Logika

Materi

1. Proposisi
2. Kombinasi Proposisi
3. Tabel Kebenaran
4. Disjungsi Eksklusif
5. Hukum-Hukum Logika Proposisi
6. Proposisi Bersyarat (Implikasi)
7. Varian Proposisi Bersyarat
8. Bikondisional (Bi-implikasi)
9. Inferensi
10. Argumen
11. Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Colollary*

Proposisi

Di dalam matematika, tidak semua kalimat berhubungan dengan logika. Hanya kalimat yang bernilai benar atau salah saja yang digunakan dalam penalaran. Kalimat tersebut dinamakan **proposisi** (*preposition*).

DEFINISI 1.1. Proposisi adalah kalimat deklaratif yang bernilai benar (*true*) atau salah (*false*), tetapi tidak dapat sekaligus keduanya. Kebenaran atau kesalahan dari sebuah kalimat disebut nilai kebenarannya (*truth value*).

Proposisi

Tiga buah contoh berikut ini dapat mengilustrasikan kalimat mana yang merupakan proposisi dan mana yang bukan.

Contoh 1.1

Kalimat-kalimat berikut ini,

(a) 6 adalah bilangan genap.
(b) Soekarno adalah Presiden Indonesia yang pertama.
(c) $2 + 2 = 4$.
(d) Ibukota Provinsi Jawa Barat adalah Semarang.
(e) $12 \geq 19$.
(f) Kemarin hari hujan.
(g) Suhu di permukaan laut adalah 21 derajat Celcius.
(h) Pemuda itu tinggi.
(i) Kehidupan hanya ada di planet Bumi.

Proposisi

Semuanya merupakan proposisi. Proposisi a, b, dan c bernilai benar, tetapi proposisi d salah karena ibukota Jawa Barat seharusnya adalah Bandung dan proposisi e bernilai

salah karena seharusnya $12 \leq 19$. Proposisi f sampai i memang tidak dapat langsung ditetapkan kebenarannya, namun satu hal yang pasti, proposisi-proposisi tersebut tidak mungkin benar dan salah sekaligus. Kita bisa menetapkan nilai proposisi tersebut benar atau salah. Misalnya, proposisi f bisa kita andaikan benar (hari kemarin memang hujan) atau salah (hari kemarin tidak hujan). Demikian pula halnya untuk proposisi g dan h. Proposisi i bisa benar atau salah, karena sampai saat ini belum ada ilmuwan yang dapat memastikan kebenarannya. ■

Proposisi

Contoh 1.2.

Kalimat-kalimat berikut ini,

(a) Jam berapa kereta api Argo Bromo tiba di Gambir?
(b) Serahkan uangmu sekarang!
(c) $x + 3 = 8$.
(d) $x > 3$.

bukan proposisi. Kalimat a adalah kalimat tanya, sedangkan kalimat b adalah kalimat perintah, keduanya tidak mempunyai nilai kebenaran. Dari Contoh 1.1, dan 1.2 di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa proposisi selalu dinyatakan sebagai kalimat berita, bukan sebagi kalimat tanya maupun kalimat perintah. Kalimat c dan d bukan proposisi karena kedua kalimat tersebut tidak dapat ditentukan benar maupun salah sebab keduanya mengandung peubah (variabel) yang tidak dispesifikasikan nilainya. Tetapi kalimat

"Untuk sembarang bilangan bulat $n \geq 0$, maka $2n$ adalah bilangan genap"

Proposisi

adalah proposisi yang bernilai benar karena kalimat tersebut merupakan cara lain untuk menyatakan bilangan genap. Begitu juga kalimat

$$x + y = y + x \text{ untuk setiap } x \text{ dan } y \text{ bilangan riil}$$

adalah proposisi karena kalimat tersebut merupakan cara lain untuk menyatakan hukum komutatif penjumlahan pada sistem bilangan riil. Dalam hal ini x dan y tidak perlu diberi suatu nilai sebab proposisi tersebut pasti benar untuk x dan y berapa saja. ■

Bidang logika yang membahas proposisi dinamakan **kalkulus proposisi** (*propositional calculus*) atau **logika proposisi** (*propositional logic*)

Proposisi

Secara simbolik, proposisi biasanya dilambangkan dengan huruf kecil seperti p, q, r, …. Misalnya,

p : 6 adalah bilangan genap.

untuk mendefinisikan p sebagai proposisi "6 adalah bilangan genap". Begitu juga untuk

q : Soekarno adalah Presiden Indonesia yang pertama.
r : $2 + 2 = 4$.

dan sebagainya.

