Relasi

Defenisi

Kita tulis kembali definisi perkalian kartesian. Perkalian kartesian (*cartesian products*) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan terurut (*ordered pairs*) yang mungkin terbentuk dengan komponen pertama dari himpunan A dan komponen kedua dari himpunan B.

Notasi: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A$ dan b

Relasi antara himpunan A dan B –disebut **relasi biner**– didefinisikan sebagai berikut:

DEFINISI 3.2. Relasi biner R antara A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

Notasi: $R \subseteq (A \times B)$.

Jika $(a, b) \in R$, kita gunakan notasi $a\ R\ b$ yang artinya a dihubunganken dengan b oleh R, dan jika $(a, b) \notin R$, kita gunakan notasi $a \not R\ b$ yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R. Himpunan A disebut **daerah asal** (*domain*) dari R, dan himpunan B disebut **daerah hasil** (*range* atau *codomain*) dari R.

Contoh 3.11

Misalkan A = {Amir, Budi, Cecep} adalah himpunan nama mahasiswa, dan B = {IF221, IF251, IF342, IF323} adalah himpunan kode mata kuliah di Jurusan Teknik Informatika. Perkalian kartesian antara A dan B menghasilkan himpunan pasangan terurut yang jumlah anggotanya adalah $|A| \cdot |B| = 3 \cdot 4 = 12$ buah, yaitu

$$\begin{aligned} A \times B = \{&(\text{Amir, IF221}), (\text{Amir, IF251}), (\text{Amir, IF342}), (\text{Amir, IF323}), \\ &(\text{Budi, IF221}), (\text{Budi, IF251}), (\text{Budi, IF342}), (\text{Budi, IF323}), \\ &(\text{Cecep, IF221}), (\text{Cecep, IF251}), (\text{Cecep, IF342}), (\text{Cecep, IF323}) \} \end{aligned}$$

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa pada Semester Ganjil, yaitu

$$R = \{(\text{Amir, IF251}), (\text{Amir, IF323}), (\text{Budi, IF221}), (\text{Budi, IF251}), (\text{Cecep, IF323}) \}$$

Kita dapat melihat bahwa $R \subseteq (A \times B)$, A adalah daerah asal R, dan B adalah daerah hasil R. Oleh karena (Amir, IF251) $\in R$, kita dapat menuliskan Amir R IF251, tetapi (Amir, IF342) $\notin R$ sehingga kita menuliskan Amir $\not R$ IF342. ■

