 2C_2 = C_1$$

$$TMS = {UM_2}/{UM_3} = {2C_3}/{C_2} = 1; \Rightarrow 2C_3 = C_2$$

$$\frac{7}{4}C_1 = 3w \Rightarrow C_1 = \frac{12}{7}w, C_2 = \frac{6}{7}w, C_3 = \frac{3}{7}w$$

El consumidor pide prestado 5/7 de salario del segundo y tercer periodo, 1/7 del segundo y 4/7 del tercero.

d. Brevemente explique como su respuesta cambiaría si la tasa de interés fuera positiva en lugar de cero.

Con tasas de interés positivas, el consumo en el periodo 1 sería menor y tendería a ahorrar más o a pedir prestado menos en favor del consumo de los otros periodos.

4. ¿QUÉ HACER CON LAS TASAS DE INTERÉS CRECIENTES?

(Nota: Para facilitar los cálculos numéricos, las tasas de interés en esta pregunta no tienen valores realísticos, como 0% y 100%)

a. La Municipalidad de Guatuso (MG) espera recibir $2800 en impuestos durante 3 años diferentes, t=0, 1 y 2. También actualmente posee otros $2800 en la mano (en t=0), los cuales puede usar para prestar en el mercado o comprar bonos.

i. Si en t=0, las tasas de interés de corto plazo, r1 y r2, son iguales a 100%, cuál es el valor presente de la dotación inicial de la MG?

2800 + 2800 + 2800/2 + 2800/4 = 7700

ii. Asuma que la MG quiere igualar las cantidades (C_0*, C_1* y C_2*) disponibles en cada año para gastos municipales en calles, policia, etc. A la tasa de interés de la parte 1, muestre que ese monto es igual a $4400.

4400 + 4400/2 + 4400/4 = 7700

b.

i. El único tipo de bonos disponibles son bonos "descontados". Específicante, el tipo de bonos B1 no pagan ningún tipo de interés explícito, pero al final de cada año tienen un "valor maduro" de $1. Similarmente, los bonos B2 no pagan intereses, pero tienen un valor maduro de $1 después de dos años. Dada la tasa de interés anterior, ¿cuál es el precio P_{B1} y P_{B2} de cada tipo de bono?

P_{B1} = ½; P_{B2} = ¼

ii. Si el Tesorero de la MG fuera a cumplir con a.ii, él tendría que comprar bonos por $1200 ($5600-$4400) en el período actual (t=0). ¿Cuántos bonos de cada tipo compraría?

1600 cada tipo: 1600 * ½ = $800; 1600 * ¼ = $400

c.

i. Bajo la misma tasa de interés, ¿qué valor tendría un bono B2 en el tiempo 1, cuando al bono sólo le queda un año para madurar?

½

ii. De vuelta al período 0, suponga que el Tesorero está convencido de que en el período 1, la tasa de interés r2 bajará del 100% al 0%. Si él está correcto, ¿cuál es el valor de un bono B2 en el tiempo 1, cuando al bono sólo le queda un año para madurar?

1

iii. ¿Qué pasaría si la tasa de interés en c.ii en lugar de bajar sube al 200%? Responda 2 nuevamente.

1/3

iv. Sin embargo, suponga que en cualquier caso el Tesorero mantendrá los bonos B2 hasta que maduren. De ser así, explique por qué el aumento o descenso en el valor no afectaría el ingreso igualado de $4400 de la MG.

Porque no realiza las pérdidas o ganancias de capital

d.

i. Ahora suponga que en el período 0, el Tesorero está tan seguro (sobre sus creencias descritas en C) que él invierte <u>$1200 extra</u> en bonos B2, sobre el monto indicado en el inciso B. Como él aún quiere proveer $4400 para gastos de la MG en el período 0, él tiene que pedir prestado fondos extra a un banco (a la tasa de interés prevaleciente r1=100%). Si r2 baja a 0% como él lo esperaba, él podría repagar el préstamo en el banco en el período 1 y usar la ganancia para gastar $4400 + X en los períodos 1 y 2. ¿Cuál es el valor de X?

El compra con los $1200, 4800 bonos tipo 2 a ¼ cada uno. Esos bonos pasan a valer $4800 en el periodo 1 cuando la tasa baja a 0. Por tanto, ahora él tiene $4400 en el periodo 1, $4400 en el periodo 2 y una ganancia por los bonos igual a $4800 - $2400 que fue el costo de adquisición más el interés. Su restricción nueva es ($4.400 + X) + ($4.400 + X) = $4.400 + $4.400 + $2.400. Por tanto X = 1.200.

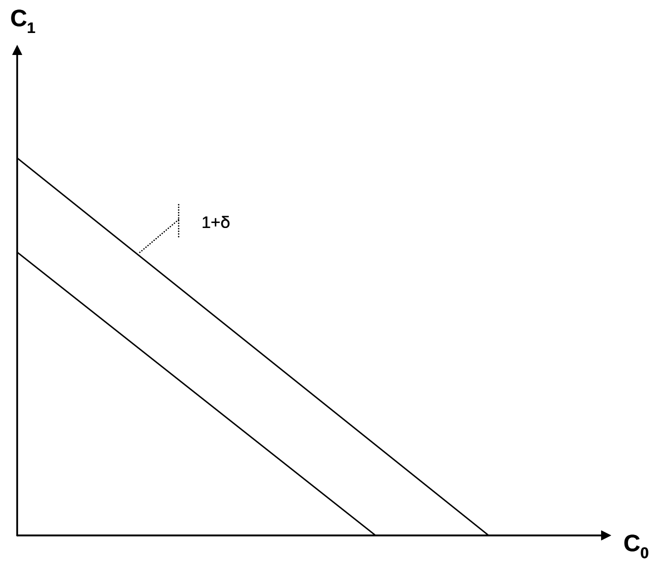
ii. Pero en vista de que r2 se incrementó a 200%, la MG podrá gastar solamente $4400-Y. ¿A qué es Y igual?

Ahora los bonos que él compró valen $1600. Por tanto, ahora él tiene $4400 en el periodo 1, $4400 en el periodo 2 y una pérdida por los bonos igual a $1.600 - $2.400 que fue el costo de adquisición más el interés. Su restricción nueva es ($4.400 - Y) + ($4.400 - Y)/3 = $4.400 + $4.400/3 - $800. Por tanto Y = 800.

5. FELIX FLEXIBLE

Félix Flexible considera que su consumo presente y futuro son sustitutos perfectos. Sin embargo, descuenta un poco el consumo futuro para reflejar las incertidumbres de la vida. Por tanto, su función de utilidad está dada por $U(C_0,C_1) = C_0 + C_1/(1+\delta)$, donde δ es la "tasa de descuento" que aplica a C_1.

a. Haga un gráfico mostrando las curvas de indiferencia de Félix.



b. ¿Cuánto sería el consumo presente y futuro de acuerdo a diferentes valores que pueden existir de tasa de interés y tasa de descuento?

Si $r > \delta$, $C_0 = 0$, $C_1 = I_0*(1+r) + I_1$

Si $r < \delta$, $C_1 = 0$, $C_0 = I_0 + I_1/(1+r)$

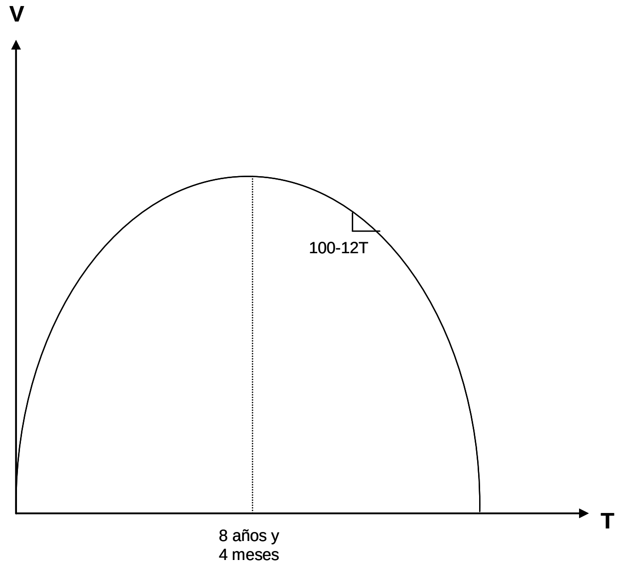
c. ¿Cuál es su conclusión respecto a la relación entre el comportamiento de ahorro de la persona y su "impaciencia"?

La tasa de interés y la tasa de impaciencia de este individuo no tienen ningún efecto sobre el consumo con excepción del punto crítico en donde se igualan, en donde el ahorro pasaría de cero a su punto máximo de I_0.

6. EL WHISKEY ESCOCÉS

El whiskey escocés va adquiriendo valor conforme se añeja, cuando menos hasta cierto punto. En el caso de un periodo cualquiera, t, el valor de un barril está dado por V=100t – 6t^2. Esta función implica que la tasa proporcional de crecimiento del valor del escocés es (100 – 12t)/V.

a. Haga un gráfico de la función del valor del whiskey.



b. ¿A qué valor de t el barril de whiskey es más valioso?

8 años y cuatro meses. (donde la pendiente es igual a 0)

c. Si la tasa de interés es 5%, ¿cuándo deberá la destilería embotellar el whiskey para su venta inmediata?

$$\frac{100-12t}{100t-6t^2}=\frac{1}{20}\rightarrow 2000-240t=100t-6t^2\rightarrow 6t^2-340t+2000=0$$

$$3t^2-170t+1000=0$$

$$\frac{170\pm\sqrt{170^2-4*3*1000}}{2*3}=\frac{170\pm\sqrt{16900}}{6}=\frac{170-130}{6}=\frac{40}{6}=6\,{}^{2}\!/_{3}$$

6 años y 8 meses

d. ¿Cómo cambiaría la decisión de la destilería si la tasa de interés fuera 10%?

$$\frac{100-12t}{100t-6t^2}=\frac{1}{10}\rightarrow 1000-120t=100t-6t^2\rightarrow 6t^2-220t+1000=0$$

$$3t^2-110t+500=0$$

$$\frac{110\pm\sqrt{110^2-4*3*500}}{2*3}=\frac{110\pm\sqrt{6100}}{6}=5{,}31$$

7. VALOR PRESENTE

a. La compañía en la que usted trabaja está en venta por \$200.000. El estado de resultados de la compañía muestra que la ganancia del último año fue de \$7.000, lo cuales deben pagarse como dividendos. Asuma que la compañía permanecerá operando en el futuro por siempre y que la tasa de interés permanece constante al 5%. ¿A cuál tasa constante cree usted que el dueño de la compañía cree que las ganancias van a crecer en el futuro para valorar la compañía en ese monto?

$$200.000=7.000+\frac{7.000(1+g)}{1.05}+\frac{7.000(1+g)^2}{1.05^2}+\frac{7.000(1+g)^3}{1.05^3}+\cdots$$

$$\frac{200}{7}=1+\rho+\rho^2+\rho^3+\cdots,\rho=\frac{(1+g)}{1.05}$$

$$\frac{200}{7}=\frac{1}{1-\rho}=\frac{1}{1-\frac{(1+g)}{1.05}}=\frac{1.05}{0.05-g}$$

$$200\left(\frac{1}{20}-g\right)=7*1.05\rightarrow 10-200g=7.35\rightarrow 2.65=200g\rightarrow g=\frac{2.65}{200}$$
$$=0.01325$$

b. Usted está comparando dos firmas en las cuales le gustaría invertir en acciones. La primera: Y Corp. generó ganancias este año por \$50.000, las cuales no han sido distribuidas en dividendos. Estas ganancias se espera que crezcan indefinidamente a una tasa de 3% anual. La segunda: X Ltd. Generó ganancias este año por \$75.000, las cuales ya han sido distribuidas como dividendos, y se espera que sus utilidades crezcan al 2% indefinidamente. ¿En cuál de las dos firmas invertiría?

<u>Firma Y:</u>

$$VP_Y=50.000+\frac{50.000(1.03)}{(1+r)}+\frac{50.000(1{,}03)^2}{(1+r)^2}+\frac{50.000(1{,}03)^3}{(1+r)^3}+\cdots$$

$$VP_Y=50.000\left(\frac{1}{1-\delta}\right),\qquad \delta=\frac{1.03}{1+r}$$

$$VP_Y = 50.000\left(\frac{1}{1-\frac{1.03}{1+r}}\right) = 50.000\left(\frac{1+r}{r-.03}\right)$$

Firma X:

$$VP_X = \frac{75.000(1.02)}{(1+r)} + \frac{75.000(1,02)^2}{(1+r)^2} + \frac{75.000(1,02)^3}{(1+r)^3} + \cdots$$

$$VP_Y = 75.000\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right), \qquad \rho = \frac{1.02}{1+r}$$

$$VP_Y = 75.000\left(\frac{\frac{1.02}{1+r}}{1-\frac{1.02}{1+r}}\right) = 75.000\left(\frac{1.02}{r-.02}\right)$$

Invierte en la firma Y si:

$$50.000\left(\frac{1+r}{r-.03}\right) > 75.000\left(\frac{1.02}{r-.02}\right) \rightarrow 2\left(\frac{1+r}{r-.03}\right) > 3\left(\frac{1.02}{r-.02}\right)$$

$$2(1+r)(r-.02) > 3(1.02)(r-.03) \rightarrow (r+1)(r-0.02) > 1.53r - 0.0459$$

$$r^2 + .98r - 0.02 > 1.53r - 0.0459 \rightarrow r^2 - 0.55r + .0259 > 0$$

$$\sqrt{\frac{0.55 \pm \sqrt{0.55^2 - 4 * 0.0259}}{2}} = \sqrt{\frac{0.55 \pm \sqrt{0.1989}}{2}}, r_1 = 0.498, r_2 = 0.052$$

O sea, la Firma Y es más rentable cuando la tasa de interés es menor a 5,2% o mayor a 49,8%.

8. LA ECUACIÓN DE EULER

Un individuo considera que su consumo presente y futuro son sustitutos perfectos. Sin embargo, descuenta un poco el consumo futuro para reflejar las incertidumbres de la vida. Por tanto, su función de utilidad está dada por $U(C_0,C_1) = C_0 + C_1/(1+\delta)$, donde δ es la "tasa de descuento" que aplica a C_1.

a. ¿Cuánto sería el consumo presente y futuro de acuerdo a diferentes valores que pueden existir de tasa de interés y tasa de descuento?
b. ¿Cuál es su conclusión respecto a la relación entre el comportamiento de ahorro de la persona y su "impaciencia"?

c. ¿Cómo cambiarían sus respuestas en a y b si las preferencias de este individuo por el consumo presente y futuro fueran de perfectos complementos?

9. ECONOMIA EN EL TIEMPO

El presente ejercicio se relaciona con la medición de la duración (D) de un bono, utilizando la definición de Macaulay :

$$D = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i i}{V}$$

donde, b

i = representa el tiempo en el que se realiza cada pago.
P_i = valor presente de cada pago que se realiza en el periodo i. O sea, el pago del monto de los intereses en cada i ≠n y el pago de los intereses más el principal en i = n.
V = valor presente de todos los pagos que se realizan a lo largo de la vida del bono.

a. Demuestre de que la duración de un bono cero cupón es igual al periodo de maduración.
b. Para una tasa de interés fija, demuestre cuál bono tiene mayor duración: el bono A que paga X% con 1 cupón anual, o el bono B que paga X% con cupones semestrales.
c. Demuestre que existe una relación inversa entre la tasa de interés y su duración.

Calcule la duración de un bono a tres años plazo que paga una tasa de interés anual igual al 20 por ciento mediante cupones semestrales.

CAPÍTULO 11
TEORÍA DE JUEGOS

TEMARIO

.

11.1 A

.

11.2 B

.