Kombinasi Proposisi

Kita dapat membentuk proposisi baru dengan cara mengkombinasikan satu atau lebih proposisi. Operator yang digunakan untuk mengkombinasikan proposisi disebut **operator logika**. Operator logika dasar yang digunakan adalah **dan** (*and*), **atau** (*or*), dan **tidak** (*not*). Dua operator pertama dinamakan operator **biner** karena operator tersebut mengoperasikan dua buah proposisi, sedangkan operator ketiga dinamakan operator **uner** karena ia hanya membutuhkan satu buah proposisi.

Proposisi baru yang diperoleh dari pengkombinasian tersebut dinamakan **proposisi majemuk** (*compound proposition*). Proposisi yang bukan merupakan kombinasi proposisi lain disebut **proposisi atomik**. Dengan kata lain, proposisi majemuk disusun dari proposisi-proposisi atomik.

Kombinasi Proposisi

Proposisi majemuk terdiri dari konjungsi, disjungsi dan ingaran.

DEFINISI 1.2. Misalkan p dan q adalah proposisi. **Konjungsi** (*conjunction*) p dan q, dinyatakan dengan notasi $p \wedge q$, adalah proposisi

p dan q

Disjungsi (*disjunction*) p dan q, dinyatakan dengan notasi $p \vee q$, adalah proposisi

p atau q

Ingkaran atau (*negation*) dari p, dinyatakan dengan notasi $\sim p$, adalah proposisi

tidak p

ekspresi proposisi majemuk dalam notasi simbolik juga disebut ekspresi logika

Kombinasi Proposisi

Contoh 1.3

Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Hari ini hujan
q : Murid-murid diliburkan dari sekolah

maka

$p \wedge q$: Hari ini hujan dan murid-murid diliburkan dari sekolah
$p \vee q$: Hari ini hujan atau murid-murid diliburkan dari sekolah
$\sim p$: Tidak benar hari ini hujan
(atau dalam kalimat lain yang lebih lazim: Hari ini *tidak* hujan)

Kombinasi Proposisi

Contoh 1.4

Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Hari ini hujan
q : Hari ini dingin

maka

$q \vee \sim p$: Hari ini dingin atau hari ini tidak hujan
atau, dengan kata lain, "Hari ini dingin atau tidak hujan"

$\sim p \wedge \sim q$: Hari ini tidak hujan dan hari ini tidak dingin
atau, dengan kata lain, "Hari ini tidak hujan maupun dingin"

$\sim(\sim p)$: Tidak benar hari ini tidak hujan
atau dengan kata lain, "Salah bahwa hari ini tidak hujan"

Kombinasi Proposisi

Contoh 1.5

Diketahui proposisi-proposisi berikut:

p : Pemuda itu tinggi
q : Pemuda itu tampan

Nyatakan proposisi berikut (asumsikan "Pemuda itu pendek" berarti "Pemuda itu tidak tinggi") ke dalam ekspresi logika (notasi simbolik):

(a) Pemuda itu tinggi dan tampan
(b) Pemuda itu tinggi tapi tidak tampan
(c) Pemuda itu tidak tinggi maupun tampan
(d) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek atau tidak tampan
(e) Pemuda itu tinggi, atau pendek dan tampan
(f) Tidak benar bahwa pemuda itu pendek maupun tampan

Kombinasi Proposisi

Penyelesaian:

(a) $p \wedge q$
(b) $p \wedge \sim q$ (catatan: kata "tetapi" bermakna sama dengan "dan")
(c) $\sim p \wedge \sim q$
(d) $\sim(\sim p \vee \sim q)$
(e) $p \vee (\sim p \wedge q)$
(f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

Tabel Kebenaran

Nilai kebenaran dari proposisi majemuk ditentukan oleh nilai kebenaran dari proposisi atomiknya dan cara mereka dihubungkan oleh operator logika.

DEFINISI 1.3 Misalkan p dan q adalah proposisi.

(a) Konjungsi $p \wedge q$ bernilai benar jika p dan q keduanya benar, selain itu nilainya salah

(b) Disjungsi $p \vee q$ bernilai salah jika p dan q keduanya salah, selain itu nilainya benar

(c) Negasi p, yaitu $\sim p$, bernilai benar jika p salah, sebaliknya bernilai salah jika p benar.