Contoh 3.12

Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

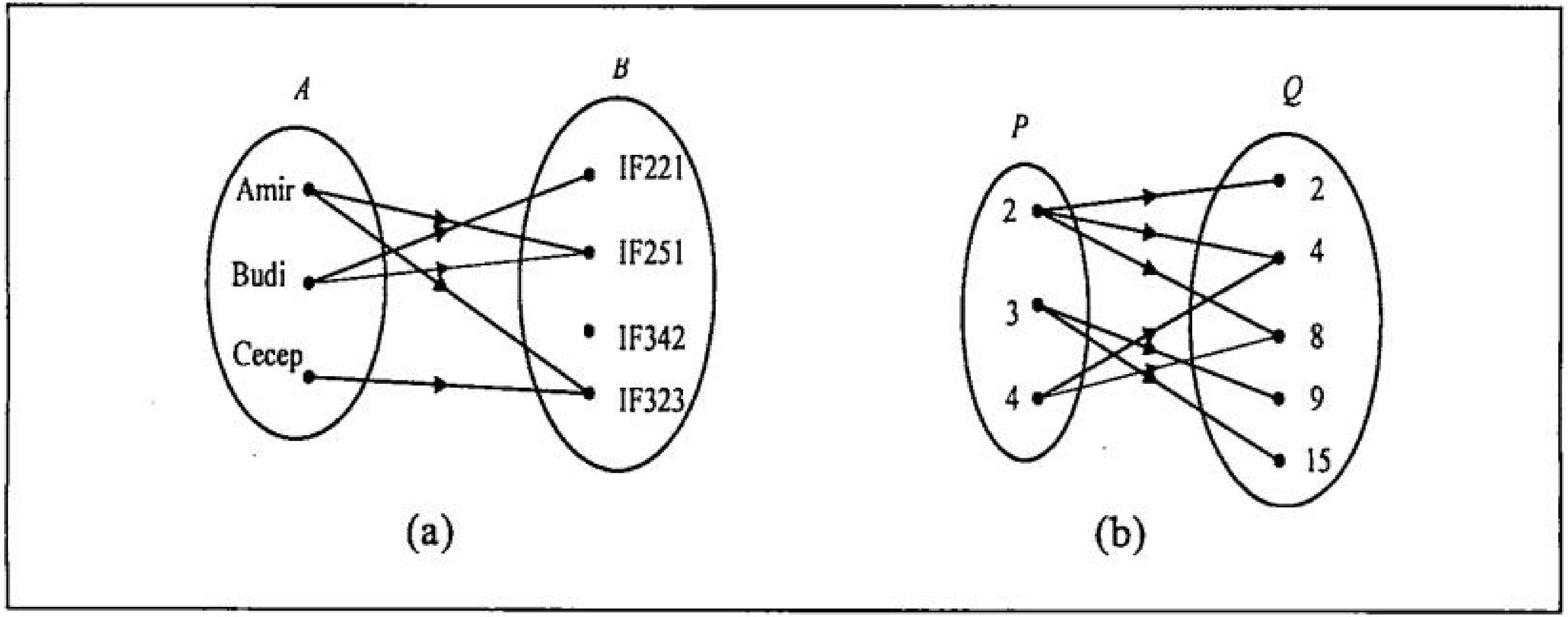
$$(p, q) \in R \text{ jika } p \text{ habis membagi } q$$

maka kita peroleh

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

■

Pasangan terurut pada relasi dari himpunan A ke himpunan B dapat digambarkan dengan diagram panah. Gambarkan dua buah cakram/lingkaran, lalu tuliskan elemen-elemen A dan B pada masing-masing cakram. Jika $(a, b) \in R$, gambarkan panah dari a ke b yang menyatakan a berelasi dengan b. Diagram panah untuk masing-masing relasi pada Contoh 3.11 dan Contoh 3.12 diperlihatkan pada Gambar 3.1(a) dan (b).



Gambar 3.1 Diagram panah masing-masing untuk (a) Contoh 3.11 dan (b) Contoh 3.12

Daerah asal dan daerah hasil relasi bisa saja merupakan himpunan yang sama. Ini berarti relasi hanya didefinisikan pada sebuah himpunan. Misalnya R adalah relasi yang didefinisikan pada himpunan orang yang dalam hal ini $(x, y) \in R$ jika x adalah ibu dari y. Relasi yang didefinisikan hanya pada sebuah himpunan adalah relasi yang khusus. Definisi relasi khusus ini dikemukakan dengan definisi berikut:

DEFINISI 3.3. Relasi pada himpunan A adalah relasi dari $A \times A$.

Dengan kata lain, relasi pada himpunan A adalah himpunan bagian dari $A \times A$. Contoh 3.13 mengilustrasikan relasi semacam ini.

Contoh 3.13

Misalkan R adalah relasi pada $A = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika x adalah faktor prima dari y. Maka

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)\}$$

■

Representasi Relasi

3.3.1 Representasi Relasi dengan Tabel

Relasi biner dapat direpresentasikan sebagai tabel. Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil.

Relasi R pada Contoh 3.11 dapat dinyatakan dengan Tabel 3.1, sedangkan relasi R pada Contoh 3.12 dinyatakan dengan Tabel 3.2.

Tabel 3.1

A	*B*
Amir	IF251
Amir	IF323
Budi	IF221
Budi	IF251
Cecep	IF323

Tabel 3.2

P	*Q*
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

Kita tidak merepresentasikan relasi pada sebuah himpunan dengan tabel, karena tidak lazim dilakukan.