11.3 Ejercicios a solucionar

1. JUEGOS REPETITIVOS

Considere el siguiente juego entre dos jugadores que es repetido infinitamente:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} I & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 2{,}0 & x{,}0 \\ 0{,}5 & 1{,}1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sea δ un factor de descuento para ambos jugadores y considere una secuencia estratégica que induce el resultado BI, AD, BI, AD, … , y así, después de una desviación, se juega un periodo de AI, para luego volver al patrón BI, AD, BI, AD, ….

a. La utilidad del jugador i es igual a $u_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta_i^t \pi_{it}, (0 < \delta_i < 1)$. Si x = 5, ¿para qué valores de δ es esta estrategia un Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos.

i. Solo el individuo 1 tiene incentivos para traicionar. Si él no traiciona obtiene el siguiente pago esperado:

$$0 + \delta 5 + \delta^2 0 + \delta^3 5 + \cdots = 5\delta(1 + \delta^2 + \delta^4 + \cdots) = \frac{5\delta}{1-\delta^2}$$

ii. Si el individuo decide traicionar, tiene dos opciones traicionar solo 1 ciclo con lo cual obtendría:

$$0 + \delta 5 + \delta^2 2 + \delta^3 2 + \delta^4 0 + \delta^5 5 + \delta^6 0 + \cdots = \delta(5 + \delta 2 + \delta^2 2) + 5\delta^5(1 + \delta^2 + \delta^4 + \cdots) =$$

$$= \delta(5 + \delta 2 + \delta^2 2) + \frac{5\delta^5}{1-\delta^2}$$

iii. O traicionar siempre, con lo cual obtendría:

$$(0 + \delta 5 + \delta^2 2 + \delta^3 2) + (\delta^4 0 + \delta^5 5 + \delta^6 2 + \delta^7 2) + \cdots = \delta(5 + \delta 2 + \delta^2 2)(1 + \delta^4 + \delta^8 + \delta^{12} + \cdots) =$$

$$= \frac{\delta(5 + \delta 2 + \delta^2 2)}{1-\delta^4}$$

Si se compara i con ii, nos damos cuenta que:

$\delta 5 + \delta^3 5 > 5\delta + \delta^2 2 + \delta^3 2$, cuando $\delta > 2/3$

Si se compara i con iii, nos damos cuenta que:

$\dfrac{5\delta}{1-\delta^2} > \dfrac{\delta(5 + \delta 2 + \delta^2 2)}{1-\delta^4}$, cuando $\delta > 2/3$

Por lo tanto, traicionar ya sea mediante i o ii es un equilibrio de Nash en Subjuegos solo si $\delta > 2/3$, de lo contrario el equilibrio sería no traicionar.

b. Si x = 4, cómo cambiaría su respuesta en a.

i. Solo el individuo 1 tiene incentivos para traicionar. Si él no traiciona obtiene el siguiente pago esperado:

$$0+\delta 4+\delta^2 0+\delta^3 4+\cdots = 4\delta(1+\delta^2+\delta^4+\cdots) = \frac{4\delta}{1-\delta^2}$$

ii. Si el individuo decide traicionar, tiene dos opciones traicionar solo 1 ciclo con lo cual obtendría:

$$0+\delta 4+\delta^2 2+\delta^3 2+\delta^4 0+\delta^5 4+\delta^6 0+\cdots = \delta(4+\delta 2+\delta^2 2)+4\delta^5(1+\delta^2+\delta^4+\cdots) =$$
$$= \delta(4+\delta 2+\delta^2 2)+\frac{4\delta^5}{1-\delta^2}$$

iii. O traicionar siempre, con lo cual obtendría:

$$(0+\delta 4+\delta^2 2+\delta^3 2)+(\delta^4 0+\delta^5 4+\delta^6 2+\delta^7 2)+\cdots = \delta(4+\delta 2+\delta^2 2)(1+\delta^4+\delta^8+\delta^{12}+\cdots) =$$
$$= \frac{\delta(4+\delta 2+\delta^2 2)}{1-\delta^4}$$

Si se compara i con ii, nos damos cuenta que:

$\delta 4+\delta^3 4 < \delta 4+\delta^2 2+\delta^3 2$, para cualquier valor de $\delta < 1$

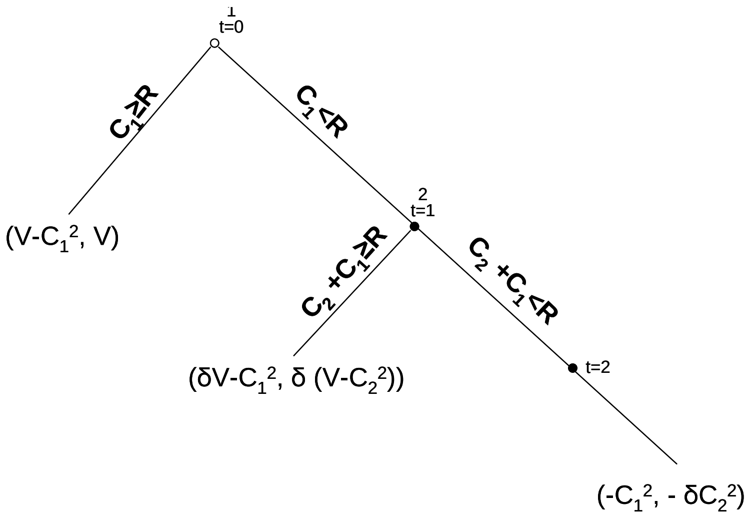
Si se compara i con iii, nos damos cuenta que:

$\dfrac{4\delta}{1-\delta^2} < \dfrac{\delta(4+\delta 2+\delta^2 2)}{1-\delta^4}$, para cualquier valor de $\delta < 1$

Por lo tanto, traicionar ya sea mediante i o ii es un equilibrio de Nash en Subjuegos para cualquier $\delta < 1$, o sea, siempre.

2. JUEGOS SECUENCIALES

Dos compañeros desearían completar un proyecto. Ellos tendrán que decidir los niveles de contribución C_1 y C_2 en sucesión. Cada compañero recibe un pago de V cuando el proyecto es completado, pero no recibe nada si no es completado. La contribución que hace falta para completar el proyecto es R. En t = 0, el jugador 1 elige su nivel de contribución C_1 para completar la contribución remanente R. Si $C_1 \geq R$ el proyecto se completa y el juego termina (con $C_2 = 0$). Si no ocurre lo contrario, entonces en t = 1, el jugador 2 decide el nivel de contribución C_2. Si y solo si $C_1 + C_2 \geq R$ el proyecto se completa. Los pagos son $(V - C_1^2, V)$ si el proyecto es completado en t = 0, $(\delta V - C_1^2, \delta(V - C_2^2))$, si el proyecto es completado en t = 1. Si el proyecto no se completa después del periodo t=1, entonces los pagos son $(- C_1^2, -\delta C_2^2)$. Encuentra la solución de este juego.



El jugador 2 no va a dejar que el juego continúe al periodo 2 porque $\delta V - \delta C_2^2$ siempre es mayor a $- \delta C_2^2$ para todo valor positivo de V. Entonces, para que el juego acabe en el periodo 1, el pago que el jugador 1 recibe allí debe ser superior a lo que recibiría si él decide contribuir lo suficiente para que acabe en el periodo 0. Pero esto no es así porque $\mathbf{V - C_1^2}$ siempre es mayor que $\mathbf{\delta V - C_1^2}$. Esto quiere decir que el juego acaba en el periodo 0 con $C_1 > R$.

3. OLIGOPOLIO DE 5 FIRMAS (revisar el ejercicio pues no pueden haber más de dos líderes)

Una economía tiene 5 firmas. Las tres primeras firmas son idénticas y tienen un costo marginal igual a "c", las otras dos firmas también son iguales entre sí pero diferentes a las primeras y tienen un costo marginal de "d", c<d. El mercado de este producto tiene una demanda agregada representada por la función inversa P = a - bQ. Bajo estas circunstancias responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el equilibrio de Cournot en este mercado y diga cuáles firmas venden una mayor cantidad de producto? Establezca los supuestos pertinentes y explique todos los casos posibles.

Para una empresa c representativa:

$$\pi_1^C = \left[a - b(q_1^C + q_2^C + q_3^C + q_1^D + q_2^D)\right]q_1^C - cq_1^C$$

$$\partial\pi_1^C / \partial q_1^C = 0 = a - b(2q_1^C + q_2^C + q_3^C + q_1^D + q_2^D) - c$$

Para una empresa d representativa:

$$\pi_1^D = \left[a - b(q_1^C + q_2^C + q_3^C + q_1^D + q_2^D)\right]q_1^D - dq_1^D$$

$$\partial\pi_1^D / \partial q_1^D = 0 = a - b(q_1^C + q_2^C + q_3^C + 2q_1^D + q_2^D) - d$$

En equilibrio se sabe que $q_1^C = q_2^C = q_3^C$ y $q_1^D = q_2^D$

Entonces: $\frac{a-c}{b} - 4q_1^C - 2q_1^D = 0 \rightarrow q_1^C = \frac{a-c}{4b} - \frac{q_1^D}{2}$

$$\frac{a-d}{b} - 3q_1^C - 3q_1^D = 0 \rightarrow q_1^D = \frac{a-d}{3b} - q_1^C$$

$$\rightarrow q_1^D = \frac{a-d}{3b} - \left(\frac{a-c}{4b}\right) + \frac{q_1^D}{2} \rightarrow \frac{q_1^D}{2} = \frac{a-d}{3b} - \left(\frac{a-c}{4b}\right) \rightarrow q_1^D = \frac{2(a-d)}{3b} - \left(\frac{a-c}{2b}\right)$$

$$q_1^C = \frac{a-c}{4b} - \frac{\frac{2(a-d)}{3b} - \left(\frac{a-c}{2b}\right)}{2} = \frac{a-c}{4b} - \frac{(a-d)}{3b} + \left(\frac{a-c}{4b}\right) = \left(\frac{a-c}{2b}\right) - \frac{(a-d)}{3b}$$

$$q_1^D = \frac{2(a-d)}{3b} - \left(\frac{a-c}{2b}\right) = \frac{4a - 4d - 3a + 3c}{6b} = \frac{a}{6b} + \frac{3c - 4d}{6b}$$

$$q_1^C = \left(\frac{a-c}{2b}\right) - \frac{(a-d)}{3b} = \frac{3a - 3c - 2a + 2d}{6b} = \frac{a}{6b} + \frac{2d - 3c}{6b}$$

Como d>c entonces $q_1^C > q_1^D$

El equilibrio de mercado sería:

$$Q = 3\left(\frac{a}{6b} + \frac{2d - 3c}{6b}\right) + 2\left(\frac{a}{6b} + \frac{3c - 4d}{6b}\right) = \frac{5a}{6b} - \frac{3c + 2d}{6b}$$

$$P = a - bQ = a - b\left(\frac{5a}{6b} - \frac{3c + 2d}{6b}\right) = \frac{a}{6} + \frac{3c + 2d}{6}$$

b. Suponga que el segundo grupo de empresas se constituyen en líderes al estilo Stackelberg. ¿Cuál sería el equilibrio en el mercado y diga cuáles firmas venden una mayor cantidad de producto? Establezca los supuestos pertinentes y explique todos los casos posibles.

$$\pi_1^D = \left[a - b(q_1^C + q_2^C + q_3^C + q_1^D + q_2^D)\right]q_1^D - dq_1^D$$

$$q_1^C = q_2^C = q_3^C = \frac{a - c}{4b} - \frac{q_1^D}{4} - \frac{q_2^D}{4}$$

$$q_2^D = \frac{a - d}{2b} - \frac{3}{2}q_1^C - \frac{1}{2}q_1^D$$

$$q_2^D = \frac{a - d}{2b} - \frac{3}{2}\left(\frac{a - c}{4b} - \frac{q_1^D}{4} - \frac{q_2^D}{4}\right) - \frac{1}{2}q_1^D$$

$$q_2^D = \frac{a - d}{2b} - \frac{3(a - c)}{8b} + \frac{3q_1^D}{8} + \frac{3q_2^D}{8} - \frac{1}{2}q_1^D$$

$$\frac{5}{8}q_2^D = \frac{a - d}{2b} - \frac{3(a - c)}{8b} - \frac{q_1^D}{8}$$

$$q_2^D = \frac{4(a - d)}{5b} - \frac{3(a - c)}{5b} - \frac{q_1^D}{5}$$

$$q_2^D = \frac{a}{5b} - \frac{4d}{5b} + \frac{3c}{5b} - \frac{q_1^D}{5}$$

$$\Rightarrow \pi_1^D = \left\{a - b\left[3\left(\frac{a - c}{4b} - \frac{q_1^D}{4} - \frac{q_2^D}{4}\right) + q_1^D + q_2^D\right]\right\}q_1^D - dq_1^D$$

$$\Rightarrow \pi_1^D = \left\{a - b\left[\frac{3(a - c)}{4b} + \frac{q_1^D}{4} + \frac{q_2^D}{4}\right]\right\}q_1^D - dq_1^D$$

$$\Rightarrow \pi_1^D = \left\{a - b\left[\frac{3(a - c)}{4b} + \frac{q_1^D}{4} + \frac{\left(\frac{a}{5b} - \frac{4d}{5b} + \frac{3c}{5b} - \frac{q_1^D}{5}\right)}{4}\right]\right\}q_1^D - dq_1^D$$

$$\Rightarrow \pi_1^D = \left\{ a - b\left[\frac{4a}{5b} - \frac{3c}{5b} - \frac{d}{5b} + \frac{q_1^D}{5} \right] \right\} q_1^D - dq_1^D$$

$$\Rightarrow \pi_1^D = \left\{ a - \frac{4a}{5} + \frac{3c}{5} - \frac{4d}{5} - b\frac{q_1^D}{5} \right\} q_1^D$$

$$\Rightarrow \pi_1^D = \left\{ \frac{a}{5} + \frac{3c}{5} - \frac{4d}{5} - b\frac{q_1^D}{5} \right\} q_1^D$$

$$\partial \pi_1^D \big/ \partial q_1^D = 0 = \frac{a}{5} + \frac{3c}{5} - \frac{4d}{5} - \frac{2bq_1^D}{5} \rightarrow q_1^D = \frac{a}{2b} + \frac{3c}{2b} - \frac{2d}{b}$$

$$q_1^C = q_2^C = q_3^C = \frac{a-c}{4b} - \frac{q_1^D}{2} = \frac{a-c}{4b} - \left(\frac{a}{4b} + \frac{3c}{4b} - \frac{d}{b} \right) = \frac{d}{b} - \frac{c}{b}$$

Y, $q_1^D > q_1^C$ si $\frac{a}{2b} + \frac{3c}{2b} - \frac{2d}{b} > \frac{d}{b} - \frac{c}{b} \Rightarrow a + 3c - 4d > 2d - 2c \Rightarrow a > 6d - 5c$

El equilibrio sería:

$$Q = 3q_1^C + 2q_1^D = 3\left(\frac{d}{b} - \frac{c}{b} \right) + 2\left(\frac{a}{2b} + \frac{3c}{2b} - \frac{2d}{b} \right) = \frac{3d}{b} - \frac{3c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{3c}{b} - \frac{4d}{b} = \frac{a-d}{b}$$

$$P = a - b\left(\frac{a-d}{b} \right) = d$$

c. Suponga ahora que las empresas compiten por precios al estilo Bertrand. ¿Cuál sería el equilibrio en el mercado y diga cuáles firmas venden una mayor cantidad de producto? Establezca los supuestos pertinentes y explique todos los casos posibles.

Las empresas de menor costo lucharán primero por sacar a las empresas de mayor costo, posteriormente siguen compitiendo y el equilibrio se ubicará donde P=c que es el resultado de competencia.

4. En relación con el juego representado en la matriz de abajo, responda las siguientes preguntas:

		Jugador B		
		Izquierda	Centro	Derecha
Jugador A	Alto	3,3	0,3	0,0
	Centro	3,0	2,2	0,2
	Bajo	0,0	2,0	1,1

a. ¿Cuáles son los equilibrios de Nash del siguiente juego?

(A,I); (C,C); (B,D)

b. ¿De estos equilibrios de Nash, cuál es la solución más probable?

(B,D), lo cual se obtiene al calcular las estrategias mixtas y multiplicar las respectivas probabilidades.

c. Indique si existen equilibrios en estrategias mixtas.

$$\pi_E[alto] = 3q_1$$
$$\pi_E[centro] = 3q_1 + 2q_2$$
$$\pi_E[bajo] = 2q_2 + 1(1 - q_1 - q_2) = 1 - q_1 + q_2$$
$$3q_1 = 3q_1 + 2q_2 \Rightarrow q_2 = 0$$
$$3q_1 = 1 - q_1 + q_2 \Rightarrow 3q_1 = 1 - q_1 \Rightarrow 4q_1 = 1 \Rightarrow q_1 = 1/4$$

Existe un equilibrio mixto y este es jugar Alto con probabilidad ¼ y Bajo con probabilidad ¾ para el jugador 1 y jugar Izquierda con probabilidad ¼ y Derecha con probabilidad ¾ para el jugador 2.

d. ¿Si uno de los jugadores moviera primero en lugar de hacerlo secuencialmente, existe alguna ventaja de hacerlo?

No existe ventaja de jugar primero aunque se asegura que el resultado del juego sea Alto, Izquierda si no se desconfía del contrincante. Si existe desconfianza, el equilibrio sería Bajo, Derecha.

e. Si este juego se jugara dos veces, en donde los jugadores pactan jugar 3,3 en la segunda ronda, solo si observan que también se juega 3,3 en la primera ronda, ¿cuáles sería los equilibrios de Nash en subjuegos perfectos?

El equilibrio en subjuegos perfectos exige que se juegue un equilibrio de Nash en la última etapa. Por lo tanto, existen dos posibilidades. La primera es jugar (2,2) en la segunda etapa, sino se observa (3,3) en la primera etapa. En este caso, el juego se resume a:

Jugador A \ Jugador B	Izquierda	Centro	Derecha
Alto	6,6	2,5	2,2
Centro	5,2	4,4	2,4
Bajo	2,2	5,2	3,3

Este juego tiene tres equilibrios de Nash en subjuegos perfectos (6,6); (4,4); (3,3).
La otra opción es jugar (1,1) en la segunda etapa sino se observa (3,3) en la primera etapa, en cuyo caso el juego se resume a:

Jugador A \ Jugador B	Izquierda	Centro	Derecha
Alto	6,6	1,4	1,1
Centro	4,1	3,3	1,3
Bajo	1,1	3,1	2,2

Y en este caso, tenemos los mismos equilibrios de Nash en subjuegos perfectos. Por lo tanto, los equilibrios de Nash en subjuegos perfectos son jugar (3,3) en la segunda etapa solo si se juega (3,3) en la primera. De otra forma sería jugar (2,2) o (1,1) en la segunda etapa si se juega (2,2) o (1,1) en la primera etapa.

5. Dos jóvenes muy machos juegan a “La Gallina” corriendo en sus respectivos automóviles a toda velocidad, uno contra el otro, por una carretera de un solo carril. El primero en virar el volante será tildado de gallina y perderá su auto, mientras que el que no se desvía ganará el auto de su oponente y la admiración de su grupo de amigos. Por supuesto que, si ninguno de los dos vira, ambos morirán en el choque consecuentemente. Los resultados del juego de la gallina aparecen en la tabla siguiente.

	No Gallina	Gallina
No Gallina	-3,-3	2,0
Gallina	0,2	1,1

a. Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras.

