Daftar Isi

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. PENGERTIAN METODE NUMERIK

Metode numerik adalah satu-satunya metode alternatif yang ada dalam upaya menyelesaikan persoalan-persoalan matematis. Metode yang lain dikenal dengan sebutan ***metode analitik***. Ada dua alasan umum mengapa pilihan dijatuhkan kepada metode numerik. Alasan pertama metode ini memberikan keefisienan dan keefektipan di dalam menyelesaikan perpersolan-persoalan matematis dikarenakan berkembangnya perangkat keras dan lunak komputer akhir-akhir ini. Alasan yang lain adalah metode numerik memungkinkan untuk mengkaji parametrik dari persoalan dengan medan yang bersifat sembarang. Alasan yang terakhir ini lebih bermakna ketidakmampuan metode analitik untuk menyelesaikan persolan-persoalan matematis aplikasi yang kompleks. Dalam banyak literatur analisa numerik diungkapkan bahwa di dalam metode numerik keputusan menerima atau menolak suatu jawaban aproksimasi berdasarkan kepada toleransi kedekatan yang disepakati. Toleransi yang dibuat menyangkut kesepakatan kesalahan/galat yang ditimbulkan oleh rumus/formula yang digunakan. Tentu semakin kecil kesalahan/galat yang ditimbulkan oleh penggunaan suatu rumus/formula maka semakin baik hasil aproksimasi yang dihasilkan.

Kemajuan teknologi komputer saat ini memberi peluang besar untuk mendapatkan nilai aproksimasi yang cepat dan akurat yang pada akhirnya meringankan kerja si pengguna metode numerik. Hal ini didasari pada kenyataan bahwa metode-metode yang sudah ada maupun yang sedang dikembangkan memerlukan proses interasi yang cukup panjang. Oleh karena itu tidak cukup memadai bila dikerjakan dengan cara manual maupun menggunakan kalkulator biasa yang telah dikenal. Ada banyak contoh aplikasi matematika yang mengharuskan pilihan dijatuhkan kepada metode numerik ketimbang metode analitik. Contoh yang dimaksud dua diantaranya adalah:

Contoh 1.1. (Disari dari Turner (1988))
Diberikan sebuah sistem persamaan diferensial orde satu dalam bentuk

$$\begin{aligned} dx/dt &= A\sin\ z + C\cos\ y\ \left(\mathrm{mod}\ 2\pi\right) \\ dy/dt &= B\sin\ x + A\cos\ z\ \left(\mathrm{mod}\ 2\pi\right) \\ dz/dt &= C\sin\ y + B\cos\ x\ \left(\mathrm{mod}\ 2\pi\right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Sistem ini dikenal dengan sebutan Flow ABC (Arnold–Beltrami-Childress). Pada koordinat bujur sangkar, system tersebut periodik dengan periode 2-π pada *x*, *y*, and *z*. Ketika A dan B sama dengan satu dan C sama dengan nol, system di atas terintegralkan, selain itu ia tidak terintegralkan.

Contoh 1.2. (Disari dari Sediawan dan Prasetya (1997)

Karakteristik pompa sentrifugal yang digunakan untuk membantu proses pengaliran cairan dari sebuah tangki (L1) ke tangki lain (L2) melalui sebuah pipa berdiameter D adalah terletak pada hubungan antara Head pompa (H_m) dalam satuan centimeter dengan Debit (Q) dalam satuan centimeter kubik per detik. Model matematika untuk karakteristik pompa demikian diberikan dalam bentuk

$$H_m = 3718{,}5 - 2{,}3495\,Q + 7{,}84774^{-4}\,Q^2 - 9{,}5812\text{x}10^{-8}\,Q^3 \tag{1.2}$$

Contoh ini memberikan gambaran kepada kita bahwa betapa suatu model matematika yang dibentuk dari fenomena alam memerlukan jawaban numeris yang akan memberikan arti.

Dengan menggunakan metode numerik kedua persoalan matematis di atas dapat diselesaikan. Sebaliknya metode analitik sungguh sulit digunakan menyelesaikan kedua persamaan matematis yang diberikan dalam Contoh 1.1 dan Contoh 1.2. Gambaran yang diberikan oleh kedua contoh di atas adalah cukup beralasan jika seorang *problem solver* yang menangani persoalan matematis memiliki kemampuan metode numerik dan ketrampilan menggunakan media komputer sebagai alat bantu untuk menyelesaikan persoalan-persoalan yang sulit ketika akan dilakukan secara analitik.

Hal yang hampir tidak mungkin dilakukan jika menggunakan metode numerik adalah tidak melibatkan alat komputasi (Kalkulator atau Komputer). Salah satu alasan yang paling krusial adalah metode numerik selalu melibatkan cara iterasi (proses yang berulang).

Berikut ini sejumlah perangkat lunak yang dapat digunakan untuk menerapkan suatu metode numerik :

SPREADSHEET
TURBO PASCAL
FORTRAN
MATHEMATICA
MAPLE
BASIC
C++
TURBO C

Mempelajari metode numerik di perguruan tinggi dimaksudkan untuk mempersiapkan/membekali mahasiswa bersangkutan tentang konsep dasar dan teknik menggunakan metode numerik di dalam menyelesaikan persoalan-persoalan matematis. Dari maksud ini, tujuan yang ingin dicapai adalah mahasiswa diharapkan mampu menggunakan metode numerik secara baik dan benar di dalam menyelesaikan persoalan matematis yang dihadapi dan mampu mengembangkan wawasan pemikiran tentang konsep metode numerik lanjutan dan penggunaannya.

1.2. BILANGAN DAN ANGKA SIGNIFIKAN

Ada dua klasifikasi bilangan real yang dikenal dalam matematika yaitu bilangan **eksak** dan **non eksak**. Bilangan **eksak** terdiri dari bilangan *asli*, *bulat*, *rasional* dan *irasional* (yang ditulis dalam bentuk $\sqrt{2}$, π, dan e, misalnya). Bilangan **non eksak** dikenal juga dengan sebutan bilangan **aproksimasi** yakni bilangan hasil pembulatan/pendekatan/hampiran dari suatu bilangan eksak (biasanya bilangan irasional yang ditulis dalam bentuk bilangan desimal "terbatas"). Bilangan-bilangan aproksimasi dinyatakan dengan bilangan yang mempunyai derajat ketelitian. Misalnya, bilangan π diaproksimasi menjadi 3,1416 (teliti hingga empat tempat desimal), atau 3,14159265 (teliti hingga delapan tempat desimal). Sementara itu nilai eksak dari π adalah bilangan desimal tak terbatas sehingga tidak mungkin dapat ditulis.

Angka-angka yang menyatakan suatu bilangan disebut angka-angka signifikan. Jadi bilangan-bilangan 3,1416; 0,66667 dan 4,0687 masing-masing memuat lima angka signifikan. Bilangan 0,0023 hanya mempunyai dua angka signifikan yaitu 2 dun 3, karena nol hanya menentukan tempat dari titik desimal.

Seringkali diinginkan untuk memotong/menyingkat penulisan bilangan-bilangan yang tersusun panjang yang terdapat dibelakang tanda koma "**,**" (versi indonesia) atau tanda titik "**.**" (versi *western*) misalnya **12,345678912344** (versi indonesia) atau **12.345678912344** (versi *wester*n) yang memiliki **12** angka dibelakang tanda koma versi indonesia. Proses pemotongan bilangan seperti itu disebut Pembulatan. Secara umum, bilangan-bilangan yang dibulatkan mengikuti aturan berikut:

Untuk membulatkan suatu bilangan sampai ke *n* angka signifikan, hilangkan semua bilangan yang ada setelah angka ke *n*+1. Apabila bilangan tepat ke *n*+1 yang dihilangkan tersebut berkondisi

(a) kurang dari 5 (setengah satuan), maka angka ke *n* tidak berubah (tetap).

(b) lebih besar dari 5 (setengah satuan), maka angka ke *n* bertambah satu (satu satuan).

(c) tepat 5 (setengah satuan), maka angka ke *n* bertambah satu (satu satuan) bila angka ke ***n* ganjil**, selain itu tetap.

Bilangan yang dibulatkan disebut teliti sampai *n* angka signifikan.

Contoh 1.3. Bilangan-bilangan berikut dibulatkan sampai empat angka signifikan :

1,6583	ke	1,658
30,0567	ke	30,06
0,859378	ke	0,8594
3,14159	ke	3,142

1.3. KONSEP DASAR KALKULUS : NILAI ANTARA DAN DERET TAYLOR

Dalam bagian ini dikemukakan beberapa teorema tanpa pembuktian (bukti dapat dilihat pada buku-buku kalkulus) yang akan digunakan di dalam bagian berikutnya.

Teorema 1.1

Bila $f(x)$ kontinu dalam $a < x < b$ dan $f(a)$ dengan $f(b)$ berlawanan tanda, maka $f(\alpha) = 0$ untuk suatu bilangan α sedemikian hingga $a < \alpha < b$.

Teorema 1.2

Bila : (i) $f(x)$ kontinu dalam $a < x < b$

(ii) $f'(x)$ ada dalam $a < x < b$, dan

(iii) $f(a) = f(b) = 0$

maka ada paling sedikit satu nilai *x*, sebutlah α, sedemikian hingga $f'(\alpha) = 0$ dengan $a < \alpha < b$.

Teorema 1.3

Bila : (i) $f(x)$ kontinu dalam $a \le x \le b$

(ii) $f'(x)$ ada dalam $a < x < b$, dan

maka, ada paling sedikit satu nilai $x = \alpha$, sedemikian
hingga

$$f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ dengan } a < \alpha < b \tag{1.3}$$

Bila $b = a + h$, teorema tersebut dapat dinyatakan dengan bentuk :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a + \theta h), \text{ dengan } 0 < \theta < 1$$

Teorema 1.4

Bila $f(x)$ kontinu dan memiliki turunan ke *n* yang kontinu dalam suatu interval yang memuat $x = a$, maka di dalam interval tersebut berlaku

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n \tag{1.4}$$

dengan $R_n(x)$ adalah suku sisa yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha), \quad a < \alpha < x \tag{1.5}$$

Bila $a = 0$ maka deret Taylor di atas dikenal dengan sebutan deret Maclaurin.

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n-1)}(0) + \cdots \tag{1.6}$$

Teorema 1.5 (Deret Taylor untuk fungsi dengan dua variabel).

$$f\left(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2\right)=f\left(x_1, x_2\right)+\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+ \\ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\Delta x_1\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\Delta x_1\cdot\Delta x_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\Delta x_2\right)^2\right]+\cdots \qquad (1.7)$$

1.4. GALAT DAN TOLERANSI DALAM METODE NUMERIK

1.4.1 Galat

Di dalam pemakaian praktis, penyelesaian akhir yang diperlukan berbentuk numerik. Misalnya, set dari tabulasi data yang diberikan dan kesimpulan-kesimpulan yang dimiliki gambar dari data tersebut; atau penyelesaian suatu sistem persamaan linear yang diberikan. Metode/cara yang ditempuh dengan melibatkan bilangan/angka tertentu dikenal dengan **metode numerik**. Tujuan dari metode numerik adalah memberikan metode-metode yang efisien untuk memperoleh jawaban numerik dari bermacam-macam permasalahan.

Untuk menyelesaikan suatu masalah biasanya dimulai dengan sebarang data awal kemudian dihitung, selanjutnya dengan langkah-langkah (pengolahan) tertentu, akhirnya diperoleh suatu penyelesaian. Data numerik adalah suatu aproksimasi (taksiran) yang sesusai sampai dengan dua, tiga, atau lebih tempat desimal. Kadang metode yang digunakanpun, adalah suatu aproksimasi. Oleh sebab itu galat dalam hasil perhitungan mungkin disebabkan oleh galat data, atau galat di dalam pemakaian suatu metode, atau kedua-duanya. Dalam bagian ini akan dibicarakan ide dasar tentang galat.

a. Tipe Galat

Galat Inheren (*Inherent Error*).

Galat inheren merupakan galat bawaan akibat penggunaan suatu metode numerik. Akibat perhitungan numerik yang sebagian besar adalah tidak eksak, dapat menyebabkan data yang diperoleh adalah data aproksimasi. Selain itu, keterbatasan dari alat komputasi seperti tabel matematika, kalkulator atau komputer digital juga membuat perhitungan numerik tidak eksak. Karena keterbatasan tersebut, bilangan-bilangan yang diperoleh adalah hasil pembulatan. Di dalam perhitungan, galat inheren dapat diperkecil melalui penggunaan data yang besar, pemeriksaan galat yang jelas dalam data, dan penggunaan alat komputasi dengan ketelitan yang tinggi.

Galat Pemotongan (*Truncation Error*)

Galat ini disebabkan oleh adanya penghilangan sebarisan suku dari suatu deret/ekspansi untuk tujuan peringkasan pekerjaan perhitungan. Galat pemotongan adalah galat yang tak dapat dihindarkan.

b. Jenis Galat

Galat Mutlak

Galat mutlak adalah selisih numerik antara besar nilai sebenarnya dengan nilai aproksimasinya. Jadi, bila x besar nilai yang sebenarnya, dan x_1 nilai pendekatannya (aproksimasinya), maka galat mutlak (*Absolut Error*) E_a didefinisikan dengan

$$E_a = x - x_1 = \delta x \tag{1.8}$$

Galat Relatif

Galat Relatif E_R didefinisikan dengan

$$E_R = \frac{E_A}{x} = \frac{\delta x}{x} \tag{1.9}$$

Kemudian persentase galat dihitung dari galat relatif yang diberikan dalam bentuk

$$P_E = 100 E_R \tag{1.10}$$

Galat Global

Misal $u = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ adalah fungsi dengan variabel banyak $x_i = \left(1, 2, \cdots, n\right)$, dan misalkan galat dari tiap x_i adalah Δx_i. Galat Δu dari u diberikan dalam bentuk

$$u + \Delta u = f\left(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \cdots, x_n + \Delta x_n\right)$$

Perluasan ruas kanan dari galat global tersebut oleh deret Taylor (Teorema 1.5) menghasilkan

$$u+\Delta u = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i$$

$$+ \text{ semua suku yang memuat } \left(\Delta x_i\right)^2 \qquad (1.11)$$

$$+ \text{ semua suku yang lain.}$$

Anggap bahwa galat dalam x_i adalah kecil dan $\frac{\Delta x_i}{x_i} \ll 1$. Kemudian semua suku setelah suku ke dua pada ruas kanan persamaan di atas diabaikan. Persamaan (1.4) menjadi

$$\Delta u \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n \qquad (1.12)$$

Bila diperhatikan formula (1.12) bentuknya sama dengan diferensial total dari *u*. Formula untuk galat relatif adalah sebagai berikut:

$$E_R = \frac{\Delta u}{u} = \frac{\partial u}{\partial x_1}.\frac{\Delta x_1}{u} + \frac{\partial u}{\partial x_2}.\frac{\Delta x_2}{u} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}.\frac{\Delta x_n}{u} \qquad (1.13)$$

Contoh berikut adalah ilustrasi dari penggunaan formula (rumus) tersebut.

Contoh 1.4.

Misal $u = \frac{5xy^2}{z^3}$

maka

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{5y^2}{z^3}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{10xy}{z^3}, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{15xy^2}{z^4}, \text{ dan } \Delta u = \frac{5y^2}{z^3}.\Delta x + \frac{10xy}{z^3}.\Delta y - \frac{15xy^2}{z^4}.\Delta z$$

$\Delta x, \Delta y,$ dan Δz dapat bernilai positif atau negatif. Karena itu diberikan nilai mutlak pada suku-suku di ruas kanan persamaan di atas, sehingga diperoleh

$$\left(\Delta u\right)_{maks} \approx \left|\frac{5y^2}{z^3}\Delta x\right| + \left|\frac{10xy}{z^3}\Delta y\right| + \left|\frac{15xy^2}{z^4}\Delta z\right|$$

Bila $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,001$ dan $x = y = z = 1$, maka galat relatif maksimum adalah

$$\left(E_R\right)_{maks} = \frac{\left(\Delta u\right)_{maks}}{u} = \frac{0,03}{5} = 0,006$$

Galat dalam Aproksimasi Deret

Galat yang ada dalam aproksimasi suatu deret dapat dievaluasi oleh sisa sesudah suku-suku ke *n*. Pandang deret Taylor untuk *f*(*x*) pada *x* = *a* yang diberikan dalam bentuk

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+...+\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+R_n(x).$$

Suku terakhir dalam deret di atas dikenal dengan sebutan suku sisa deret Taylor yang didefinisikan sebagai berikut

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^n}{n!}f^n(\alpha), a<\alpha<x.$$

Untuk suatu barisan yang konvergen, suku-suku sisa akan mendekati nol untuk $n \to \infty$. Jadi, bila kita mengaproksimasi $f(x)$ oleh n suku pertama dari deret tersebut maka galat maksimum yang dibuat dalam aproksimasi tersebut diberikan oleh suku sisa.

Contoh 1.5.

Ekspansi McLaurin untuk e^x diberikan oleh:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}e^\alpha, 0<\alpha<x$$

akan dicari n, yaitu banyaknya suku-suku, sedemikian hingga jumlahnya sama dengan e^x teliti sampai 8 tempat desimal pada $x = 1$.

Ternyata, galat sukunya adalah $\frac{x^n}{n!}e^\alpha$, dan untuk $\alpha = x$ memberikan galat mutlak maksimum, dan karenanya galat relatif maksimumnya adalah $\frac{x^n}{n!}$.

Bila dihitung teliti sampai 8 desimal di $x = 1$, maka kita peroleh:

$$\frac{1}{n!}<\frac{1}{2}\bullet 10^{-8}$$

yang memberikan $n = 12$. Jadi, diperlukan 12 suku dari deret eksponsial dalam urutan itu yang jumlahnya teliti sampai 8 desimal.

1.4.2 Toleransi

Dalam menyikapi galat yang dijumpai perlu adanya batasan nilai galat yang diterima yang disebut dengan **nilai toleransi**. Toleransi biasa disingkat dengan **Tol** didefinisikan sebagai batas penerimaan suatu galat. Dari pengertian ini yang dimaksud dengan Toleransi Galat Mutlak adalah *nilai mutlak dari selisih nilai eksak (nilai sebenarnya) dengan nilai aproksimasi* dan dinotasikan dengan :

$$|x-x_1| \le \Delta x$$

Selain itu ukuran ketelitian relatif di notasikan dengan

$$\frac{\Delta x}{|x|} \approx \frac{\Delta x}{|x_1|}.$$

Contoh 1.8.

Bila x adalah bilangan yang dibulatkan ke N tempat desimal, maka $\Delta x = \frac{1}{2} \cdot 10^{-N}$

Bila $x < 0.51$ maka x teliti sampai 2 tempat desimal, sehingga $\Delta x = \frac{1}{2} 10^{-2} = 0.005$

dan ketelitian relatifnya adalah $\frac{\Delta x}{|x|} = \frac{0.005}{0.51} \approx 0.98\%$.

Soal-soal latihan.