Representasi Relasi

3.3.2 Representasi Relasi dengan Matriks

Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Dengan kata lain, elemen matriks pada posisi (i, j) bernilai 1 jika a_i dihubungkan dengan b_j, dan bernilai 0 jika a_i tidak dihubungkan dengan b_j. Matriks representasi relasi merupakan contoh matriks *zero-one*.

Representasi Relasi

Relasi R pada Contoh 3.11 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

yang dalam hal ini, a_1 = Amir, a_2 = Budi, a_3 = Cecep, dan b_1 = IF221, b_2 = IF251, b_3 = IF342, dan b_4 = IF323.

Relasi R pada Contoh 3.12 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yang dalam hal ini, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, dan $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 8$, $b_4 = 9$, $b_5 = 15$.

Relasi R pada sebuah himpunan adalah unik, yaitu mariks bujursangkar. Relasi pada sebuah himpunan pada Contoh 3.13 dapat dinyatakan dengan matriks

Representasi Relasi

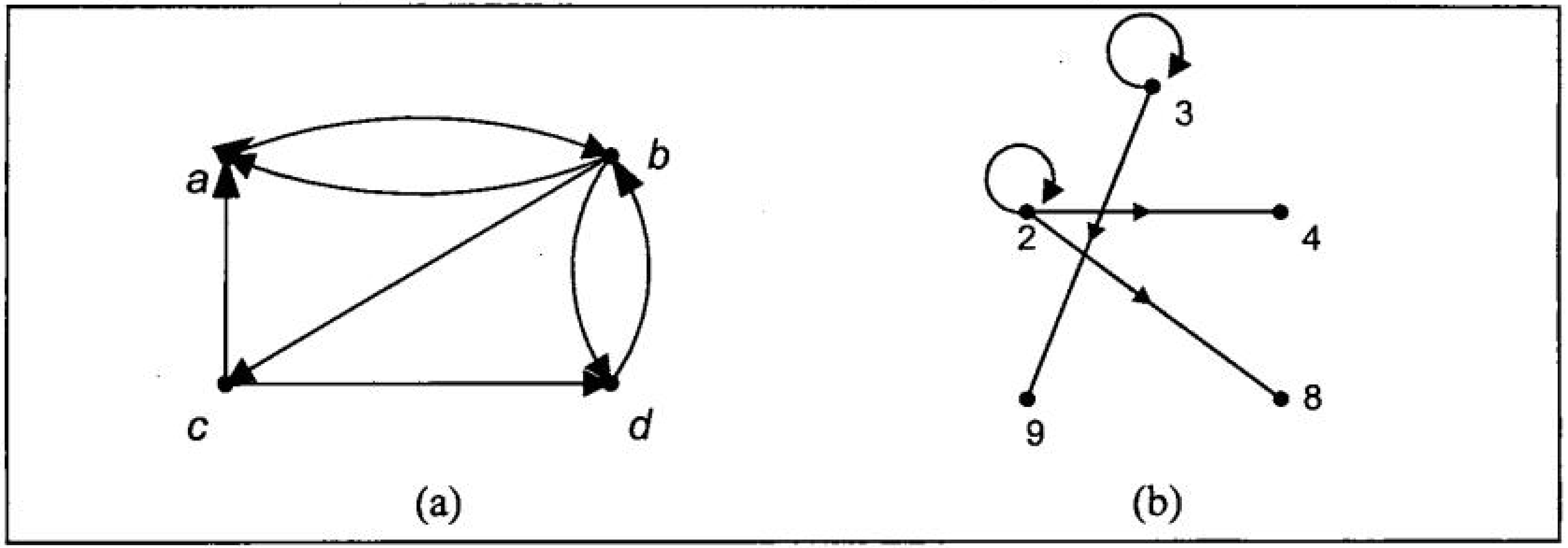
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yang dalam hal ini, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 9$, dan $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_3 = 4$, $b_4 = 8$, $b_5 = 9$.

