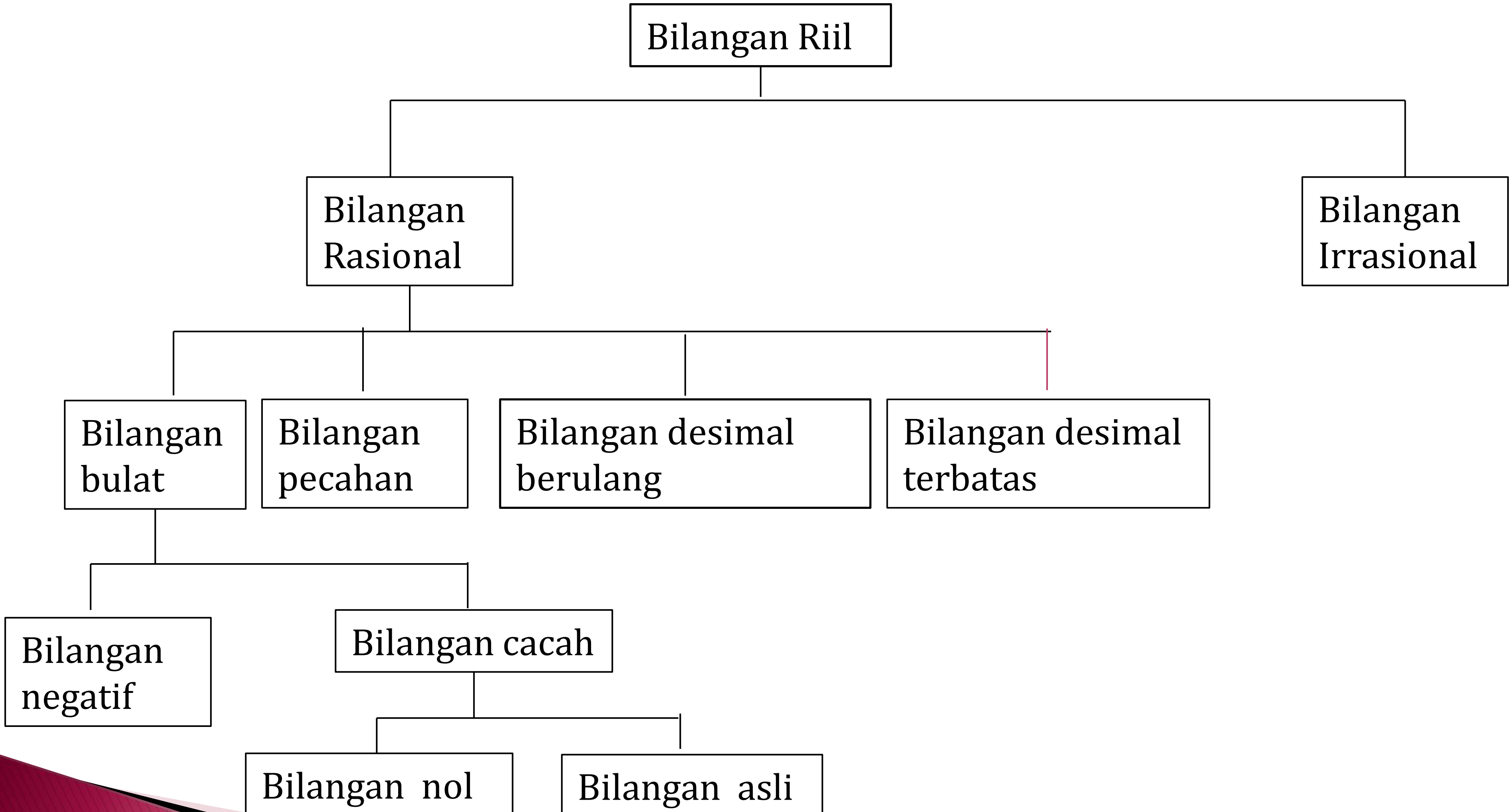
Dasar-Dasar Penunjang Kalkulus

Pertemuan 1 dan 2

Bilangan Riil



Pertidaksamaan

- Pertidaksamaan satu variabel adalah suatu bentuk aljabar dengan satu variabel yang dihubungkan dengan relasi urutan.
- Bentuk umum pertidaksamaan :

$$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}$$, A(x), B(x), C(x) dan D(x) : suku banyak. (tanda $<$ dapat digantikan oleh $\leq, \geq, >$).

dengan A(x), B(x), D(x), E(x) adalah suku banyak (polinom) dan B(x) ≠ 0, E(x) ≠ 0

Nilai Mutlak

Misalkan $x \in \mathbb{R}$. Harga mutlak dari x, ditulis $|x| = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$

Contoh: $|3| = 3, \quad |-4| = 4, \quad |0| = 0.$

Akar Kuadrat

Misalkan $x \geq 0$. Akar kuadrat dari x, ditulis $\sqrt{x}$ adalah **bilangan real non-negatif** a sehingga $a^2 = x$.