Tabel Kebenaran

Satu cara yang praktis untuk menentukan nilai kebenaran proposisi majemuk adalah menggunakan tabel kebenaran (*truth table*). Tabel kebenaran menampilkan hubungan antara nilai kebenaran dari proposisi atomik. Tabel 1.1 menunjukkan tabel kebenaran untuk konjungsi, disjungsi, dan ingkaran. Pada tabel tersebut, T = *True* (benar), dan F = *False* (salah).

Tabel Kebenaran

Tabel 1.1 Tabel kebenaran konjungsi, disjungsi, dan ingkaran

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	$\sim q$
T	F
F	T

Tabel Kebenaran

Contoh 1.7

Jika p, q, dan r adalah proposisi. Bentuklah tabel kebenaran dari ekspresi logika

$$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r).$$

<u>Penyelesaian</u>:

Ada 3 buah proposisi atomik di dalam ekspresi logika dan setiap proposisi hanya mempunyai 2 kemungkinan nilai, sehingga jumlah kombinasi dari semua proposisi tersebut adalah $2 \times 2 \times 2 = 8$ buah. Tabel kebenaran dari proposisi $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$ ditunjukkan pada Tabel 1.2. ■

Tabel Kebenaran

Tabel 1.2 Tabel kebenaran proposisi $(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$

p	q	r	$p \wedge q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)$
T	T	T	T	F	F	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F	F
F	T	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	F	F

Tabel Kebenaran

Proposisi majemuk dapat selalu bernilai benar untuk berbagai kemungkinan nilai kebenaran masing-masing proposisi atomiknya, atau selalu bernilai salah untuk berbagai kemungkinan nilai kebenaran masing-masing proposisi atomiknya Kondisi ini didefinisikan di dalam Definisi 1.4 berikut:

DEFINISI 1.4 Sebuah proposisi majemuk disebut **tautologi** jika ia benar untuk semua kasus, sebaliknya disebut **kontradiksi** jika ia salah untuk semua kasus.

Yang dimaksud dengan "semua kasus" di dalam Definisi 1.4 di atas adalah semua kemungkinan nilai kebenaran dari proposisi atomiknya. Proposisi tautologi dicirikan pada kolom terakhir pada tabel kebenarannya hanya memuat T. Proposisi kontradiksi dicirikan pada kolom terakhir pada tabel kebenaran hanya memuat F.

Tabel Kebenaran

Contoh 1.8

Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi majemuk $p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah sebuah tautologi (Tabel 1.3) karena kolom terakhir pada tabel kebenarannya hanya memuat T, sedangkan $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah sebuah kontradiksi (Tabel 1.4) karena kolom terakhir pada tabel kebenarannya hanya memuat F. ■

Tabel 1.3 $p \vee \sim(p \wedge q)$ adalah tautologi

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

Tabel Kebenaran

Tabel 1.4 $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ adalah kontradiksi

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	F

Tabel Kebenaran

DEFINISI 1.5 Dua buah proposisi majemuk, $P(p, q, ..)$ dan $Q(p, q, ..)$ disebut **ekivalen** secara logika, dilambangkan dengan $P(p, q, \ldots) \Leftrightarrow Q(p, q, \ldots)$ jika keduanya mempunyai tabel kebenaran yang identik.

Catatan:

Beberapa literatur menggunakan notasi "≡" untuk melambangkan ekivalen secara logika.

Tabel Kebenaran

Contoh 1.9

Tabel 1.5 memperlihatkan tabel kebenaran untuk proposisi $\sim(p \wedge q)$ dan proposisi $\sim p \vee \sim q$. Kolom terakhir pada kedua tabel tersebut sama nilainya (yaitu F, T, T, T), sehingga kita katakan bahwa kedua proposisi tersebut ekivalen secara logika, atau ditulis sebagai $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$. Bentuk keekivalenan ini dikenal dengan nama Hukum **De Morgan.** ■

Tabel 1.5 $\sim(p \wedge q)$ ekivalen secara logika dengan $p \vee \sim q$

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
T	T	T	F
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

Disjungsi Eksklusif

Kata "atau" (*or*) dalam operasi logika digunakan dalam dua cara. Cara pertama, "atau" digunakan secara inklusif (*inclusive or*) yaitu dalam bentuk "*p* atau *q* atau keduanya". Artinya, disjungsi dengan operator "atau" bernilai benar jika salah satu dari proposisi atomiknya benar atau keduanya benar. Operator "atau" yang sudah kita bahas pada contoh-contoh di atas adalah yang dari jenis inklusif ini. Sebagai contoh, pernyataan

"Tenaga *IT* yang dibutuhkan harus menguasai Bahasa *C*++ atau *Java*".

diartikan bahwa tenaga *IT* (*Information Technology*) yang diterima harus mempunyai kemampuan penguasaan salah satu dari Bahasa *Java* atau Bahasa *C*++ atau kedua-duanya.