Existen dos equilibrios de Nash (Gallina, No Gallina) y (No Gallina, Gallina)

b. Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias mixtas.

$$-3q+2(1-q)=(1-q)$$
$$(1-q)=3q$$
$$q=1/4$$

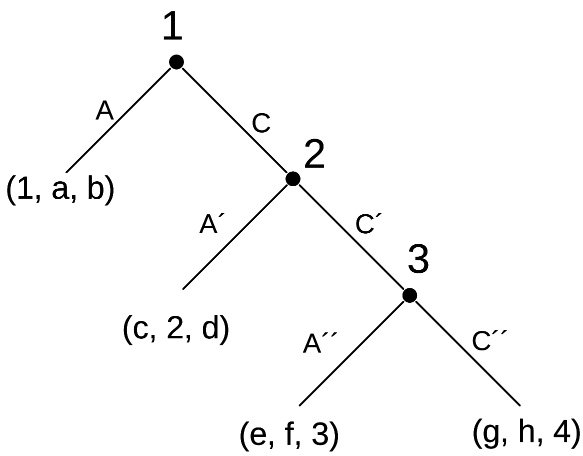
$$-3p+2(1-p)=(1-p)$$
$$(1-p)=3p$$
$$p=1/4$$

c. ¿Qué probabilidad existe de que los dos jóvenes mueran en el accidente?

Existe una probabilidad de 6,25% de que ambos jueguen “No Gallina” y mueran en el accidente.

6. Juego en etapas con información incompleta

Tres individuos se enfrascan en un juego secuencial, en donde solamente un individuo juega en cada etapa sucesiva del juego. Cada vez que juega, un individuo debe decidir si el juego continúa en el siguiente periodo o acaba el juego en el presente periodo. Si el juego llega al tercer periodo, el juego acaba. El árbol del juego se dibuja a continuación:



a. Suponiendo una tasa de descuento de 0, o sea, un factor de descuento de 1, para qué valores de a, b, c, d, e, f, g y h:

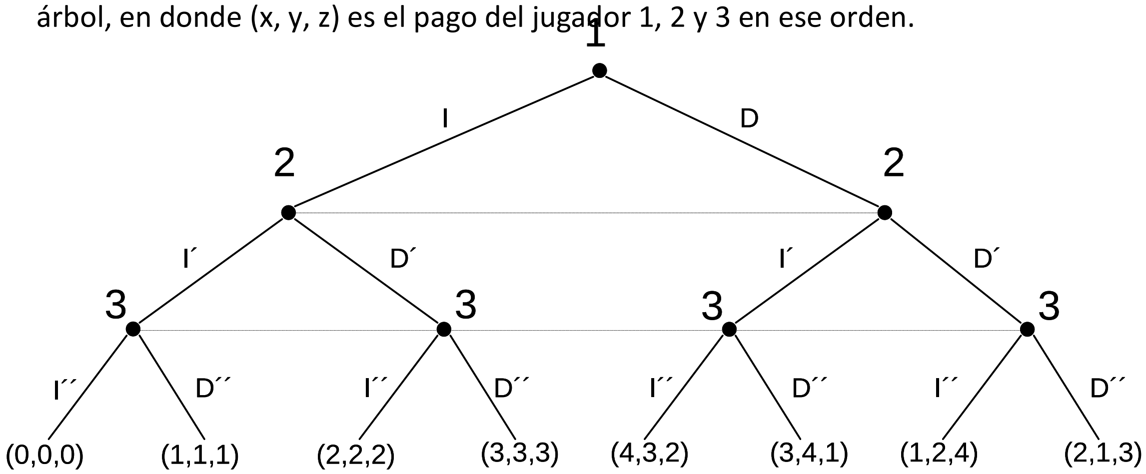
i. El juego acaba en la primera etapa. **Si h>2, g<1; Si h<2, c<1**
ii. El juego acaba en la segunda etapa. **c>1, h<2**
iii. El juego acaba en la tercera etapa. **g>1, h>2**

b. Suponiendo una tasa de descuento de ρ, o sea, un factor de descuento de 1/(1+ ρ), para qué valores de a, b, c, d, e, f, g y h:

i. El juego acaba en la primera etapa. **Si h>2(1+ ρ), g<(1+ ρ)^2**; Si **h<2(1+ ρ), c<(1+ ρ)**
ii. El juego acaba en la segunda etapa. **c>(1+ ρ), h<2(1+ ρ)**
iii. El juego acaba en la tercera etapa. **g>(1+ ρ)^2, h>2(1+ ρ)**

7. TRES JUGADORES ESCOGIENDO DOS OPCIONES

Tres jugadores tiene dos estrategias cada uno, escoger izquierda o derecha. Los pagos de realizar las diferentes estrategias estás representadas por el siguiente árbol, en donde (x, y, z) es el pago del jugador 1, 2 y 3 en ese orden.



Responda las siguientes preguntas asumiendo que no hay cooperación entre los jugadores.

a. **Encuentre los óptimos de Pareto.** (3,3,3); (4,3,2); (3,4,1); (1,2,4)

b. **Diga cuál es la mejor estrategia para el jugador 1 si él mueve primero y los otros dos lo hacen secuencialmente segundo y de manera simultánea entre ellos.**

	I´´	D´´
I´	0,0	1,1
D´	2,2	3,3

I: Si el jugador 1 mueve izquierda, los jugadores 2 y 3, jugarían de acuerdo con el cuadro de la izquierda y el resultado sería (3,3,3).

	I´´	D´´
I´	3,2	4,1
D´	2,4	1,3

D: Si el jugador 1 mueve derecha, los jugadores 2 y 3 jugarían de acuerdo con el cuadro de la izquierda y el resultado sería (4,3,2)

Por lo tanto, lo óptimo es que el jugador 1 si mueve primero elija D.

c. Diga cuál es la mejor estrategia para el jugador 2 si él mueve primero y los otros dos lo hacen secuencialmente segundo y de manera simultánea entre ellos.

	I´´	D´´
I	0,0	1,1
D	4,2	3,1

	I´´	D´´
I	2,2	3,3
D	1,4	2,3

I´: Si el jugador 2 mueve izquierda, los jugadores 1 y 3, jugarían de acuerdo con el cuadro de la izquierda y el resultado sería (4,3,2).

D´: Si el jugador 2 mueve derecha, los jugadores 1 y 3 jugarían de acuerdo con el cuadro de la izquierda y el resultado sería (3,3,3).

Por lo tanto, de elegir primero el jugador 2 es indiferente entre jugar I o D.

d. Diga cuál es la mejor estrategia para el jugador 3 si él mueve primero y los otros dos lo hacen secuencialmente segundo y de manera simultánea entre ellos.

	I´	D´
I	0,0	2,2
D	4,3	1,2

I´´: Si el jugador 3 mueve izquierda, los jugadores 1 y 2, jugarían de acuerdo con el cuadro de la izquierda y el resultado sería (4,3,2) o (2,2,2).

	I´	D´
I	1,1	3,3
D	3,4	2,1

D´´: Si el jugador 2 mueve derecha, los jugadores 1 y 3 jugarían de acuerdo con el cuadro de la izquierda y el resultado sería (3,3,3) o (3,4,1).

De jugar primero el jugador 3 y si asumimos que el individuo es neutral al riesgo, sería indiferente entre I o D.

e. Si los tres jugadores eligen simultáneamente entre ellos, encuentre los Equilibrios de Nash en estrategias puras.

(4,3,2); (3,3,3)

8. DEL DUOPOLIO A LA COMPETENCIA

Un mercado tiene una demanda representada por la función P = a – bQ. En este mercado participa una cantidad determinada de empresas, todas idénticas, y con un costo marginal igual al costo promedio y representado por un valor igual a c. Para cada uno de los siguientes incisos se le solicita encontrar: el precio de mercado, la cantidad de mercado, la cantidad producida por cada firma, las utilidades de cada firma.

a. ¿Qué sucede cuando hay 2 empresas?

$$\pi_1 = \left(a - b(q_1 + q_2)\right)q_1 - cq_1$$

$$\partial\pi_1 \big/ \partial q_1 = a - 2bq_1 - bq_2 - c = 0 \rightarrow q_1 = q_2 = \frac{a-c}{3b}$$

$$Q = \frac{2(a-c)}{3b}, P = a - b\frac{2(a-c)}{3b} = \frac{a+2c}{3}$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \left(\frac{a+2c}{3} - c\right)\left(\frac{a-c}{3b}\right) = \frac{(a-c)^2}{9b}$$

b. ¿Qué sucede cuando hay 3 empresas?

$$\pi_1 = \left(a - b(q_1 + q_2 + q_3)\right)q_1 - cq_1$$

$$\partial\pi_1 \big/ \partial q_1 = a - 2bq_1 - bq_2 - bq_3 - c = 0 \rightarrow q_1 = q_2 = q_3 = \frac{a-c}{4b}$$

$$Q = \frac{3(a-c)}{4b}, P = a - b\frac{3(a-c)}{4b} = \frac{a+3c}{4}$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \left(\frac{a+3c}{4} - c\right)\left(\frac{a-c}{4b}\right) = \frac{(a-c)^2}{16b}$$

c. ¿Qué sucede cuando hay n empresas y n tiende a infinito?

$$\pi_1 = \left(a - b(q_1 + \sum_{i=2}^{n} q_i)\right)q_1 - cq_1$$

$$\partial\pi_1 \big/ \partial q_1 = a - 2bq_1 - b\sum_{i=2}^{n} q_i - c = 0 \rightarrow q_1 = q_2 = \cdots = q_n = \frac{a-c}{(n+1)b}$$

$$Q = \frac{n(a-c)}{(n+1)b}, P = a - b\frac{n(a-c)}{(n+1)b} = \frac{a+nc}{(n+1)}$$

$$\pi_1 = \pi_2 = ... = \pi_n = \left(\frac{a+nc}{(n+1)} - c\right)\left(\frac{a-c}{(n+1)b}\right) = \frac{(a-c)^2}{(n+1)^2 b}$$

$$Si\ n \rightarrow \infty, q_n \rightarrow 0, Q \rightarrow \frac{(a-c)}{b}, P = c, \pi_n = 0$$

9. EL JUEGO DE LA GALLINA

Dos jóvenes muy machos juegan a "La Gallina" corriendo en sus respectivos automóviles a toda velocidad, uno contra el otro, por una carretera de un solo carril. El primero en virar el volante será tildado de gallina, mientras que el que no se desvía ganará la admiración de su grupo de amigos. Por supuesto que, si ninguno de los dos vira, ambos morirán en el choque consecuentemente. Los resultados del juego de la gallina aparecen en la tabla siguiente.

	Gallina	No gallina
Gallina	2,2	1,3
No gallina	3,1	0,0

a. Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas.

Los equilibrios en estrategias puras son jugar (G, NG) o jugar (NG,G). La estrategia mixta consiste en jugar G y NG con probabilidad ½ para cada individuo.

b. ¿La amenaza de no acobardarse de uno de los dos resulta creíble?

Es tanto creíble como no creíble, de hecho existe un 50% de probabilidades de que sea cierta.

c. ¿La capacidad de un jugador para comprometerse de manera firme a una estrategia de no gallina (por ejemplo, deshaciéndose del volante) sería deseable para ese jugador?

Es deseable desde el punto de vista de que la otra parte interprete que el jugador que tira el volante por la ventana definitivamente no se va a acobardar, por lo que la estrategia del que no tira el volante debe ser acobardarse.

d. La película "A Beautiful Mind" del año 2002, nos presenta a John Nash, que tiene la brillante idea, cuando está en un bar con varios otros estudiantes discutiendo si debe abordar a una atractiva rubia. La película plantea un relato muy enredado de lo que está pensando Nash, pero una interpretación es que él considera que abordar a la rubia (más que a las otras mujeres presentes) es como un juego de "La Gallina". ¿Cómo podría usted interpretar la situación de esta manera?¡Esto podría ser el fondo de lo que Nash estaba pensando?

Lo que estaba pensando era que nadie va a abordar a la rubia porque teme que sea rechazado, pero al mismo tiempo, si la rubia está interesada tampoco va a abordar a un muchacho por la misma razón. O sea, es como el juego de la gallina, en donde ambos equilibrios terminan sin coincidencia de planes. El resultado es que las rubias terminan obteniendo menos citas.

10. EL EQUILIBRIO DE NASH

De la matriz de pagos que se representa abajo, indique:

	I	D
A	a,b	c,d
B	e,f	g,h

a. **¿Qué relaciones (mayor, igual, menor o ninguna) deben tener a, b, c, d, e, f, g y h para que (A, I) sea un equilibrio de Nash.**

   b>d, a>e

b. **¿Qué relaciones (mayor, igual, menor o ninguna) deben tener a, b, c, d, e, f, g y h para que (B, D) sea un equilibrio de Nash.**

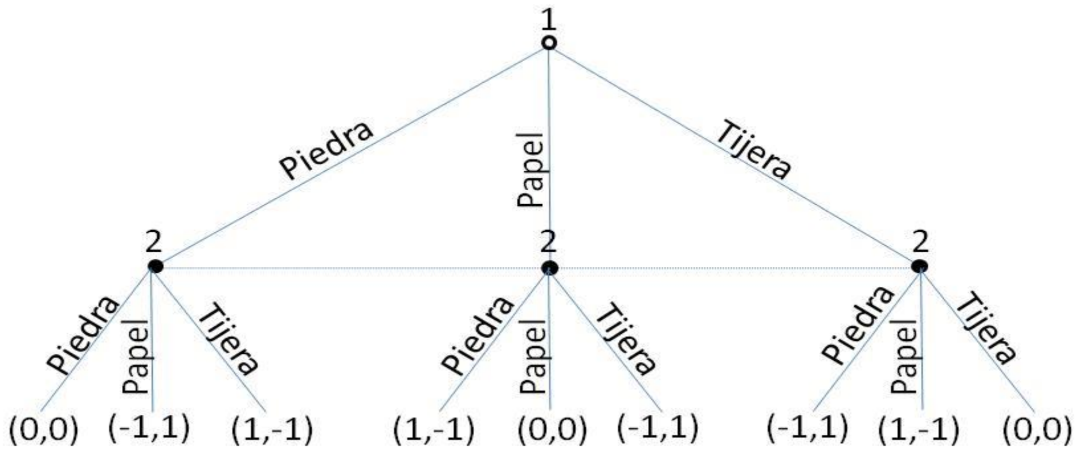
   h>f, g>c

c. **¿Qué relaciones (mayor, igual, menor o ninguna) deben tener a, b, c, d, e, f, g y h para que exista un equilibrio en estrategias mixtas. Encuentre ese equilibrio de Nash en estrategias mixtas.**

   Sea q la probabilidad de que el jugador 2 juegue I y p la probabilidad de que el jugador 1 juegue A. Entonces $q = \frac{g-c}{g-c+a-e}, p = \frac{h-f}{h-f+b-d};$ como las estrategias mixtas existen cuando p y q están entre cero y uno, entonces esto ocurre cuando g>c y a>e; h>f y b>d.

11. Considere el juego Piedra, Papel, Tijera y desarrolle los siguientes puntos.

a. Represente el juego en su forma extensiva (árbol).



b. Desarrolle el juego en su forma normal (matriz).

	Piedra	Papel	Tijera
Piedra	0,0	-1,1	1,-1
Papel	1,-1	0,0	-1,1
Tijera	-1,1	1,-1	0,0

c. Si los tiene, encuentre los equilibrios en estrategias puras.

No existen equilibrios en estrategias puras

d. Si los tiene, encuentre los equilibrios en estrategias mixtas.

		q_1 Piedra	q_2 Papel	$(1-q_1-q_2)$ Tijera
p_1	**Piedra**	0,0	-1,1	1,-1
p_2	**Papel**	1,-1	0,0	-1,1
$(1-p_1-p_2)$	**Tijera**	-1,1	1,-1	0,0

$$\pi_1^E(Piedra) = -1(q_2) + 1(1 - q_1 - q_2) \qquad (1)$$

$$\pi_1^E(Papel) = 1(q_1) + (-1)(1 - q_1 - q_2) \qquad (2)$$

$$\pi_1^E(Tijera) = -1(q_1) + 1(q_2) \qquad (3)$$

(1) = (3) → $-2q_2 + 1 - q_1 = -q_1 + q_2$ → $q_2 = 1/3$

(2) = (3) → $2q_1 - 1 + q_2 = -q_1 + q_2$ → $q_1 = 1/3$

Como el ejercicio es simétrico, entonces la probabilidad mixta es que cada jugador juega cada estrategia con probabilidad 1/3.