1. Bulatkan bilangan-bilangan berikut menjadi bilangan dengan dua tempat desimal.

   $48,21416 \qquad 2,3742 \qquad 52,275$

2. Bulatkan bilangan-bilangan berikut ke 4 angka signifikan

   $0,70029 \qquad 38,46235 \qquad 0,00222218$

3. Diketahui $u = 3v^7 - 6v$. tentukan persentase galat dalam u pada v = 1 bila galat dalam v adalah 0,05.
4. Tentukan banyaknya suku dari deret eksponensial sedemikian hingga jumlahnya adalah nilai dari e^x teliti sampai lima tempat desimal untuk semua nilai x dalam $0 \le x \le 1$.
5. Ekspansi dari fungsi $f(x) = \tan^{-1} x$ adalah

   $$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \ldots + (-1)^{n-1} . \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

   Tentukan n sedemikian sehingga deret $\tan^{-1} 1$ dapat ditentukan teliti sampai 8 angka signifikan.

BAB II
METODE NUMERIK UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN ALJABAR DAN/ATAU TRANSENDEN

Di dalam kerja ilmiah dan teknik sering dijumpai suatu masalah berkenaan dengan upaya menyelesaikan persamaan yang berbentuk:

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

Menyelesaikan persamaan (2.1) maksudnya adalah mencari suatu nilai berkenaan dengan peubah x sedemikian hingga persamaan tersebut bernilai benar. Nilai-nilai yang dimaksud biasanya disebut dengan nilai-nilai akar.

Bila $f(x)$ berbentuk fungsi polinom sederhana (kuadrat, pangkat tiga, atau pangkat empat) maka ada rumus-rumus aljabar (metode faktorisasi dan metode "pembagian suku banyak, misalnya) dapat digunakan untuk menentukan nilai-nilai akarnya. Sebaliknya, bila $f(x)$ suatu polinom berderajat lebih tinggi atau berbentuk transenden seperti,

$$1+\cos(x)-5x,\ x\tan(x)-\cosh(x),\ e^x-\sin(x), \text{ dan seterusnya,}$$

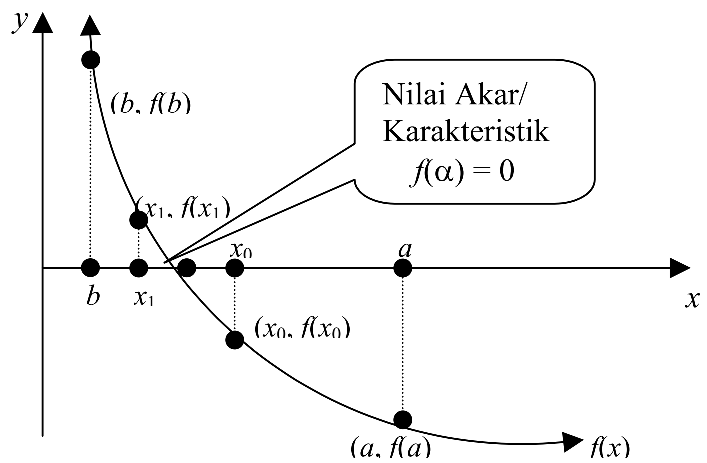
tidak tersedia metode aljabar untuk solusinya. Oleh karena itu harus ditempuh dengan cara aproksimasi.

Dalam bagian ini, akan dibicarakan beberapa metode numerik untuk menyelesaikan permasalahan (2.1) dengan $f(x)$ adalah fungsi aljabar dan/atau transenden.

2.1. METODE BISEKSI (*BISECTION METHOD*)

Dinamakan metode biseksi (*Bi Section*) didasarkan atas teknis metode ini adalah "belah dua". Metode Biseksi diformulasikan berdasarkan Teorema 1.1 yang menyatakan bahwa bila fungsi $f(x)$ kontinu dalam selang/interval (a,b), dan $f(a)$ dan $f(b)$ berlawanan tanda, maka $f(\alpha)=0$ untuk suatu bilangan α sedemikian hingga $a<\alpha<b$.

Dengan metode Biseksi, nilai α pertama kali diaproksimasi dengan memilih x_0 yang didefinisikan dengan $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$. Bila $f(x_0) = 0$ atau $f(x_0)$ “dekat” kepada nilai 0 untuk suatu nilai toleransi yang diberikan maka x_0 adalah nilai akar dari $f(x) = 0$. Sebaliknya bila $f(x_0) \neq 0$ atau $f(x_0)$ “dekat” kepada nilai 0 **tetapi tidak memenuhi suatu nilai toleransi** yang diberikan, maka berdasarkan Teorema 1.1 ada dua kemungkinan yakni nilai akar berada di antara a dan x_0 atau nilai akar berada di antara x_0 dan b. Dari salah satu kemungkinan ini, metode Biseksi kembali akan digunakan. Secara geometris, metode Biseksi yang dikemukan di atas diilustrasikan melalui gambar grafik berikut ini.



Gambar 2.1

Contoh 2.1

Carilah nilai akar dari persamaan $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

Penyelesaian:

Pilih a = 1 dan b = 2. Karena $f(1)$ negatif dan $f(2)$ positif, maka salah satu akar terletak diantara 1 dan 2 (Teorema 1.1.). Oleh karena itu $x_0 = \dfrac{3}{2} = 1,5$. Kemudian, karena $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 - \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{7}{8}$ (positif) maka akar karakteristik terletak antara 1 dan 1,5.

Kondisi ini memberikan $x_1 = \frac{1+1,25}{2} = 1,25$. Karena $f(x_1) = f(1,25) = -\frac{19}{64}$ (negatif), nilai akar yang dicari terletak diantara 1,25 dan 1,5. Sehingga diperoleh

$$x_2 = \frac{1,25+1,5}{2} = 1,375 .$$

Bila prosedur di atas diulang kembali hingga x_5 diperoleh nilai-nilai aproksimasi berikut:

$$x_3 = 1,3125 ,\ x_4 = 1,34375 ,\ x_5 = 1,328125 .$$

2.2. METODE ITERASI

Dalam proses iteratif, dimulai dengan aproksimasi x_0 untuk suatu akar α dan dari hasil tersebut dilakukan aproksimasi x_1 sebelum aproksimasi x_2 demikian seterusnya. Dengan proses yang efektif nilai-nilai yang diperoleh $x_1, x_2, x_3, \cdots$ makin lama makin mendekati akar α . Proses tersebut diteruskan sehingga aproksimasi dengan ketelitian yang diinginkan diperoleh. Jadi untuk suatu proses iteratif kita perlukan kedua hal berikut :

(i) Aproksimasi x_0, dan

(ii) Metode atau formula untuk memperoleh aproksimasi x_{n+1} dalam suku-suku dari aproksimasi x_n

2.2.1. Metode Iterasi Sederhana

Pandang persamaan (2.1) yang ingin diselesaikan. Ubahlah persamaan tersebut sehingga berbentuk

$$x = F(x) \tag{2.2}$$

Pilih $x = x_0$, kemudian subsitusikan tersebut ke (2.2) hasilnya sebut saja x_1. Oleh karena itu dipunyai persamaan berikut:

$$x_1 = F(x_0) \tag{2.3}$$

Analog, akan dipunyai sebarisan nilai-nilai $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}$. Untuk nilai terakhir dari barisan ini, berdasarkan hasil (2.3) diperoleh hubungan

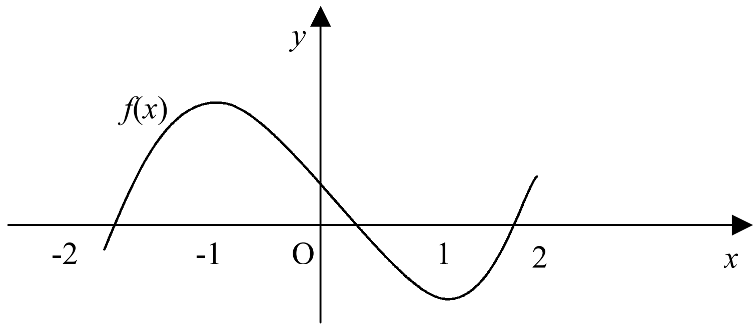
$$x_{n+1} = F(x_n) \qquad (2.3)$$

Cara penyelesaian persaman (2.1) dengan menggunakan formula (2.3) dikenal dengan sebutan **metode Iterasi Sederhana**. Proses iterasi dalam metode ini dihentikan ketika

$$\left| x_{n+1} - x_n \right| \le Tol \tag{2.4}$$

Contoh 2.2

Carilah akar dari persamaan $2x^3 - 7x + 2 = 0$ yang sketsa grafiknya ditunjukkan oleh Gambar 2.2.



Gambar 2.2

Persamaan $2x^3 - 7x + 2 = 0$ dapat ditulis sebagai

$$x = F(x) = \frac{2}{7}\left(x^3 + 1\right),$$

Dari sketsa grafik terlihat bahwa akar positifnya terletak antara 0 dan 1, dan yang lainnya terletak diantara 1 dan 2. Untuk nilai akar yang berada diantara 0 dan 1.

Pilih aproksimasi awal $x_0 = 1$. Dengan formula

$$x_{n+1} = \frac{2}{7}\left(x_n^{\ 3} + 1\right) \tag{2.5}$$

diperoleh hasil berikut :

$$x_1 = \frac{2}{7}\left(1^3 + 1\right) = 0,571 \text{ (dibulatkan hingga tiga tempat desimal)}$$

Subsitusikan nilai $x_1 = 0,571$ ke dalam persamaan (2.5) diperoleh

$$x_2 = 2/7\left[\left(0,571\right)^3 + 1\right] = 0,339.$$

Dengan cara yang sama menghasilkan nilai-nilai aproksimasi sebagaimana ditampilkan dalam Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Daftar Nilai x_n dalam Persamaan (2.5) untuk n = 1 hingga 5.

n	x_n	$x_n^{\ 3}$	$2/7\left(x_n^{\ 3}+1\right)$
0	1	1	0,571
1	0,571	0,186	0,339
2	0,339	0,039	0,297
3	0,297	0,026	0,293
4	0,293	0,025	0,293
5	0,293		

Dari Tabel 2.1. diperoleh informasi bahwa proses konvergen ke 0,293 (pembulatan hingga tiga tempat desimal). Sementara itu, nilai akar eksak dari $2x^3-7x+2=0$ bersesuaian adalah $1-1/2\sqrt{2}=0,292893$ .... . Ketelitian lebih tinggi untuk solusi dengan cara iterasi dapat diperoleh bila angka-angka signifikan dipakai lebih banyak di dalam perhitungan. Misalnya, bila dipakai empat tempat desimal, hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut :

Tabel 2.2. Hasil Modifikasi Isi Tabel 2.1. untuk Ketelitian Hingga Empat Desimal.

n	x_n	$x_n^{\ 3}$	$2/7\left(x_n^{\ 3}+1\right)$
5	0,2929	0,0251	0,2929
6	0,2929		

Catatan : nilai untuk x_5 digunakan pembulatan sampai empat desimal dari hasil

perhitungan $2/7\left[(0,293)^3+1\right]$.

Tinjau kembali Gambar 2.2. Persamaan $2x^3-7x+2=0$ mempunyai akar positif lain yang terletak diantara 1 dan 2. Dengan menggunakan formula iteratif yang sama seperti sebelumnya, yaitu $x_n=2/7\left(x_n^{\ 3}+1\right)$ dan dengan nilai awal $x_0=2$ diperoleh hasil berikut (dibulatkan sampai tiga desimal) :

Tabel 2.3. Daftar Nilai Aproksimasi dengan Nilai Awal $x_0=2$.

n	x_n	$x_n^{\ 3}$	$2/7\left(x_n^{\ 3}+1\right)$
0	2	8	2,571
1	2,571	16,994	5,141
2	5,141	135,876	39,107

Dalam Tabel 2.3., nilai akar yang diinginkan semakin jauh dari yang diharapkan. Proses tersebut menghasilkan suatu kedivergenan (nilai akar yang dicari semakin jauh dari hasil yang diharapkan). Ilustrasi tersebut menunjukkan bahwa tidak semua proses iteratif adalah konvergen. Proses iterasi yang baru saja dikemukakan tidak dapat dipakai, oleh karena itu perlu dicari proses iterasi lain untuk persamaan yang diketahui. Berikut adalah iterasi lain yang dimaksud.

Persamaan yang diketahui yaitu $2x^3 - 7x + 2 = 0$ dapat ditulis dalam bentuk :

$$x = \frac{7x_n - 2}{2x_n^{\ 2}} \text{ , untuk } x \neq 0$$

Dan proses iterasinya ditulis dalam bentuk :

$$x_{n+1} = \frac{7x_n - 2}{2x_n^2} \qquad (2.6)$$

Dimulai dengan nilai awal $x_0 = 2$, hasil yang diperoleh sebagaimana ditampilkan dalam Tabel 2.4 berikut ini (dibulatkan sampai dengan tiga tempat desimal):

Tabel 2.4. Tabel Hasil Iterasi Menggunakan Formula (2.6)

n	x_n	$x_n^{\ 2}$	$7x_n - 2$	$2x_n^{\ 2}$	$\frac{7x_n - 2}{2x_n^{\ 2}}$
0	2	4	12	8	1,5
1	1,5	2,25	8,5	4,50	1,889
2	1,889	3,568	11,223	7,136	1,573
3	1,573	2,474	9,011	4,948	1,821
...	...	...	...	...	...
22	1,709	2,922	9,963	5,844	1,705
23	1,705	2,908	9,935	5,816	1,708
24	1,708	2,918	9,956	5,836	1,706
25	1,706	2,911	9,942	5,822	1,708
26	1,708				

Dari hasil yang ditampilkan dalam Tabel 2.6, diperoleh informasi bahwa proses iterasi menghasilkan suatu kekonvergenan, walaupun dengan tiga tempat desimal masih belum sempurna. Apabila dipakai lebih banyak angka signifikan akan diperoleh hasil yang lebih baik lagi. Bandingkan dengan nilai akar eksak yakni $1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} = 1,707106$.

Bentuk lain persamaan $2x^3 - 7x + 2 = 0$ dapat pula ditulis sebagai

$$x = \left(\frac{7x-2}{2x} \right)^{1/2} \text{ dan } \quad x = \left(\frac{7x-2}{2} \right)^{1/3}$$

Formula iteratif untuk masing-masing persamaan tersebut adalah

$$x_{n+1} = \left(\frac{7x_{n+1}-2}{2x_n} \right)^{1/2} \text{ dan } \quad x_{n+1} = \left(\frac{7x_n-2}{2} \right)^{1/3}. \quad (2.7)$$

Dari keempat formula iterasi (2.5)–(2.7), hasil iterasinya dapat dibandingkan seperti ditunjukkan pada Tabel 2.5 berikut :

Tabel 2.5. Tabel Hasil Iterasi Formula (2.5), (2.6), dan (2.7) Berkenaan dengan Nilai Awal yang Dipilih dan Kekonvergenannya.

Formula Iterasi	Nilai Awal	Hasil
$x_n = 2/7\left(x_n^{\ 3}+1\right)$	1 2	Konvergen pada akar 0,292893 Divergen
$x_n = \left(\frac{7x_n-2}{2x_n^2} \right)$	1 2	Konvergen pada akar 1,707106 Konvergen pada akar 1,707106
$x_n = \left(\frac{7x_n-2}{2x_n} \right)^{1/2}$	1 2	Konvergen pada akar 1,707106 Konvergen pada akar 1,707106
$x_n = \left(\frac{7x_n-2}{2} \right)^{1/3}$	1 2	Konvergen pada akar 1,707106 Konvergen pada akar 1,707106

2.2.2. Metode Iterasi Konvergen

Dalam metode **iterasi konvergen** penyelesaian $x = F(x)$ oleh formula iteasi $x_{n+1} = f(x_n)$ akan konvergen ke akarnya, bila $|F'(x)| < 1$.

Teorema 2.1.

Misal $x = \alpha$ adalah akar dari $f(x) = 0$ dan I adalah sebuah interval yang memuat titik $x = \alpha$. Misal $F(x)$ dan $F'(x)$ kontinu dalam I dengan $F(x)$ didefinisikan oleh persamaan $x = F(x)$ yang ekuivalen dengan $f(x) = 0$. Maka bila

$$|F'(x)| < 1, \quad (2.8)$$

untuk setiap x dalam I, barisan dari aproksimasi $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ yang didefinisikan oleh $x_{n+1} = f(x_n)$ akan konvergen ke akar α , dengan aproksimasi awal x_0 dipilih dalam interval I.

Bukti :

Karena α akar dari persamaan $x = f(x)$, kita peroleh

$$\alpha = F(x) \tag{2.9}$$

dan dari $x_{n+1} = F(x_n)$, kita peroleh

$$x_1 = F(x_0). \tag{2.10}$$

Eliminasi (2.9)-(2.10) menghasilkan

$$\alpha - x_1 = F(\alpha) - F(x_0). \tag{2.11}$$

Dengan menggunakan Teorema 1.3, ruas kanan dari persamaan (2.11) dapat ditulis sebagai

$$(\alpha - x_1)F'(\alpha_0), \text{ untuk } x_0 < \alpha < \alpha_0$$

Berdasarkan itu kita peroleh

$$\alpha - x_1 = (\alpha - x_0)F'(\alpha_0), x_0 < \alpha_0 < \alpha \tag{2.12}$$

Dengan cara yang sama dapat diperoleh juga

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - x_2 = (\alpha - x_1)F'(\alpha_1), x_1 < \alpha_1 < \alpha \\ \alpha - x_3 = (\alpha - x_2)F'(\alpha_2), x_2 < \alpha_2 < \alpha \\ \ldots \\ \alpha - x_{n+1} = (\alpha - x_n)F'(\alpha_n), x_n < \alpha_n < \alpha \end{array}\right\} \tag{2.13}$$

Bila dimisalkan

$$|F'(\alpha_i)| \le K < 1, \text{ untuk semua } i \tag{2.14}$$

maka persamaan (2.12) – (2.14) memberikan

$$|\alpha - x_1| \le |\alpha - x_0|$$

$$|\alpha - x_2| \le |\alpha - x_1|, \text{ dan seterusnya.}$$

Hasil ini menunjukkan bahwa tiap-tiap aproksimasi tetap di dalam I, dengan aproksimasi awal x_0 dipilih dalam I. Subsitusi (2.12) ke persamaan pertama dalam (2.13), kemudian hasilnya disubsitusikan ke persamaan berikutnya dalam (2.13) menghasilkan :

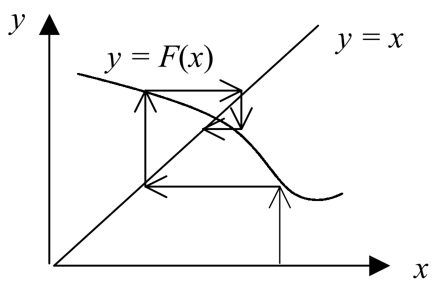
$$\alpha - x_{n+1} = (\alpha - x_0)F'(\alpha_0)F'(\alpha_1)...F'(\alpha_n) \tag{2.15}$$

Karena $\left|F'(x_i)\right| < K$, maka persamaan (2.15) memberikan

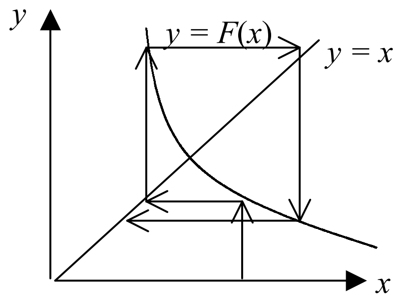
$$\left|\alpha - x_{n+1}\right| \leq K^{n+1}\left|\alpha - x_0\right| \qquad (2.16)$$

Untuk $n \to \infty$, ruas kanan dari (2.16) akan mendekati nol, dan selanjutnya barisan dari aproksimasi $x_0, x_1, \ldots$ konvergen ke akar-akar α bila K<1.