Disjungsi Eksklusif

Cara kedua, "atau" digunakan secara eksklusif (*exclusive or*) yaitu dalam bentuk "*p* atau *q* tetapi bukan keduanya". Artinya, disjungsi *p* dengan *q* bernilai benar hanya jika salah satu proposisi atomiknya benar (tapi bukan keduanya). Sebagai contoh, pada sebuah ajang perlombaan pemenang dijanjikan mendapat hadiah. Hadiahnya adalah sebuah pesawat televisi 20 inchi. Jika pemenang tidak menginginkan membawa TV, panitia menggantinya dengan senilai uang.. Proposisi untuk masalah ini ditulis sebagai berikut:

"Pemenang lomba mendapat hadiah berupa TV atau uang"

Kata "atau" pada disjungsi di atas digunakan secara eksklusif. Artinya, hadiah yang dapat dibawa pulang oleh pemenang hanya salah satu dari uang atau TV tetapi tidak bisa keduanya

Hukum-Hukum Logika Proposisi

Proposisi, dalam kerangka hubungan ekivalensi logika, memenuhi sifat-sifat yang dinyatakan dalam sejumlah hukum pada Tabel 1.7. Beberapa hukum tersebut mirip dengan hukum aljabar pada sistem bilangan riil, misalnya $a(b + c) = ab + bc$, yaitu hukum distributif, sehingga kadang-kadang hukum logika proposisi dinamakan juga **hukum-hukum aljabar proposisi**.

Hukum-Hukum Logika Proposisi

Tabel 1.7 Hukum-hukum logika (atau hukum-hukum aljabar proposisi)

1. Hukum identitas: (i) $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ (ii) $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	2. Hukum *null*/dominasi: (i) $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ (ii) $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
3. Hukum negasi: (i) $p \vee \sim p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ (ii) $p \wedge \sim p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	4. Hukum idempoten: (i) $p \vee p \Leftrightarrow p$ (ii) $p \wedge p \Leftrightarrow p$
5. Hukum involusi (negasi ganda): $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$	6. Hukum penyerapan (absorpsi): (i) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (ii) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
7. Hukum komutatif: (i) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ (ii) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	8. Hukum asosiatif: (i) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ (ii) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
9. Hukum distributif: (ii $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (ii) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	10. Hukum De Morgan: (i) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (ii) $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Hukum-Hukum Logika Proposisi

Contoh 1.10

Tunjukkan bahwa $p \vee \sim(p \vee q)$ dan $p \vee \sim q$ keduanya ekivalen secara logika.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} p \vee \sim(p \vee q) &\Leftrightarrow p \vee (\sim p \wedge \sim q) && \text{(Hukum De Mogran)} \\ &\Leftrightarrow (p \vee \sim p) \wedge (p \vee \sim q) && \text{(Hukum distributif)} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{T} \wedge (p \vee \sim q) && \text{(Hukum negasi)} \\ &\Leftrightarrow p \vee \sim q && \text{(Hukum identitas)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Hukum-Hukum Logika Proposisi

Contoh 1.11

Buktikan hukum penyerapan: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
p \wedge (p \vee q) &\Leftrightarrow (p \vee \mathrm{F}) \wedge (p \vee q) && \text{(Hukum Identitas)} \\
&\Leftrightarrow p \vee (\mathrm{F} \wedge q) && \text{(Hukum distributif)} \\
&\Leftrightarrow p \vee \mathrm{F} && \text{(Hukum } \textit{Null}\text{)} \\
&\Leftrightarrow p && \text{(Hukum Identitas)} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Proposisi Bersyarat (Implikasi)

Selain dalam bentuk konjungsi, disjungsi, dan negasi, proposisi majemuk juga dapat muncul berbentuk "jika p, maka q", seperti pada contoh-contoh berikut:

a. Jika adik lulus ujian, maka ia mendapat hadiah dari ayah.
b. Jika suhu mencapai 80°C, maka alarm berbunyi.
c. Jika anda tidak mendaftar ulang, maka anda dianggap mengundurkan diri

Pernyataan berbentuk "jika p, maka q" semacam itu disebut **proposisi bersyarat** atau **kondisional** atau **implikasi**.