12. Suponga que tres empresas compiten en un mercado vendiendo el mismo bien y se enfrentan a una curva inversa de demanda de la industria representada por P = a – Q. Las tres firmas tienen el mismo costo marginal c y no hay costos fijos. La firma 1 es la líder y selecciona el nivel de producción q_1. Las firmas 2 y 3 son seguidoras y seleccionan los niveles de producto q_2 y q_3 simultáneamente después de observar el nivel de producto q_1 (o sea, son simples seguidores de Cournot). $Q = q_1 + q_2 + q_3$.

a. Encuentre las funciones de reacción de las empresas seguidoras.

$$\pi_2 = [a - (q_1 + q_2 + q_3) - c]q_2; \qquad \pi_3 = [a - (q_1 + q_2 + q_3) - c]q_3$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = a - q_1 - 2q_2 - q_3 - c = 0; \qquad \frac{\partial \pi_3}{\partial q_3} = a - q_1 - q_2 - 2q_3 - c = 0$$

$$q_2 = \frac{a - q_1 - q_3 - c}{2}; \qquad q_3 = \frac{a - q_1 - q_2 - c}{2}$$

b. Encuentre los niveles óptimos de producción de las tres empresas.

$$q_2 = q_3 \rightarrow q_2 = \frac{a - q_1 - q_2 - c}{2} \rightarrow q_2 = q_3 = \frac{a - q_1 - c}{3}$$

$$\pi_1 = [a - (q_1 + q_2 + q_3) - c]q_1 = \left[a - \left(q_1 + \frac{a - q_1 - c}{3} + \frac{a - q_1 - c}{3}\right) - c\right] q_1.$$

$$\pi_1 = \frac{1}{3}[a - q_1 - c]q_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \frac{1}{3}(a - 2q_1 - c) = 0$$

$$q_1 = \frac{a - c}{2}; \qquad q_2 = q_3 = \frac{a - \frac{a-c}{2} - c}{3} = \frac{a - c}{6}$$

c. Encuentre el nivel de precios óptimo.

$$P = a - \frac{a - c}{2} - \frac{a - c}{6} - \frac{a - c}{6} = a - \frac{5(a - c)}{6} = \frac{a + 5c}{6}$$

d. Encuentre los niveles de utilidades de las empresas.

$$\pi_1 = \frac{1}{3}\left[a - \frac{a - c}{2} - c\right]\frac{a - c}{2} = \frac{1}{3}\left[\frac{a - c}{2}\right]^2$$

$$\pi_2 = \pi_3 = \left[\frac{a + 5c}{6} - c\right]\frac{a - c}{6} = \left[\frac{a - c}{6}\right]^2$$

Ahora asuma que en lugar de 2 empresas seguidoras, existen n empresas seguidoras y solamente la empresa 1 que es líder.

e. Encuentre las funciones de reacción de las empresas seguidoras. Responda a las mismas preguntas a-d e indique qué sucede en cada caso conforme n tiende a infinito. ¿Cómo se compara esto con el resultado de competencia?

e.a.

$$\pi_i = \left[a - \left(\mathrm{q}_1 + \sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{n}} \mathrm{q}_\mathrm{i}\right) - \mathrm{c}\right]\mathrm{q}_\mathrm{i}$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial \mathrm{q}_\mathrm{i}} = a - \mathrm{q}_1 - 2\mathrm{q}_\mathrm{i} - \sum_{\mathrm{j}=2,\mathrm{i}\neq\mathrm{j}}^{\mathrm{n}+1} \mathrm{q}_\mathrm{j} \quad - \mathrm{c} = 0$$

$$\mathrm{q}_2 = \mathrm{q}_3 = \cdots = \mathrm{q}_\mathrm{i} = \cdots = \mathrm{q}_{\mathrm{n}+1}$$

$$a - \mathrm{q}_1 - 2\mathrm{q}_\mathrm{i} - (\mathrm{n}-1)\mathrm{q}_\mathrm{i} - \mathrm{c} = 0$$

$$a - \mathrm{q}_1 - 2\mathrm{q}_\mathrm{i} - (\mathrm{n}-1)\mathrm{q}_\mathrm{i} - \mathrm{c} = 0$$

$$\mathrm{q}_\mathrm{i} = \frac{\mathrm{a} - \mathrm{q}_1 - \mathrm{c}}{\mathrm{n}+1}$$

e.b.

$$\pi_1 = [a - (\mathrm{q}_1 + \mathrm{n}\mathrm{q}_\mathrm{i}) - \mathrm{c}]\mathrm{q}_1 = \left[a - \left(\mathrm{q}_1 + \mathrm{n}\frac{a-\mathrm{q}_1-\mathrm{c}}{n+1}\right) - \mathrm{c}\right]\mathrm{q}_1.$$

$$\pi_1 = \frac{1}{n+1}[a - \mathrm{q}_1 - \mathrm{c}]\mathrm{q}_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial \mathrm{q}_1} = \frac{1}{n+1}(a - 2\mathrm{q}_1 - \mathrm{c}) = 0$$

$$\mathrm{q}_1 = \frac{a-\mathrm{c}}{2}; \qquad \mathrm{q}_\mathrm{i} = \frac{a - \frac{a-\mathrm{c}}{2} - \mathrm{c}}{n+1} = \frac{a-c}{2(n+1)}$$

e.c.

$$P = a - \frac{a-\mathrm{c}}{2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{a-\mathrm{c}}{2} = a - \frac{(2n+1)(a-c)}{2(n+1)}$$

e.d.

$$\pi_1 = \frac{1}{n+1}\left[a - \frac{a-\mathrm{c}}{2} - \mathrm{c}\right]\frac{a-\mathrm{c}}{2} = \frac{1}{n+1}\left[\frac{a-\mathrm{c}}{2}\right]^2$$

$$\pi_i = \left[a - \frac{(2n+1)(a-c)}{2(n+1)} - \mathrm{c}\right]\frac{a-c}{2(n+1)} = \left[\frac{a-c}{2(n+1)}\right]^2$$

Conforme $n \to \infty$; $q_i \to 0$, $q_1 = \frac{a-c}{2}$; $P \to c$; $Q \to a-c$; $\pi_1 \to 0$; $\pi_i \to 0$

13. Dos jugadores se enfrentan al siguiente juego el cual se repite un número indeterminado de veces (o sea, equivalente a infinito).

	C	D
C	**1,1**	**2,0**
D	**0,2**	**3,3**

Corrobore si las siguientes estrategias son Equilibrios de Nash en subjuegos perfectos.

a. Cada jugador siempre juega C.

Esta estrategia sí es un ENSP, porque el desviarse le implica pasar de ganar 1 a 0 en todos los periodos.

b. Cada jugador siempre juega D.

Esta estrategia sí es un ENSP, porque el desviarse le implica pasar de ganar 3 a 1 en todos los periodos.

c. Los jugadores está jugando CC, si uno de ellos se desvía un periodo, jugarán DD en el siguiente periodo por siempre.

Un jugador que no se desvía obtiene $\frac{1}{1-\delta}$

Un jugador que se desvía obtiene $0 + 3\delta + 3\delta^2 + \cdots = 3\frac{\delta}{1-\delta}$

$$3\frac{\delta}{1-\delta} > \frac{1}{1-\delta} \rightarrow \delta > \frac{1}{3}$$

Esta estrategia es un ENSP cuando $\delta > \frac{1}{3}$.

d. Los jugadores está jugando DD, si uno de ellos se desvía un periodo, jugarán CC en el siguiente periodo por siempre.

Esta estrategia no puede ser un ENSP porque al desviarse obtiene menos en todos los escenarios.

14. TEORIA DE JUEGOS

A un jugador de fútbol se le ha concedido el lanzamiento de un penal. Para facilitar el ejercicio asumimos que el jugador solo tiene dos opciones elegir entre lanzar el penal al lado derecho del portero o al lado izquierdo. El portero no tiene forma de determinar a dónde va a patear la bola el jugador y se tiene que "jugar" una esquina. Si el portero adivina hacia que esquina va el balón siempre detendrá el penal. El tirador tiene muy buen disparo del balón a la derecha, pero no tan bueno a la izquierda. Si lanza hacia el lado derecho y el portero se lanza a la izquierda, siempre anotará el gol, pero si lanza al lado izquierdo y el portero se lanza a la derecha, entonces solo meterá el gol la mitad de las veces.

i. **Dibuje el juego en forma reducida (matriz) indicando las dos estrategias de los dos jugadores y los pagos derivadas de las mismas.**

		Tirador	
		Izquierda	**Derecha**
Portero	**Izquierda**	**1,0**	**0,1**
	Derecha	**0.5,0.5**	**1,0**

ii. **Si los hay, encuentre los equilibrios en estrategias puras e interprételos**

No hay equilibrios en estrategias puras

.

iii. **Si la hay, encuentre el equilibrio en estrategias mixtas e interprétela.**

$$\pi_T(1) + (1 - \pi_T)(0) = \pi_T\left(\frac{1}{2}\right) + (1 - \pi_T)(1)$$

$$\pi_T = \frac{2}{3}$$

$$\pi_P(0) + (1 - \pi_P)\left(\frac{1}{2}\right) = \pi_P(1) + (1 - \pi_P)(0)$$

$$\pi_p = \frac{1}{3}$$

El tirador lanza a la izquierda con probabilidad 2/3 y el portero se lanza a la izquierda con probabilidad 1/3.

Ahora, supongamos que si el jugador tira a la izquierda y el portero se lanza a la derecha, el jugador anota el gol con probabilidad igual a p en lugar del ½ supuesto al inicio del ejercicio. Queremos examinar cómo varían las probabilidades de equilibrio a medida que varía p.

		Tirador	
		Izquierda	**Derecha**
Portero	**Izquierda**	**1,0**	**0,1**
	Derecha	**(1-p), p**	**1,0**

iv. **Si el portero salta a la izquierda con probabilidad π_p y el tirador lanza a la derecha, ¿cuál es su probabilidad de marcar el gol?**

$$(1)\pi_p + (0)(1 - \pi_p)$$

v. **Si el portero salta a la izquierda con probabilidad π_p y el tirador lanza a la izquierda, ¿cuál es su probabilidad de marcar el gol?**

$$(P)(1 - \pi_p) + (0)\pi_p$$

vi. **Determine la probabilidad π_p, que permite que lanzar a la izquierda y lanzar a la derecha representen la misma probabilidad para el tirador de meter el gol (La respuesta estará en función de p).**

$$\pi_p = P(1 - \pi_p)$$

$$\pi_p = \frac{P}{1 + P}$$

vii. **Si el tirador lanza a la izquierda con probabilidad π_T y el portero salta a la izquierda, ¿cuál es la probabilidad de que NO se marque el gol?**

$$(1)\pi_T + (0)(1 - \pi_T)$$

viii. **Si el tirador lanza a la izquierda con probabilidad π_T y el portero salta a la derecha, ¿cuál es la probabilidad de que NO se marque el gol?**

$$(1-P)\pi_T + (1)(1-\pi_T)$$

ix. **Determine la probabilidad π_T, que permite igualar los resultados del portero tanto si salta a la derecha como si salta a la izquierda.**

$$\pi_T = (1-P)\pi_T + (1)(1-\pi_T)$$

$$(1+P)\pi_T = 1$$

$$\pi_T = \frac{1}{(1+P)}$$

x. **La variable p representa el lado bueno del tirador si lanza la pelota a la izquierda cuando ésta no está defendida. A medida que p aumenta, ¿qué sucede con la probabilidad de que el tirador lance a la izquierda?**

Paradógicamente disminuye $\frac{d\pi_T}{dP} < 0$

15. JUEGOS REPETITIVOS

Dos personas se involucran en el siguiente juego, que se repite de forma infinita y en donde cada persona tiene la posibilidad de elegir entre dos estrategias: A y B. Asuma que ambas personas deben elegir las estrategias de forma simultánea y que los pagos en periodos subsecuentes se descuentan por un factor δ = 1/(1+r). Se plantea la siguiente regla de juego: Las personas deciden jugar las estrategias (A, A) y si existe un desvío, se juega la estrategia (B, B) durante X periodos como castigo. Responda las siguientes preguntas:

	A	B
A	**1,1**	**0,2**
B	**2,0**	**0,0**

a. Si X=1, ¿para qué valor máximo de δ es esta estrategia un Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos?

$$\frac{1}{1-\delta} \leq \frac{2}{1-\delta^2} \quad \Rightarrow \delta \leq 1. \, O\ sea, siempre\ es\ un\ ENPS$$

b. Si X=2, ¿para qué valor máximo de δ es esta estrategia un Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos?

$$\frac{1}{1-\delta} \leq \frac{2}{1-\delta^3} \quad \Rightarrow \delta > 1\ lo\ cual\ es\ imposible\ y\ \delta \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) = \ 0.618034$$

c. Asuma que δ=0.50866. ¿Cuál es el valor máximo de X (la cantidad máxima de periodos de castigo) que debe existir para que esta estrategia sea un Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos?

$$\frac{1}{1-\delta} \leq \frac{2}{1-\delta^{X+1}}, \delta = 0.50866 \Rightarrow 1 - 0.50866^{X+1} \leq 0.98268$$
$$\Rightarrow 0.01732 \leq 0.50866^{X+1} \Rightarrow ln0.01732 \leq (x+1)ln0.50866$$
$$\Rightarrow (x+1) \leq 6 \Rightarrow x \leq 5$$

16. TEORÍA DE JUEGOS

Para el juego que está representado abajo indique:

	X	Y
X	A, B	0,0
Y	0, 0	C, D

a. ¿Es posible que este juego tenga un único equilibrio de Nash en estrategias puras? Si es así, encuentre todos los posibles equilibrios de Nash que pueden existir dependiendo de los valores de A, B, C y D.

Caso 1: XX es el único E.N. si A>0, C<0, B>0, D<0
Caso 2: YY es el único E.N. si A<0, C>0, B<0, D>0
Caso 3: XY es el único E.N. si A>0, C<0, B<0, D>0
Caso 4: YX es el único E.N. si A<0, C>0, B<0, D>0

b. ¿Es posible que este juego tenga dos equilibrios en estrategias puras? Si es así, encuentre todas las posibles parejas de equilibrios de Nash, asignando rangos de valores para A, B, C y D.

Caso 1: XX e YY son E.N. si A>0, B>0, C>0, D>0.

Caso 2: XY e YX son E.N. si A<0, B<0, C<0, D<0.

c. ¿Es posible para este juego no tener un equilibrio de Nash en estrategias puras? Si es así, encuentre todos los posibles equilibrios de Nash en estrategias mixtas que no involucre la existencia de estrategias puras, asignando rangos de valores para A, B, C y D.

Caso 1: B>0, A<0, D>0, C<0
Caso 2: B<0, C>0, D<0, A>0

$A * q = C * (1 - q) \rightarrow q = C/(A+C)$
$B * p = D * (1 - p) \rightarrow p = D/(B+D)$

d. Además de las que definió en el punto anterior, encuentre todos los posibles equilibrios de Nash en estrategias mixtas que pueden ocurrir en este juego.

Caso 1: A>0, B>0, C>0, D>0
Caso 2: A<0, B<0, C<0, D<0

El equilibrio mixto es igual al encontrado en c.

e. Si el jugador uno juega X con probabilidad ¾ y el jugador 2 juega esa misma estrategia con probabilidad ¼, ¿qué relaciones deben existir entre A, B, C y D?

$p = 3/4 = D/(B+D)$; $(1-p) = 1/4 = B/(B+D) \rightarrow D/B=3 \rightarrow D=3B$
$q = 1/4 = C/(A+C)$; $(1-q) = 3/4 = A/(A+C) \rightarrow A/C=3 \rightarrow A=3C$

17. EQULIBRIO DE NASH CONTINUO

Considere el siguiente juego de negociación en la que dos individuos están pensando en emprender un negocio que les dará una ganancia de \$100, pero antes ellos deben ponerse de acuerdo en cómo dividir ese dinero entre ellos. La negociación funciona de la siguiente manera: Cada uno de los dos individuos propone simultáneamente el monto que se va a dejar de los \$100. Si la suma de los montos de los dos individuos supera los \$100, entonces ellos fallan en la negociación, no emprenden el negocio y cada uno obtiene nada. Si la suma de los montos es menor o igual a los \$100, ellos realizan el proyecto, cada uno obtiene el monto que propuso y cualquier suma restante se dona para ayudar a solventar el descalabro financiero de la CCSS. Encuentre los Equilibrios de Nash en estrategias puras de este juego.

18. JUEGOS REPETITIVOS

Dos personas se involucran en el siguiente juego, en donde cada persona tiene la posibilidad de elegir entre tres estrategias: C, D y E. Asuma que ambas personas deben elegir las estrategias de forma simultánea, salvo que se indique lo contrario. Responda las siguientes preguntas:

	C	**D**	**E**
C	**5,3**	**5,5**	**3,4**
D	**4,10**	**9,9**	**4,11**
E	**3,3**	**11,4**	**5,5**

a. Suponga que este juego es repetido un número finito de veces y que el factor de descuento δ es igual a la unidad. Encuentre todos los Equilibrios de Nash en Subjuegos Perfectos.
b. Suponga que este juego se repite un número infinito de veces y que el factor de descuento δ es menor a la unidad. Para qué valores de δ , es la estrategia cooperativa (D,D) un ENSP?

19. ¿ES MEJOR LA COMPETENCIA IMPERFECTA QUE LA NO COMPETENCIA? (30 PUNTOS)

La demanda de mercado del bien A está dada por $Q = 1 – P$.

a. Si en el mercado existe un monopolio (firma 1) con un costo marginal constante igual a 0, ¿cuál será el bienestar total de la sociedad? (muéstrelo en un gráfico).
b. Si otra firma (firma 2) con un costo marginal de c, $0 < c < ½$, entra en este mercado, encuentre la cantidad de equilibrio si compiten como duopolistas de Cournot. Exprese el beneficio total de la sociedad como una función de c y muestre sus resultados en un diagrama.
c. ¿Qué es mejor para la sociedad en este caso: tener un monopolio o tener un duopolio? Explique por qué.

20. TEORÍA DE JUEGOS

Para el juego que está representado abajo encuentre:

a. Todas los posibles Equilibrios de Nash en estrategias puras.
b. Todos los posibles Equilibrios de Nash en estrategias mixtas, de conformidad con los equilibrios encontrados en el punto a.

	Izquierda	Centro	Derecha
Arriba	A, B	C, D	E,F
Medio	E,F	A, B	C, D
Bajo	C, D	E,F	A, B

21. DUOPOLIO DE BERTRAND

A. Suponga que dos firmas, que producen productos diferenciados, compiten en precios. La curva de demanda que enfrenta cada firma está dada por:

$$q_i \equiv D_i(p_i, p_j) = 1 - bp_i + dp_j; \qquad i = 1,2; \qquad 0 < d < b$$

Cada firma tiene un costo marginal constante igual a c.

a. Derive la curva de reacción de cada firma.
b. Encuentre el equilibrio de Bertrand y la ganancia para cada firma.

B. Continuando con el ejemplo anterior, ahora suponga por simplicidad que d=1, b=2, c=0. Ahora suponga que la firma 1 puede establecer su precio antes que la firma 2, con lo cual, la firma 1 es un "líder de Stackelberg en precios".
a. Encuentre los precios de equilibrio de este juego de liderazgo.
b. ¿Existe alguna ventaja de ser el líder en este mercado?