Secara geometris, metode iterasi konvergen dapat dipresentasikan sebagai berikut.



Gambar 2.3



Gambar 2.4

Perhatikan gambar-gambar di atas. Gambar 2.3 menunjukkan bahwa suatu metode iterasi adalah *kovergen*, sedangkan Gambar 2.4 divergen.

Contoh 2.3.

Carilah akar real dari persamaan $f(x) = 2x^3 - 7x + 2 = 0$ dengan menggunakan metode iterasi konvergen

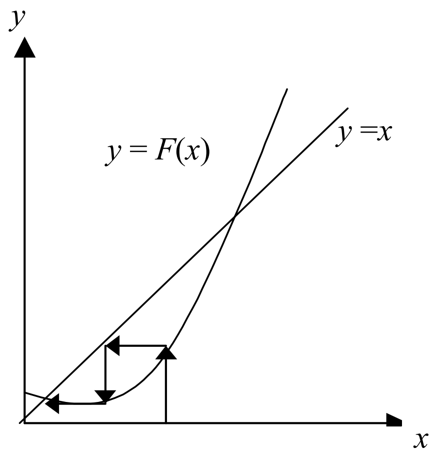
Penyelesaian

Untuk masing-masing bentuk formula iteratif dari $f(x) = 2x^3 - 7x + 2 = 0$ yakni:

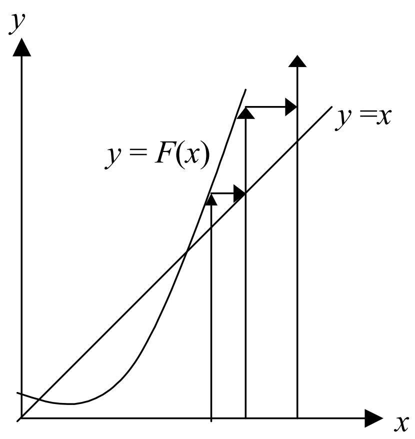
(i) Untuk formula iteratif (2.5):

$F_1(x) = \frac{2}{7}(x^3 + 1)$ dan $F_1'(x) = \frac{6}{7}x^2$. Oleh karena itu untuk nilai-nilai x di dalam [0,1], $F'(x) < 1$. Dengan demikian formula tersebut dapat digunakan dengan nilai awal x_0 sembarang di dalam interval guna menentukan akar tersebut. Untuk nilai $x_0 = 1$, ilustrasi proses iterasi konvergen dapat dilihat pada Gambar 2.5. Andaikan pilihan $x_0 = 0,2928$, sehingga $F'_1(0,2928) = 0,0735$ ... yang jauh lebih kecil dari 1. Proses iterasi akan menjadi sangat cepat. Tetapi, untuk nilai akar lain yakni α yang menyatakan akar positif terbesar $(\alpha \approx 1,7)$, formula iteratif (2.5) memberikan ($F'_1(x) > 1$ untuk semua

$x > \sqrt{7/6} \approx 1,7$). Akibatnya, formula (2.5) tidak akan memberikan proses yang konvergen untuk nilai awal $x_0 > 1,7$. Untuk menunjukkan ini, pilih $x_0 = 2$ yang menghasilkan iterasi yang divergen. Prosesnya diilustrasikan secara grafik pada Gambar 2.6



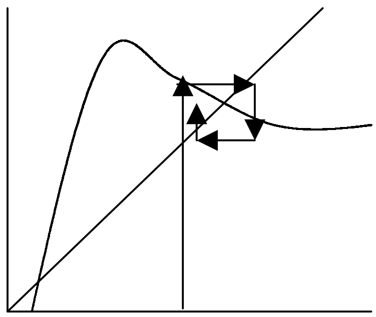
Gambar 2.5



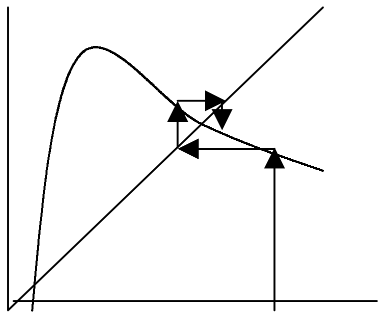
Gambar 2.6

(ii) Untuk formula iteratif (2.6):

Misalkan $F_2(x) = \dfrac{7x-2}{2x^2}$. Karenanya $F'_2(x) = \dfrac{4-7x}{2x^3}$. Dapat diperiksa bahwa untuk tiap x di dalam interval [0,1/2] diperoleh $|F'_2(x)| > 1$. Jadi formula iteratif $x_{n+1} = F_2(x_n)$ tidak bisa dipakai untuk menentukan nilai akar dalam interval tersebut. Pilih $x_0 = 1$. Proses iterasi tersebut tidak konvergen ke akar tersebut, dan proses itu diperlihatkan pada Gambar 2.7. Tetapi dapat ditunjukkan bahwa $|F'_2(x)| < 1$ untuk setiap x di dalam [3/2 , 2] dan untuk suatu nilai awal x_0 dalam interval tersebut formula $x_{n+1} = F_2(x_n)$ akan memberikan proses yang konvergen ke akar persamaan yang diberikan. Kita peroleh hasil yang konvergen ke akar persamaan tersebut dengan nilai awal $x_0 = 2$. proses tersebut diperlihatkan oleh grafik pada Gambar 2.8.



Gambar 2.7



Gambar 2.8

(iii) Untuk formula iteratif $x_{n+1} = \left(\dfrac{7x_n - 2}{2x_n}\right)^{1/2}$.

Diketahui bahwa turunan pertama $F_3(x) = \left[\dfrac{(7x-2)}{2x}\right]^{1/2}$ adalah $F'_3(x) = \dfrac{1}{2x^2}\left(\dfrac{2x}{7x-2}\right)^{1/2}$.

Formula iteratif tersebut tidak dapat dipakai di dalam interval $0 < x < 2/7$, karena untuk setiap x di dalam interval tersebut akan diperoleh akar pangkat dua dari bilangan negatif. Demikian pula, untuk setiap x di dalam interval (2/7,1/2) akan diperoleh $|F'_3(x)| > 1$. Jadi formula $x_{n+1} = F_3(x_n)$ tidak dapat dipakai untuk menghitung akar terkecil. Tetapi apabila dilakukan pada x di dalam interval [3/2, 2] yang memuat akar terbesar, formula iteratif $x_{n+1} = F_3(x_n)$ akan memberikan proses yang konvergen untuk akar terbesar.

(iv) Untuk formula iteratif $x_{n+1} = \left(\dfrac{7x_n - 2}{2}\right)^{1/3}$.

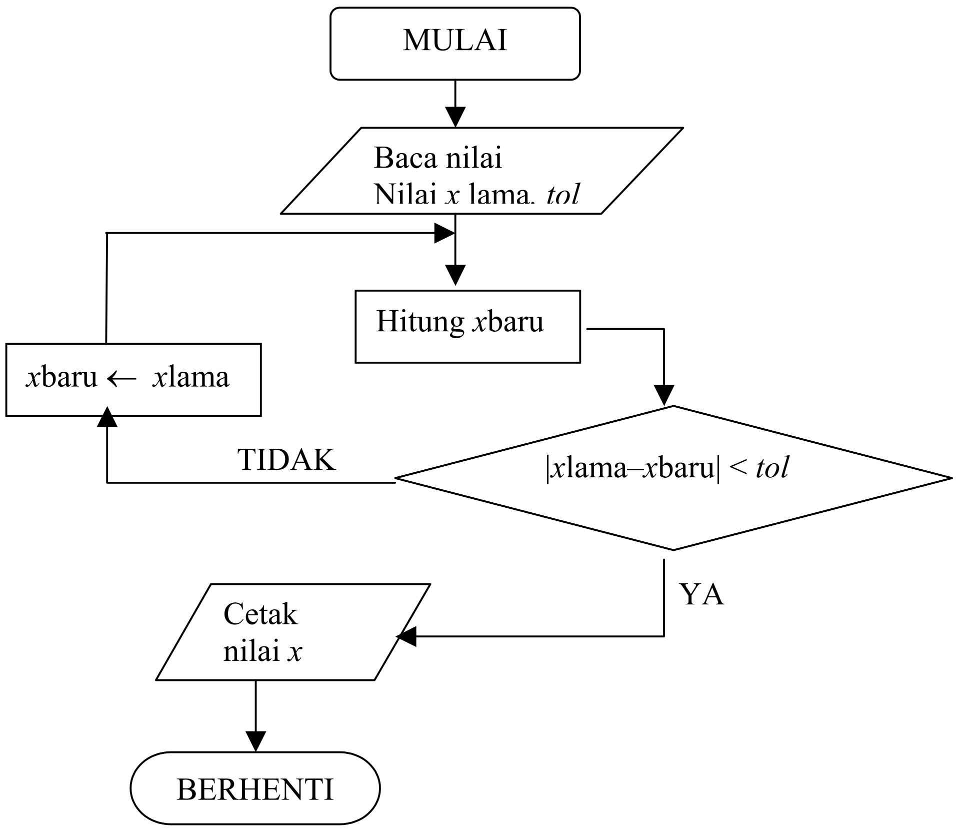
Misalkan $F_4(x) = \left(\dfrac{7x-2}{2}\right)^{1/3}$. Turunan pertama fungsi ini adalah $F'_4(x) = \dfrac{7}{6}\left(\dfrac{2}{7x-2}\right)^{2/3}$. Bila diperiksa ternyata $|F'_4(x)| > 1$ untuk setiap x di dalam interval (2/7,1/2). Jadi formula $x_{n+1} = F_4(x_n)$ tidak dapat dipakai untuk menentukan akar terkecil. Tetapi dapat ditunjukkan bahwa $||F'_4(x)| < 1$ untuk setiap x di dalam [3/2,2] yang memuat akar terbesar. Atas dasar itu, untuk nilai awal x_0 dalam [3/2,2], formula $x_{n+1} = F_4(x_n)$ akan memberi proses konvergen untuk akar terbesar.

Dari hasil perhitungan di atas dapat dikemukakan hal0hal sebagaimana ditunjukan dalam Tabel 2.6. berikut :

Tabel 2.6. Beberapa formula iteratif berkenaan dengan persamaan $2x^3 - 7x + 2 = 0$ dengan menggunakan iterasi konvergen.

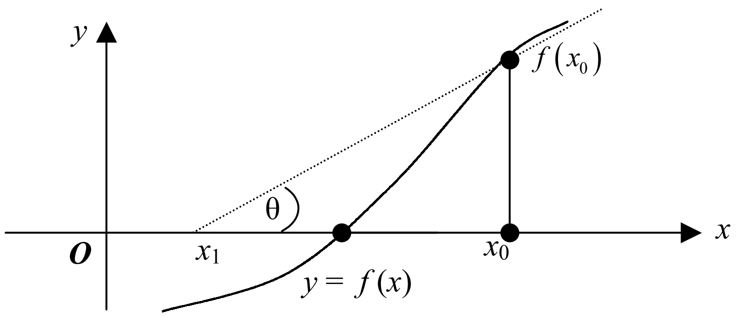
Formula Iterasi	$F'(x)$	Interval I	$F'(x)$	Hasil
$x_{n+1} = 2/7\left(x_n^{\;3} + 1\right)$	$6/7\,x^2$	[0,1] [1,2]	<1 >1	Konvergen ke akar dalam *I* untuk sebarang nilai awal dalam *I*. Divergen
$x_{n+1} = \dfrac{7x_n - 2}{2x_n^2}$	$\dfrac{4-7x}{2x^3}$	[0,1/2] [3/2,2]	>1 <1	Divergen Konvergen ke akar dalam *I* untuk sembarang nilai awal dalam *I*
$X_{n+1} = \left(\dfrac{7x_n - 2}{2}\right)^{1/3}$	$\left(\dfrac{2}{7x-2}\right)^{2/3}$	[2/7,1/2] [3/2,2]	>1 <1	Divergen Konvergen ke akar dalam *I* untuk sembarang nilai awal dalam *I*.

Diagram alur (*Flow Chart*) untuk proses iterasi (metode iterasi konvergen) adalah sebagai berikut



2.3. METODE NEWTON

Metode NEWTON didasarkan pada aproksimasi linear fungsi dan menggunakan prinsip



Gambar 2.9.

kemiringan (Tangen) kurvanya. (Lihat Gambar 2.9).

Kalkulasi dengan metode Newton diawali dengan x_0 yang tidak terlalu jauh dari sebuah akar, bergerak sepanjang garis linear (kemiringan atau tangen garis) ke perpotongannya di sumbu-x, dan mengambilnya sebagai titik aproksimasi untuk yang berikutnya. Perlakuan ini diteruskan hingga nilai-nilai x dirasakan sukses cukup dekat ke fungsi bernilai nol. Skema kalkulasinya mengikuti segitiga yang dibangun dengan sudut inklinasi dari kemiringan garis pada kurva di $x = x_0$ yaitu

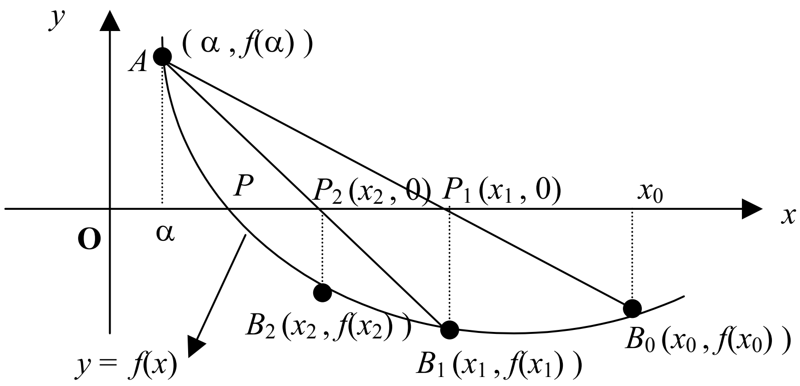
$$\tan(\theta) = f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)} \text{ atau } x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{2.17}$$

Aproksimasi berikutnya diteruskan dengan menghitung x_2 dengan skema yang sama dimana nilai x_0 digantikan oleh x_1. Secara umum metode Newton dirumuskan oleh skema berikut ini:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2.18}$$

2.4. METODE POSISI SALAH (REGULA FALSI)

Untuk menghitung nilai akar dari $f(x) = 0$ dapat digunakan metode Posisi Salah/Regula Falsi (RF). Aturan dari metode RF diterangkan secara geometri dalam Gambar 2.10. Dalam gambar yang dimaksud, sketsa grafik dari kurva dinyatakan oleh persamaan $y = f(x)$. Akar dari $f(x) = 0$ yang dicari dinyatakan oleh koordinat x dari titik P yang merupakan perpotongan dari kurva $y = f(x)$ dengan sumbu x . Untuk menggunakan aturan RF, diperlukan dua titik, $A(\alpha, f(\alpha))$ dan $B_0(x_0, f(x_0))$ misalnya, sedemikian sehingga garis lurus AB_0 memotong sumbu x di titik $P_1(x_1, 0)$.



Gambar 2.10

Proses selanjutnya adalah menghitung nilai x_1 melalui persamaan garis AB_0 yang memotong sumbu x di titik P_1. Setelah itu dengan menggunakan koordinat titik P_1 yakni $(x_1, 0)$ dapat ditentukan titik B_1dengan koordinat $(x_1, f(x_1))$. Dengan demikian garis AB_1 akan memotong sumbu x di titik P_2 dengan koordinat $(x_2, 0)$. Demikian proses ini terus dilakukan hingga diperoleh kondisi P_n sangat dekat ke P yakni $|P_n - P| < toleransi$. Dari proses pencapaian nilai akar di titik P, dihasilkan barisan nilai-nilai $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ yang diharapkan akan konvergen ke absis x pada titik P, yaitu akar yang dicari dari persamaan yang diberikan.

Secara *analitik*, penjelasan geometris dari metode RF dapat dijelaskan berikut :

Persamaan garis AB_0 adalah

$$y - f(\alpha) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha}(x - \alpha) \tag{2.19}$$

Persamaan (2.19) melalui titik $P_1(x_1, 0)$, maka diperoleh

$$-f(\alpha) = \frac{f(x_0) - f(\alpha)}{x_0 - \alpha}(x_1 - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{\alpha f(x_0) - x_0 \cdot f(\alpha)}{f(x_0) - f(\alpha)} \tag{2.20}$$

Demikian juga dengan persamaan garis AB_1 yakni

$$y - f(\alpha) = \frac{f(x_1) - f(\alpha)}{x_1 - \alpha}(x - \alpha), \tag{2.21}$$

persamaan (2.21) melalui titik $P_2(x_2, 0)$. Oleh karena itu diperoleh

$$x_2 = \frac{\alpha f(x_1) - x_1 \cdot f(\alpha)}{f(x_1) - f(\alpha)} \tag{2.22}$$

Demikian proses ini diulang hingga mencapai titik *P* atau sangat dekat dengan *P* (titik yang mengandung nilai akar yang dicari).

Secara umum, formula (2.20) dan (2.22) adalah

$$x_{n+1} = \frac{\alpha \cdot f(x_n) - x_n \cdot f(\alpha)}{f(x_n) - f(\alpha)} \tag{2.23}$$

Contoh 2.4

Gunakan metode RF untuk menentukan aproksimasi akar-akar positif dari persamaan $2x^3 - 7x + 2 = 0$ (gunakan hingga tiga tempat desimal).

Penyelesaian:

Pilih $\alpha = 0$ dan $x_0 = 1$. Oleh karena itu $f(\alpha = 0) = 2$. Selanjutnya gunakan formula (2.23) yang menghasilkan

$$x_{n+1} = \frac{0 \cdot f(x_n) - x_n \cdot f(0)}{f(x_n) - 2} = \frac{0 - x_n,(2)}{2x_n^{\ 3} - 7x_n + 2 - 2} = \frac{-2x_n}{2x_n^{\ 3} - 7x_n} = \frac{-2}{2x_n^{\ 2} - 7}, \tag{2.24}$$

untuk $x_n \neq 0$.