Proposisi Bersyarat (Implikasi)

DEFINISI 1.6. Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi majemuk "jika p, maka q" disebut proposisi bersyarat (implikasi) dan dilambangkan dengan

$$p \to q$$

Proposisi p disebut **hipotesis** (atau **antesenden** atau **premis** atau **kondisi**) dan proposisi q disebut **konklusi** (atau **konsekuen**).

Proposisi Bersyarat (Implikasi)

Tabel kebenaran implikasi ditunjukkan pada Tabel 1.8. Catatlah bahwa implikasi $p \to q$ hanya salah jika p benar tetapi q salah, selain itu implikasi bernilai benar. Tidak sukar memahami mengapa tabel kebenaran implikasi demikian. Hal ini dijelaskan dengan contoh analogi berikut: Misalkan dosen anda berkata kepada mahasiswanya di dalam kelas "Jika nilai ujian akhir anda 80 atau lebih, maka anda akan mendapat nilai A untuk kuliah ini". Apakah dosen anda mengatakan kebenaran atau dia berbohong? Tinjau empat kasus berikut ini:

Proposisi Bersyarat (Implikasi)

Kasus 1: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) dan anda mendapat nilai A untuk kuliah tersebut(konklusi benar). Pada kasus ini, pernyataan dosen anda benar.

Kasus 2: Nilai ujian akhir anda di atas 80 (hipotesis benar) tetapi anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah). Pada kasus ini, dosen anda berbohong (pernyataannya salah).

Kasus 3: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda mendapat nilai A (konklusi benar). Pada kasus ini, dosen anda tidak dapat dikatakan salah (Mungkin ia melihat kemampuan anda secara rata-rata bagus sehingga ia tidak ragu memberi nilai A).

Kasus 4: Nilai ujian akhir anda di bawah 80 (hipotesis salah) dan anda tidak mendapat nilai A (konklusi salah). Pada kasus ini dosen anda benar.

Proposisi Bersyarat (Implikasi)

Tabel 1.8 Tabel kebenaran implikasi

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Proposisi Bersyarat (Implikasi)

Contoh 1.12

Proposisi-proposisi berikut adalah implikasi dalam berbagai bentuk:

(a) Jika hari hujan, maka tanaman akan tumbuh subur.
(b) Jika tekanan gas diperbesar, mobil melaju kencang.
(c) Es yang mencair di kutub mengakibatkan permukaan air laut naik.
(d) Orang itu mau berangkat jika ia diberi ongkos jalan.
(e) Ahmad bisa mengambil matakuliah Teori Bahasa Formal hanya jika ia sudah lulus matakuliah Matematika Diskrit.
(f) Syarat cukup agar pom bensin meledak adalah percikan api dari rokok.
(g) Syarat perlu bagi Indonesia agar ikut Piala Dunia adalah dengan mengontrak pemain asing kenamaan.
(h) Banjir bandang terjadi bilamana hutan ditebangi. ■

Varian Proposisi Bersyarat

Terdapat bentuk implikasi lain yang berkaitan dengan $p \rightarrow q$, yaitu proposisi sederhana yang merupakan varian dari implikasi. Ketiga variasi proposisi bersyarat tersebut adalah konvers, invers, dan kontraposisi dari proposisi asal $p \rightarrow q$.

Konvers (kebalikan)	:	$q \rightarrow p$
Invers	:	$\sim p \rightarrow \sim q$
Kontraposisi	:	$\sim q \rightarrow \sim p$

Tabel 1.11 memperlihatkan tabel kebenaran dari ketiga varian proposisi bersyarat tersebut. Dari tabel tersebut terlihat bahwa proposisi bersyarat $p \rightarrow q$ ekivalen secara logika dengan dengan kontraposisinya, $\sim q \rightarrow \sim p$.

Varian Proposisi Bersyarat

Tabel 1.11 Tabel kebenaran implikasi, konvers, invers, dan kontraposisi

p	q	$\sim p$	$\sim q$	Implikasi $p \rightarrow q$	Konvers $q \rightarrow p$	Invers $\sim p \rightarrow \sim q$	Kontraposisi $\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Varian Proposisi Bersyarat

Contoh 1.19

Tentukan konvers, invers, dan kontraposisi dari pernyataan berikut

"Jika Amir mempunyai mobil, maka ia orang kaya"

<u>Penyelesaian</u>:

Konvers	: Jika Amir orang kaya, maka ia mempunyai mobil
Invers	: Jika Amir tidak mempunyai mobil, maka ia bukan orang kaya
Kontraposisi	: Jika Amir bukan orang kaya, maka ia ia tidak mempunyai mobil ■

Bikondisional (Bi-implikasi)

Proposisi bersyarat penting lainnya adalah berbentuk "p jika dan hanya jika q" yang dinamakan **bikondisional** atau **bi-implikasi**. Definisi bikondisional dikemukakan sebagai berikut.