22. DUOPOLIO CON PRODUCTOS NO IDENTICOS - DECISION DE Q VS. P

A. Dos firmas producen bienes similares pero no idénticos. Como un supuesto extremo para una máxima simplificación, suponga que los costos de producción son cero para ambas firmas. Y suponga que las funciones de demanda son:

$P_1 = A - q_1 - sq_2$ y $\qquad P_2 = A - q_2 - sq_1$

Donde s ($0 \leq s \leq 1$) es un "coeficiente de similaridad" entre los productos de las dos firmas.

a. Si la <u>cantidad</u> de producto es la variable de decisión, encuentre la ecuación de las curvas de reacción RC1 y RC2.
b. Encuentre las cantidades de equilibrio y los respectivos precios.
c. ¿Cómo P_1, q_1, P_2 y q_2 cambian conforme s varía? Interprete el resultado

B. Suponga ahora que la variable de decisión es el precio y no la cantidad.
a. Encuentre las curvas de reacción.
b. ¿Cuáles son los precios y las cantidades de equilibrio?
c. ¿Qué sucede con los precios y las cantidades de equilibrio conforme s varía? Explique brevemente.

C. Ahora suponga que existen n empresas, todas con la función de demanda:

$$P_i = A - q_i - s\sum_{j\neq i}^{n} q_j$$

Vuelva a contestar las preguntas A.1, A.2 y A.3 para este caso e indique cómo este caso se comprara con competencia.

D. Vuelva a contestar las preguntas B.1, B.2 y B.3 para este caso e indique cómo este caso se comprara con competencia.

23. TEORÍA DE JUEGOS CON INFORMACIÓN REZAGADA

Dos personas se involucran en el siguiente juego, en donde cada persona tiene la posibilidad de elegir entre tres estrategias: C, D y E. Asuma que ambas personas deben elegir las estrategias de forma simultánea, salvo que se indique lo contrario. Responda las siguientes preguntas:

	C	D	E
C	4,4	0,5	0,0
D	5,0	1,1	0,0
E	0,0	0,0	3,3

a. Asuma que los individuos deciden jugar una única vez,
   i. Encuentre los Equilibrios de Nash en estrategias puras.
   ii. Encuentre los Equilibrios de Nash en estrategias mixtas.
   iii. Si fuera permitido: ¿Existe alguna ventaja de jugar primero?

b. Ahora asuma que este juego se repite tres veces y se observa el resultado de cada etapa antes de jugar la siguiente. Diseñe una estrategia que sea Equilibrio de Nash Perfecta en Subjuegos en donde se juegue en una etapa previa a la final un conjunto de estrategias que no sea Equilibrio de Nash en la última etapa. Puede asumir que el factor de descuento es igual a 1.

c. Ahora asuma que este juego se repite de forma infinita, pero en el periodo t, la persona no conoce la estrategia que su contraparte ha escogido en el periodo t-n, pero sí conoce la estrategia escogida por su rival en los periodos t-(n-1), t-(n-2), t-(n-3), ... Esto significa que si n=0, se tiene el caso común, en donde lo único que no se conoce es lo que el jugador elige en la etapa que se está jugando. Pero si n=1, los jugadores no saben en la presente etapa, lo que han jugado en la etapa previa, pero sí en las anteriores a esta. Así las cosas, asumiendo un factor de descuente menor a 1, indique para qué valores de ese factor de descuento es la estrategia (C, C) un Equilibrio de Nash Perfecta en Subjuegos. Para facilitar las respuestas, asuma que cualquier desviación a la estrategia planteada implica jugar el dilema del prisionero.

24. JUEGO REPETIDO UN INFINITO NUMERO DE VECES

Compruebe si las siguientes estrategias son Equilibrios de Nash Perfecta en Subjuegos, en un juego que se repite un infinito número de veces donde cada etapa del juego es el siguiente dilema del prisionero:

	C	D
C	**5,5**	**0,6**
D	**6,0**	**1,1**

a. Cada individuo siempre juega C.

Si fuera rentable desviarse, el individuo pasaría de ganar 5 a ganar 6, pero después de ello, ambos individuos jugarían 1 por siempre. Así la ganancia de no desviarse (o sea, jugar CC siempre) sería $\frac{5}{1-\delta}$, mientras que la ganancia de desviarse sería $6+\frac{\delta}{1-\delta}$. Por lo tanto, CC es ENSP cuando $\frac{5}{1-\delta} > 6+\frac{\delta}{1-\delta} \rightarrow 5 > 6-6\delta+\delta \rightarrow \delta > \frac{1}{5}$

b. Cada individuo siempre juega D.

Cualquier equilibrio de Nash en juegos repetitivos es ENSP, por definición. En este caso, es claro que desviarse de la estrategia implica dejar de ganar 1 para ganar 0.

c. El individuo 1 alterna entre C y D, mientras que el individuo 2 siempre juega C. Si cualquier individuo se desvía de este escenario, entonces cada uno juega D por siempre.

El individuo A obtiene $\frac{5+6\delta}{1-\delta^2}$, si se desvía obtiene $6+\frac{\delta}{1-\delta}$. Así que A se desvía cuando $\frac{5+6\delta}{1-\delta^2} < 6+\frac{\delta}{1-\delta}$, o sea, cuando $5\delta^2+5\delta-1<0$, o $\delta > .039685$.

Sin embargo, el individuo B se desvía cuando $\frac{5}{1-\delta^2} < \frac{1}{1-\delta}$, lo cual nunca ocurre. Por lo tanto, esta estrategia no es un ENSP.

d. Cada individuo juega C y si alguno se desvía, entonces el otro juega C, mientras que el que se desvió juega D por siempre.

En esta estrategia es un ENSP cuando un individuo se desvía si $\frac{5}{1-\delta} < 6 \rightarrow \delta < \frac{1}{6}$.

e. Existen 4 modos de jugar: CC, P1, P2, y DD. Se empieza jugando con el modo CC, donde cada individuo juega C. Si un individuo i juega D en la forma CC mientras que el otro juega C, entonces se pasan al modo Pi. En el modo Pi, el individuo i juega C mientras que el otro juega D. Una vez que se está en el modo Pi, se mantendrán en el modo Pi hasta que el individuo i juegue C dos veces seguidas, punto en el cual, los individuos vuelven al modo CC. Si ambos individuos juegan D en el modo CC, entonces se pasan al modo DD y se mantienen allí por siempre. En el modo DD, cada individuo juega D.

El individuo que se desvía obtiene 6 cada 3 periodos (6, 0, 0, 6, 0, 0, 6, …), o sea $\frac{6}{1-\delta^3}$, esto tendríamos que compararlo con no desviarse que lleva a obtener $\frac{5}{1-\delta}$. Por lo tanto, $\frac{6}{1-\delta^3} > \frac{5}{1-\delta}$ cuando $\delta^2 + \delta - \frac{1}{5} < 0 \rightarrow \delta < 0.17$. Y al desviarse, ambos individuos terminaría en el modo DD y la estrategia sería un ENSP.

25. COURNOT CON COSTOS CRECIENTES

Un mercado tiene una demanda representada por la función Q = a – bP, donde P es el precio de mercado y Q la cantidad agregada producida por todas las empresas. En este mercado participa una cantidad determinada de empresas, todas idénticas, y con un costo total igual al cuadrado del nivel de producto (q_i^2). Para cada uno de los siguientes incisos se le solicita encontrar: el precio de mercado, la cantidad de mercado, la cantidad producida por cada firma, las utilidades de cada firma.

a. ¿Qué sucede cuando hay 2 empresas y compiten al estilo Cournot?
b. ¿Qué sucede cuando hay 2 empresas y hay una que es líder al estilo de Stackelberg?
c. ¿Qué sucede cuando hay n empresas y compiten al estilo Cournot?
d. ¿Qué sucede cuando hay colusión entre todas las empresa? ¿Cómo debería distribuirse las cuotas de producción entre todas las empresas participantes y por qué?

26. TEORIA DE JUEGOS

a. El juego de decisión simultánea que a continuación se describe se juega dos veces, habiéndose observado el resultado de la primera etapa antes de que se empiece a jugar la segunda etapa. No hay descuento. La variable x es mayor que 4. ¿Para qué valores de x es la siguiente estrategia un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos?

	P_2	Q_2	R_2	S_2
P_1	2,2	x,0	-1,0	0,0
Q_1	0,x	4,4	-1,0	0,0
R_1	0,0	0,0	0,2	0,0
S_1	0,-1	0,-1	-1,-1	2,0

Jugar Q_i en la primera etapa. Si el resultado de la primera etapa es (Q_1,Q_2), jugar P_i en la segunda etapa. Si el resultado de la primera etapa es (y, Q_2), donde $y \neq Q_1$, jugar R_i en la segunda etapa. Si el resultado de la primera etapa es (Q_1,z), donde $z \neq Q_2$, jugar S_i en la segunda etapa. Si el resultado de la primera etapa es (y,z) donde $y \neq Q_1$, $z \neq Q_2$, jugar P_i en la segunda etapa.

b. Dos jugadores se enfrentan al siguiente juego el cual se repite un número indeterminado de veces (o sea, equivalente a infinito).

	C	D
C	1,1	2,0
D	0,2	x,x

Corrobore si las siguientes estrategias son Equilibrios de Nash perfecto en subjuegos:

Los jugadores están jugando CC, si uno de ellos se desvía un periodo, jugarán DD en el siguiente periodo por siempre.

27. TEORIA DE JUEGOS

Dos personas se involucran en el siguiente juego representado en su versión reducida por:

		Persona 2		
		Izquierda	Centro	Derecha
Persona 1	Arriba	α, 1-α	0,0	0, θ
	Centro	0,0	2,2	0,0
	Debajo	θ,1	0,0	1-α, α

a. Encuentre los posibles equilibrios de este juego en estrategias puras, como función de todos los valores posibles que pueden adoptar α y θ.
b. Encuentre los posibles equilibrios de este juego en estrategias mixtas, como función de todos los valores posibles que pueden adoptar α y θ. También calcule el pago esperado de jugar la estrategia mixta.

28. Duopolio con demanda de elasticidad unitaria

Dos competidores idénticos, con costos marginales constantes, compiten al estilo Cournot y se enfrentan a una demanda de elasticidad constante igual a 1 (o sea, del tipo $Q = k/P$).

a. Encuentre las funciones de reacción de ambas empresas.
b. Encuentre el nivel de precio y cantidades de equilibrio.

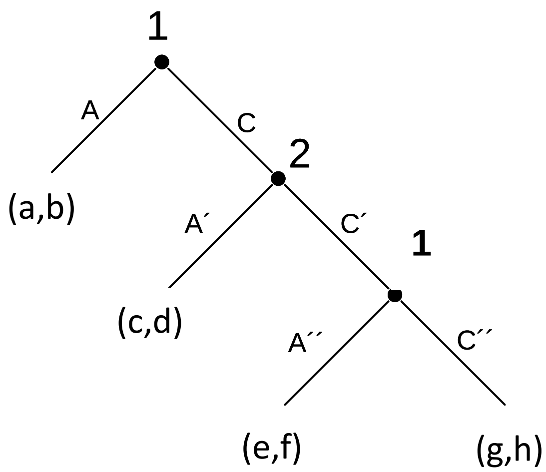
Ahora asuma que una de las dos empresas es líder al estilo Stackelberg. Entonces,

c. Represente la función de ganancias de la empresa líder.
d. Encuentre el nivel de precio y cantidades de equilibrio.

e. ¿Cuál sería el precio y las cantidades de equilibrio si ambas empresas se comportan como líderes?
f. Compare los resultados encontrados en b, d y e con los niveles que existirían si existiese competencia en este mercado y si existiese un monopolio.

29. JUEGO EN ETAPAS CON INFORMACION COMPLETA

Dos individuos se enfrascan en un juego secuencial, en donde solamente un individuo juega en cada etapa sucesiva del juego. Cada vez que juega, un individuo debe decidir si el juego continúa en el siguiente periodo o acaba el juego en el presente periodo. Si el juego llega al tercer periodo, el juego acaba. El árbol del juego se dibuja a continuación:



c. Suponiendo una tasa de descuento de 0, o sea, un factor de descuento de 1, para qué valores de a, b, c, d, e, f, g y h:
    i. El juego acaba en la primera etapa.
    ii. El juego acaba en la segunda etapa.
    iii. El juego acaba en la tercera etapa.
d. Suponiendo una tasa de descuento de ρ, o sea, un factor de descuento de 1/(1+ ρ), para qué valores de a, b, c, d, e, f, g y h:
    i. El juego acaba en la primera etapa.
    ii. El juego acaba en la segunda etapa.
    iii. El juego acaba en la tercera etapa.

30. TEORÍA DE JUEGOS

Considere la siguiente matriz de pagos e indique:

	I	D
A	a,b	c,d
B	e,f	g,h

a. ¿Qué relaciones (mayor, igual, menor o ninguna) deben tener a, b, c, d, e, f, g y h para que A sea una estrategia dominante para el individuo 1 y D sea una estrategia dominante para el individuo 2?
b. ¿Qué relaciones (mayor, igual, menor o ninguna) deben tener a, b, c, d, e, f, g y h para que (A, I) sea un equilibrio de Nash?
c. ¿Qué relaciones (mayor, igual, menor o ninguna) deben tener a, b, c, d, e, f, g y h para que (B, D) sea un equilibrio de Nash?
d. ¿Qué relaciones (mayor, igual, menor o ninguna) deben tener a, b, c, d, e, f, g y h para que (A, D) y (B, I) sean al mismo tiempo equilibrios de Nash?
e. ¿Qué relaciones (mayor, igual, menor o ninguna) deben tener a, b, c, d, e, f, g y h para que exista un equilibrio en estrategias mixtas? Encuentre ese equilibrio de Nash en estrategias mixtas.
f. Falso o verdadero: si en el juego representado arriba existe un único equilibrio de Nash en estrategias puras, entonces SIEMPRE (independientemente de los valores que asuman a, b, c, d, e, f, g, h) a este equilibrio se puede llegar mediante la eliminación iterada de estrategias dominantes.

31. TEORIA DE JUEGOS (30 puntos)

A. Para el juego representado por la siguiente matriz de pagos encuentre:

i. Todos los óptimos de Pareto.
ii. Todos los Equilibrios de Nash en estrategias puras.
iii. El (los) equilibrio (s) de Nash en estrategias mixtas.

	a	b	c	D	e
A	3,3	4,4	5,3	6,0	7,-5
B	4,4	6,6	8,6	10,4	12,0
C	3,5	6,8	9,9	12,8	15,5
D	0,6	4,10	8,12	12,12	16,10
E	-5,7	0,12	5,15	10,16	15,15

B. Considere el siguiente juego repetido un infinito número de veces y en donde los individuos descuentan los pagos futuros por el factor de descuento δ:

	X	Y
X	1,1	A,B
Y	B,A	0,0

donde los parámetros A y B dentro de la tabla satisfacen los siguientes requisitos:

$$0 \leq A < 1, \quad B > 1, \quad A + B > 1$$

i. Si es posible, ¿Para qué valores de A, B y δ, es la estrategia XX un ENSP?
ii. Si es posible, ¿Para qué valores de A, B y δ, es la estrategia “alternar” (XY, YX, XY, …) un ENSP?
iii. Si es posible, ¿Para qué valores de A, B y δ, es la estrategia YY un ENSP?

CAPÍTULO 12
EXTERNALIDADES Y BIENES PUBLICOS

TEMARIO

12.1 Externalidades

Los ejercicios de externalidades tratan de identificar cómo en un mercado competitivo, la situación que se presenta es ineficiente pues por lo general el individuo no recibe como beneficio su contribución marginal o no se hace cargo del costo marginal que causa a la colectividad. La solución involucra encontrar el punto eficiente, en donde cada quien obtiene su contribución marginal ya sea en el costo o el beneficio.

12.2 Bienes públicos

Los bienes públicos son un ejemplo de externalidad positiva. Por lo tanto, los ejercicios son una extensión de los descritos en 12.1. Adicionalmente, al poseer la característica de ser no exclusivos en el consumo, los ejercicios incluyen encontrar el óptimo social calculando la demanda agregada mediante la suma horizontal de las valoraciones marginales. También por lo general los ejercicios involucran encontrar los precios de Lindalh para cada uno de los participantes.

12.3 Ejercicios a resolver

12.1 EXTERNALIDADES

12.1.1 Sistemas económicos eficientes e ineficientes

Un pueblo aislado tiene dos fincas que producen Aguacates, A, el cual es el único bien de consumo. En la finca #1, $A_1 = 12 L_1 - L_1^2$, donde A_1 es la producción de aguacates y L_1 es el número de trabajadores que laboran en la finca 1. La finca #2 es doblemente productiva: $A_2 = 2*(12 L_2 - L_2^2)$. El pueblo tiene 9 trabajadores idénticos los cuales no tienen ningún deseo de ocio. No existen más recursos productivos que deban ser considerados.

a.

i. Ud. es el dictador benevolente del pueblo y se enfrenta al problema de asignar a los trabajadores entre las dos fincas. Esto es, Ud. debe escoger L_1 y L_2 , los cuales pueden ser números fraccionales o enteros, con el objetivo de maximizar el producto. Un economista consultor le dice: "Como la finca #2 es doblemente productiva que la finca #1, Ud. debería asignar el doble de trabajadores en la finca #2" ¿Es ésto correcto? Si no, ¿cuál es la respuesta correcta? Para la respuesta correcta encuentre A_1 y A_2.

No es correcto. Para maximizar el producto total abría que igualar los $PM_1 = 12 - 2 L_1$; $PM_2 = 24 - 4 L_2$, sujeto a que $L_1 + L_2 = 9$. $\rightarrow 12 - 2 L_1 = 24 - 4 L_2 \rightarrow 2L_2 - L_1 = 6 \rightarrow 2L_2 - (9-L_2) = 6 \rightarrow 3L_2 = 15 \rightarrow L_2 = 5, L_1 = 4 \rightarrow A_1 = 32, A_2 = 70$.

ii. ¿Qué es lo que un dictador benevolente debe igualar: los productos marginales, los productos totales, los productos promedios, o qué? Explique brevemente.