Representasi Relasi

3.3.3 Representasi Relasi dengan Graf Berarah

Relasi pada sebuah himpunan dapat direpresentasikan secara grafis dengan **graf berarah** (*directed graph* atau *digraph*) (Graf akan dibahas secara khusus di dalam Bab 8). Tiap elemen himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (*arc*) yang arahnya ditunjukkan dengan sebuah panah. Dengan kata lain, jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke simpul b. Simpul a disebut **simpul asal** (*initial vertex*) dan simpul b disebut **simpul tujuan** (*terminal vertex*).



Gambar 3.2. (a) Representasi graf untuk relasi $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b)\}$
(b) Representasi graf untuk relasi $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)\}$ pada Contoh 3.13.

Representasi Relasi

Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke simpul a sendiri. Busur semacam itu disebut **gelang** atau **kalang** (*loop*).

Sebagai contoh, misalkan $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{a, b, c, d\}$. R direpresentasikan dengan graf berarah pada Gambar 3.2 (a). Perhatikan bahwa a mempunyai busur ke simpul a lagi. Busur yang mempunyai simpul asal sama dengan simpul tujuan dinamakan **kalang** (*loop*).

Relasi R pada Contoh 3.13 direpresentasikan dengan graf berarah pada Gambar 3.2(b).

Representasi dengan graf berarah umumnya digunakan untuk relasi pada sebuah himpunan. Relasi biner dari himpunan A ke himpunan B sebenarnya dapat juga direpresentasikan dengan graf berarah seperti diagram panah pada Gambar 3.1 (a). Setiap elemen pada himpunan A dan dinyatakan dengan sebuah simpul pada dan pada sisi yang lain setiap elemen pada himpunan B dinyatakan dengan sebuah simpul. Beberapa literatur matematika tidak mendefinisikan representasi graf berarah untuk relasi biner. Buku ini pun hanya menggunakan graf berarah untuk merepresentasikan relasi pada sebuah himpunan.

Relasi Inversi

Jika R adalah relasi pada himpunan orang-orang di mana $(a, \text{b}) \in R$ jika a adalah ayah dari b, maka kita dapat membuat kebalikan relasinya, yaitu (b, a) yang menyatakan b adalah anak dari a. Relasi baru tersebut dinamakan inversi dari relasi semula. Begitu pula relasi "lebih besar dari" mempunyai inversi "lebih kecil dari", relasi "lebih tua dari" mempunyai inversi "lebih muda dari".

Secara umum, jika diberikan relasi R dari himpunan A ke himpunan B, kita bisa mendefinisikan relasi baru dari B ke A dengan cara membalik urutan dari setiap pasangan terurut di dalam R. Relasi Definisi relasi inversi adalah sebagai berikut:

DEFINISI 3.4. Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Inversi dari relasi R, dilambangkan dengan R^{-1}, adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

Contoh 3.14

Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan

$$(p, q) \in R \text{ jika } p \text{ habis membagi } q$$

maka kita peroleh

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

R^{-1} adalah *invers* dari relasi R, yaitu relasi dari Q ke P dengan

$$(q, p) \in R^{-1} \text{ jika } q \text{ adalah kelipatan dari } p$$

maka kita peroleh

$$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$$

Jika M adalah matriks yang merepresentasikan relasi R,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1}, misalkan N, diperoleh dengan melakukan *transpose* terhadap matriks M,

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kombinasi Relasi

Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup antara dua relasi atau lebih juga berlaku. Hasil operasi tersebut juga berupa relasi. Dengan kata lain, jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, maka operasi $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari A ke B.

Contoh 3.15

Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$. Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ dan relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$ adalah relasi dari A ke B. Kita dapat mengkombinasikan kedua buah relasi tersebut untuk memperoleh/

$$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$$
$$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$
$$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$$
$$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$$
$$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$

■

Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} \qquad \text{dan} \qquad M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$$

yang dalam hal ini, operator "$\vee$" berarti "atau" dan "$\wedge$" berarti "dan". Contoh 3.16 berikut mengilustrasikan perhitungan relasi dengan menggunakan matriks.