DEFINISI 1.7. Misalkan p dan q adalah proposisi. Proposisi majemuk "p jika dan hanya jika q" disebut bikondisional (bi-implikasi) dan dilambangkan dengan $p \leftrightarrow q$.

Pernyataan $p \leftrightarrow q$ adalah benar bila p dan q mempunyai nilai kebenaran yang sama, yakni $p \leftrightarrow q$ benar jika p dan q keduanya benar atau p dan q keduanya salah. Tabel kebenaran selengkapanya diperlihatkan pada Tabel 1.12.

Bikondisional (Bi-implikasi)

Tabel 1.12 Tabel kebenaran bikondisional

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Perhatikan bahwa bikondisional $p \leftrightarrow q$ ekivalen secara logika dengan $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Keekivalenan tersebut ditunjukkan pada Tabel 1.13. Dengan kata lain, pernyataan "p jika dan hanya jika q" dapat dibaca "Jika p maka q dan jika q maka p".

Bikondisional (Bi-implikasi)

Tabel 1.13 $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T

Inferensi

Misalkan kepada kita diberikan beberapa proposisi. Kita dapat menarik kesimpulan baru dari deret proposisi tersebut. Proses penarikan kesimpulan penarikan kesimpulan dari beberapa proposisi disebut **inferensi** (*inference*).

Di dalam kalkulus proposisi, terdapat sejumlah kaidah inferensi, beberapa di antaranya adalah sebagai berikut:

Inferensi

1. **Modus Ponen** atau ***law of detachment***

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$, yang dalam hal ini, p dan $p \rightarrow q$ adalah hipotesis, sedangkan q adalah konklusi. Kaidah modus ponen dapat ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Simbol $\therefore$ dibaca sebagai "jadi" atau "karena itu". Modus ponen menyatakan bahwa jika hipotesis p dan dan implikasi $p \rightarrow q$ benar, maka konklusi q benar.

Inferensi

Contoh 1.24

Misalkan implikasi "Jika 20 habis dibagi 2,maka 20 adalah bilangan genap" dan hipotesis "20 habis dibagi 2" keduanya benar. Maka menurut modus ponen, inferensi berikut:

> "Jika 20 habis dibagi 2, maka 20 adalah bilangan genap. 20 habis dibagi 2. Karena itu, 20 adalah bilangan genap"

adalah benar. Kita juga dapat menuliskan inferensi di atas sebagai:

Jika 20 habis dibagi 2, maka 20 adalah bilangan genap
20 habis dibagi 2

$\therefore$ 20 adalah bilangan genap

∎

Inferensi

2. Modus *Tollen*

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[\sim q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \sim p$, Kaidah ini modus *tollens* ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow q \\ & \sim q \\ \hline \therefore & \sim p \end{array}$$

Inferensi

Contoh 1.25

Misalkan implikasi "Jika n bilangan ganjil, maka n^2 bernilai ganjil" dan hipotesis "n^2 bernilai genap" keduanya benar. Maka menurut modus tollen, inferensi berikut

$$\begin{array}{l} \text{Jika } n \text{ bilangan ganjil, maka } n^2 \text{ bernilai ganjil} \\ n^2 \text{ bernilai genap} \\ \hline \therefore\ n \text{ bukan bilangan ganjil} \end{array}$$

adalah benar. ■

Inferensi

3. **Silogisme Hipotetis**

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$. Kaidah silogisme ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{rl} & p \rightarrow q \\ & q \rightarrow r \\ \hline \therefore & p \rightarrow r \end{array}$$

Inferensi

Contoh 1.26

Misalkan implikasi "Jika saya belajar dengan giat, maka saya lulus ujian" dan implikasi "Jika saya lulus ujian, maka saya cepat menikah" adalah benar. Maka menurut kaidah silogisme, inferensi berikut

Jika saya belajar dengan giat, maka saya lulus ujian
Jika saya lulus ujian, maka saya cepat menikah

∴ Jika saya belajar dengan giat, maka saya cepat menikah

adalah benar. ■

4. Silogisme Disjungtif

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $[(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q$. Kaidah silogisme disjungtif ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{ll} & p \vee q \\ & \sim p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Inferensi

Contoh 1.27

Inferensi berikut:

> "Saya belajar dengan giat atau saya menikah tahun depan.
> Saya tidak belajar dengan giat. Karena itu, saya menikah tahun depan."

menggunakan kaidah silogisme disjungtif, atau dapat ditulis dengan cara:

Saya belajar dengan giat atau saya menikah tahun depan.
Saya tidak belajar dengan giat.
___
$\therefore$ Saya menikah tahun depan.