Como se indicó anteriormente, debe igualar los productos marginales porque se deben asignar a los trabajadores a la finca más productiva, la cual no siempre es la misma ya que las PM son decrecientes.

b. Una revolución ocurre y Ud. es destronado. Bajo el nuevo ordenamiento de "propiedad colectiva", cada quien puede trabajar como le plazca. Todos aquellos que trabajen en una finca obtendrán la misma proporción del producto total de esa finca. Naturalmente, cada individuo trabajará en la finca que le reditúe la mayor producción. ¿En el equilibrio, cuántos trabajadores terminarán en cada finca? (Recuerde que se permiten las fracciones). Encuentre A_1 y A_2 y A.

En este punto tendríamos que igualar los productos medios. Por lo tanto:

$12 - L_1 = 24 - 2 L_2 \rightarrow 2 L_2 - L_1 = 12 \rightarrow 2 L_2 - (9 - L_2) = 12 \rightarrow 3L_2 = 21 \rightarrow L_2 = 7; L_1 = 2$
$A_1 = 20$, $A_2 = 70$, $A = 90$.

c. Un misionario de la libre empresa llega al pueblo y les enseña a los habitantes todo lo que ellos necesitan saber de Administración de Empresas en un día. Como resultado, cada uno de los 9 pueblerinos quiere convertirse en empresario que administrará alguna de las fincas. El misionario dice que el derecho para administrar cada una de las fincas se le otorgará a la mejor oferta que se de en una subasta abierta, en la cual, los interesados pueden ofrecer pagar una renta, en aguacates, de H_1 por la finca 1 y H_2 por la finca 2. Las rentas pagadas por los dos ganadores de la subasta se repartirá igualmente entre los 9 residentes del pueblo. También, cada finca contratará personal y se les pagará los salarios W_1 y W_2. Determine el valor de equilibrio de las variables W_1, W_2, L_1, L_2, H_1 y H_2. Asuma que la subasta es tan intensa que el ganador terminar con ganancias nulas.

$$\pi_1 = 12L_1 - L_1^2 - W_1L_1 - H_1$$
$$\pi_2 = 24L_2 - 2L_2^2 - W_2L_2 - H_2$$

En el óptimo:

$$12 - 2L_1 = W_1$$
$$24 - 4L_2 = W_2$$

Como los salarios que se pagan en cada finca tienen que ser iguales:

$$12 - 2L_1 = 24 - 4L_2 \rightarrow L_1 = 4; L_2 = 5; W_1 = 12 - 2L_1 = 4; W_2 = 24 - 4L_1 = 4;$$
$$\pi_1 = 12(4) - 16 - 4(4) - H_1 = 0 \rightarrow H_1 = 16$$
$$\pi_2 = 24(5) - 2(25) - 4(5) - H_2 = 0 \rightarrow H_2 = 50$$

d. En cada uno de los tres casos anteriores, ¿difiere el ingreso per-cápita entre trabajadores en las dos fincas?

En el caso A, el ingreso per cápita en la finca 1 es 8 y en la finca 2 es 14
En el caso B, el ingreso per cápita es 10 en las dos fincas.
En el caso C, el ingreso per cápita es 11,33 en las dos fincas.

e. ¿De los tres sistemas propuestos, cuál sistema o cuáles sistemas son Pareto-eficientes?

Solo A y C son Pareto eficientes, pues en el caso B se pueden mejorar las condiciones de todos los trabajadores utilizando el esquema C.

12.1.2 El metano de las vacas

Un estudio del gobierno ha llegado a la conclusión de que los beneficios marginales del control de la producción de metano provocado por vacas están dados por BMg = 100 – R, donde R representa la reducción porcentual de los niveles no regulados.

Para los campesinos, el costo marginal de la reducción de metano (mediante mejor alimento para vacas) está dado por CMg = 20 + R.

a. ¿Cuál es el nivel socialmente óptimo de la reducción de metano?

100 – R = 20 + R → R = 40

b. Si el gobierno adoptara una cuota sobre el metano que los campesinos deben pagar por cada porcentaje de metano que no disminuyan, ¿cuál sería esta cuota para poder alcanzar el nivel óptimo de R?

Debe ser 60, o sea, el costo marginal valorado al nivel óptimo de reducción.

c. Suponga que hay dos campesinos en este mercado, con costos diferentes para la reducción de metano. El primero tiene costos marginales que están dados por $CMg_1 = 20 + \frac{2}{3}R_1$, mientras que el segundo tiene costos marginales que están dados por $CMg_2 = 20 + 2R_2$. La reducción total de metano es el promedio de estas dos granjas. Si el gobierno manda que cada granja reduzca el metano en la cantidad óptima calculada en el inciso a, ¿cuál será la reducción global y cuánto costará esta reducción (suponiendo que no hay costos fijos por reducir el metano)?

La empresa 1 reduce el metano en 40 y el CM = 20 +2/3 (40) = 46.67. El costo total sería $20*40+40^2/3 = 1333.33$.

La empresa 2 reduce el metano en 40 y el CM = 20 + 2 (40) = 100. El costo total sería $20*40+40^2=2400$.

En total, las emisiones se reducen en 40 y el costo total de la reducción sería 3733.33.

d. Suponga, en cambio, que el gobierno adopta la cuota sobre el metano descrita en el inciso b. ¿Cuál será la reducción total de metano y cuánto costará esta reducción?

Para la empresa 1: 60 = 20 + 2/3 R → R = 60. CM = 20 + 2/3 (60) = 60. CT = $20*60+60^2/3 = 2400$.

Para la empresa 2: 60 = 20 + 2R → R = 20. CM = 20 + 2 (20) = 60. CT = 20*20+20^2 = 800

La reducción promedio sería 40 y el costo total de la reducción 3200.

e. Explique por qué el inciso c y el inciso d producen resultados diferentes.

Porque en c se les obliga a cada empresa a reducir de acuerdo con el costo promedio, mientras que en el d a las empresas se les obliga a reducir de acuerdo al costo marginal, lo cual es lo correcto.

12.2 BIENES PÚBLICOS

12.2.1 Bien público: Suma estándar, Relación débil, Mejor tirador

En el modelo usual de SUMA ESTANDARD (SE) de bienes públicos, las contribuciones individuales son sumadas para determinar la cantidad del bien público disponibles para todos. En el modelo de RELACION DEBIL (RD) la cantidad disponible es determinada por la menor contribución y en el modelo de MEJOR TIRADOR (MT) la cantidad es determinada por la mayor contribución. Para un grupo de dos individuos, se definen los siguientes símbolos:

c = el costo privado de la contribución de cada persona.
B = el beneficio por persona si ambos contribuyen.
b = el beneficio por persona si solo uno contribuye.

La matriz I abajo muestra la matriz algebraica aplicable a las 3 situaciones, donde C significa contribuye y NC no contribuye.

Matriz I
Algebraica

	C	NC
C	B-c,B-c	b-c,b
NC	b,b-c	0,0

Matriz II
SE Numérica
(c=3, B=4, b=2)

	C	NC
C	1,1	-1,2
NC	2,-1	0,0

Matriz III
RD ó MT
(c=1, B=2, b=?)

	C	NC
C	1,1	b-1,b
NC	b,b-1	0,0

a. La matriz II es un ejemplo numérico de la situación SE, donde c=3, B=4 y b=2.

i. Considere sólo la matriz numérica, ¿qué par de estrategias son Pareto-eficientes? Explique brevemente.

Son Pareto – eficientes todas las estrategias excepto el para (NC, NC) porque cumplen con la definición de que no es posible mejorar la situación de un individuo sin empeorar la del otro.

ii. Si los jugadores eligen simultáneamente, ¿qué par de estrategias o pares de estrategias son equilibrios de Nash?

(NC, NC) – Dilema del prisionero

iii. Si el jugador de la izquierda elige primero, ¿a qué equilibrio se llega? ¿Es más conveniente jugar primero o segundo?

Se llega a la misma solución del equilibrio de Nash, (NC, NC), y no tiene conveniencia jugar primero o segundo pues la solución es la misma.

b. La matriz III es un ejemplo numérico donde ahora c=1 y B=2, mientras que b está sin especificación. Asumiendo que b=0, responda las mismas preguntas que en A. Adicionalmente, explique por qué el caso de b=0 representa la situación de RD.

Como la cantidad disponible es determinada por la menor contribución, si un individuo no contribuye entonces el beneficio individual es cero, o sea, b=0. Además, si solo una persona contribuye, esa persona sí acarrea el costo de su contribución, por lo que el beneficio neto sería b-c = -1.

i. Existe una única solución Pareto – eficiente: (C, C) = (1,1), porque a partir de las otras soluciones, es posible mejorar al menos un individuo sin empeorar el otro.
ii. Hay dos equilibrios de Nash: (C, C) = (1, 1) y (NC, NC) = (0, 0)
iii. Si cualquiera de los dos individuos juega primero se llega a la solución (C, C) = (1, 1), por lo que no hay ventaja de jugar primero.

c. En términos de la matriz III, ¿qué número debe ser asignado a b para que represente la situación MT? Utilice ese número para responder lo mismo que en la parte A.

b = 2

i. Existen dos Óptimos de Pareto: (C, NC) = (1, 2) y (NC, C) = (2, 1), porque a partir de las otras soluciones, es posible mejorar al menos un individuo sin empeorar el otro.
ii. Hay dos equilibrios de Nash: (C, NC) = (1, 2) y (NC, C) = (2, 1).
iii. Si el individuo de la izquierda mueve primero, la solución final puede ser (NC, C) = (2, 1) y si el de arriba juega primero, la solución sería (C, NC) = (1, 2). En este caso sí conviene jugar primero.

d. En cada uno de las siguientes situaciones, indique a cual condición se aproxima más, al modelo de SE, RD, MT o a ninguno. Explique brevemente en cada caso.

i. <u>Construcción de un puente</u>: Dos socios piensan construir un puente con peaje. Sin embargo, un socio tiene que cargar con el costo de construir un lado del puente y el otro socio el otro lado.

Suma Estándar: Una vez terminado el puente, la distancia construida va a depender de la suma de las contribuciones individuales de los dos individuos.

ii. <u>Entrada incontrolable</u>: Robinson posee un cafetal y Viernes otro. Por ley, cualquiera de ellos puede coger café de la finca del otro.

Ninguno. Se trata de bienes privados por lo que el beneficio de uno depende de su propia contribución y no de las del otro. No existe beneficio colectivo.

iii. **<u>Embellecimiento del barrio</u>: Cada quién se beneficia en el tanto que cada individuo ayude a mantener las calles y las aceras limpias.**

RD. Para que las personas estén contentas, como dice el enunciado, todos los individuos deben ayudar a limpiar el barrio, así que el bienestar social es igual a la menor contribución.

iv. **<u>Halando el mecate</u>: Cada quien tira del mecate y tratar de ganarle al otro equipo.**

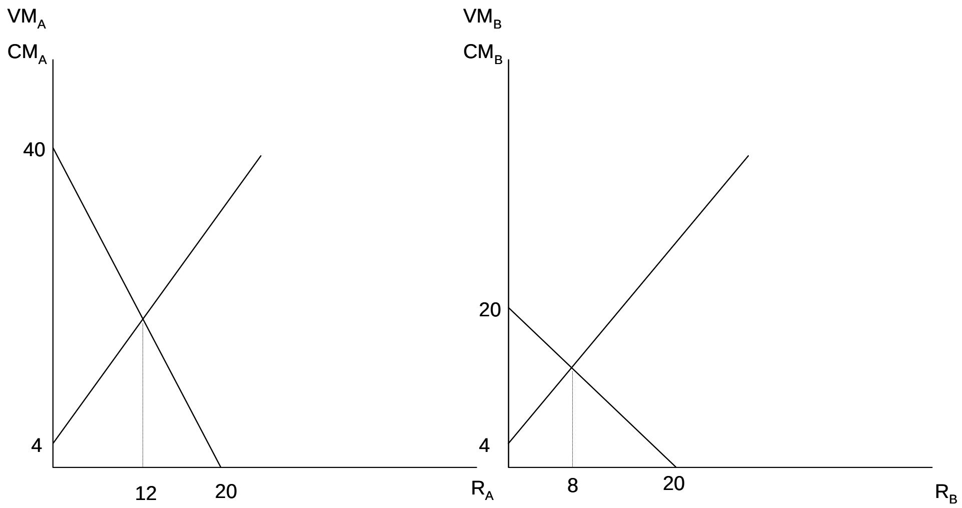
SE: El resultado del equipo es igual a la suma de las contribuciones de todos sus integrantes.

12.2.2 Mosquitos – Solución eficiente para bienes públicos

Ana y Betty viven en una isla en la que se puede cosechar grano G pero está infestada de mosquitos. Cada una de ellas prefiere más grano y más R, donde R significa el porcentaje de reducción de la infestación de mosquitos.

a. Inicialmente, Ana y Betty viven en lados opuestos de la isla, así que G y R son dos bienes ordinarios privados para cada uno de ellos. En términos de grano como numerario, la función del Valor Marginal de R para Ana es $VM_A = 40 - 2R_A$, mientras que para Betty es $VM_B = 20 - R_B$. Ellas tienen funciones de costos idénticas: $CM_A = 4 + R_A$ y $CM_B = 4 + R_B$. No hay costos fijos. Encuentre las soluciones privadas para cada una y dibuje esas soluciones en gráficos.

$$VM_A = CM_A \rightarrow 40 - 2R_A = 4 + R_A \Rightarrow R_A = 12$$
$$VM_B = CM_B \rightarrow 20 - R_B = 4 + R_B \Rightarrow R_B = 8$$



Ahora ambas personas deciden tomar un curso de Teoría Microeconómica por Internet y el profesor les dice que es más económico que vivan juntas - al menos para que encuentren una solución eficiente a la producción de R que se convertiría en un bien público.

b. Encuentre la ecuación para la curva de VM de las dos personas agregadas.

Se suman las valoraciones verticalmente:

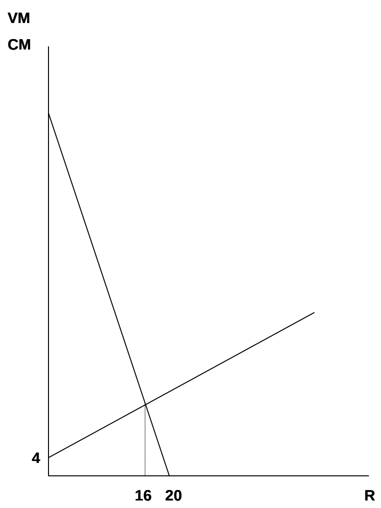
$$VM_A + VM_B = 40 - 2R + 20 - R = 60 - 3R$$

c. Encuentre la ecuación para la curva de CM de las dos personas agregadas.

Se suman los costos marginales horizontalmente: CM = 4 + R/2, $R = R_A + R_B$

d. Encuentre la cantidad eficiente del bien público e ilústrelo con un diagrama. Para esta solución, ¿cuál es el valor del VM y CM?

60 – 3R = 4 + R/2 → R = 16
VM = 12; CM = 12



e. Encuentre la división eficiente de producto entre R_A y R_B.

$R_A = R_B = 8$

f. ¿Cuáles son los valores numéricos de VM_A, VM_B, CM_A y CM_B?

$VM_A = 8$; $VM_B = 4$; $CM_A = 12$; $CM_B = 12$

g. ¿Está Ana mejor que en la parte a? ¿Y Betty? Explique.

Ambos están mejor. Ambos reciben más unidades del bien público, mientras que Ana contribuye menos que estando sola y Betty contribuye igual que antes, pero recibe más.

h. Suponga que R es un bien público tipo "Mejor Tirador" (MT). R´ representa la cantidad disponible del bien público del tipo MT, por lo tanto, R´=Max (R_A, R_B). Responda a la misma pregunta en b.

i. El individuo que va a contribuir más solo consideraría su función de valoración marginal VM = 40 – $2R_A$
ii. Solamente tiene sentido que un individuo contribuya, en este caso, el que tiene la mayor valoración: CM = 4 + R_A
iii. 40 – 2R = 4 + R → R = 12
iv. R_A = 12, R_B = 0.
v. VM_A = 16; VM_B = 8; CM_A = 16; CM_B = 0
vi. A está en la misma situación porque la situación es exactamente igual al vivir sola y B está definitivamente en una mejor situación porque no produce nada y consume la misma producción de A.

i. Las funciones de Valor Marginal de las partes anteriores son muy particulares porque para cada persona dependen únicamente de su propio consumo de R y no así de su cantidad consumida de G. ¿Es la VM_A consistente con la función de utilidad $U_A = G_A + 40 R_A - R_A^2$? ¿Es consistente con $U_A = G_A R_A^2$?.

De $U_A = G_A + 40 R_A - R_A^2$ se obtiene que la $VM_A = 40 – 2R_A$ al obtener la derivada de la función de utilidad con respecto a R. Por lo tanto, la función de utilidad sí es consistente con el VM utilizado.

De $U_A = G_A R_A^2$ se obtiene que la $VM_A = 2 G_A R_A$ por lo que en este caso la función de utilidad no es consistente con el VM utilizado.

12.2.3 Robinson y Viernes

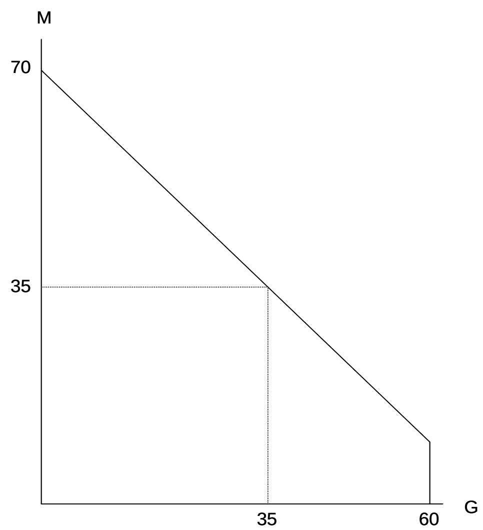
Robinson y Viernes habitan una isla desierta en donde solo hay dos bienes: un bien privado G (grano) y un bien público M (música), pues cuando uno canta, el otro oye. En sus dotaciones iniciales, Robinson y Viernes tiene cantidades de grano $G°_R$ y $G°_V$, pero no tienen nada de música. Cada uno puede sacrificar grano para producir música a una razón de 1:1. De esta forma, para Robinson $M_R + G_R = G°_R$ y para Viernes $M_V + G_V = G°_V$ (Nota: Estas ecuaciones parecen restricciones presupuestarias, pero no lo son pues no hay intercambio entre individuos. De hecho, estas líneas representan oportunidades de producción individualizadas).