Persamaan (2.24) jika dikaitkan dengan formula iteratif konvergen memberikan keadaan: $F(x) = \dfrac{-2}{2x^2 - 7}$ sehingga $F'(x) = \dfrac{8x}{(2x^2 - 7)^2}$. Dari bentuk ini dapat diketahui bahwa $8x$ nilainya bertambah dari 0 ke 8, sedangkan $(2x^2 - 7)^2$ nilainya berkurang dari 49 ke 25, bila *x* bergerak dari 0 ke 1. Jadi nilai maksimum dari $|F'(x)| < 1$ untuk *x* dalam [0,1] dan juga proses iteratif adalah konvergen untuk nilai awal $x_0 = 1$ dalam [0,1]. Dengan $x_0 = 1$ diperoleh hasil perhitungan sebagaimana ditampilkan dalam Tabel 2.7. berikut :

Tabel 2.7. Tabel Hasil Numerik Penggunaan Formula (2.24) Terhadap Penentuan Nilai Akar dari Persamaan $2x^3 - 7x + 2 = 0$.

n	x_n	$2x_n^{\ 2}$	$2x_n^{\ 2} - 7$
0	1,000	2,000	-5,000
1	0,400	0,320	-6,680
2	0,299	0,179	-6,821
3	0,293	0,172	-6,828
4	0,293		

Jadi akar positif pertama dari $2x^3 - 7x + 2 = 0$ adalah 0,293 (teliti sampai tiga desimal). Dengan cara yang sama hitung akar positif yang kedua yang terletak di antara 1 dan 2, dengan mengambil $\alpha = 2$ dan $x_0 = 0$. Hasilnya akan diperoleh bahwa akar positif yang kedua dari $2x^2 - 7x + 2 = 0$ adalah 1,707 (teliti sampai tiga tempat desimal).

Soal-Soal Latihan

1. Dapatkan nilai akar dari fungsi berikut ini:

   a. $y = f(x) = \left(\dfrac{0{,}3375x^3 - 2{,}5625x^2 + 5.9275x - 4{,}025}{1{,}35x - 3{,}5} \right)$

   b. $\cos\left[\dfrac{x^2 - \sqrt{\sin(x) + 3}}{4 + (x)^2} \right] + \sin(3x - 1) = 0{,}934$

   c. $\exp\left\{ \cos\left[\left(x^3\right) - 3 \right] \right\} + \tan\left[x\left(0{,}08 + \cos x\right) = 1{,}79 \right]$

   dengan tiga metode numerik yang telah disampaikan pada bagian sebelumnya. Berikan komentar anda tentang hasil pemakaian metode-metode tersebut.

2. Ubahlah bentuk persamaan $e^{-x} - x = 0$ dan $x^3 - x - 1 = 0$ sedemikian hingga metode iterasi sederhana dan konvergen dapat digunakan untuk mendapatkan nilai-nilai akar masing-masing persamaan tersebut.

BAB III
INTERPOLASI

3.1. PENGERTIAN INTERPOLASI DAN GALATNYA

Kalimat " $y = f(x), x_0 \le x \le x_n$ " adalah kalimat yang mengkorespondensikan setiap nilai x di dalam $x_0 \le x \le x_n$ dengan satu atau lebih nilai-nilai dari y. Anggaplah bahwa $f(x)$ bernilai tunggal, kontinu, dan diketahui dalam bentuk eksplisit, maka nilai-nilai $f(x)$ berkorespondensi dengan tepat dari nilai-nilai x yang diberikan, sebutlah $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$, yang dapat dihitung dan ditabulasi dengan mudah.

Ide interpolasi dalam numerik muncul ketika pernyataan konversi berikut ini memerlukan tanggapan. "Diketahui set dari daftar nilai-nilai $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ yang memenuhi relasi $y = f(x)$ dengan bentuk eksplisit $f(x)$ tak diketahui. Kondisi seperti ini perlu dicari fungsi, sebutlah $\varnothing(x)$, sedemikian hingga $f(x)$ dan $\varnothing(x)$ bersesuaian pada set dari daftar titik-titik tersebut". Proses untuk menetukan bentuk $\varnothing(x)$ atau nilai fungsinya disebut ***interpolasi***. Bila $\varnothing(x)$ suatu polinom maka proses demikian disebut *interpolasi polinom* dan $\varnothing(x)$ disebut *penginterpolasi polinom.* Selain polinom, bentuk interpolasi $\varnothing(x)$ dapat juga berupa deret trigonometri terhingga, deret dari fungsi Bessel, dan lain sebagainya. Di bagian ini diskusi dibatasi pada interpolasi polinom.

Sebagai dasar untuk mengaproksimasi suatu fungsi yang tidak diketahui oleh suatu polinom dapat mengacu kepada teorema Weierstrass (1885) berikut ini:
"Bila $f(x)$ kontinu dalam $x_0 \le x \le x_n$, maka untuk $\varepsilon > 0$, ada polinom $P(x)$ sedemikian hingga $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$, untuk tiap x dalam (x_0, x_n)" .

Misalkan fungsi $y(x)$ kontinu dan dapat diderensialkan disetiap titik dalam suatu interval yaitu $x \in [a,b]$. Misalkan dipunyai $n+1$ pasang titik yang didefinisikan oleh titik-titik $(x_i, y_i), \quad i = 0,1,2,...n$. Asumsikan polinom $\varnothing(x)$ dengan derajat kurang dari atau sama dengan *n* digunakan sebagai fungsi aproksimasi untuk $y(x)$ yaitu:

$$y(x) \approx \varnothing(x) \tag{3.1}$$

Oleh karena itu berlaku :

$$\varnothing(x_i) = y_i \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{3.2}$$

Dari persamaan (3.2.1) diperoleh

$$E(x) = y(x) - \varnothing(x) \tag{3.3}$$

dengan $E(x)$ adalah galat yang di peroleh

atau

$$E(x) = y(x) - \varnothing(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_{n-1})(x - x_n)\, L \tag{3.4}$$

$$y(x) - \varnothing(x) = L\,\Pi(x) \tag{3.5}$$

dengan

L adalah bilangan tertentu yang belum diketahui, dan

$\Pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$.

Dari persamaan (3.3) jika $x = x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ maka ia akan bernilai nol yang berarti bahwa fungsi $\varnothing(x)$ bernilai eksak ($\varnothing(x) = y(x)$).

Diferensialkan terhadap *x* sebanyak *n*+1 kali diperoleh

$$y^{(n+1)}(x) - 0 = L\,(n+1)! \qquad \text{atau} \qquad L = \frac{y^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \tag{3.6}$$

Subsitusikan persamaan (3.3) ke persamaan (3.2) diperoleh

$$E(x) = \Pi(x)\frac{y^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}$$

atau

$$E(x) = \Pi(x)\frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{3.7}$$

dengan $x = \xi, x_0 < \xi < x_n$.

3.2. SELISIH (*DIFFERENCE*)

Selisih dari tiap nilai fungsi dalam konteks numerik, biasanya digunakan notasi-notasi δ, ∇, dan Δ yang dibaca "*delta*".

Selisih Maju (*Forward Difference*)

Bila $y_0, y_1, y_2, ...y_n$ adalah nilai-nilai dari *y*, maka

$$\left(y_1 - y_0\right), \left(y_2 - y_1\right), \left(y_3 - y_2\right), ..., \left(y_n - y_{n-1}\right)$$

disebut selisih-selisih dari *y*. Bila selisih *y* tersebut berturut-turut ditulis sebagai $\Delta y_0, \Delta y_1, ...\Delta y_{n-1}$, dengan kata lain:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta y_1 = y_2 - y_1, ... \Delta y_{n-1} == y_n - y_{n-1}$$

Simbol Δ disebut *operator selisih maju*, sedangkan $\Delta y_0, \Delta y_1, ...$ disebut *selisih maju pertama*.

Selisih dari selisih maju pertama disebut *selisih maju kedua* dan ditulis $\Delta^2 y_0, \Delta^2 y_1, \Delta^2 y_2, ...$ dengan cara yang sama, dapat didefinisikan *selisih maju ketiga*, selisih maju keempat yakni

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - \left(y_1 - y_0\right) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\begin{aligned} \Delta^3 y_0 &= \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 2y_2 + y_1 - \left(y_2 - 2y_1 + y_0\right) \\ &= y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \Delta^4 y_0 &= \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0 \\ &= y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1 - \left(y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0\right) \\ &= y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0 \end{aligned}$$

Untuk selisih yang lebih tinggi dengan mudah dapat ditentukan karena koefisien pada ruas kanan adalah *koefisien binomial*.

Tabel berikut menunjukkan selisih maju dari semua tingkat yang dapat dibentuk:

Tabel 3.1. Tabel Selisih Maju

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6	y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6	y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5	$\Delta^2 y_0$ $\Delta^2 y_1$ $\Delta^2 y_2$ $\Delta^2 y_3$ $\Delta^2 y_4$	$\Delta^3 y_0$ $\Delta^3 y_1$ $\Delta^3 y_2$ $\Delta^3 y_3$	$\Delta^4 y_0$ $\Delta^4 y_1$ $\Delta^4 y_2$	$\Delta^5 y_0$ $\Delta^5 y_1$	$\Delta^6 y_0$

Selisih Mundur (*Backward Difference*)

Selisih-selisih $\left(y_1 - y_0\right),\left(y_2 - y_1\right),\ldots\left(y_n - y_{n-1}\right)$ disebut selisih mundur pertama, bila selisih-selisih tersebut berturut-turut ditulis $\nabla y_1, \nabla y_2, \nabla y_3, \ldots$ sedemikian hingga :

$$\nabla y_1 = y_1 - y_0, \nabla y_2 = y_2 - y_1, \ldots, \nabla y_n = y_n - y_{n-1}$$

dan ∇ disebut *operator selisih mundur*.

Dengan cara yang sama, dapat didefinisikan selisih mundur berderajat tinggi. Jadi diperoleh:

$$\nabla^2 y_2 = \nabla y_2 - \nabla y_2 = y_2 - y_1 - \left(y_1 - y_0\right) = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\nabla^3 y_3 = \nabla^2 y_3 - \nabla^2 y_2 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$, dan seterusnya.

Dengan nilai-nilai yang sama untuk x dan y dalam Tabel 3.1 tabel selisih mundur dapat dibentuk.

Tabel 3.2. Tabel Selisih Mundur

x	y	∇	∇^2	∇^3	∇^4	∇^5	∇^6
x_0	y_0						
		∇y_1					
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$				
		∇y_2		$\nabla^3 y_3$			
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$		
		∇y_3		$\nabla^3 y_4$		$\nabla^5 y_5$	
x_3	y_3		$\nabla^2 y_4$		$\nabla^4 y_5$		$\nabla^6 y_6$
		∇y_4		$\nabla^3 y_5$		$\nabla^5 y_6$	
x_4	y_4		$\nabla^2 y_5$		$\nabla^4 y_6$		
		∇y_5		$\nabla^3 y_6$			
x_5	y_5		$\nabla^2 y_6$				
		∇y_6					
x_6	y_6						

Selisih Tengah (*Central Difference*)

Operator selisih tengah δ didefinisikan oleh relasi:

$$y_1 - y_0 = \delta y_{1/2} \;;\; y_2 - y_1 = \delta y_{3/2}, \ldots, y_n - y_{n-1} = \delta\, y_{\frac{2n-1}{2}}$$

Dengan cara yang sama, selisih tengah berderajat tinggi dapat didefinisikan. Dengan menggunakan nilai-nilai x dan y seperti pada tabel 3.1. tabel selisih tengah dapat dibuat tabelnya seperti berikut:

Tabel 3.3. Tabel Selisih Tengah

x_0	y_0						
		$\delta y_{1/2}$					
x_1	y_1		$\delta^2 y_1$				
		$\delta y_{3/2}$		$\delta^3 y_{3/2}$			
x_2	y_2		$\delta^2 y_2$		$\delta^4 y_2$		
		$\delta y_{5/2}$		$\delta^3 y_{5/2}$		$\delta^5 y_{5/2}$	
x_3	y_3		$\delta^2 y_3$		$\delta^4 y_3$		$\delta^6 y_6$
		$\delta y_{7/2}$		$\delta^3 y_{7/2}$		$\delta^5 y_{7/2}$	
x_4	y_4		$\delta^2 y_4$		$\delta^4 y_4$		
		$\delta y_{9/2}$		$\delta^3 y_{9/2}$			
x_5	y_5		$\delta^2 y_5$				
		$\delta y_{11/2}$					
x_6	y_6						

Dari Tabel 3.1, 3.2, dan 3.3, dengan melihat letak posisi yang sama diperoleh hubungan berikut:

$$\Delta y_0 = \nabla y_1 = \delta y_{1/2} \qquad \text{dan seterusnya.}$$

Pemahaman konsep selisih dapat dijelaskan dalam contoh jarak tempuh sebuah mobil terhadap waktu. Misalkan gerakan sebuah mobil ke suatu tempat memiliki jarak tempuh s berrgantung waktu t. Hal tersebut disebabkan oleh karena untuk sebarang waktu tertentu, mobil tersebut haruslah menempuh jarak perjalanan yang unik, dengan *jarak* adalah suatu fungsi dari waktu, yaitu $s = f(t)$. Perhatikan daftar berikut yang menunjukkan jarak yang ditempuh (s meter) berturut-turut pada setiap selang waktu 10 detik:

Tabel 3.4 Jarak tempuh mobil per 10 detik waktu .

t	$s = f(t)$
0	0
10	214
20	736
30	1446
40	2270
50	3164
60	4100

Dari Tabel 3.4 di atas dapat dibuat tabel selisih (*Tabel Selisih Terhingga*) untuk selang $t = 0$ hingga $t = 60$ sebagai berikut:

Tabel 3.5 Tabel Selisih Terhingga untuk Data dalam Tabel 3.4

t	$f(t)$	Selisih ke-1	Selisih ke-2	Selisih ke-3	Selisih ke-4
0	0				
		214			
10	214				
		522	308		
20	736			-120	
		710	188		46
30	1446			-74	
		824	114		30
40	2270			-44	
		894	70		16
50	3164			-28	
		936	42		
60	4100				

Contoh 3.1.

Evaluasi polinom $y = x^3 - 8x^2 - 4x + 1$ untuk $x = 0.(0{,}1).0{,}5$ dan buatlah tabel selisihnya. Carilah : $\Delta y_0, \Delta y_1, \nabla y_1, \nabla^2 y_2, \delta y_{3/2},$ dan $\delta^2 y_2$

Penyelesaian:

Tabel 3.6. Tabel Selisih Maju untuk Data dalam Tabel 3.5.

x	y	Selisih ke-1	Selisih ke-2	Selisih ke-3	Selisih ke-4
0	1				
		-0,479			
0,1	0,521		-0,154		
		-0,633		0,006	
0,2	-0,112		-0,148		0
		-0,781		0,006	
0,3	-0,893		-0,142		0
		-0,923		0,006	
0,4	-1,816		-0,136		
		-0,059			
0,5	-2,875				

Dari Tabel 3.6. di atas diperoleh

$$\Delta y_0 = -0{,}479; \quad \nabla^2 y_2 = -0{,}154$$

$$\Delta y_1 = -0{,}633 \quad \delta y_{3/1} = -0{,}633$$

$$\nabla y_1 = -0{,}479 \quad \delta^2 y^2 = -0{,}148$$

Selisih Polinom

Misalkan $y(x)$ adalah polinom berderajat n, yaitu

$$y(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$$

Maka kita peroleh :

$$y(x+h) - y(x) = a_0\left[(x+h)^n - x^n\right] + a_1\left[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}\right]$$

$$\nabla y(x) = a_0 \cdot nhx^{n-1} + a_1^1 x^{n-2} + \ldots + a_n^{\;1}$$

Yang menunjukkan bahwa selisih pertama dari polinom berderajat n adalah polinom berderajat (n–1). Demikian pula, selisih kedua adalah polinom berderajat (n–2) dan koefisien dari x^{n-2} adalah $a_0 n! h^n$ yang merupakan konstanta. Atas dasar hal tersebut, selisih ke (n+1) dari polinom berderajat n adalah nol.

Sebaliknya, bila selisih ke n dari suatu daftar fungsi adalah konstanta dan selisih-selisih ke (n+1), ke (n+2), ... dan seterusnya semuanya nol, maka daftar fungsi tersebut menyatakan polinom berderajat n. Hal tersebut peru dicatat bahwa hasil yang kita peroleh itu akan baik hanya bila nilai-nilai dari x berjarak sama antara yang satu dengan yang lainnya (nilai-nilai x yang berdekatan). Pernyataan konversi tersebut adalah penting di dalam analisis numerik, karena dengan pernyataan tersebut memungkinkan kita untuk mengaproksimasi suatu fungsi oleh suatu polinom bila selisih-selisih dari sembarang tingkat (derajat) menghasilkan suatu konstanta (mendekati konstanta tertentu). Untuk lebih memahami, pelajari contoh berikut.

Contoh 3.2.

Tabel berikut menunjukkan selisih nilai-nilai polinom $y(x) = x^2 + 2x - 1$ untuk nilai-nilai $x = 1{,}00(0{,}02)1{,}10$

Tabel 3.7. Tabel Selisih Maju untuk Sejumlah Nilai Fungsi $y(x) = x^2 + 2x - 1$

x	$y(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1,00	2				
		0,0804			
1,02	2,0804		0,0008		
		0,0812		0	
1,04	2,1616		0,0008		0
		0,0820		0	
1,06	2,2436		0,0008		0
		0,0828		0	
1,08	2,3264		0,0008		
		0,0836			
1,10	2,4100				

Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa untuk polinom berderajat dua, selisih keduanya konstanta yaitu $1 \cdot 2(0,02)^2 = 0,0008$. Demikian pula, bila dilihat pada Contoh 3.1, selisih ketiga dari polinom tersebut adalah konstan yaitu $1.3!(0,1)^3 = 0,006$

Contoh 3.3

Tabel 3.8. berikut menunjukkan selisih-selisih nilai polinom $y(x) = x^3 - 8x + 5$ untuk nilai-nilai $x = 2,00\,(0,2)\,3,4$; dibulatkan sampai dua tempat desimal.

Tabel 3.8. Tabel Selisih Maju untuk Sejumlah Nilai Fungsi
$y(x) = x^3 - 8x + 5$

x	$y(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
2,0	-3,00			
		1,05		
2,2	-1,95		0,52	
		1,57		0,07
2,4	-0,38		0,59	
		2,16		0,02
2,6	1,78		0,61	
		2,77		0,07
2,8	4,55		0,68	
		3,45		0,04
3,0	8,00		0,72	
		4,17		0,04
3,2	12,17		0,76	
		4,93		
3,4	17,10			

Dari daftar dapat dilihat bahwa selisih ketiga untuk polinom berderajat tiga tersebut tidak konstan, yang seharusnya selisih tersebut adalah $1.3!(0,2)^3 = 0,048$. Mengapa? Hal tersebut disebabkan oleh karena kekeliruan dalam pembulatan, yang seharusnya nilai dari fungsi tersebut dibulatkan teliti sampai tiga tempat desimal, (silahkan diperiksa).

3.3. FORMULA NEWTON UNTUK INTERPOLASI DAN RELASI SIMBOLIK

Formula Newton untuk Interpolasi

Diberikan set yang terdiri dari (n+1) buah nilai-nilai dari x dan y, yaitu $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ dari nilai-nilai tersebut akan dicari $y_n(x)$, yaitu suatu polinom berderajat n sedemikian sehingga y dan $y_n(x)$ memenuhi daftar titik-titik tersebut.