Inferensi

5. Simplifikasi

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $(p \wedge q) \rightarrow p$, yang dalam hal ini, p dan q adalah hipotesis, sedangkan p adalah konklusi. Kaidah simplifikasi ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{ll} & p \wedge q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Inferensi

Contoh 1.28

Penarikan kesimpulan seperti berikut ini:

> "Hamid adalah mahasiswa ITB dan mahasiswa Unpar. Karena itu, Hamid adalah mahasiswa ITB."

menggunakan kaidah simplifikasi, atau dapat juga ditulis dengan cara:

Hamid adalah mahasiswa ITB dan mahasiswa Unpar.

$\therefore$ Hamid adalah mahasiswa ITB.

Simplifikasi berikut juga benar:

> "Hamid adalah mahasiswa ITB dan mahasiswa Unpar. Karena itu, Hamid adalah mahasiswa Unpar"

karena urutan proposisi di dalam konjungsi $p \wedge q$ tidak mempunyai pengaruh apa-apa. ■

Inferensi

6. **Penjumlahan**

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $p \to (p \vee q)$. Kaidah penjumlahan ditulis dengan cara:

$$\begin{array}{rl} & p \\ \hline \therefore & p \vee q \end{array}$$

Inferensi

Contoh 1.29

Penarikan kesimpulan seperti berikut ini:

> "Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit. Karena itu, Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit atau mengulang kuliah Algoritma."

menggunakan kaidah penjumlahan, atau dapat juga ditulis dengan cara:

Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit.

$\therefore$ Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit atau mengulang kuliah Algoritma

Inferensi

7. **Konjungsi**

Kaidah ini didasarkan pada tautologi $((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$. Kaidah konjungsi ditulis dengan cara:

$$
\begin{array}{ll}
 & p \\
 & q \\
\hline
\therefore & p \wedge q
\end{array}
$$

Inferensi

Contoh 1.30

Penarikan kesimpulan seperti berikut ini:

> "Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit. Taslim mengulang kuliah Algoritma. Karena itu, Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit dan mengulang kuliah Algoritma"

menggunakan kaidah konjungsi, atau dapat juga ditulis dengan cara:

Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit.
Taslim mengulang kuliah Algoritma.

∴ Taslim mengambil kuliah Matematika Diskrit dan mengulang kuliah Algoritma.

Argumen

Argumen adalah suatu deret proposisi yang dituliskan sebagai

$$\begin{array}{ll} & p_1 \\ & p_2 \\ & \vdots \\ & p_n \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

yang dalam hal ini, p_1, p_2, …, p_n disebut hipotesis (atau premis), dan q disebut konklusi.

Argumen ada yang sahih (*valid*) dan palsu (*invalid*). Catatlah bahwa kata "valid" tidak sama maknanya dengan "benar" (*true*).

Argumen

Definisi 1.9. Sebuah argumen dikatakan sahih jika konklusi benar bilamana semua hipotesisnya benar; sebaliknya argumen dikatakan palsu (*fallacy* atau *invalid*).

Jika argumen sahih, maka kadang-kadang kita mengatakan bahwa secara logika konklusi mengikuti hipotesis atau sama dengan memperlihatkan bahwa implikasi

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

adalah benar (yaitu, sebuah tautologi). Argumen yang palsu menunjukkan proses penalaran yang tidak benar.

Argumen

Contoh 1.31

Perlihatkan bahwa argumen berikut:

> "Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang.
> Air laut surut setelah gempa di laut. Karena itu tsunami datang."

adalah sahih.

Penyelesaian:

Misalkan p adalah proposisi "Air laut surut setelah gempa di laut" dan q adalah proposisi "tsunami datang". Maka, argumen di dalam soal dapat ditulis sebagai:

$$\begin{array}{ll} & p \rightarrow q \\ & p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Argumen

Ada dua cara yang dapat digunakan untuk membuktikan kesahihan argumen ini. Keduanya menggunakan tabel kebenaran.