Pero como la música es un bien público, Robinson y Viernes consume cada uno la misma cantidad agregada $M = M_R + M_V$. Para cualquier cantidad de M_V, la curva de posibilidades máximas de producción de Robinson de M puede ser expresada como: $M = M_V + (G°_R – G_R)$, donde la expresión entre paréntesis no es negativa.

a. Explique la significancia económica de esta condición.

Significa que dada una cantidad de música provista por viernes, la cantidad máxima de música que puede existir en la isla es igual a la cantidad de grano que Robinson deja de producir para proveer música.

b. Si $G°_R = 60$ y suponiendo que $M_V = 10$, dibuje la curva de transformación de Robinson con M en el eje vertical.



c. Suponga que la función de utilidad de Robinson es igual a $U_R = G_R * M$. Utilizando el mismo supuesto numérico anterior. Encuentre el consumo óptimo de Robinson.

$G_R = ½ \ 70/1 = 35, M = 35$

d. ¿Cuál es la producción de Robinson del bien público M_R?

$M_R = 25$

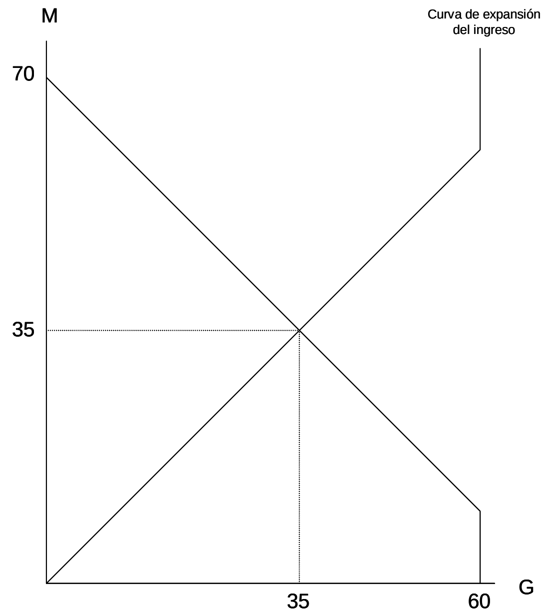
e. Muestre las soluciones en su gráfico.

Ver gráfico arriba.

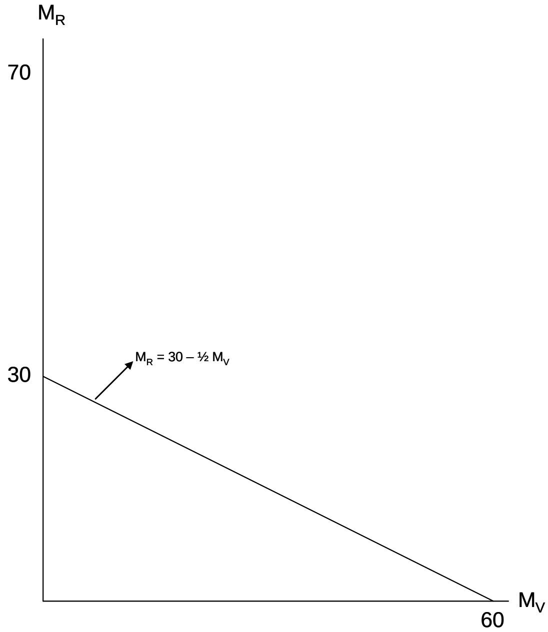
f. Continúe asumiendo que $G°_R = 60$, pero ahora deje M_V variar. ¿Cuál es la ecuación de la curva de expansión del ingreso de Robinson?

Si $M_V = 0$, el consumo óptimo es 30,30. Entonces la curva de expansión del ingreso es $M = G_R$

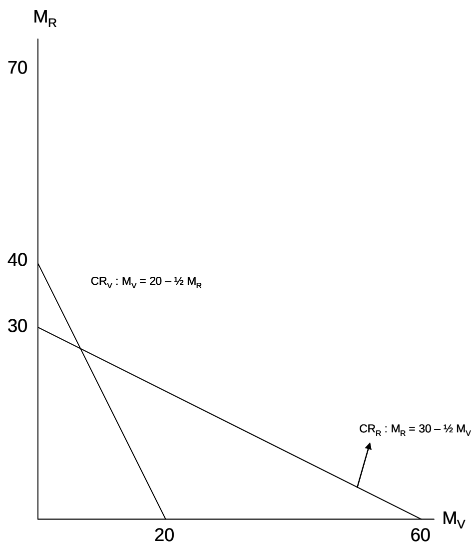
g. Grafique esta curva en su gráfico (no se olvide de la condición de no negatividad).



h. ¿Cuál es la ecuación de la curva de reacción de Robinson, CR_R, que muestra su producción de M_R como función de M_V? En un diagrama separado dibuje la CR_R con M_R en el eje vertical.



i. Usando un razonamiento similar, si la función de utilidad de Viernes es $U_V = G_V * M$ y si $G°_V = 40$, encuentre la curva de reacción de Viernes CR_V y dibújela en el mismo diagrama del punto d.



j. Resuelva algebraicamente para encontrar la intersección de las dos curvas de reacción. ¿Cuáles son los valores de equilibrio de M_R, M_V, M, G_R y G_V?

$M_R = 26.67$; $M_V = 6.67$; $M = 33.33$ $G_R = 33.33$: $G_V = 33.33$

k. ¿Se cumple acá la afirmación de que los individuos inicialmente más ricos (Robinson) producen una cantidad desproporcionada del bien público) Explique.

Es correcta la afirmación, Robinson fue dotado inicialmente de una mayor cantidad de recursos y por lo tanto termina proveyendo una mayor cantidad del bien público.

l. El texto afirma que se proveerá una cantidad del bien público menor a la óptima. En lugar del resultado encontrado en f, suponga que la combinación de producto de Robinson fuese (G_R, M_R) = (25, 35) y la de Viernes (G_V, M_V) = (25, 15). ¿Representa este par de productos una solución mutuamente posible? De serlo, ¿es acaso Pareto preferida al equilibrio encontrado en la parte f? Explique la lógica económica de su respuesta.

Si es factible pues está dentro de las posibilidades máximas de producción de cada individuo, pero no es Pareto preferida para ninguno de los individuos pues para Robinson la utilidad ahora sería 25*40 = 1000 en lugar de 33.33 * 33.33 = 1110.89 y para Viernes la utilidad ahora es también 25*40 = 1000 en lugar de 33.33 * 33.33 = 1110.89.

12.2.4 El financiamiento de los bienes públicos

Suponga que en una sociedad hay tres personas que votan para decidir si el gobierno debe emprender ciertos proyectos específicos o no. Dejemos que los beneficios netos de un proyecto concreto sean 150, 140 y 50 dólares para las personas A, B y C, respectivamente.

a. Si el proyecto cuesta 300 dólares y estos costos serán compartidos de manera equitativa, ¿votaría una mayoría por emprender este proyecto? Con este plan, ¿cuáles serían los beneficios netos para cada persona? ¿Son los beneficios netos totales positivos?

Sí votaría la mayoría (A y B) por el proyecto y los beneficios netos serían (A,B,C) = (50, 40, -50). El beneficio neto sería 40.

b. Suponga que el costo del proyecto es 375 dólares y nuevamente los costos serán compartidos equitativamente. Responda a las mismas preguntas que se le hicieron en a.

Sí votaría la mayoría (A y B) por el proyecto y los beneficios netos serían (A,B,C) = (25, 15, -75). El beneficio neto sería -35.

c. Suponga (presuntamente contrario a la realidad) que los votos son objeto de compra-venta en un mercado libre. Describa qué tipos de resultados cabría esperar en el inciso a y b.

En a no se podría variar el resultado de la elección pues el perdedor –C-. no podría ofrecer más de lo que gana A para comprar su voto y en el caso de comprar el voto de B, A puede pagarle más a B para que vote afirmativo de lo que puede pagarle C.

En cuanto a la elección en b, sí cambiaría el resultado de la elección, pues C puede comprar el voto de A o el voto de B en 51 y así solo perdería ese monto y A o B estarían en una mejor situación.

12.2.5 Bienes públicos entre los Estuds

Una peculiar tribu de nativos de los Mares del Sur llamada Studs sólo consumen cocos. Los utiliza para dos fines: o bien los consume como alimentos, o bien los quema en un sacrificio religioso público. Suponga que cada Estud *i* tiene una dotación inicial de cocos de w_i > 0. Sea $x_i \geq 0$ la cantidad de cocos que consume el individuo *i* y g_i ≥ 0 la cantidad que dona para la ofrenda pública. El número total de cocos que todos aportan es G = $\sum_{i=1}^{n} g_i$. La función de utilidad del Estud *i* viene dada por:

$$u_i(x_i, G) = x_i + a_i lnG \text{ , donde } a_i > 1$$

Cuando elige su ofrenda, cada Stud i supone que las ofrendas de los demás permanecen constantes y lo elige teniendo en cuenta este supuesto. Supongamos que $G_{-i} = \sum_{j \neq i} g_j$ representa las ofrendas de todos, salvo el Stud i.

a. Formule el problema de maximización de la utilidad que determina la ofrenda del Stud i.

$$\max_{g_i} a_i ln\,(G_{-i} + g_i) + \omega_i - g_i, \qquad g_i \geq 0$$

b. Recordando que $\boldsymbol{G = g_i + G_{-i}}$ en el caso de todos los agentes *i*, ¿cuál será la cantidad del bien público de equilibrio? (Ayuda: no todos los individuos proveen cantidades positivas del bien público)

Hay dos tipos de individuos, los que su disposición a pagar por el bien público es cero (solución de esquina) porque se provee una cantidad muy alta; y los que sí están dispuestos a pagar por el bien público (solución interior). Para estos casos, las condiciones de primer orden son:

$$a_i/G = 1 \implies G = a_i$$

A partir de este resultado, la cantidad de bien público que se va a producir en un mercado es igual a lo que el agente con el máximo $a_i$va a proveer. El resto de los individuos no provee algo del bien público.

c. ¿Cuáles o qué tipo de individuos se comportan como "free riders"?

Todos serán "free riders" con excepción del tipo como el máximo a_i.

d. ¿Cuál es la cantidad del bien público que debe suministrar esta economía para encontrarse en un situación eficiente en el sentido de Pareto?

Al sumar todas las TMS encontradas en b, se obtiene:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{G} = 1 \implies G = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

12.2.6 Bienes públicos a diferente riqueza[1]

Considere una economía que está habitada por dos tipos de consumidores. El primer tipo tiene preferencias sobre un bien privado, x, y un bien público, G, que están dadas por:

$U_i = \log X_i + \log G$.

El segundo grupo tiene consumidores que tienes preferencias similares, pero dadas por:

$U_j = \log X_j + \beta \log G, \quad 0<\beta<1$

G = $\sum_i g_i$, donde la suma se realiza sobre todos los consumidores de todos los tipos. Asuma que hay N consumidores de cada tipo en la economía. Los consumidores Tipo 1 tienen una dotación inicial de 1 unidad del bien privado. Los consumidores Tipo 2 tienen una dotación inicial de 0,5 unidades del bien privado. Una unidad de bien privado puede ser transformada sin costo en una unidad de bien público (y viceversa).

a. Encuentre la regla de decisión que cada consumidor Tipo 1 y Tipo 2 usará para tratar de decidir cuánto gastar en el bien público. ¿Cuánto gastará esta economía en el bien público?

[1] Ejercicio sin solucionar tomado de Poterba, James (2003). MIT University. http://economics.mit.edu/files/449

Para los individuos tipo *i*:

$$U_i = \log(x_i) + \log\left(g_1 + g_2 + \cdots + g_i + \cdots g_n + g_{n+1} + \cdots + g_j + \cdots g_{2n}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial U/\partial g_i}{\partial U/\partial x_i} \equiv \frac{x_i}{g_i + \sum_{k\neq i}^{N} g_k + \sum_{j=1}^{N} g_j} = 1 \equiv \frac{P_G}{P_X}$$

$$P_X x_i + P_G g_i = 1 \rightarrow x_i + g_i = 1 \rightarrow x_i = 1 - g_i$$

$$1 - g_i = g_i + \sum_{k\neq i}^{N} g_k + \sum_{j=1}^{N} g_j \rightarrow g_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{k\neq i}^{N} g_k + \sum_{j=1}^{N} g_j\right)$$

$$g_1 = g_2 = \cdots = g_i = \cdots = g_N, \qquad g_{N+1} = g_{N+2} = \cdots = g_j = \cdots = g_{2N}$$

$$\rightarrow (N+1)g_i = 1 - Ng_j \rightarrow g_i = \frac{1 - Ng_j}{(N+1)}$$

Para los individuos tipo *j*:

$$U_j = \log(x_j) + \beta \log\left(g_1 + g_2 + \cdots + g_i + \cdots g_n + g_{n+1} + \cdots + g_j + \cdots g_{2n}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial U/\partial g_j}{\partial U/\partial x_j} \equiv \frac{\beta x_j}{g_j + \sum_{i=1}^{N} g_i + \sum_{h\neq j}^{N} g_h} = 1 \equiv \frac{P_G}{P_X}$$

$$P_X x_j + P_G g_j = \frac{1}{2} \rightarrow x_j + g_j = \frac{1}{2} \rightarrow x_j = \frac{1}{2} - g_j$$

$$\beta\left(\frac{1}{2} - g_j\right) = g_j + \sum_{i=1}^{N} g_i + \sum_{h\neq j}^{N} g_h \rightarrow g_j(1+\beta) = \frac{1}{2}\beta - \sum_{i=1}^{N} g_i - \sum_{h\neq j}^{N} g_h$$

$$\rightarrow g_j = \frac{\frac{1}{2}\beta - \sum_{i=1}^{N} g_i - \sum_{h\neq j}^{N} g_h}{1+\beta}$$

$$g_1 = g_2 = \cdots = g_i = \cdots = g_N, \qquad g_{N+1} = g_{N+2} = \cdots = g_j = \cdots = g_{2N}$$

$$\rightarrow g_j = \frac{\frac{1}{2}\beta - Ng_i - (N-1)g_j}{1+\beta} \rightarrow (N+\beta)g_j = \frac{1}{2}\beta - Ng_i \rightarrow g_j = \frac{\frac{1}{2}\beta - Ng_i}{(N+\beta)}$$

En el equilibrio privado:

$$g_j = \frac{\frac{1}{2}\beta - N\left(\frac{1 - Ng_j}{(N+1)}\right)}{(N+\beta)}$$

$$(N+\beta)(N+1)g_j = \frac{1}{2}(N+1)\beta - N\left(1 - Ng_j\right)$$

$$(N^2 + N\beta + \beta + N - N^2)g_j = \frac{1}{2}N\beta + \frac{1}{2}\beta - N$$

$$g_j = \frac{1}{2}\frac{N\beta + \beta - 2N}{N\beta + \beta + N} = 0$$

$$pues\ g_j < 0, \qquad \forall N \geq 1, \qquad dado\ que\ 0 < \beta < 1$$

$$\rightarrow g_i = \frac{1}{(N+1)} \rightarrow G = \frac{N}{(N+1)}$$

b. Ahora asuma de que existe un planificador social que desea implementar un impuesto de suma fija igual para todos en la economía. La recaudación del impuesto será usada para fondear el gasto del bien público. Si el planificador social busca maximizar el bienestar de la economía, encuentre el nivel óptimo de este impuesto de suma fija. ¿Cómo se compara el nivel de bien público financiado con la provisión privada encontrada en el inciso a?

$$Max\ \ N(logX_i + log\ G) + N\left(logX_j + \beta\ log\ G\right) s.a. x_i = 1 - T, x_j = \frac{1}{2} - T, G = 2NT$$

$$\max_T\ N\ log(1-T) + Nlog\ (2NT) + N\ log\left(\frac{1}{2} - T\right) + N\beta\log(2NT)$$

$$-\frac{N}{1-T} + \frac{N}{T} - \frac{N}{\frac{1}{2} - T} + \frac{N\beta}{T} = 0$$

$$\frac{1}{1-T} + \frac{1}{\frac{1}{2} - T} = \frac{1+\beta}{T}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2} - T\right)T + (1-T)T = (1+\beta)\left(\frac{1}{2} - T\right)(1-T)$$

$$\rightarrow (3+\beta)T^2 - \left(3 + \frac{3}{2}\beta\right)T + \left(\frac{1+\beta}{2}\right) = 0$$

$$\rightarrow (6+2\beta)T^2 - (6+3\beta)T + (1+\beta) = 0$$

$$\rightarrow T = \frac{6 + 3\beta \pm \sqrt{(6+3\beta)^2 - 4(6+2\beta)(1+\beta)}}{2(6+2\beta)} = \frac{6 + 3\beta \pm \sqrt{12 + 4\beta + \beta^2}}{2(6+2\beta)}$$

$$\rightarrow T = \frac{6 + 3\beta - \sqrt{12 + 4\beta + \beta^2}}{2(6+2\beta)} \quad pues\ T > \frac{1}{2}$$

$$G = \frac{6 + 3\beta - \sqrt{12 + 4\beta + \beta^2}}{2(6+2\beta)}N$$

12.3 EJERCICIOS A RESOLVER

12.3.1 Externalidades al pintar

Ana y Betty son vecinas. Ana no ha pintado su casa en años. Betty desea vender su casa y retirarse en Tamarindo. Betty podría vender su casa por $10.000 más si su vecina pintara su casa porque el barrio se vería más bonito a los compradores potenciales. Asuma que el costo total de pintar la casa de Ana es de $1.000 y ella no obtiene ningún beneficio de tener su casa pintada. También asuma que Ana tiene el derecho de propiedad sobre su casa y que ella es la única que decide si su casa es pintada o no.

a. ¿Existe una externalidad en este caso? ¿Cuál es el óptimo social? (O sea, se debe o no pintar la casa)
b. ¿Cuánto es el monto máximo que Betty está dispuesta a pagar para que Ana pinte su casa?
c. ¿Cuánto es el monto mínimo que Ana estaría dispuesta a recibir para pintar su casa?
d. ¿Cómo cambiaría esta situación si Betty tuviera los derechos de propiedad sobre la casa de Ana?