Misalkan nilai-nilai tersebut berjarak sama dari x, yaitu :

$$x_i = x_0 + ih, \quad \text{dengan i = 0,1,2,...,n}$$

Karena $y_n(x)$ suatu polinom berderajat n maka $y_n(x)$ dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned} y_n(x) = {} & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ & + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \ldots \\ & + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Bila kita pakai syarat (kondisi) bahwa y dan $y_n(x)$ harus memenuhi set dari titik-titik tersebut, kita peroleh

$$a_0 = y_0; \qquad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}; \qquad a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{h^2 2!}; \qquad a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{h^3 3!}; \qquad a_n = \frac{\Delta^n y_0}{h^n n!}$$

Bila $x = x_0 + ph$ dan subtitusikan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ pada persamaan (3.8) kita peroleh

$$\begin{aligned} y_n(x) = {} & y_0 + p\Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2!}\Delta^2 y_0 \\ & + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

dan (3.9) disebut *formula interpolasi selisih maju Newton* dan dipakai untuk interpolasi yang dekat ke awal dari nilai x.

Untuk mencari kekeliruan yang terjadi dalam menentukan fungsi $y(x)$ oleh polinom $y_n(x)$, dapat digunakan formula (3.7) yang dalam bentuk lain ditulis sebagai

$$y(x) - y_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\alpha), \text{ dan } x_0 < \alpha < x_n. \tag{3.10}$$

Persamaan (3.10) hanya dipakai dalam praktek saja karena bentuk $y^{(n+1)}(x)$ tidak meberikan informasi apapun. Berikut ini bentuk lain (eastimasi) $y^{(n+1)}(x)$ yang menggunakan derifatif.

Ekspansi $y(x+h)$ dengan deret Taylor memberikan

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + ...$$

Dengan mengabaikan suku-suku yang memuat h^2 dan selebihnya (perpangkatan tinggi dari h), diperoleh

$$y'(x) \approx \frac{1}{h}\left[y(x+h) - y(x)\right] = \frac{1}{h}\Delta y(x)$$

Dengan menuliskan $y'(x)$ sebagai Dy(x), dengan $D \equiv \frac{d}{dx}$ adalah operator diferensial, bagian kanan persamaan di atas operatornya

$$D \equiv \frac{1}{h}\Delta.$$

Demikian juga dengan

$$D^{n+1} \equiv \frac{1}{h^{n+1}}\Delta^{n+1}$$

yang berarti

$$y^{(n+1)}(x) \approx \frac{1}{h^{n+1}}\Delta^{n+1}y(x) \qquad (3.11)$$

Persamaan (3.10) yang ditulis sebagai

$$y(x) - y_n(x) = \frac{p(p-1)(p-2)...(p-n)}{(n+1)!}\Delta^{n+1}y(x) \qquad (3.12)$$

merupakan bentuk yang sesuai untuk perhitungan.

Dari $y_n(x)$ pada persamaan (3.1), dapat dipilih bentuk

$$\begin{aligned} y_n(x) &= a_0 + a_1(x-x_n) + a_2(x-x_n)(x-x_{n-1}) \\ &\quad + a^3(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2}) \\ &\quad + \cdots + a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})...(x-x_1) \end{aligned}$$

dan menentukan kondisi bahwa y dan $y_n(x)$ sesuai pada daftar titik-titik $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1, x_0$, , kita peroleh (setelah disederhanakan):

$$y_n(x) = y_n + p\nabla y_n + \frac{p(p+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \ldots + \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}\nabla^n y_n \qquad (3.13)$$

dengan $p = \dfrac{x - x_n}{h}$

Formula (3.13) disebut *formula interpolasi selisih mundur Newton* dan digunakan untuk interpolasi yang dekat ke akhir dari nilai-nilai pada daftar (nilai x).

Formula tersebut memberikan kekeliruan daftar formula tersebut dapat ditulis sebagai:

$$y(x) - y_n(x) = \frac{p(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{(n+1)} h^{n+1} y^{n+1}(\alpha) \qquad (3.14)$$

dengan $x_0 < \alpha < x_n$ dan $x = x_n + ph$

Contoh berikut merupakan ilustrasi penggunaan formula itu.

Contoh 3.4.

Carilah polinom berderajat tiga bila diketahui $y(0) = 1$, $y(1) = 0$, $y(2) = 1$, $y(3) = 10$ kemudian carilah $y(4)$.

Penyelesaian:

Tabel selisih untuk data pada contoh ini adalah sebagai berikut :

Tabel 3.9.

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
0	1			
		-1		
1	0		2	
		1		6
2	1		8	
		9		
3	10			

Dalam soal ini h = 1. jadi, dengan formula $x = x_0 + ph$ dipilih $x_0 = 0$, kita peroleh p = x.

Subtitusikan nilai p ke dalam (3.9), diperoleh

$$y(x) = 1 + x(-1) + \frac{x(x-1)}{2}(2) + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}(6)$$

$$= x^3 - 2x^2 + 1 \; ,$$

Untuk menghitung $y(4)$ kita perhatikan bahwa p = 4.

Dari formula (3.9) kita peroleh

$$y(4) = 1 + 4(-1) + 12 + 24 \; = 33$$

yang mana nilai tersebut sama dengan suatu nilai untuk x = 4 yang disubtitusikan ke polinom $y(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

Catatan :

Proses pencarian nilai y untuk sebarang x di luar daerah yang diketahui disebut *ekstapolasi*, dan contoh tadi menunjukkan bahwa bila suatu daftar fungsi adalah suatu polinom, maka interpolasi dan ekstrapolasi memberikan nilai yang eksak.

Contoh 3.5.

Populasi di suatu kota dalam sensus yang dilakukan 10 tahun sekali ditunjukkan pada tabel berikut :

Tabel 3.10. Data Pertumbuhan Suatu Populasi

Tahun x	1891	1901	1911	1921	1931
Populasi : y (dalam ribuan)	46	66	81	93	101

Perkirakan (*estimasi*) populasi untuk tahun 1895.

Penyelesaian:

Dari data di atas ternyata h = 10, $x_0 = 1891$, x = 1895, dan dari formula $x = x_0 + ph$ kita peroleh p = 4/10 = 0,4.

Daftar selisih dari data di atas adalah:

Tabel 3.11. Tabel Selisih Maju untuk Data dalam Tabel 3.10.

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1891	46				
		20			
1901	66		-5		
		15		2	
1911	81		-3		-3
		12		-1	
1921	93		-4		
		8			
1931	101				

Dari (3.9) kita peroleh

$$
\begin{aligned}
y(1895) &= 46 + 0,4(20) + \frac{0,4(0,4-1)}{2}\cdot(-5) \\
&+ \frac{0,4(0,4-1)(0,4-2)}{6}(2) \\
&+ \frac{0,4(0,4-1)(0,4-2)(0,4-3)}{24}(-3) = 54,85 \text{ ribu}
\end{aligned}
$$

Contoh 3.6

Dalam Contoh 3.5, estimasilah populasi untuk tahun 1925. pada soal ini, interpolasi yang dicari terletak pada akhir dari daftar, sehingga kita gunakan formula (3.13), dengan $x = x_n + ph$. dari data yang diberikan, x = 1925, $x_n = 1931$, dan h = 10, maka diperoleh p = - 0,6.

Dari formula (3.13) kita peroleh

$$
\begin{aligned}
y(1925) &= 101 + -(0,6).8 + \frac{-0,6(-0,6+1)}{2}(-4) \\
&+ \frac{-0,6(-0,6+1)(-0,6+2)}{6}(-1) \\
&+ \frac{-0,6(-0,6+1)(-0,6+2)(-0,6+3)}{24}(-3) = 96,84 \text{ ribu.}
\end{aligned}
$$

Contoh 3.7.

Dalam tabel berikut, nilai-nilai dari y berkaitan dengan suku-suku dari suatu deret. Carilah suku pertama dan suku ke sepuluh.

Tabel 3.12. Tabel Nilai suatu Fungsi $y(x)$

x	3	4	5	6	7	8	9
y	2,7	6,4	12,5	21,6	34,3	51,2	72,9

Penyelesaian:

Berikut ini merupakan tabel selisih dari data dalam Tabel 3.12.

Tabel 3.13. Tabel Selisih Maju untuk Data dalamTabel 3.12.

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
3	2,7				
		3,7			
4	6,4		2,4		
		6,1		0,6	
5	12,5		3,0		0
		9,1		0,6	
6	21,6		3,6		0
		12,7		0,6	
7	34,3		4,2		0
		16,9		0,6	
8	51,2		4,8		
		21,7			
9	72,9				

Dari tabel selisih di atas, dapat dilihat bahwa selisih ketiga adalah konstan dan karenanya daftar fungsi tersebut menyatakan suatu polinom berderajat tiga. Dengan demikian, maka interpolasi dan ekstrapolasi yang dilakukan hasilnya eksak. Untuk mencari suku ke 10, kita gunakan formula (3.9), dengan $x_0 = 3$, x = 10, h = 1, dan p = 7 didapatkan

$$y(10) = 2,7 + 7(3,7) = \frac{(7)(6)}{(1)(2)}(2,4) + \frac{(7)(6)(5)}{(1)(2)(3)}(0,6) = 100$$

Untuk mencari suku ke 1, kita gunakan formula (3.13), dengan $x_n = 9$, x = 1, h = 1, dan p = -8 kita peroleh

$$y(1) = 72,9 + (-8)(21,7) + \frac{(-8)(-7)}{2}(4,8) + \frac{(-8)(-7)(-6)}{6}(0,6) \quad = 0,1$$

Contoh 3.8.

Tinjaulah tabel data berikut ini.

Tabel 3.14. Data nilai fungsi Tan x untuk $0,10 \le x \le 0,30$.

x	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
y = Tan x	0,1003	0,1511	0,2027	0,2553	0,3093

Tentukanlah :

(i). Tan 0,12

(ii). Tan 0,26

(iii). Tan 0,40

(iv). Tan 0,50

Penyelesaian:

Tabel selisih untuk data dalam Tabel 3.14 adalah seperti berikut:

Tabel 3.15. Tabel Selisih Maju untuk Data dalam Tabel 3.14.

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0,10	0,1003				
		0,0508			
0,15	0,1511		0,0008		
		0,0516		0,0002	
0,20	0,2027		0,0010		0,0002
		0,0526		0,0004	
0,25	0,2553		0.0014		
		0,0540			
0,30	0,3093				

(i). Untuk mencari Tan 0,12 digunakan formula

$$x = x_0 + ph \Rightarrow 0,12 = 0,10 + p(0,05) \Rightarrow p = 0,4$$

Dengan formula (3.9) diperoleh :

$$\begin{aligned}\text{Tan}\,0{,}12 &= 0{,}1003 + 0{,}4\left(0{,}0508\right) + \frac{0{,}4\left(0{,}4-1\right)}{2}\left(0{,}0008\right)\\ &\quad + \frac{0{,}4\left(0{,}4-1\right)\left(0{,}4-2\right)}{6}\left(0{,}0002\right)\\ &\quad + \frac{0{,}4\left(0{,}4-1\right)\left(0{,}4-2\right)\left(0{,}4-3\right)}{24}\left(0{,}0002\right)\\ &= 0{,}1205\end{aligned}$$

(ii) Untuk mendapatkan nilai Tan 0,26 diperlukan

$$x = x_n + ph \Rightarrow 0{,}26 = 0{,}30 + p\left(0{,}05\right) \Rightarrow p = -0{,}8\,.$$

Dengan formula (3.13) diperoleh

$$\begin{aligned}Tan\left(0{,}26\right) &= 0{,}3093 - 0{,}8\left(0{,}0540\right) + \frac{-0{,}8\left(-0{,}8+\right)}{2}\left(0{,}0014\right)\\ &\quad + \frac{-0{,}8\left(-0{,}8+1\right)\left(-0{,}8+2\right)}{6}\left(0{,}0004\right)\\ &\quad + \frac{-0{,}8\left(-0{,}8+\right)\left(-0{,}8+\right)\left(-0{,}8+3\right)}{24}\left(0{,}0002\right) = 0{,}2662\end{aligned}$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti sebelumnya diperoleh:

(iii) Tan 0,40 = 0,4241

(iv) Tan 0,50 = 0,5543

Nilai sebenarnya teliti sampai empat desimal dari Tan 0,12, Tan 0,26, Tan 0,40, dan Tan 0,50 berturut-turut adalah 0,1206, 0,2660, 0,4228, 0,5463.

Dengan membandingkan hasil perhitungan dan nilai sebenarnya, bahwa dalam dua hal yang pertama (i) dan (ii) (interpolasi) hasil yang diperoleh sangat teliti dibandingkan dengan dua hal terakhir (iii) dan (iv) (ekstrapolasi). Contoh-contoh tersebut menunjukkan bahwa “Bila suatu daftar fungsi selain suatu polinom, maka ekstrapolasi yang sangat jauh dari batas-batas daftar akar kurang baik untuk dilakukan”.

Relasi Simbolik

Formula selisih dapat dinyatakan oleh metode-metode simbolik, menggunakan operator perubahan *E* dan operator rata-rata μ dalam penjumlahan operator-operator δ , ∇ , dan Δ yang sudah didefinisikan di atas.

Operator rata-rata μ didefinisikan oleh persamaan

$$\mu y_r = 1/2\left(y_{r+1/2} + y_{r-1/2}\right) \tag{3.15}$$

Operator perubahan *E* didefinisikan oleh persamaan

$$Ey_r = y_{r+1} \tag{3.16}$$

Yang menunjukkan pengaruh dari *E* pada nilai fungsi y_r ke nilai berikutnya y_{r+1}

Operasi kedua dengan E diberikan oleh

$$E^2 y_r = E\left(Ey_r\right) = Ey_{r+1} = y_{r+2}$$

dan umumnya $E^n y_r = y_{r+n}$ dengan mudah diperoleh hubungan antar Δ dan *E*, dan kita peroleh :

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = Ey_0 - y_0 = \left(E-1\right)y_0$$

$$\begin{aligned} &\Delta \equiv E-1 \\ &E \equiv 1+\Delta \end{aligned} \tag{3.17}$$

Dari definisi-definisi di atas, relasi-relasi berikut dengan mudah diperoleh

$$\begin{aligned} &\nabla \equiv 1-E^1 \\ &\delta \equiv E^{1/2} - E^{-1/2} \\ &\mu = 1/2\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right) \\ &\mu^2 = 1 + 1/4\delta^2 \\ &\Delta = \nabla E \equiv \delta E^{1/2} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Sebagai contoh, akan ditunjukkan relasi $\mu^2 = 1 + 1/4\delta^2$. Dari definisi diketahui bahwa:

$$\begin{aligned} \mu y_r &= 1/2\left(y_r + 1/2 + y_r - 1/2\right) \\ &= 1/2\left[E^{1/2}y_r + E^{-1/2}y_r\right] \\ &= 1/2\left[E^{1/2} + E^{-1/2}\right]y_r \end{aligned}$$

Jadi

$$\mu = 1/2\left[E^{1/2} + E^{-1/2}\right]$$

$$\mu^2 = 1/4\left[E^{1/2} + E^{-1/2}\right]^2$$

$$= 1/4\left(E + 2 + F^{-1}\right)$$

$$q = 1/4\left[\left(E^{1/2} - E^{-1/2}\right)^2 + 4\right]$$

$$= 1/4\left(\delta^2 + 4\right)$$

Dengan demikian $\mu = \sqrt{1 + 1/4\delta^2}$. Akhirnya operator D dapat didefinisikan sebagai

$$Dy(x) = \frac{d}{dx}y(x)$$

Untuk relasi D terhadap E, kita mulai dengan deret Taylor

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \ldots$$

Bentuk tearsebut dapat ditulis dalam bentuk simbolik seperti berikut:

$$Ey(x) = \left[1 + hD + \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!} + \ldots\right]y(x)$$

Karena deret di dalam kurung adalah ekspansi e^{hD}, kita peroleh hasil

$$E \equiv e^{hD} \qquad (3.19)$$

3.4. FORMULA INTERPOLASI SELISIH TENGAH

Pada bagian terdahulu, telah dibicarakan formula interpolasi maju dan mundur dari Newton yang berturut-turut digunakan untuk interpolasi dekat ke awal dan interpolasi dekat ke akhir dari daftar nilai-nilai suatu fungsi. Sekarang akan dibicarakan formula interpolasi tengah yang lebih sesuai untuk menginterpolasi data/nilai fungsi yang ada di sekitar pertengahan dari daftar data tersebut. Operator selisih tengah telah dibicarakan pada bagian terdahulu.

Jika diberikan sejumlah 2*n*+1 pasangan data maka data itu dapat ditabulasikan ke dalam tabel Selisih Tengah berikut:

Tabel 3.16: Tabel Selisih Tengah Gauss

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	$\cdots$	Δ^{2n-1}	Δ^{2n}
x_{-n}	y_{-n}						
x_{-n+1}	y_{-n+1}	Δy_{-n}	$\Delta^2 y_{-n}$				
$\vdots$	$\vdots$	Δy_{-n+1}		$\Delta^3 y_{-n}$			
x_{-3}	y_{-3}	$\vdots$	$\Delta^2 y_{-n+1}$				
x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-3}	$\vdots$	$\Delta^3 y_{-n+1}$			
x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-3}$	$\vdots$			
x_0	y_0	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-2}$	$\Delta^3 y_{-3}$	$\cdots$	$\Delta^{2n-1} y_{-n}$	
x_1	y_1	Δy_0	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\vdots$	$\Delta^{2n-1} y_{-n+1}$	$\Delta^{2n} y_{-n}$
x_2	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_{-1}$	$\cdots$		
x_3	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-2}$	$\Delta^3 y_{n-2}$			
x_n	y_n	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-1}$	$\Delta^3 y_{n-1}$			

Formula Interpolasi Stirling

Formula Interpolasi Stirling diberikan dalam bentuk berikut ini:

$$
\begin{aligned}
y\ (x) = y_0 &+ \frac{p}{1!}\cdot\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2} + \frac{p^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{p\left(p^2-1\right)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-3}+\Delta^3 y_{-1}}{2} \\
&+ \frac{p^2\left(p^2-1\right)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots + \frac{p^2\left(p^2-1\right)\left(p^2-2\right)\ldots\left(p^2-(n-1)^2\right)}{(2n)!}\cdot\Delta^{2n} y_{-n} \\
&+ \frac{p\left(p^2-1\right)\left(p^2-2\right)\ldots\left(p^2-(n-1)^2\right)}{(2n-1)!}\cdot\frac{\Delta^{2n-1} y_{-n}+\Delta^{2n-1} y_{-n+1}}{2}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

dengan $x = x_0 + p\,h$.

Formula Stirling di atas menggunakan Tabel Selisih Tengah Gauss (Tabel 3.16.) untuk melakukan interpolasi. Formula ini dipakai untuk interpolasi di sekitar tengah-tengah data dari suatu tabel data dan ia akan memberikan hasil teliti untuk $-0.25 < p < 0.25$.

3.5. INTERPOLASI DENGAN TITIK-TITIK YANG BERJARAK TIDAK SAMA

Pada pasal terdahulu telah dibicarakan berbagai macam formula interpoalsi, tetapi daftar nilai yang diinterpolasi variabel bebasnya (x) berada pada jarak yang sama.

Pada bagian ini akan dibicarakan beberapa formula interpolasi dengan jarak antara nilai-nilai variabel bebasnya yang tidak sama. Dalam pembicaraan kita di sini akan dibahas formula untuk hal tersebut yaitu formula interpolasi Lagrange dan formula interpolasi Newton umum.