Cara 1: Bentuklah tabel kebenaran untuk p, q, dan $p \to q$

Tabel 1.15 Tabel kebenaran untuk p, q, dan $p \to q$

p	q	$p \to q$	
T	T	T	(baris 1)
T	F	F	(baris 2)
F	T	T	(baris 3)
F	F	T	(baris 4)

sahih jika semua hipotesisnya benar, maka konklusinya benar. Kita periksa apabila hipotesis p dan $p \to q$ benar, maka konklusi q juga benar sehingga argumen dikatakan benar. Periksa di Tabel 1.15, p dan $p \to q$ benar secara bersama-sama pada baris 1. Pada baris 1 ini q juga benar. Jadi, argumen yang berbentuk modus ponen di atas sahih.

Argumen

Cara 2: Perlihatkan dengan tabel kebenaran apakah

$$[\, p \wedge (p \to q) \,] \to q$$

merupakan tautologi. Tabel 1.16 memperlihatkan bahwa $[\, p \wedge (p \to q) \,] \to q$ suatu tautologi, sehingga argumen dikatakan sahih.

Tabel 1.16 $[\, p \wedge (p \to q) \,] \to q$ adalah tautologi

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[\, p \wedge (p \to q) \,] \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Perhatikanlah bahwa penarikan kesimpulan di dalam argumen ini menggunakan modus ponen. Jadi, kita kita juga telah memperlihatkan bahwa modus ponen adalah argmen yang sahih. ■

Argumen

Contoh 1.32

Perlihatkan bahwa penalaran pada argumen berikut:

> "Jika air laut surut setelah gempa di laut, maka tsunami datang.
> Tsunami datang. Jadi, air laut surut setelah gempa di laut"

tidak benar, dengan kata lain argumennya palsu.

Argumen

Penyelesaian:

Argumen di atas berbentuk

$$\begin{array}{ll} & p \to q \\ & q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Dari Tabel 1.15 pada Contoh 1.31 tampak bahwa hipotesis q dan $p \to q$ benar pada baris ke-3, tetapi pada baris 3 ini konklusi p salah. Jadi, argumen tersebut tidak sahih atau palsu, sehingga penalaran menjadi tidak benar.

Kita juga bisa menunjukkan dengan Tabel 1.17 bahwa $[\, q \wedge (p \to q)\,] \to p$ bukan tautologi, sehingga argumen dikatakan tidak sahih. ■

Argumen

Tabel 1.17 $[q \wedge (p \to q)] \to p$ bukan tautologi

p	q	$p \to q$	$q \wedge (p \to q)$	$[q \wedge (p \to q)] \to p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Colollary*

Di dalam matematika maupun ilmu komputer, kita sering menemukan kata-kata seperti aksioma, teorema, *lemma*, dan *corolarry*.

Aksioma adalah proposisi yang diasumsikan benar. Aksioma tidak memerlukan pembuktian kebenaran lagi.

Contoh-contoh aksioma:

(a) Untuk semua bilangan real x dan y, berlaku $x + y = y + x$ (hukum komutatif penjumlahan).

(b) Jika diberikan dua buah titik yang berbeda, maka hanya ada satu garis lurus yang melalui dua buah titik tersebut.

Aksioma, Teorema, *Lemma*, *Colollary*

Teorema adalah proposisi yang sudah terbukti benar. Bentuk khusus dari teorema adalah *lemma* dan *corolarry*. ***Lemma*** adalah teorema sederhana yang digunakan dalam pembuktian teorema lain. *Lemma* biasanya tidak menarik namun berguna pada pembuktian proposisi yang lebih kompleks, yang dalam hal ini pembuktian tersebut dapat lebih mudah dimengerti bila menggunakan sederetan *lemma*, setiap *lemma* dibuktikan secara individual [ROS03]. ***Corollary*** adalah teorema yang dapat dibentuk langsung dari teorema yang telah dibuktikan, atau dapat dikatakan *corollary* adalah teorema yang mengikuti dari teorema lain.

Contoh-contoh teorema:

(a) Jika dua sisi dari sebuah segitiga sama panjang, maka sudut yang berlawanan dengan sisi tersebut sama besar.

(b) Untuk semua bilangan real x, y, dan z, jika $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x \leq z$ (hukum transitif).

Contoh *corollary*:

Jika sebuah segitiga adalah sama sisi, maka segitiga tersebut sama sudut. *Corollary* ini mengikuti teorema (a) di atas.

Contoh *lemma*:

Jika n adalah bilangan bulat positif, maka $n - 1$ bilangan positif atau $n - 1 = 0$.