Contoh 3.16

Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan $R_1 \cup R_2$ dan $R_1 \cap R_2$ adalah

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Komposisi Relasi

Cara lain mengkombinasikan relasi adalah dengan mengkomposisikan dua buah relasi atau lebih. Definisi dari komposisi dua buah relasi didefinisikan sebagai berikut.

DEFINISI 3.5. Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan S adalah relasi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi R dan S, dinotasikan dengan $S \circ R$, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \text{ dan untuk beberapa } b \in B, (a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in S\}$$

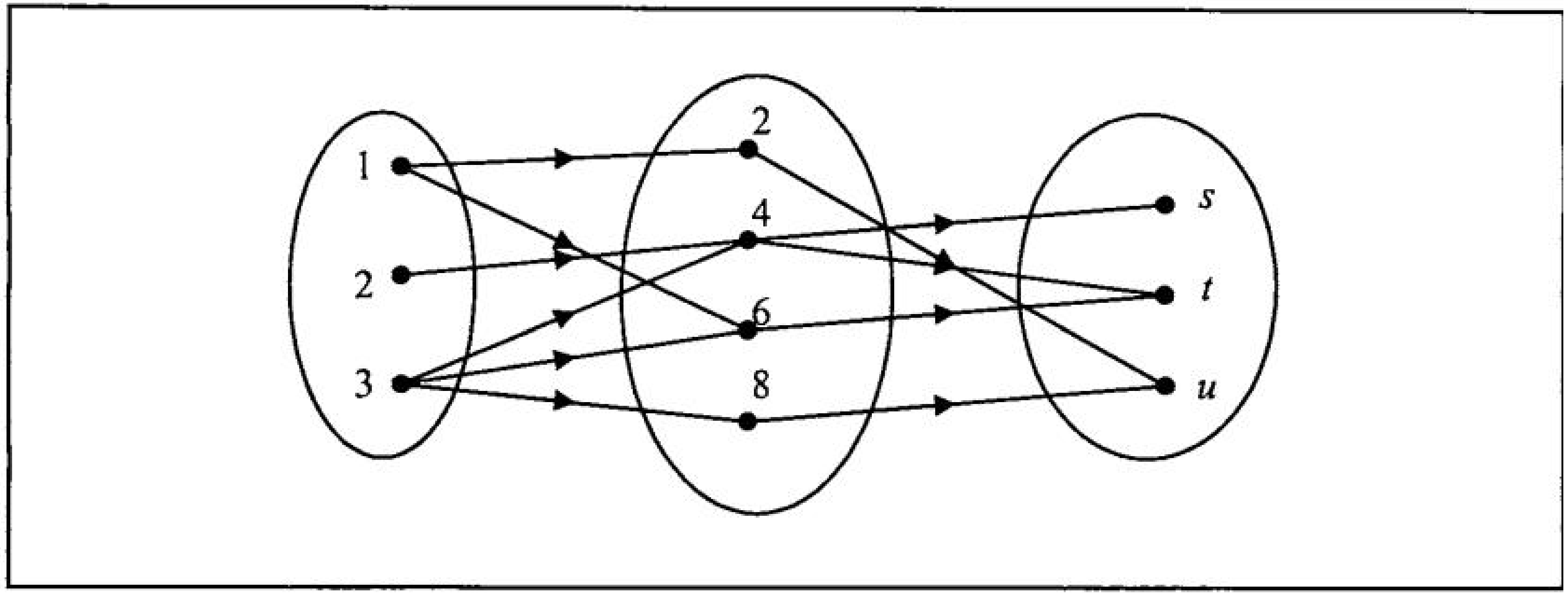
Dengan kata lain, menurut Definisi 3.5, kita menerapkan relasi R lebih dahulu, baru kemudian relasi S.

Contoh 3.17

Misalkan $R = \{(1, 2), (1, 6), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (3, 8)\}$ adalah relasi dari himpunan $\{1, 2, 3\}$ ke himpunan $\{2, 4, 6, 8\}$ dan $S = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$ adalah relasi dari himpunan $\{2, 4, 6, 8\}$ ke himpunan $\{s, t, u\}$. Maka komposisi relasi R dan S adalah

$$S \circ R = \{(1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u)\}$$

Komposisi relasi R dan S lebih jelas lagi jika diperagakan dengan diagram panah (Gambar 3.3). ■



Gambar 3.3 Diagram panah yang memperlihatkan komposisi relasi *R* dan *S* pada Contoh 3.17.

Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2}, maka matriks yang menyatakan komposisi dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \cdot M_{R2}$$

yang dalam hal ini operator "$\cdot$" sama seperti pada perkalian matriks biasa, tetapi dengan mengganti tanda kali dengan "$\wedge$" dan tanda tambah dengan "$\vee$".

Contoh 3.18

Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan $R_2 \circ R_1$ adalah

$$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \cdot M_{R2} = \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Simbol R^n digunakan untuk mendefinisikan komposisi relasi dengan dirinya sendiri sebanyak n kali, yaitu

$$R^n = R \circ R \circ \ldots \circ R \qquad (\text{sebanyak } n \text{ kali})$$

dan

$$M_{R^n} = M_R^{[n]}$$

Oleh karena

$$R^{n+1} = R^n \circ R$$

maka

$$M_{R^{n+1}} = M_R^{[n]} \cdot M_R$$

Contoh 3.19

Misalkan $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$ adalah relasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$. Tentukan R^2.

Penyelesaian:
Karena $R^2 = R \circ R$, maka

$$R \circ R = \{(1, 1), (1, 3), (1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (3, 2)\}$$

Bila diselesaikan dengan menggunakan matriks, maka matriks yang merepresentasikan relasi R adalah

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$M_{R^2} = M_R^{[2]} = M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Periksalah bahwa matriks terakhir ini merepresentasikan $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ seperti jawaban di atas.

Sifat-sifat Relasi

1. Refleksif (*reflexive*)

DEFINISI 3.6. Relasi R pada himpunan A disebut **refleksif** jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$.

Dengan kata lain, Definisi 3.6 menyatakan bahwa di dalam relasi refleksif setiap elemen di dalam A berhubungan dengan dirinya sendiri. Definisi 3.6 ini juga menyatakan bahwa relasi R pada himpunan A tidak refleksif jika ada $a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$. Contoh-contoh berikut dapat memperjelas sifat relasi refleksif.

Contoh 3.20

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

(a) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ bersifat refleksif karena terdapat elemen relasi yang berbentuk (a, a), yaitu $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, dan $(4, 4)$.

(b) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ tidak bersifat refleksif karena $(3, 3) \notin R$. ■

Contoh 3.21

Relasi "habis membagi" pada himpunan bilangan bulat positif bersifat refleksif karena setiap bilangan bulat positif selalu habis membagi dirinya sendiri, sehingga $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$. ■

Contoh 3.22

Tiga buah relasi di bawah ini menyatakan relasi pada himpunan bilangan bulat positif **N**.

$R : x$ lebih besar dari y, $\quad S : x + y = 5$, $\quad T : 3x + y = 10$

Tidak satupun dari ketiga relasi di atas yang refleksif karena, misalkan $(2, 2)$ bukan anggota R, S, maupun T. ■

Ditinjau dari representasi relasi, relasi yang bersifat refleksif mempunyai matriks yang elemen diagonal utamanya semua bernilai 1, atau $m_{ii} = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat refleksif dicirikan adanya gelang pada setiap simpulnya.

2. Setangkup (*symmetric*) dan Tolak-setangkup (*antisymmetric*)

DEFINISI 3.7. Relasi R pada himpunan A disebut **setangkup** jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \in R$, untuk semua $a, b \in A$.

Dengan kata lain, Definisi 3.7 menyatakan bahwa relasi R pada himpunan A tidak setangkup jika $(a, b) \in R$ sedemikian sehingga $(b, a) \notin R$. Sebagai contoh, misalkan A adalah himpunan mahasiswa di sebuah universitas dan R adalah relasi pada A sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ jika dan hanya jika a satu fakultas dengan b. Jelas bahwa b juga sefakultas dengan a. Jadi, R setangkup. Contoh lain, misalkan T adalah relasi pada himpunan bilangan bulat positif sedemikian sehingga $(a, b) \in T$ jika dan hanya jika $a \geq b$. Jelas T tidak setangkup, karena, misalnya $(6, 5) \in T$ tetapi $(5, 6) \notin T$.