Formula Interpolasi Lagrange

Misal $y(x)$ kontinu diferensiabel samapi keturunan (n+1) dalam interval buka (a,b). Diberikan (n+1) buah titik-titik $(x_0, y_0),(x_1, y_1),(x_2, y_2),...,(x_n, y_n)$ dengan nilai-nilai x tak perlu berjarak sama dengan yang lainnya, dan akan kita cari suatu polinom berderajat n, sebutlah $\varnothing_n(x)$, sedemikian hingga

$$\varnothing_n(x_i) = y(x_i) = y_i, i = 0,1,2,3,...,n \tag{3.21}$$

Misalkan

$$\varnothing_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_n x^n , \tag{3.22}$$

adalah polinom yang akan dicari.

Pensubtitusian persamaan 3.8.1 ke dalam 3.8.2, kita peroleh sistem persamaan-persamaan.

$$\begin{aligned}
y_0 &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + ... + a_n x_0^n \\
y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + ... + a_n x_1^n \\
y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + ... + a_n x_2^n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_n &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + ... + a_n x_n^n
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Sistem persamaan (3.23) akan memberikan solusi, bila determinan

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \ldots x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \quad x_1^n \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 1 & x_n & x_n^2 \quad x_n^n \end{vmatrix} \neq 0$$

Determinan tersebut dikenal sebagai determinan *Vandermonde* yang bernilai

$$(x_0 - x_1),(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)\ldots(x_{n-1} - x_n)$$

Elimenasi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ dari persamaan (3.22) dan (3.23) kita peroleh :

$$\begin{bmatrix} \varnothing_n(x) & 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ y_0 & 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & 1 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = 0 \tag{3.24}$$

yang menunjukkan bahwa $\varnothing_n(x)$ adalah kombinasi linear dari $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

Berdasarkan itu dapat ditulis

$$\varnothing_n(x) = \sum_{i=0}^{n} t_i(x)\, y_i \tag{3.25}$$

di mana $t_i(x)$ adalah polinom dalam x berderajat n.

Karena $\varnothing_n(x_j) = y_j$, untuk j = 0,1,2,3,...n., persamaan (3.25) memberikan

$$\left.\begin{aligned} t_i(x_j) &= 0, \quad \text{untuk } i \neq j \\ t_i(x_j) &= 1, \quad \text{untuk } i = j \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

Jadi $t_i(x)$ dapat ditulis sebagai :

$$t_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} \tag{3.27}$$

yang memenuhi kondisi (3.25).

Dalam persamaan (3.27), tulis pembilang fungsi tersebut sebagai

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n) \tag{3.28}$$

maka diperoleh bentuk

$$\pi'(x_i) = \frac{d}{dx}\left[\pi(x)\right]_{x = x_i}$$

$$\pi'(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)$$

Jadi persamaan (3.27) dapat ditulis

$$t_i(x) = \frac{\pi(x)}{(x - x_i)\pi'(x_i)} \tag{3.29}$$

Dengan demikian berlakulah keadaan

$$\varnothing_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\pi(x)}{(x - x_i)\pi'(x_i)} y_i \tag{3.30}$$

yang disebut *formula interpolasi Lagrange*.

Koefisien-koefisien $t_i(x)$ yang didefinisikan oleh (3.27) disebut *koefisien-koefisien interpolasi Lagrange*.

Selanjutnya pertukaran *x* dan *y* dalam (3.30) akan diperoleh

$$\varnothing_n(y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\pi(y)}{(y - y_i)\pi'(y_i)} x_i \tag{3.31}$$

yang digunakan untuk interpolasi *invers*.

Untuk pemakaian praktis, formula interpolasi Lagrange (3.30) dapat pula dinyatakan secara terperinci sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y(x) = {} & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\dots(x_0-x_n)} \cdot y_0 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\dots(x_1-x_n)} \cdot y_1 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} \cdot y_2 \\ & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\dots(x_3-x_n)} \cdot y_3 \\ & + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} \cdot y_n \end{aligned} \tag{3.32}$$

di mana, $y(x)$ adalah nilai-nilai yang akan diinterpolasi ,

x adalah nilai variabel yang berkorespondensi dengan $y(x)$.

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah nilai-nilai x

$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ adalah nilai-nilai *y*.

Contoh 3.9

Berikut ini adalah tabel dari data nilai-nilai x yang berkorespondensi dengan $y = {}^{10}\log x$:

Tabel 3.17. Tabel data sejumlah nilai fungsi $y = {}^{10}\log x$

x	300	304	305	307
$y = {}^{10}\log x$	2,4771	2,4829	2,4843	2,4871

Carilah $y = {}^{10}\log 301$.

Penyelesaian:

Ubah bentuk tabel di atas menjadi tabel sebagaimana berikut ini

Tabel 3.18. Tabel data hasil penulisan ulang Tabel 3.17.

$x_0 = 300$	$x_1 = 304$	$x_2 = 305$	$x_3 = 307$
$y_0 = 2{,}4771$	$y_1 = 2{,}4829$	$y_2 = 2{,}4843$	$y_3 = 2{,}4871$

Dengan menggunakan formula (3.32) diperoleh

$$\begin{aligned} y(301) = & \frac{(301-304)(301-305)(301-307)}{(300-304)(300-305)(300-307)} \cdot 2{,}4771 \\ & + \frac{(301-300)(301-305)(301-307)}{(304-300)(304-305)(304-307)} \cdot 2{,}4829 \\ & + \frac{(301-300)(301-304)(301-307)}{(305-300)(305-304)(305-307)} \cdot 2{,}4843 \\ & + \frac{(301-300)(301-304)(301-305)}{(307-304)(307-304)(307-305)} \cdot 2{,}4871 \end{aligned}$$

$$y(301) = 1{,}2739 + 4{,}9658 - 4{,}4717 + 0{,}7106 = 2{,}4786$$

Soal-soal latihan:

1. Diberikan tabel data sebagaimana Tabel 3.19. berikut:

Tabel 3.19.

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$f(x)$	1.0	2.119	2.910	3.945	5.72	8.695

Gunakan formula interpolasi depan dan mundur Newton serta Stirling untuk mendapatkan $f(0.1)$, $f(2.2)$, dan $f(1.3)$.

2. Dengan menggunakan formula interpolasi Lagrange, hitung f (0.1), f (2.2), dan f (1.3). Berikan komentar anda berkenaan dengan hasil yang diperoleh setelah membandingkannya dengan hasil pada penyelesaian sebelumnya (soal nomor 1).

3. Dapatkan formula Interpolasi Newton (umum) berikut ini

$$
\begin{aligned}
y(x) = y_0 &+ (x-x_0)[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)[x_0,x_1,x_2] \\
&+ (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
&+ \cdots + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)[x_0,x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n]
\end{aligned}
$$

dengan

$$[x_0,x_1] = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}; \quad dst; \quad [x_0,x_1,x_2] = \frac{[x_1,x_2]-[x_0,x_1]}{x_2-x_0}, \quad dst$$

$$[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{[x_1,x_2,x_3]-[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}; \quad dst$$

disebut sebagai selisih pembagi.

BAB IV
DIFERENSIASI DAN INTEGRASI NUMERIK

4.1. DIFERENSIASI NUMERIK

Pada bagian sebelumnya telah dibicarakan beberapa masalah umum tentang interpolasi. Misalkan diberikan sekumpulan nilai-nilai $(x_0, y_0),(x_1, y_1),...,(x_n, y_n)$, dan x dan $y(x)$, yang digunakan untuk mencari suatu polinom $\varnothing(x)$ sedemikian hingga $y(x)$ dan $\varnothing(x)$ sesuai dengan daftar/kumpulan titik-titik tersebut. Dalam bagian ini, akan dibicarakan masalah diferensiasi numerik dan integrasi numerik. Permasalahan yang dimaksud adalah bahwa bila diberikan sekumpulan nilai-nilai x_i yang berkorespondensi dengan y_i untuk $i = 1, 2, 3, \cdots, N$, kemudian diupayakan untuk mencari formula guna menyelesaikan/ menghitung :

(i) $\dfrac{dy}{dx}$ untuk suatu nilai x di dalam interval $[x_0, x_n]$, dan

(ii) $\int\limits_{x_0}^{x_n} y\, dx$.

Lingkup bahasan dalam bagian ini adalah pada nilai-nilai data berjarak sama.

4.1.1. Formula Newton untuk Diferensiasi Numerik

Metode yang umum untuk mencari formula diferensiasi numerik adalah mendiferensiasi interpolasi polinom. Oleh karenanya, hubungan tiap-tiap formula yang dibicarakan pada interpolasi, dipakai untuk untuk menyelesaikan permasalahan derivatif secara numerik.

Perhatikan formula selisih maju Newton berikut:

$$y = y_0 + u\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{u(u-1)(u-)}{3!}\Delta^3 y_0 + L \tag{4.1}$$

dengan

$$x = x_0 + uh \text{ atau } u = \frac{x - x_0}{h} \tag{4.2}$$

Dari kalkulus diketahui bahwa aturan rantai untuk derivatif fungsi $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ diberikan dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Dengan aturan ini, formula derifatif $\frac{dy}{dx}$ yang diturunkan dari persamaan (4.1) adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{h}[\Delta y_0 + \frac{2u-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3u^2-6u+2}{6}\Delta^3 y_0 + \cdots] \tag{4.3}$$

Formula (4.3) dapat digunakan untuk menghitung nilai $\frac{dy}{dx}$ untuk nilai-nilai x yang tidak didaftar. Untuk nilai-nilai x yang didaftar, dapat diturunkan formula dengan cara sebagai berikut:

Pilih $x = x_0$ sehingga diperoleh $u = 0$ dari (4.2). Subsitusikan nilai tersebut ke (4.3) diperoleh :

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_o} = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \cdots\right] \tag{4.4}$$

Dengan menurunkan (4.3) sebanyak 2 (dua) kali lagi terhadap x diperoleh

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + \frac{6u-6}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{12u^2-36u+22}{24}\Delta^4 y_0 + \cdots\right] \tag{4.5}$$

Subsitusikan nilai $u = 0$ ke (4.5) diperoleh

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \cdots\right] \tag{4.6}$$

Dengan cara yang sama, formula untuk turunan (derivatif) yang lebih tinggi dapat diperoleh. Berikut ini beberapa formula derivatif yang dapat diturunkan dengan cara sebagaimana dikekemukan di atas.

(a) Formula selisih belakang Newton:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_n} = \frac{1}{h}\left[\nabla y_n + \frac{1}{2}\nabla^2 y_n + \frac{1}{3}\nabla^3 y_n + \cdots\right] \tag{4.7}$$

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=x_n} = \frac{1}{h^2}\left[\nabla^2 y_n + \nabla^3 y_n + \frac{11}{12}\nabla^4 y_n + \frac{5}{6}\nabla^5 y_n + \cdots\right] \tag{4.8}$$

(b) Formula selisih tengah/pusat Stirling :

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h}\left[\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2} - \frac{1}{6}\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{1}{30}\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2} + \ ...\right] \tag{4.9}$$

$$\left[\frac{d^2 y}{dx^2}\right]_{x=x_0} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12}\Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90}\Delta^6 y_{-3} - \ \cdots\right] \tag{4.10}$$

Berikut ini formula yang sejenis dengan dua formula sebelumnya ((4.4) dan (4.6)).

$$y_0' = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \frac{1}{5}\Delta^5 - \frac{1}{6}\Delta^6 + \frac{1}{7}\Delta^7 - \frac{1}{8}\Delta^8 + \cdots\right) y_0$$

$$= \frac{1}{h}\left(\Delta + \frac{1}{2}\Delta^2 - \frac{1}{6}\Delta^3 + \frac{1}{12}\Delta^4 - \frac{1}{20}\Delta^5 + \frac{1}{30}\Delta^6 - \frac{1}{42}\Delta^7 + \frac{1}{56}\Delta^8 + \ ...\right) y_{-1} \tag{4.11}$$

$$y_0'' = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12}\Delta^4 - \frac{5}{6}\Delta^5 + \frac{137}{180}\Delta^6 - \frac{7}{10}\Delta^7 + \frac{363}{560}\Delta^8 + \ \cdots\right) y_0$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 - \frac{1}{12}\Delta^4 + \frac{1}{12}\Delta^5 - \frac{13}{180}\Delta^6 - \frac{11}{180}\Delta^7 - \frac{29}{560}\Delta^8 + \cdots\right) y_{-1} \tag{4.12}$$

Untuk nilai derivatif yang diinginkan dekat ke akhir dari suatu daftar, salah satu formula berikut ini dapat digunakan.

$$y_n' = \frac{1}{h}\left(\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \frac{1}{4}\nabla^4 + \frac{1}{5}\nabla^5 + \frac{1}{6}\nabla^6 + \frac{1}{7}\nabla^7 + \frac{1}{8}\nabla^8 + \ \cdots\right) y_n$$

$$= \frac{1}{h}\left(\nabla - \frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{1}{6}\nabla^3 - \frac{1}{12}\nabla^4 - \frac{1}{20}\nabla^5 - \frac{1}{30}\nabla^6 - \frac{1}{42}\nabla^7 - \frac{1}{56}\nabla^8 - \ \cdots\right) y_{n+1} \tag{4.13}$$

$$y_n'' = \frac{1}{h^2}\left(\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12}\nabla^4 + \frac{5}{6}\nabla^5 + \frac{137}{180}\nabla^6 + \frac{7}{10}\nabla^7 + \frac{363}{560}\nabla^8 + \cdots\right) y_n$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\nabla^2 - \frac{1}{12}\nabla^4 - \frac{1}{12}\nabla^5 - \frac{13}{180}\nabla^6 - \frac{11}{180}\nabla^7 - \frac{29}{56}\nabla^8 - \cdots\right) y_{n+1} \tag{4.14}$$

Contoh 4.1

Diberikan pasangan nilai x dan y sebagaimana ditampilkan dalam Tabel 4.1.

Tabel 4.1.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
y	7,3890561	9,0250135	11,0231764	13,4637380	16,4446468	20,0855369

Tentukan nilai $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ pada $x = 1{,}1$.

Penyelesaian:

Tabel selisih berkenaan dengan data dalam Tabel 4.1 di atas adalah sebagaimana diberikan dalam Tabel 4.2 berikut ini.

Tabel 4.2.

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
1,0	7,3890561					
		1,6359574				
1,1	9,0250135		0,3622055			
		1,9981633		0,0801929		
1,2	11,0231764		0,4423988		0,0175502	
		2,4405617		0,0979483		0,0039310
1,3	13,4637380		0,5403471		0,2168603	
		2,9809087		0,1163433		
1,4	16,4446468		0,6599814			
		3,6408902				
1,5	20,0855369					

Dalam kasus ini dipunyai $x_0 = 1{,}1; y_0 = 9{,}0250135$, dan $h = 0{,}1$.

Untuk nilai turunan pertama, dapat digunakan formula (4.4) yang memberikan hasil sebagai berikut:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_o} = \frac{1}{0{,}1}\left[1{,}9981633 - \frac{1}{2}0{,}4423988 + \frac{1}{3}0{,}0979483 - \frac{1}{4}0{,}2168603\right]$$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_o} = 18{,}0419140$$

Bila menggunakan formula (4.11), selisih diagonal pertama yang akan digunakan adalah 1,6359574. Selengkapnya adalah sebagai berikut:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1,1} = \frac{1}{0{,}1}\left(1{,}6359574 + \frac{1}{2}0{,}3622055 - \frac{1}{6}0{,}0801929 + \frac{1}{12}0{,}0175502 - \frac{1}{20}0{,}0039310\right)$$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1,1} = 18{,}0497760$$

Sementara itu untuk mendapatkan nilai turunan kedua untuk titik x = 1,1, dapat digunakan formula (4.6). Penggunaan formula ini menghasilkan

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1,1} = \frac{1}{0.1^2}\left[0,4423988 - 0,0979483 + \frac{11}{12}0,2168603\right]$$

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1,1} = 36,432932$$

Contoh 4.2

Hitunglah derivatif kesatu dan kedua di titik $x = 1,5$ dalam Tabel 4.1.

Penyelesaian:

Untuk derivatif pertama dapat digunakan formula 4.7. Sedangkan derivatif kedua dapat digunakan formula 4.8. Penggunaan formula-formula tersebut terhadap data pada Tabel 4.2., memerlukan $x_n = 1,5;$ $y_n = 3,6408902$ dan $h = 0,1$. Berikut ini adalah hasil penggunaan formula (4.7) dan (4.8).

Penggunaan formula 4.7:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1,5} = \frac{1}{10}\left[3,6408902 + \frac{1}{2}0,6599814 + \frac{1}{3}0,1163433 + \frac{1}{4}0,2168603 + \frac{1}{5}0,0039310\right]$$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1,5} = 40,1696670$$

Penggunaan formula 4.8:

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1,5} = \frac{1}{10^2}\left[0,6599814 + 0,1163433 + \frac{11}{12}0,2168603 + \frac{5}{6}0,0039310\right]$$

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1,5} = 80,2770450$$

Contoh 4.3

Tentukan nilai turunan $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ di titik $x = 1,3$ untuk daftar nilai x dan y pada Tabel 4.1.

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan permasalahan ini, dapat digunakan formula 4.9. untuk turunan pertama dan formula 4.10. untuk turunan kedua. Untuk penggunaan formula-formula tersebut, pilih $x_0 = 1,3$. Berikut penggunaan formula tersebut hingga diperoleh hasil yang diinginkan.

Penggunaan formula 4.9:

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1,3} = \frac{1}{0,1}\left[\frac{2,4405617 + 2,9809087}{2} - \frac{1}{6}\frac{0,0979483 + 0,1163433}{2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{30}\frac{0,0039310 + 0,000000}{2}\right] = 26,9266880$$

Penggunaan formula 4.10:

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=1,3} = \frac{1}{10^2}\left[0,5403471 - \frac{1}{12}0,2168603\right] = 53,886750$$

4.1.2. Nilai Maksimum dan Nilai Minimum dari Suatu Daftar Nilai Fungsi

Dari kalkulus, diketahui bahwa nilai maksimum dan minimum dari suatu fungsi dapat dicari dengan menetapkan derivatif (turunan) pertama sama dengan nol, sehinggga diperoleh nilai variabel yang menyebabkan suatu fungsi itu maksimum atau minimum. Dengan cara yang sama seperti disebutkan di atas, dapat digunakan pula untuk nilai maksimum dan minimum dari suatu daftar fungsi.

Pandang formula selisih maju Newton berikut:

$$y = y_0 + p\Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}\Delta^3 y_0 + \cdots \qquad (4.15)$$

Bila formula (4.15) diturunkan terhadap p diperoleh

$$\frac{dy}{dp} = \Delta y_0 + \frac{2p-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3p^2 - 3p + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \cdots \qquad (4.16)$$

Konsep maksimum atau minimum fungsi mengharuskan $\frac{dy}{dp} = 0$.

Karena itu, ruas kanan (4.16) dengan menganggap sesudah suku ketiga suku-suku tersebut bernilai sama dengan nol, diperoleh bentuk kuadrat dalam p yakni:

$$c_0 + c_1 p + c_2 p^2 = 0 \tag{4.17}$$

dengan

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= \Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 \\ c_1 &= \Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 \\ c_2 &= \frac{1}{2}\Delta^3 y_0 \end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

Karena $x = x_0 + ph$, maka nilai x dapat ditentukan. Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh berikut.