Ilustrasi: (a) $\sqrt{9} = 3$, (b) $\sqrt{(-4)^2} = 4$.

Secara umum : Bila $b \in \mathbb{R}$ maka $\sqrt{b^2} = |b|$.

Teorema-teorema

Jika a dan b adalah bilangan ril, maka :

(i) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

(ii) $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ atau $x < -a$

(iii) $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$

(iv) $|x| \ge a \Leftrightarrow x \ge a$ atau $x \le -a$

(v) $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ atau $x = -a$

(vi) $|ab| = |a||b|$. Bukti $|ab| = \sqrt{(ab)^2} = \sqrt{a^2b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = |a||b|$ (terbukti)

(vii) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$. Bukti $\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{\left\{\frac{a}{b}\right\}^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$ (terbukti)

(viii) $|a + b| \le |a| + |b|$ (ketidaksamaan segitiga)

Bukti : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \le |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = \{|a| + |b|\}^2$

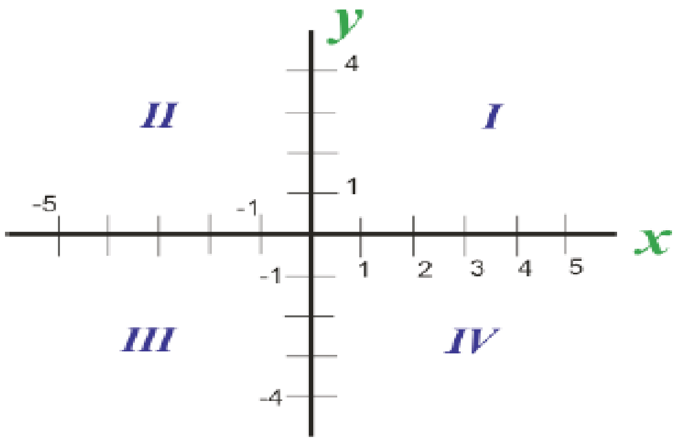
$$\sqrt{(a+b)^2} \le \sqrt{\{|a| + |b|\}^2} = \big||a| + |b|\big| = |a| + |b| \quad \text{(terbukti)}$$

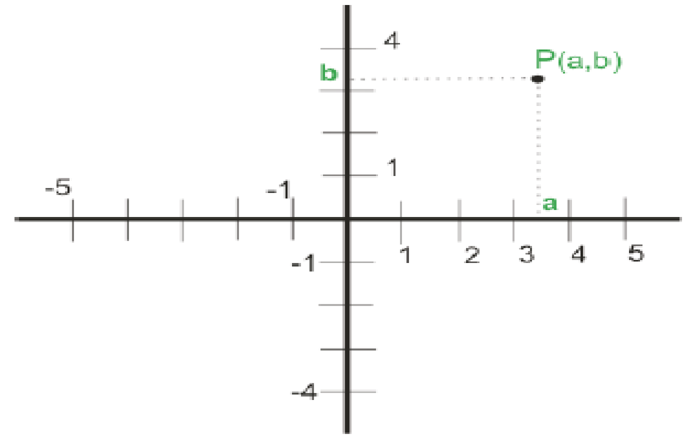
(ix) $|a - b| \le |a| + |b|$. Bukti $|a - b| = |a + (-b)| \le |a| + |b|$ (terbukti)

(x) $|a| - |b| \le |a - b|$. Bukti $|a| = |(a - b) + b| \le |a - b| + |b|$

Jika setiap suku dikurangi dengan $|b|$, maka $|a| - |b| \le |a - b|$ (terbukti)

Sistem Koordinat Kartesius





Sumbu horizontal dinamakan sumbu-x (*absis*) dan sumbu vertikal dinamakan sumbu-y (*ordinat*). Setiap pasangan terurut bilangan (a, b) dapat digambarkan sebagai sebuah titik pada koordinat tersebut dan sebaliknya, setiap titik pada bidang koordinat Kartesius berkorespondensi dengan satu buah pasangan bilangan (a, b).

Jarak Dua Titik di Bidang

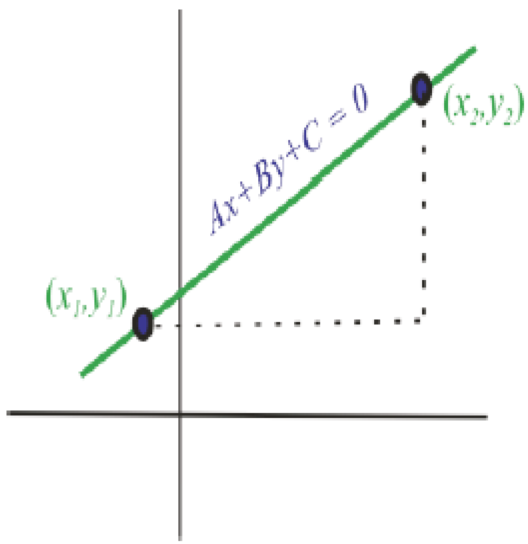
Misalkan P(x_1, y_1) dan Q(x_2, y_2) dua buah titik pada bidang, jaraknya adalah $d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Garis Lurus

Bentuk umum: $Ax + By + C = 0$ dengan $A, B,$ dan C konstanta.
Nilai A dan B tidak boleh nol secara bersamaan.
Grafik garis lurus ditentukan oleh dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) yang *memenuhi* persamaan tersebut.