DEFINISI 3.8. . Relasi R pada himpunan A disebut **tolak-setangkup** jika $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ maka $a = b$, untuk semua $a, b \in A$.

Definisi 3.8 menyatakan bahwa jika $(a, b) \in R$, maka $(b, a) \notin R$ kecuali $a = b$. Definisi 3.8 juga menyatakan bahwa relasi R pada himpunan A tidak tolak-setangkup jika ada elemen berbeda a dan b sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$. Sebagai ilustrasi, misalkan A adalah himpunan tes yang diadakan untuk masuk sebuah perusahaan (misalnya tes tertulis, tes kesehatan, tes wawancara, dsb). Misalkan R adalah relasi pada A sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ jika tes a dilakukan sebelum tes b. Jelas, jika tes a dilakukan sebelum tes b, tes b tidak mungkin dilakukan sebelum tes a untuk dua tes a dan b yang berbeda. Dengan kata lain, $(b, a) \notin R$ kecuali $a = b$. Jadi, R adalah relasi tolak-setangkup.

Perhatikanlah bahwa istilah setangkup dan tolak-setangkup tidaklah berlawanan, karena suatu relasi dapat memiliki kedua sifat itu sekaligus. Namun, relasi tidak dapat memiliki kedua sifat tersebut sekaligus jika ia mengandung beberapa pasangan terurut berbentuk (a, b) yang mana $a \neq b$ [ROS03].

Contoh 3.23

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

(a) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$ bersifat setangkup karena jika $(a, b) \in R$ maka (b, a) juga $\in R$. Di sini $(1, 2)$ dan $(2, 1) \in R$, begitu juga $(2, 4)$ dan $(4, 2) \in R$.

(b) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$ tidak setangkup karena $(2, 3) \in R$, tetapi $(3, 2) \notin R$.

(c) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ tolak-setangkup karena $(1, 1) \in R$ dan $1 = 1$, $(2, 2) \in R$ dan $2 = 2$, $(3, 3) \in R$ dan $3 = 3$. Perhatikan bahwa R juga setangkup.

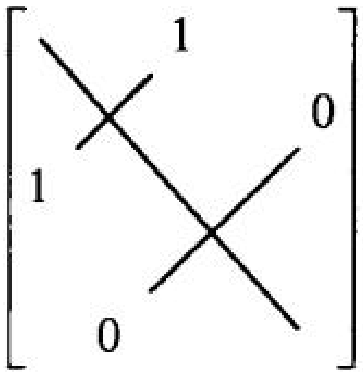
(d) Relasi $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3)\}$ tolak-setangkup karena $(1, 1) \in R$ dan $1 = 1$ dan, $(2, 2) \in R$ dan $2 = 2$ dan. Perhatikan bahwa R tidak setangkup.

(e) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 2)\}$ tidak tolak-setangkup karena $2 \neq 4$ tetapi $(2, 4)$ dan $(4, 2)$ anggota R. Relasi R pada (a) dan (b) di atas juga tidak tolak-setangkup.

(f) Relasi $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$ tidak setangkup tetapi tolak-setangkup

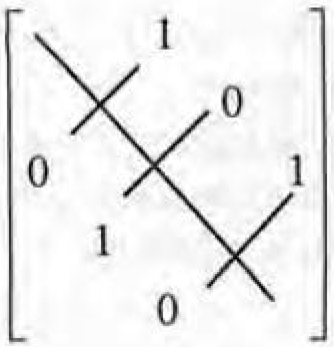
■

Ditinjau dari representasi relasi, relasi yang bersifat setangkup mempunyai matriks yang elemen-elemen di bawah diagonal utama merupakan pencerminan dari elemen-elemen di atas diagonal utama, atau $m_{ij} = m_{ji} = 1$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$. Matriks dari relasi setangkup diperlihatkan seperti di bawah ini:



Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat setangkup dicirikan oleh: jika ada busur dari a ke b, maka juga ada busur dari b ke a.