Contoh 4.4

Deberikan sejumlah data sebagaimana pada Tabel 4.3. berikut

Tabel 4.3.

x	1,2	1,3	1,4	1,4	1,6
y	0.9320	0.9636	0.9855	0.9975	0.9996

Carilah x untuk nilai y maksimum dan carilah nilai maksimum y tersebut (Gunakan ketelitian hingga dua desimal).

Penyelesaian:

Tabel 4.4. Tabel Selisih Maju untuk Tabel 4.3.

x	y	Δ	Δ^2
1,2	0,9320		
		0,0316	
1,3	0,9636		-0,0097
		0,0219	
1,4	0,9844		-0,0099
		0,0120	
1,4	0,9974		-0,0099
		0,0021	
1,6	0,9996		

Karena ketelitian yang diminta adalah dua desimal, formula yang dipergunakan hanya sampai suku ke dua dari formula (4.16). Dengan menyamakannya dengan nol formula yang dimaksud diperoleh yakni $\dfrac{dy}{dp} = \Delta y_0 + \dfrac{2p-1}{2}\Delta^2 y_0 = 0$ diperoleh

$$0,0316 + \frac{2p-1}{2}(-0,0097) = 0 \text{ atau } p = 3,8.$$

Karena $x = x_0 + ph$ maka $x = x_0 + ph = 1,2 + 3,8(0,1) = 1,58$. Untuk nilai x tersebut, nilai berada di akhir Tabel 4.3, formula selisih mundur Newton sebaiknya digunakan untuk mendapatkan turunan pertama. Penggunaan formula (3.14) untuk $x_n = 1,6(y_n = 0,9996)$ diperoleh

$$y(1,58) = 0,9996 - 0,2(0,0021) + \frac{-0,2(-0,2+1)}{2}(-0,0099) \text{ atau}$$

$$y(1,58) = 0,9996 - 0,0004 + 0,0008 = 1,0$$

Soal-soal latihan

1. Carilah $\frac{d}{dx}(j_0)$ di $x = 0,1$, dari tabel berikut

x	0,0	0,1	0.2	0.3	0.4
$j_0(x)$	1,0000	0,9974	0,9900	0,9776	0,9604

2. Tabel berikut menunjukkan perubahan sudut θ (radian) pada interval waktu t (detik)

θ	0.042	0.104	0.168	0.242	0.327	0.408	0.489
t	0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12

3. Tabel berikut menunjukkan nilai-nilai x dan y yang saling berkorespondensi

x	0	1	2	3	4	4	6
y	6.9897	7.4036	7.7814	8.1291	8.4410	8.7406	9.0309

Tentukan $\frac{dy}{dx}$, untuk (i) $x = 1$ (ii) $x = 3$ (iii) $x = 6$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ untuk $x = 3$.

4.2. INTEGRASI NUMERIK

Integrasi numerik umumnya dilakukan apabila :

a. Fungsi yang akan diintegrasi sedemikian hingga tidak ada metode analitik untuk menyelesaikannya, misalnya

$$\int_a^b \sqrt{\sin x dx}$$

b. metode analitik ada (bisa dipakai), tetapi agak kompleks untuk digunakan misalnya ketika akan menyelesaikan integral berikut ini

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^4} \quad dx$$

c. Fungsi yang akan diintegrasi, bentuk eksplisitnya tak diketahui, tetapi diberikan nilai-nilai variabel bebasnya dan nilai-nilai fungsi yang berkorespondensinya di dalam suatu interval $[\text{a,b}]$.

Masalah umum dari integrasi numerik dapat dinyatakan sebagai berikut:
diberikan sekumpulan titik $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$, dari fungsi $y = f(x)$, dimana bentuk eksplisit dari $f(x)$ tidak diketahui, dan dari data (keterangan) tersebut akan dihitung nilai integral tentu berikut:

$$I = \int_a^b y \, dx \tag{4.19}$$

seperti didalam diferensiasi numerik, $f(x)$ akan diaproksimasi oleh interpolasi polinom $\varnothing(x)$, dan hasilnya pada integrasi tersebut adalah nilai aproksimasi integral tentu. Jadi, perbedaan formula integrasi bergantung pada bentuk dari formula integrasi yang dipakai. Dalam bagian ini formula umum untuk integrasi numerik akan dipakai formula *selisih maju dari Newton*.

Misalkan interval $[a,b]$ dibagi menjadi n interval bagian, sedemikian hingga $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Oleh karena itu $x_n = x_0 + nh$. Dengan demikian diperoleh

$$I = \int_{x_0}^{x_n} y \, dx \tag{4.20}$$

Aproksimasi y oleh formula selisih maju Newton, kita peroleh:

$$\mathrm{I} = \int_{x_0}^{x_n} \left[y_0 + p\Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}\Delta^3 y_0 + \cdots \right] dx \qquad (4.21)$$

Karena $x = x_0 ph$ maka $dx = h \quad dp$, dan karena integral di atas menghasilkan

$$\mathrm{I} = \int_{0}^{n} \left[y_0 + p\Delta y_0 + \frac{p(p-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}\Delta^3 y_0 + \cdots \right] dp \qquad (4.22)$$

Dan setelah disederhanakan diperoleh:

$$\int_{x_0}^{x_n} y\ dx = \mathrm{nh} \left[\mathrm{y}_0 + \frac{n}{2}\Delta y_0 + \frac{n(2n-3)}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-2)^2}{24}\Delta^3 y_0 + \ldots\ldots \right] \qquad (4.23)$$

Dari formula umum (4.23), kita peroleh macam-macam formula integrasi dengan mengambil nilai *n bulat positif* tertentu. Diskusi pada bagian ini dibatasi pada nilai $n=1$ dan $n=2$. Hal ini dikarenakan selain hanya sebagai demonstrasi teknis penurunan formula juga formula yang dihasilkan untuk nilai-nilai ini cukup sering digunakan dalam pemakaian praktis. Formula yang diperoleh dengan memilih nilai n = 1 dekenal dengan nama formula aturan Trapezoida sedangkan untuk n = 2 dikenal dengan nama aturan Simpson 1/3. Untuk formula aturan Simson 3/8 dan aturan Weddle berturut-turut diperoleh dengan memilih $n=3$ dan $n=6$ dari formula umum 4.23.

4.2.1. Aturan Trapezoida

Untuk $n=1$ dalam formula umum (4.23) dan semua turunan yang lebih dari turunan pertama sama dengan nol, formula tersebut menjadi:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} y \quad dx &= h\left[y_0 + \tfrac{1}{2}\Delta y_0\right] \\ &= h\left[y_0 + \tfrac{1}{2}\left(y_1 - y_0\right)\right] \\ &= \frac{h}{2}\left[y_0 + y_1\right] \end{aligned} \qquad (4.24)$$

Dengan cara yang sama untuk interval berikutnya $\left[x_1, x_2\right]$, diperoleh juga:

$$\int_{x_1}^{x_2} y \quad dx = \frac{h}{2}\left[y_1 + y_2\right] \qquad (4.25)$$

Dengan menggunakan prinsip induksi matematika, untuk interval terakhir $\left[x_{n-1}, x_n\right]$, diperoleh

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} y\, dx = \frac{h}{2}\,[y_{n-1} + y_n] \tag{4.26}$$

Dengan menjumlahkan hasil-hasil pada (4.24), (4.25), dan (4.26), diperoleh skema berikut ini:

$$\int_{x_0}^{x_n} y\, dx = \frac{h}{2}\,[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})] \tag{4.27}$$

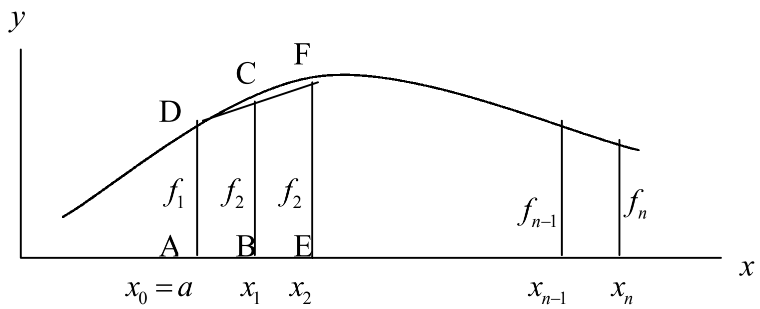
yang dikenal sebagai "*Aturan Trapezoida*" untuk integrasi numerik (4.20).

Secara geometri Metode Trapezoida dapat dijelaskan sebagai berikut:

Untuk memperoleh hasil aproksimasi $\int_a^b f(x)\, dx$, dengan nilai fungsi f diketahui dari sekumpulan nilai x yang berjarak sama pada interval $[a,b]$. kita tulis nilai-nilai x oleh $x_r\,(r = 0,1,2,...,n)$ dimana $x_0 = a, x_r = x_0 + rh, x_n = x_0 + nh = b$, dan h konstanta, dan kita tulis nilai-nilai yang berkorespondensi denga x_r oleh f_r, yaitu

$$f_r \equiv f(x_r) \equiv f(x_0 + rh).$$

Perhatikan Gambar 4.1 di bawah ini



Gambar 4.1

Misalkan bentuk grafik $f(x)$ diketahui. Kemudian antara titik (x_r, f_r) dan (x_{r+1}, f_{r+1}) untuk $r = 0,1,2,...,(n-1)$ dihubungkan oleh garis lurus-grais lurus. Secara matematis, persamaan garis lurus yang menghubungkan titik-titik (x_0, f_0) dan (x_1, f_1) adalah:

$$y = f_0 + (x - x_0)\left(\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\right)$$

Bentuk geometris persamaan tersebut tidak lain adalah sebuah trapesium ABCD. Dengan menggunakan konsep integral Rieman dalam Kalkulus, diperoleh aproksimasi $f(x)$ dalam interval $[x_0, x_1]$ adalah:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx \approx \text{Luas Trapesium ABCD}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ f_0 + (x - x_0) \left(\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \right) \right\} dx$$

$$= f_0(x_1 - x_0) + \frac{1}{2}(x_1 - x_0)^2 \left(\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \right)$$

$$= \frac{1}{2} h(f_1 + f_0)$$

Demikian juga

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x)\, dx \approx \text{Luas Trapesium BCEF}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) = \frac{1}{2} h(f_2 + f_1)$$

Bila dijumlahkan secara keseluruhan luas-luas trapesium pada Gambar 4.1., maka akan memberikan persamaan berikut ini:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}h(f_0 + f_1) + \frac{1}{2}h(f_1 + f_2) + \cdots + \frac{1}{2}h(f_{n\text{-}1} + f_n)$$

$$= \frac{1}{2}h\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + 2f_{n\text{-}1} + f_n \right)$$

Subtitusikan $f(x) = y$, $y_0 = f_0, y_1 = f_1, ..., y_n = f_n$, dan $a = x_0$ serta $b = x_n$ diperoleh kembali formula (4.27).

Contoh 4.5

Gunakan aturan trapezoida untuk menghitung $\int_2^4 f(x)dx$ yang nilai fungsinya diberikan dalam Tabel 4.5. berikut :

Tabel 4.5.Tabel nilai fungsi untuk suatu nilai x yang diberikan.

x	$f(x)$
2,0	1,7321
2,4	1,8708
3,0	2,0000
3,4	2,1213
4,0	2,2361

Penyelesaian:

Dari Tabel 4.5. diketahui bahwa $h = 0,5$. Dengan menggunakan metode trapezoida diperoleh:

$$\begin{aligned}\int_2^4 f(x)dx &= \frac{1}{2}\cdot 0,5[1,7321 + 2(1,8708 + 2,000 + 2,1213) + 2,2361] \\ &= 0,25(15,9524) \\ &= 3,9881\end{aligned}$$

Kekeliruan aturan Trapezoida dapat dihitung dengan cara sebagai berikut:

Asumsikan $y = f(x)$ kontinu dan mempunyai derivatif dalam $[x_0, x_n]$. Ekspansi y dalam deret Taylor di sekitar $x = x_0$ memberikan:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} y\ dx &= \int_{x_0}^{x_1} \left[y_0 + (x - x_0)y_0^{'} + \frac{(x - x_0)^2}{2} y_0^{''} + \cdots \right] dx \\ &= hy_0 + \frac{h^2}{2} y_0^{'} + \frac{h^3}{6} y_0^{''} + \cdots\end{aligned} \tag{4.28}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{h}{2}[y_0 + y_1] &= \frac{h}{2}\left[y_0 + y_0 + hy_0^{'} + \frac{h^2}{2} y_0^{''} + \frac{h^3}{6} y_0^{'''} + \cdots \right] \\ &= hy_0 + \frac{h^2}{2} y_0^{'} + \frac{h^3}{6} y_0^{''} + \cdots\end{aligned} \tag{4.29}$$

Dari (4.28) dan (4.29) diperoleh

$$\int_{x_0}^{x_1} y\ dx - \frac{h}{2}[y_0 + y_1] = -\frac{1}{12} h^3 y_0^{''} + \cdots \tag{4.30}$$

yang merupakan ukuran galat dalam interval $[x_0, x_1]$.

Dengan cara yang sama, diperoleh kekeliruan-kekeliruan untuk setiap interval bagian

$$[x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

yaitu semua kekeliruan (E) yang dapat dihitung dengan menggunakan formula berikut:

$$E \;=\; -\frac{1}{12}h^3(y_0^{"} + y_1^{"} + \ldots\ldots\ldots + y_{n-1}^{"} \tag{4.31}$$

dengan E disebut kekeliruan total. Apabila ruas kanan (4.31) disubsitusikan ke dalam $y"(x) = \left(y_0^{"} + y_1^{"} + \ldots + y_{n-1}^{"}\right)$ maka akan diperoleh:

$$E \;=\; -\frac{(b-a)}{12}h^2 y^{"}(x) \tag{4.32}$$

karena $nh = (b-a)$.

4.2.2 Metode Simpson

Salah satu teknik intgrasi numerik yang cukup sering dipakai adalah metode Simpson. Metode Simpson dapat diperoleh dari persamaan (4.23) untuk $n = 2$, yaitu dengan aproksimasi parabolis. Formula untuk aturan ini diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_2} y\,dx \;&=\; 2h\left[y_0 + \Delta y_0 + \frac{1}{6}\Delta^2 y\right] \\
&= 2h\left[y_0 + (y_1 - y_1) + \frac{1}{6}\Delta(\Delta y_0)\right] \\
&=\; 2h\;[y_1 + \frac{1}{6}\Delta(y_1 - \;y_0)] \\
&=\; 2h\;[y_1 + \frac{1}{6}[(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)]] \\
&=\; 2h\;[y_1 + \frac{1}{6}(y_2 - 2y_1 + y_0)] \\
&=\; 2h\;[\frac{1}{6}y_0 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}y_1] \\
&=\; \frac{h}{2}[y_0 + 4y_1 + y_2]
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh pula $\int_{x_2}^{x_4} y\,dx \;=\; \frac{h}{3}\left[y_2 + 4y_3 + y_4\right]$. Secara umum diperoleh $\int_{x_{n-2}}^{x_n} y\,dx \;=\; \frac{h}{3}\left[y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right]$. Jumlah keseluruhan integral yang dimiliki adalah

$$\int_{x_0}^{x_n} y\ dx \ = \ \frac{h}{3}\left[y_0+4(y_1+y_3+y_5+\cdots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+y_6+\cdots+y_{n-2})+y_n\right] \qquad (4.33)$$

Integrasi numerik dengan menggunakan formula (4.33) dikenal dengan sebutan **metode Simpson 1/3**. Di dalam metode ini, interval integrasi dibagi menjadi interval bagian yang banyaknya genap dengan jarak h. Seperti halnya pada metode trapezoida, galat pada metode Simpson dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x)dx-\frac{h}{3}\left[y_0+4\left(y_1+y_3+y_5+...+y_{n-1}\right)+2\left(y_2+y_4+y_6+...+y_{n-2}\right)+y_n\right]$$
$$=-\frac{(b-a)}{180}h^4y^{(4)}(x) \qquad (4.34)$$

dengan $y^{(4)}(x)$ adalah nilai terbesar dari derivatif ke-4.

Contoh 4.6.

Gunakan aturan Simpson 1/3 untuk menyelesaikan intgral $\int_2^4 f(x)\,dx$ bila diketahui nilai-nilai x dan $f(x)$ adalah sebagai berikut:

Tabel 4.6. Daftar sejumlah nilai x yang berkoresndensi dengan $f(x)$

x	$f(x)$	
2,0	1,7321	(y_0)
2,4	1,8708	(y_1)
3,0	2,0000	(y_2)
3,4	2,1213	(y_3)
4,0	2,2361	(y_4)

Dari Tabel 4.6. diketahui $h=0,5$. Oleh karena itu penggunaan metode Simpson memberikan:

$$\int_2^4 f(x)dx=\frac{h}{3}[y_0+4(y_1+y_3)+2y_2+y_4]$$

= (0,4/3)[1,7324+4(1,8708+2,1213)+2(2,00+2,2361)]

= (4/3)[23,9366] = 3,894 (dibulatkan keempat angka signifikan)

Contoh 4.7.

Sebuah objek dibatasi oleh sumbu x, garis $x = 0$, garis $x = 1$, dan kurva yang melalui titik-titik pada daftar berikut diputar mengelilingi sumbu x.

Tabel 4.7.

x	0,0	0,24	0.40	0.74	1.00
y	1.0000	0,9896	0,9489	0,9089	0,8414

Estimasilah volume benda yang terjadi, dan hitunglah teliti sampai tiga desimal

Penyelesaian:

Bila V adalah volume benda yang terjadi, maka kita peroleh:

$$V = \pi \int_0^1 y^2 dx$$

Dari formula terakhir ini kita perlukan untuk nilai-nilai y^2 seperti pada tabel berikut, teliti sampai empat tempat desimal:

Tabel 4.8.

x	0,0	0,24	0.40	0.74	1.00
y^2	1.0000	0,9792	0,9194	0,8261	0,7081

Dengan $h = 0,25$, metode Simpson memberikan

$$V = \pi \cdot \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2 + y_4\right]$$

$$= \pi \cdot \frac{0,25}{3}\left[1,0000 + 4\left(0,9793 + 0,8261\right) + 2\left(0,9195\right) + 0,7081\right]$$

$$= 2,819$$

Contoh 4.8.

Evaluasi $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$, teliti hingga tiga tempat desimal.

Dengan menggunakan metode trapezoida dan metode Simpson, untuk masing-masing $h = 0,5$, $h = 0,25$ dan $h = 1,25$.