Hal² khusus:

- Bila $A = 0$, persamaan berbentuk $y = \frac{-C}{B}$, grafiknya sejajar sumbu-x.
- Bila $B = 0$, persamaan berbentuk $x = \frac{-C}{A}$, grafiknya sejajar sumbu-y.
- Bila A, B tak nol, $Ax + By + C = 0 \Longleftrightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.



Misalkan (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) dua titik pada garis tersebut. Kemiringan garis didefinisikan sebagai $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Buktikan bahwa $m = -\frac{A}{B}$.

Persamaan garis lurus yang melalui dua titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Persamaan garis lurus dengan kemiringan m dan melalui titik (x_1, y_1) :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

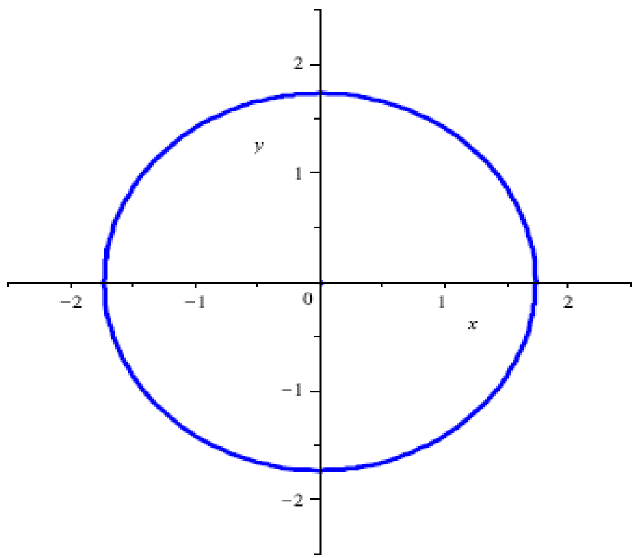
Misalkan garis ℓ_1 dan ℓ_2 dua buah garis dengan kemiringan m_1 dan m_2.

Kedua garis tersebut sejajar $\Longleftrightarrow m_1 = m_2$

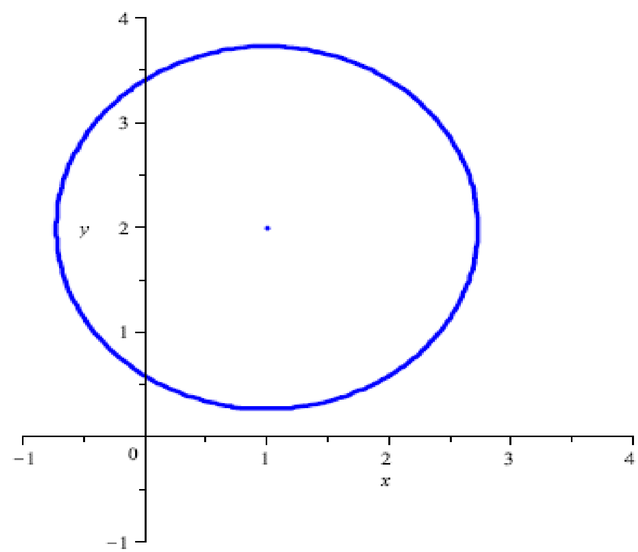
Kedua garis tersebut saling tegak lurus $\Longleftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$ (mengapa?)

Lingkaran

Lingkaran adalah himpunan titik-titik yang jaraknya sama terhadap titik tertentu (disebut pusat lingkaran). Persamaan lingkaran yang berpusat di $(0,0)$ dan jari-jari r adalah: $x^2 + y^2 = r^2$ (gambar sebelah kiri). Bila pusat lingkaran berada di titik (p,q) maka persamaannya menjadi $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$(gambar sebelah kanan).



lingkaran $x^2 + y^2 = 3$



lingkaran $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

Soal Latihan

Cari himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan

1 $\dfrac{x+2}{4-2x} \geq 1-x$

2 $\dfrac{x-2}{x^2} \leq \dfrac{x+1}{x+3}$

3 $|2-x|+|3-2x| \leq 3$

4 $|x+1|^2 + 2|x+2| \geq 2$

5 $2x+3 \geq |4x+5|$

6 $||x|+3x| \leq 2$