12.3.2 Pescando en un lago de propiedad común

En la Trinidad de Sarapiquí de Heredia, existe un caserío con 100 personas las cuales tienen disponibles solo dos ocupaciones. Ellos pueden trabajar recogiendo café por una paga promedio equivalente a $10 al día o pueden pescar en un río cercano, como el San Juan. La cantidad de pescado atrapado por día está representado por:

$$P = 210\, L_P - 5\, L^2_P$$

donde L_P es el número de personas por día que deciden pescar. El pescado se vende al equivalente de $1 la unidad.

El número de pescado que cada pescador atrapa en el lago es igual al número total de pescado recogido por todos dividido por el número de pescadores, esto es, cada persona termina el día con el promedio del pescado atrapado.

a. Si cada persona es indiferente entre pescar y trabajar recogiendo café. ¿Cuál sería el equilibrio de L_P y L_C , el número de personas del caserío que se dedican a la pesca y a recoger café?

b. Asuma que el bienestar total del caserío se puede medir como el total de dinero obtenido por las 100 personas que trabajan ya sea pescando o recogiendo café. Encuentre los valores de L_P y L_C que maximizan el ingreso a la sociedad.
c. Explique por qué sus resultados de 1. Y 2. son distintas.
d. Suponga que a una firma se le da el derecho exclusivo sobre todos los ríos para que nadie más pueda pescar y que esta firma contrata trabajadores solamente de este caserío. La firma es un competidor perfecto en el mercado laboral y debe pagar a cada trabajador el salario competitivo equivalente a $10 diarios. Como empresa maximizadora de ganancias, ¿cuántos trabajadores contrataría la firma para la pesca?
e. El ingreso total en d. es igual al ingreso de aquellos que trabajan pescando a $10 por día, más el ingreso del resto de las personas del caserío que trabajan recogiendo café al mismo salario y las ganancias de los dueños de la firma de pesca. ¿Cómo se compara este ingreso total en d. con el ingreso total encontrado en b.? Explique.

12.3.3 Externalidades en la producción de miel

Suponga que un productor de miel y una plantación de manzanos se encuentran adyacentes. La función de producción de la miel Q_M está dada por:

$$Q_M = 10X_C + 2X_A - X_C^2$$

Donde X_C denota la cantidad de colmenas de abejas que son mantenidas en la granja de miel y X_A es el área sembrada en hectáreas de manzanos. La función de producción de manzanas Q_A (en barriles) está dada por:

$$Q_A = 7X_A + \frac{1}{2}X_C - \frac{1}{2}X_A^2$$

Suponga que el precio de la miel es de $2 por unidad, el precio de las manzanas (por barril) es $10, el precio de cada colmena es de $4 y el precio de cada hectárea de manzanos es de $5. Suponga que el dueño de las abejas y el de los manzanos operan independientemente y que cada uno maximiza su ganancia de forma privada.

a. Escriba la expresión con la función de ganancia del dueño de las abejas. Determine la cantidad óptima privada que mantiene.
b. Escriba la expresión con la función de ganancia del dueño de los manzanos. Determine la cantidad óptima privada que mantiene.
c. Calcule la cantidad social óptima que debe haber de manzanos y colmenas de abejas.
d. Explique por qué las cantidades entre a-b y c difieren y cómo puede solucionarse.

12.3.4 Externalidad con monopolio

En el país Natura, existe un único productor de Hortalizas las cuales vende solamente en el mercado nacional. No se permite la importación de hortalizas. El dueño de esta compañía es amante de la conservación del ambiente, por lo cual utiliza prácticas que no solo mejoran el ambiente sino que además dan belleza escénica en los lugares en donde existen sembradíos. Como las hortalizas producen oxígeno, la gente del país Natura busca vivir cerca de las zonas en donde operan los cultivos de hortalizas pues el clima es más fresco, falta menos el agua y el aire es más puro. Esto ha provocado que el valor de las propiedades sea más elevado cerca de los campos de hortalizas. Así, dado que existe una combinación de un monopolio con una externalidad positiva, a usted se le pide como economista que evalúe cómo se debe regular este monopolio. Para dar su respuesta, se puede ayudar del uso de algún gráfico, pero solamente se calificarán las primeras diez líneas de texto que usted escriba para justificar su respuesta, así que piense bien lo que va a escribir antes de hacerlo.

12.3.5 Contaminación industrial

Una fábrica que produce tubos de metal se ubica al lado de una lavandería. La fábrica enfrenta un precio de mercado por su producto P=$40 por tubo vendido. El costo de la fábrica es $C=X^2$, donde X representan las unidades de tubos producidas. La lavandería produce lavadas limpias, las cuales cuelga afuera para que se sequen. Suponga que cada tubo producido genera también una unidad de hollín (H), o sea, X = H. El hollín de la fábrica de tubos oscurece la lavada, de forma que la lavandería tiene que protegerla del hollín de la fábrica y esto le incrementa los costos de producir cada lavada limpia. Así, el costo para la lavandería es $C = Y^2 + \frac{1}{2} H$, donde Y es la cantidad de kilos de ropa lavada. Lavar un kilo de ropa se paga a $10. Ambas firmas enfrentan mercados competitivos.

a. ¿Qué niveles de producción de X e Y maximizarían la suma de ganancias de las dos firmas? ¿Cuál es el monto de las ganancias combinadas?
b. Si cada firma optimiza su ganancia de forma individual, ¿cuál será el nivel de producto de cada firma? ¿Cuál es el monto de las ganancias combinadas?
c. ¿Qué impuesto por unidad se necesitaría establecer por cada unidad de hollín para alcanzar el nivel de producto encontrado en el inciso a? ¿Cuál es el nivel de ingreso del gobierno? ¿Cuál es el monto de las ganancias combinadas?
d. Suponga que la lavandería posee el derecho de propiedad del aire limpio y está dispuesta a permitir que el fabricante de tubos contamine a un precio de q por unidad de hollín. ¿Cuál es el nivel de equilibrio de hollín y cuánto ingreso percibiría la lavandería por vender sus derechos a aire limpio? ¿Cuál es la ganancia de cada firma?
e. Suponga que la fábrica de tubos tiene el derecho a contaminar el aire hasta un nivel H´=20. La fábrica de tubos está dispuesta a disminuir su nivel de

contaminación por un precio de r por unidad de hollín disminuida. ¿Cuál es el precio de equilibrio de la unidad de hollín disminuida? ¿Cuánto ingreso obtiene la fábrica de tubos al vender sus derechos a contaminar? ¿Cuál es la ganancia de cada firma?

12.3.6 Los cerdos y los girasoles

Suponga que hay dos terrenos adyacentes en un lugar remoto. En uno se ubica un spa medicinal en donde los visitantes disfrutan del aire fresco y las aguas termales. En el otro terreno se encuentra una granja de girasoles. El granjero dueño de los girasoles decide que le deja más dinero cortar los girasoles y ponerse a criar cerdos. Desafortunadamente, esto va a hacer que el spa medicinal sea mucho menos atractivo a sus clientes. El siguiente cuadro muestra las ganancias que resultan de las dos opciones del granjero.

	Granjero	Spa
Girasoles	\$100,000	\$75,000
Cerdos	\$150,000	\$10,000

a. ¿Qué elección de producto genera el mayor beneficio a la sociedad?
b. ¿Cuál es el tamaño de la externalidad generada por la granja de cerdos?
c. Si el gobierno impone un "impuesto óptimo" sobre la contaminación producida por los cerdos, de qué tamaño sería? ¿Cuál sería su efecto sobre la opción de producción del granjero?
d. Suponga que el granjero tiene el derecho de contaminar y que no existen impuestos ni regulaciones, solamente la posibilidad de negociar entre los dueños de las fincas.
   i. ¿Cuál es la cantidad mínima que el granjero aceptaría del dueño del spa para que deje de criar cerdos?
   ii. ¿Cuánto sería el máximo que el dueño del spa estaría dispuesto a pagar para el mismo propósito?
   iii. ¿Cuál opción sería la más rentable para el granjero después de la negociación?
   iv. ¿Cuál es el rango de las potenciales ganancias del granjero después de la negociación?
   v. ¿Cuál es el rango de las potenciales ganancias del dueño del spa después de la negociación?
e. Ahora suponga que es el dueño del spa quien tiene el derecho de cerrar la granja de cerdos si es que produce contaminación, pero también existe posibilidad para negociar con el granjero.
   i. ¿Cuál es la cantidad mínima que el dueño del spa aceptaría del granjero para que este último pueda criar cerdos?
   ii. ¿Cuánto sería el máximo que el granjero estaría dispuesto a pagar para el mismo propósito?
   iii. ¿Cuál opción sería la más rentable para el granjero después de la negociación?

   iv. ¿Cuál sería el rango de las potenciales ganancias de las dos empresas después de la negociación y cómo se comparan con el punto iv del inciso anterior?

f. ¿Qué tiene que ver este problema con el Teorema de Coase?

12.3.7 Bienes públicos de individuos idénticos con diferente riqueza

Asuma que hay dos vecinos que gastan todo su ingreso en dos bienes comida (X) y en la mejora de su jardín (Y). Cuando un vecino mejora su jardín, el otro también goza de la mejora en la vista del barrio. Por lo tanto, Y es un bien público. Por simplicidad, asuma que el precio de cada bien es 1000 colones y que cada individuo tiene la siguiente función de utilidad:

$$U_i(X_i, Y) = X_iY \text{ , } Y = Y_1 + Y_2.$$

a. Encuentre el nivel socialmente óptimo del bien público, asumiendo los dos siguientes casos:
   i. Los dos vecinos tienen un ingreso de 100.000 colones.
   ii. Un vecino tiene un ingreso de 150.000 colones y el otro de 50.000 colones.

b. Para cada caso, ahora encuentre el nivel de Y que cada individuo proveería separadamente si no existiera ningún tipo de regulación en este mercado.
c. Bajo el escenario i, asuma que el gobierno establece un impuesto individual a cada persona de 16.666,6 colones sobre sus ingresos y con este ingreso financiaría 33.33 unidades del bien público.
   i. Encuentre el nivel de Y que cada individuo proveería bajo este escenario. ¿Se alcanzaría el nivel socialmente óptimo de Y?
   ii. ¿Están mejor los individuos con el impuesto que sin el impuesto?

CAPÍTULO 13
ESCOGENCIA PÚBLICA

TEMARIO

13.1 La Paradoja del Voto

Los ejercicios consisten en identificar el ordenamiento de las preferencias sociales que resulta de un sistema de elección democrático dominado por una mayoría simple. En la búsqueda de ese ordenamiento hay que demostrar si se rompe la transitividad en sistemas de votación cuando se establece una agenda en donde se someten a elección parejas de opciones, lo que lleva a que el resultado del ordenamiento social esté sujeto a la manipulación de la agenda.

13.2 El modelo de Hotelling

Este modelo consiste en identificar la plataforma política óptima que deben escoger los participantes políticos con el fin de maximizar el número de votos para ganar una elección. Los ejercicios van enfocados a encontrar la ubicación óptima de los distintos participantes lo cual depende del espectro en el cual se desenvuelven.

13.3 Ejercicios a resolver

13.1 LA PARADOJA DEL VOTO

13.1.1 Responda cada una de las siguientes preguntas demostrando su respuesta.

a. Falso o verdadero: La existencia de preferencias bimodales por parte de al menos un individuo, es una condición necesaria pero no suficiente para que ocurra la paradoja del voto.

Verdadero. No es una condición suficiente porque por ejemplo, se pueden tener tres individuos idénticos bimodales y no va a ocurrir la paradoja del voto.

b. Falso o verdadero: Es posible encontrar una solución democrática en donde se presente la paradoja del voto cuando se tienen 5 individuos que deben elegir entre tres opciones.

Verdadero. Por ejemplo, a partir de la ocurrencia de la paradoja del voto con 3 individuos, en donde el individuo 2 es bimodal,

	1	2	3
Opción más preferida	X	Z	Y
Opción intermedia	Y	X	Z
Opción menos preferida	Z	Y	X

se pueden agregar un individuo idéntico a 1 y otro idéntico a 3 y se sigue presentando la paradoja del voto.

c. Falso o verdadero: El teorema del votante mediano es incompatible con la paradoja del voto.

Falso. Es totalmente compatible, incluso con la paradoja del voto, las preferencias del votante mediano son las que resultan beneficiadas. La diferencia es que cuando existe paradoja del voto, la definición del votante mediano cambia.

d. Falso o verdadero: La democracia puede llegar a ser entendida como un sistema de oligopolios.

Verdadero. La existencia de grupos de presión y sus efectos sobre las políticas hacen que el resultado de la democracia se asemeje a las que se llegan en un mercado cuando existen oligopolios.

13.1.2 EL RESULTADO DE LAS ELECCIONES

Existen tres grupos de personas con preferencias distintas en la sociedad costarricense relacionadas con el partido político por el cual votó en las elecciones presidenciales. El primer grupo lo conforman aquellos que votaron por el Partido Liberación Nacional (46%), el segundo grupo son aquellos que votaron por el Partido Acción Ciudadana (45%) y el tercer grupo son todos los que votaron por los partidos minoritarios (9%).

El gobierno recién electo debe decidir qué porcentaje del territorio nacional debe financiar como parques nacionales, los cuales son bienes públicos. El gobierno sabe que las preferencias de los tres grupos de personas están representadas por las siguientes funciones de demanda:

$$X_{PAC} = 4 - 2\,P_{PAC}, \qquad X_{PLN} = 25 - 5\,P_{PLN}, \qquad X_{MIN} = 9 - 3\,P_{MIN},$$

donde Xi es el porcentaje del territorio nacional que el grupo i desea disfrutar como parques nacionales, el cual depende del precio i que el gobierno le cobre. El costo para el gobierno de mantener un 1% de parque por cada 100 costarricenses es de ¢239.

a. **¿Qué porcentaje del territorio nacional debería el gobierno financiar como parques nacionales?**

   Para cada 100 personas, la suma vertical de la demanda sería (45) (2 – X/2) + (46) (5 – X/5) + (9) (3 – X/3) = 347 – 347/10 X, esta demanda se iguala al CM →
   347 – 347/10 X = 239 → X = 0,3213.

b. **Qué porcentaje del costo de mantenimiento sería cobrado por el gobierno a cada grupo?**

   El porcentaje elegido es 3,11% de mantenimiento. El grupo del PAC valora este porcentaje en 62,1575 (8,36%); el grupo del PLN valora este porcentaje en 626,72 (84,25%) y el grupo minoritario valora ese porcentaje en 54,96 (7,39%).

13.1.3 ¿EXISTE PARAOJA DEL VOTO?

Un sistema de votación simple es usado para decidir una elección entre 3 candidatos x, y, z, en donde un puntaje de 1 es dado a la primera opción, un puntaje de 2 a la segunda y uno de 3 a la tercera. Hay 22 votantes. 2 votantes prefieren al candidato x sobre y, y a éste último sobre z. 6 votantes prefieren el ordenamiento de candidatos x primero, z segundo, y tercero. 7 votantes prefieren al candidato z primero, y segundo, x tercero. 7 votantes prefieren al candidato y primero, z segundo, x tercero. ¿Cuál candidato ganaría la elección?

2: X > Y > Z
6: X > Z > Y
7: Z > Y > X
7: Y > Z > X

X v. Y: Y gana
Y v. Z : Z gana
Z v. X : Z gana. Por lo tanto el ordenamiento que resulta de una elección es Z > Y > X.

13.2 EL MODELO DE HOTELLING

13.2.1 En el modelo de Hotelling para definir la ubicación de vendedores de helados, cuál sería la ubicación óptima si:

a. Existen dos vendedores que se pueden trasladar alrededor de un círculo.

Cualquier punto en donde se ubiquen resulta en un equilibrio y no existe incentivo para moverse.

b. Existen tres vendedores que se pueden trasladar alrededor de un círculo.

Existe un único equilibrio y consiste en que los vendedores se ubiques de forma equidistante a 120° uno de otro alrededor del círculo.

c. Existen dos vendedores que se pueden trasladar alrededor o dentro de un círculo.

El centro del círculo es el punto óptimo para ubicarse y una vez allí no hay incentivo para moverse.

d. Existen tres vendedores que se pueden trasladar alrededor o dentro de un círculo.

No existe un equilibrio y siempre existirán incentivos para moverse por todo el círculo.

13.3 EJERCICIOS A RESOLVER

13.3.1 La paradoja del voto

a. Elabore un ejemplo que muestre la ocurrencia de la paradoja del Voto en la elección de tres opciones entre tres individuos, en donde se someten a votación las opciones de dos en dos y se elige de acuerdo a la regla de mayoría absoluta.

b. Indique cómo escogerían los individuos el orden de las votaciones si ellos pudieran escoger la agenda de votación.

c. ¿Cuál es la razón por la que ocurre la Paradoja del Voto?

BIBLIOGRAFIA

Hotelling

Robles, Edgar, Gilberto Arce y Eduardo Lizano. **Economía en el Trópico Thomson Learning. 2008**

Varian, Hal