Matriks dari relasi tolak-setangkup mempunyai sifat yaitu jika $m_{ij} = 1$ dengan $i \neq j$, maka $m_{ji} = 0$. Dengan kata lain, matriks dari relasi tolak-setangkup adalah jika salah satu dari $m_{ij} = 0$ atau $m_{ji} = 0$ bila $i \neq j$. Matriks relasi tolak-setangkup diperlihatkan seperti berikut ini:



Sedangkan graf berarah dari relasi yang bersifat tolak-setangkup dicirikan oleh: jika dan hanya jika tidak pernah ada dua busur dalam arah berlawanan antara dua simpul berbeda.

3. Menghantar (*transitive*)

DEFINISI 3.9. Relasi R pada himpunan A disebut **menghantar** jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, maka $(a, c) \in R$, untuk semua $a, b, c \in A$.

Sebagai ilustrasi, misalkan A adalah himpunan orang, dan R adalah relasi pada A sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ jika dan hanya jika b adakah keturunan a. Jelas, jika b adalah keturunan a, yaitu $(a, b) \in R$, dan c adalah keturunan b, yaitu $(b, c) \in$ R, maka c juga keturunan a, yaitu $(a, c) \in R$. Jadi, R adalah relasi menghantar. Tetapi, jika T adalah relasi pada A sedemikian sehingga $(a, b) \in T$ jika a adalah ibu dari b, maka T tidak menghantar.

Contoh 3.26

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

(a) $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ bersifat menghantar. Periksa dengan membuat tabel berikut:

Pasangan berbentuk

(a, b)	(b, c)	(a, c)
(3, 2)	(2, 1)	(3, 1)
(4, 2)	(2, 1)	(4, 1)
(4, 3)	(3, 1)	(4, 1)
(4, 3)	(3, 2)	(4, 2)

(b) $R = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$ tidak manghantar karena $(2, 4)$ dan $(4, 2) \in R$, tetapi $(2, 2) \notin R$, begitu juga $(4, 2)$ dan $(2, 3) \in R$, tetapi $(4, 3) \notin R$.

(c) Relasi $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$ jelas menghantar (tunjukkan!).

(d) Relasi $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$ menghantar karena tidak ada $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$ sedemikian sehingga $(a, c) \in R$.

(e) Relasi yang hanya berisi satu elemen seperti $R = \{(4, 5)\}$ selalu menghantar (alasannya sama seperti jawaban (d) di atas).

∎

Relasi Kesetaraan

DEFINISI 3.10. Relasi R pada himpunan A disebut **relasi kesetaraan** (*equivalence relation*) jika ia refleksif, setangkup dan menghantar.

Dua elemen yang dihubungkan dengan relasi kesetaraan dinamakan **setara** (*equivalent*). Berdasarkan sifat yang dimilikinya, kesetaraan tersebut dijelaskan sebagai berikut: Karena relasi bersifat setangkup, maka dua elemen yang dihubungkan relasi adalah setara. Karena relasi bersifat refleksif, maka setiap elemen setara dengan dirinya sendiri. Karena relasi bersifat menghantar, maka jika a dan b setara dan b dan c setara, maka a dan c setara.

Sebagai contoh, misalkan R adalah relasi pada himpunan mahasiswa sedemikian sehingga $(a, b) \in R$ jika a satu angkatan dengan b. Karena setiap mahasiswa seangkatan dengan dirinya sendiri, maka R jelas refleksif. Perhatikan, jika a seangkatan dengan b, maka b pasti seangkatan dengan a. Jadi, R setangkup. Selanjutnya, jika a seangkatan dengan b dan b seangkatan dengan c, maka pastilah a seangkatan dengan c. Jelas, R bersifat menghantar. Dengan demikian, R adalah relasi kesetaraan.

Relasi Pengurutan Parsial

Klosur Relasi

Relasi n-ary