(i) untuk $h = 0,5$, maka nilai x dan y ditunjukkan oleh tabel berikut:

Tabel 4.9

x	0,0	0,4	1,0
y	1.0000	0,6667	0,4

(a) Aturan trapezoida memberikan

$$I = \frac{1}{4}\left[1,0000 + 2\left(0,6667\right) + 0,5\right] = 0,708$$

(b) Metode Simpson memberikan

$$I = \frac{1}{6}\left[1,0000 + 4\left(0,6667\right) + 0,5\right] = 0,694$$

(ii) Untuk $h = 0,25$, daftar nilai x dan y adalah

Tabel 4.10

x	0,0	0,24	0,4	0,74	1,00
y	1.0000	0,8000	0,6667	0,4714	0,4

a. Aturan trapezoida memberikan

$$I = \frac{1}{8}\left[1,0 + 2\left(0,8000 + 0,6667 + 0,5714\right) + 0,5\right] = 0,697$$

b. Metode Simpson memberikan

$$I = \frac{1}{12}\left[1,0 + 4\left(0,8000 + 0,5714\right) + 2\left(0,6667\right) + 0,5\right] = 0,693$$

(iii) Untuk $h = 0,125$, daftar nilai x dan y adalah

Tabel 4.11.

x	0,000	0,124	0,24	0,374	0,400	0,624	0,740	0,874	1,000
y	1.0000	0,8889	0,8000	0,7273	0,6667	0,6144	0,4714	0,4333	0,4000

(a) Aturan trapezoida memberikan

$$I = \frac{1}{16}\left[1,0 + 2\begin{pmatrix} 0,8889 + 0,8000 + 0,7273 + 0,6667 + 0,6154 \\ + 0,5714 + 0,5333 \end{pmatrix} + 0,5\right] = 0,694$$

(b) Metode simpson memberikan

$$I = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 1,0 + 4\left(0,8889 + 0,7273 + 0,6154 + 0,5333\right) + \\ 2\left(0,8000 + 0,6667 + 0,5714\right) + 0,5 \end{bmatrix} = 0,693$$

Dari hasil perhitungan di atas, nilai-nilai dari I adalah $0,693$, teliti sampai tiga desimal. Nilai yang eksak dari I adalah ${}^{e}\log 2$ atau $\ln 2$, yang sama dengan $0,693147...$

Dari beberapa contoh di atas, diperoleh hasil keakuratan metode **Simpson** melebihi Aturan **Trapezoida**.

4.2.3 Integrasi Romberg

Metode ini sering digunakan untuk memperbaiki hasil aproksimasi oleh metode selisih terhingga. Metode ini dipakai untuk evaluasi numerik dari integral tentu, misalnya dalam penggunaan aturan trapezoida.

Misal diberikan integral tentu dalam bentuk

$$I = \int_a^b y \, dx$$

Dengan aturan trapezoida (4.27) untuk dua interval bagian yang berbeda yang panjangnya h_1 dan h_2 akan diperoleh aproksimasi nilai-nilai I_1 dan I_2. Kemudian, berdasarkan persamaan (4.32) diperoleh kekeliruan E_1 dan E_2 yaitu

$$E_1 = -\frac{1}{12}(b-a)h_1^2 y''\left(\bar{x}\right) \tag{4.35}$$

dan

$$E_2 = -\frac{1}{12}(b-a)h_2^2 y''\left(\bar{\bar{x}}\right) \tag{4.36}$$

Karena suku $y''\left(\bar{\bar{x}}\right)$ dalam (4.36) adalah nilai terbesar dari $y''(x)$, maka cukup beralasan untuk menganggap bahwa $y''\left(\bar{x}\right)$ dan $y''\left(\bar{\bar{x}}\right)$ adalah sama. Sehingga diperoleh

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

dan berdasarkan perbandingan itu diperoleh pula

$$\frac{E_2}{E_2 - E_1} = \frac{h_2^2}{h_2^2 - h_1^2}$$

Karena $E_2 - E_1 = I_2 - I_1$, maka diperoleh

$$E_2 = \frac{h_2^2}{h_2^2 - h_1^2}\left(I_2 - I_1\right) \tag{4.37}$$

Oleh karen itu aproksimasi baru I diperoleh dengan bentuk:

$$I_3 = I_2 - E_2$$

$$I_3 = I_2 - \frac{h^2}{h_2^2 - h_1^2}\left(I_2 - I_1\right)$$

$$I_3 = \frac{I_1 h_2^2 - I_2 h_1^2}{h_2^2 - h_1^2} \tag{4.38}$$

Karena menggunakan prinsip korektor, formula (4.38) akan memperpiki nilai aproksimasi sebelumnya yang dan akan mendekati nilai yang sebenarnya.

Dengan mensubstitusikan

$$h_2 = \tfrac{1}{2} h_1 = \tfrac{1}{2} h \ ,$$

ke dalam persamaan (4.38) diperoleh

$$I\left(h, \tfrac{1}{2}h\right) = 1/3\left[4I\left(\tfrac{1}{2}h\right) - I\left(h\right)\right] \tag{4.39}$$

dengan $I\left(h\right) = I_1, I\left(\tfrac{1}{2}h\right) = I_2$, dan $I\left(h, \tfrac{1}{2}h\right) = I_3$.

Penulisan (4.39) dapat dibuat tabelnya sebagai berikut:

Tabel 4.12.

$I\left(h\right)$			
$I\left(\tfrac{1}{2}h\right)$	$I\left(h, \tfrac{1}{2}h\right)$		
$I\left(\tfrac{1}{4}h\right)$	$I\left(\tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{4}h\right)$	$I\left(h, \tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{4}h\right)$	$I\left(h, \tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{4}h, 1/8h\right)$
$I\left(1/8\,h\right)$	$I\left(\tfrac{1}{4}h, 1/8h\right)$	$I\left(\tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{4}h, 1/8h\right)$	

Perhitungan dengan pola sebagaimana yang ditunjukan oleh tabel tersebut di atas dihentikan bila dua nilai yang berturutan memenuhi toleransi yang diberikan. Metode ini, dikenal dengan nama metode Integrasi Romberg.

Contoh 4.9.

Gunakan metode Romberg untuk menghitung $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ teliti hingga tiga tempat desimal.

Ambil berturut-turut $h = 0,5, h = 0,25$, dan $h = 0,125$. Dengan mengunakan hasil yang diperoleh dari Contoh 4.8 didapat:

$$f(h) = 0,7084, f(\tfrac{1}{2}h) = 0,6970, \text{dan } f(\tfrac{1}{4}h) = 0,6941$$

Dengan menggunakan formula (4.39) diperoleh

$$\begin{aligned} f(h, \tfrac{1}{2}h) &= 1/3\left[4I(\tfrac{1}{2}h) - I(h)\right] \\ &= 1/3\left[4(0,6970) - 0,7084\right] \\ &= 0,6932 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f(\tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{4}h) &= 1/3\left[4I(\tfrac{1}{4}h) - I(\tfrac{1}{2}h)\right] \\ &= 1/3\left[4(0,6941) - (0,6970)\right] \\ &= 0,6931 \end{aligned}$$

Akhirnya,

$$\begin{aligned} f(h, \tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{4}h) &= 1/3\left[4I(\tfrac{1}{2}h, \tfrac{1}{4}h) - I(h, \tfrac{1}{2}h)\right] \\ &= 1/3\left[4(0,6931) - 0,6932\right] \\ &= 0,6931 \end{aligned}$$

Berikut ini tabel dari nilai-nilai yang telah diperoleh di atas

Tabel 4.13.

0,708 0,6970 0,6941	0,6932 0,6931	0,6931

Catatan: Dengan metode Romberg, ketelitian dari setiap perhitungan nilainya dapat diketahui pada setiap langkah.

Soal-soal latihan

1. Bila $y = A + BX + CX^2$, dan y_0, y_1, y_2 adalah nilai-nilai y yang berkorespondensi berturut-turut dengan $x = a, x = a + h$ dan $x = a + 2h$, buktikan bahwa

$$\int_a^{a+h} y \quad dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

2. Gunakan suatu metode untuk mengaproksimasi luas daerah di bawah kurva. Kurva yang dimaksud melalui titik-titik yang diberikan dalam tabel berikut:

Tabel 4.14.

x	0,0	0,4	1,0	1,4	2,0	2,4	3,0	3,4	4,0
y	23	19	14	11	12,4	16	19	20	20

Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva tersebut, sumbu x dan ordinat yang ekstrim

3. Pergunakan aturan Trapezoida untuk menghitung

$$\int_3^{3,9} \frac{1}{x} dx$$

teliti hingga tiga tempat desimal. Cobalah beberapa nilai h dan tentukan nilai h yangmana memiliki ketelitian yang diharapkan.

4. Evaluasi $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ dengan menggunakan metode Simpson dengan membagi daerah menjadi 4 pias, kemudian tentukan kekeliruannya apabila dibandngkan dengan integrasi langsung. Dengan cara yang sama cobalah periksa bila pias dibuat menjadi 8.

5. Hitunglah nilai dari

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$$

dengan menggunakan aturan Trapezoida untuk $h = 0,5,\quad h = 0,25$, dan $h = 0,125$. Kemudian, pergunakan juga metode Romberg untuk mendapatkan hasil yang lebih baik.

BAB V
PENGEPASAN KURVA (*CURVE FITTING*)

5.1 PENGERTIAN PENGEPASAN KURVA DAN REGRESI

Sebelumnya telah dibahas aproksimasi suatu pungsi $f(x)$ melalui interpolasi pada titik – titik tertentu. Prosedur seperti itu menghendaki bahwa nilai $f(x)$ pada titik–titik ini diketahui. Misal fungsi $f(x)$ melukiskan hubungan antara dua buah besaran fisik x dan $y = f(x)$, dan melalui pengukuran atau percobaan lain, kita memperoleh bilangan f_n yang hanya mengaproksimasi nilai dari $f(x)$ pada x_n yaitu

$$f(x_n) = f_n + E_n \quad , \qquad n = 1, \ldots, N$$

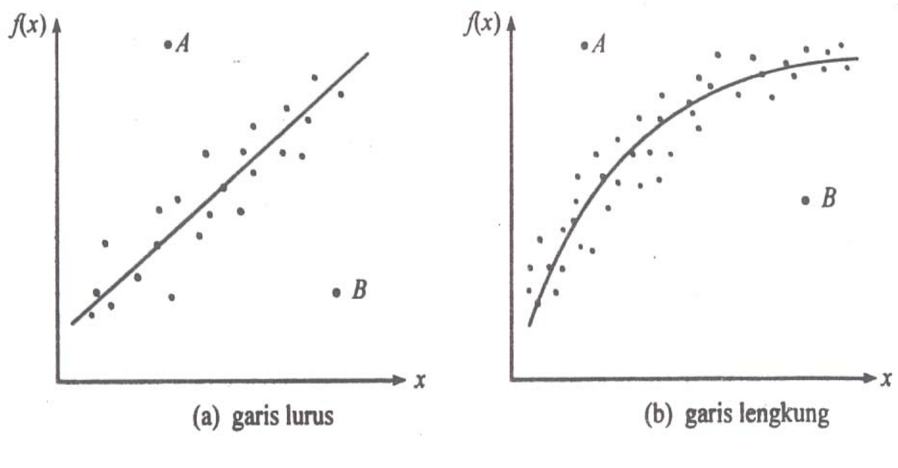
dimana nilai kesalahan–kesalahan eksperimennya (E_n) tidak diketahui.
Selain itu, dalam analisis data sering dilakukan pembuatan suatu kurva yang dapat mewakili suatu rangkaian data yang diberikan dalam sistem koordinat xy. Data tersebut dapat berupa hasil percobaan di laboratorium atau pengamatan di lapangan seperti :

1. pengujian kuat desak beton yang memberikan hubungan antara beban dan kuat desak beton,
2. pengukuran debit sungai yang memberikan hubungan antara kedalaman aliran dan debit sungai,
3. hubungan antara data hujan dan debit di sungai,
4. pertumbuhan arus barang atau penumpang disuatu pelabuhan, terminal atau bandara dari tahun ke tahun,
5. pertumbuhan jumlah penduduk sebagai fungsi waktu,
6. hubungan antara kandungan oksigen di air dan temperatur, dan sebagainya.

Karena adanya kesalahan atau ketidakpastian dalam pengujian, pengukuran atau variasi perubahan data dari waktu ke waktu, maka titik-titik data tersebar dalam koordinat xy. Sebagai contoh, volume barang atau jumlah penumpang yang dilayani oleh suatu pelabuhan tidak selalu sama setiap hari atau bulan atau tahun. Kondisi tersebut menyebabkan penyebaran data berkaitan dengan hubungan antara volume barang/penumpang dan tahun pengamatan.

Upaya untuk melakukan pengepasan kurva terhadap data biasanya dilakukan dengan cara regresi. Dalam analisis regresi umumnya dibuat kurva atau fungsi berdasarkan sebaran titik data. Kurva yang terbentuk diharapkan dapat mewakili titik-titik tersebut. Seringkali, setelah kurva terbentuk, dilakukan pula ekstrapolasi untuk mendapatkan nilai y yang berkaitan dngan nilai x yang berada di luar rangkaian data yang ada. Misalnya dalam melakukan prediksi jumlah barang atau penumpang yang akan dilayani suatu pelabuhan pada tahun-tahun yang akan datang (prediksi 5,10,15,…,n tahun yang akan datang).

Metode yang sering digunakan untuk membuat kurva sebagaimana dimaksudkan di atas adalah **metode kuadrat terkecil** (*least square method*). Metode tersebut memungkinkan untuk membuat kurva yang paling mendekati titik-titik data. Perhatikan Gambar 5.1. Gambar ini menjelaskan penyebaran titik-titik data hasil suatu percobaan pada sistem koordinat xy. Penetapan bentuk kurva, apakah kurva linier (garis lurus) atau lengkung (logaritmik atau eksponensial), tergantung dari kecendrungan (*trend*) dari penyebaran titik data, seperti ditunjukkan dalam Gambar 5.1.a. dan 5.1.b. Seringkali dijumpai adanya beberapa data yang tidak wajar (*outlier*) yang mempunyai kesalahan sangat besar seperti titik A dan B pada Gambar 5.1. Pembuatan kurva dengan melibatkan/menggunakan titik A dan B juga berpotensi menghasilkan nilai yang mempunyai kesalahan yang besar. Oleh karena itu data A dan B "dapat" dihilangkan.



Gambar 5.1. Plot data pengukuran

Analisis regresi menggunakan beberapa notasi dan teori statistik. Oleh karena itu sebelum mempelajari regresi kuadrat terkecil lebih mendalam, dalam sub bab berikut akan diingat kembali beberapa prinsip statistik.

5.2 NILAI TENGAH DAN STANDAR DEVIASI DATA SAMPEL

Dipandang data hasil pengukuran debit rerata tahunan sungai Serang di stasiun Bendungan di Kabupaten Kulon Progo selam 15 tahun berturut-turut seperti diberikan dalam Tabel 5.1. Kolom kedua dari tabel tersebut adalah debit rerata tahunan, sedang kolom ketiga dan keempat adalah nilai-nilai yang digunakan untuk hitungan statistik.

Tabel 5.1. Debit Sungai

Tahun	y_i (Debit) (m^3/d)	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
1971	8,52	1,486	2,208
1972	3,33	-3,704	13,720
1973	7,85	0,816	0,666
1974	7,65	0,616	0,379
1975	10,91	3,876	15,023
1976	4,17	-2,864	8,202
1977	3,40	-3,634	13,206
1978	8,00	0,966	0,933
1979	13,4	6,366	40,526
1980	5,40	-1,634	2,670
1981	8,87	1,836	3,371
1982	4,73	-2,304	5,308
1983	7,40	0,366	0,134
1984	6,88	-0,154	0,024
1985	5,00	-2,034	4,137
$\sum y_i = 105{,}51$		$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 11$	

Nilai rerata data ($\bar{y}$) adalah jumlah nilai data (y_i) dibagi dengan banyaknya data (n), yaitu :

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

dengan $\sum y_i$ adalah penjumlahan nilai data dari i = 1,2,…,n

Data dalam Tabel 5.1. memiliki nilai rerata adalah :

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{15} y_i}{15} = \frac{105{,}51}{15} = 7{,}034$$

Penyebaran data dapat diukur dengan menggunakan deviasi standar (σ) terhadap nilai rerata, yang diberikan oleh rumus berikut ini :

$$\sigma = \sqrt{\frac{D^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1}}$$

dengan D^2 = jumlah kuadrat selisih antara nilai data dan nilai rerata.

Semakin besar sebaran data terhadap nilai rerata, maka semakin besar pula deviasi standar σ. Demikian juga sebaliknya. Penyebaran juga dapat dipresentasikan oleh varians (kuadrat dari deviasi standar) yang diberikan oleh rumus berikut

$$\sigma^2 = \frac{D^2}{n-1} = \frac{\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1}$$

Data dalam Tabel 5.1. memiliki nilai deviasi standar dan varians masing-masingnya adalah :

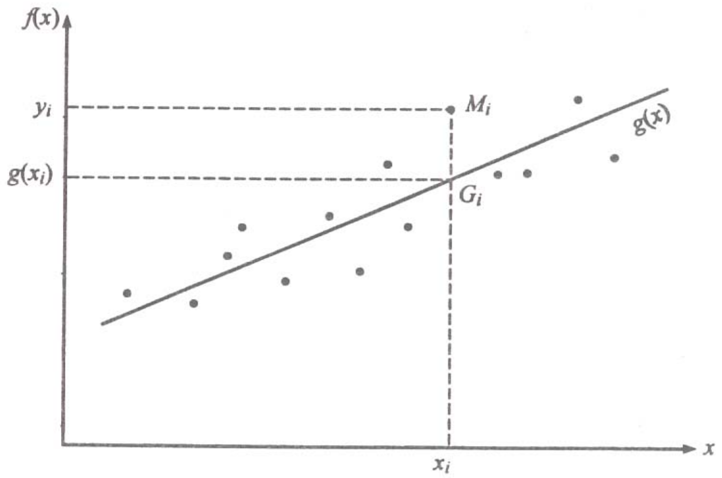
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{110{,}507}{15-1}} = 2{,}810$$

dan

$$\sigma^2 = \frac{\sum\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1} = \frac{110{,}507}{15-1} = 7{,}893$$

5.3 METODE KUADRAT TERKECIL

Misalkan diberikan sejumlah data yang bila dirajah pada bidang kartesius *xy* memiliki sebaran titik-titiknya sebagaimana tampilan pada Gambar 5.2. Akan dicari suatu kurva $g(x)$ yang dapat mewakili titik percobaan tersebut. Dalam metode numerik, cara termudah membuat kurva $g(x)$ adalah dengan interpolasi linear yang mana pasangan nilai fungsinya diperoleh dari hasil visualisasi secara bebas oleh tangan. Tetapi cara ini tidak bisa memberikan hasil yang memuaskan, terutama apabila penyebaran titik data cukup besar. Diinginkan suatu metode yang lebih pasti untuk mendapatkan kurva tersebut yaitu dengan membuat kurva yang meminimumkan galat (perbedaan/selisih antara titik-titik data dan kurva yang dibuat). Teknik untuk mendapatkan kurva tersebut dikenal dengan **regresi kuadrat terkecil**.



Gambar 5.2. Kurva mewakili titik-titik data

Teknik regresi kuadrat terkecil dilakukan dengan prosedur sebagai berikut:

1. Rajah pasangan data percobaan pada suatu koordinat kartesius. Hasil rajahan tersebut akan diketahui sebaran titik data (*trend*/pola data). Kemudian tentukan apakah kurva yang mewakili data berupa garis lurus (linear) atau lengkung (non linear).
2. Dipilih suatu fungsi polinom $g(x)$ yakni

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r \qquad (5.1)$$

   yang diasumsikan dapat mewakili $f(x)$. Koefisien-koefisien $a_0, a_1, \ldots, a_r$. dalam persamaan (5.1) adalah parameter fungsi tersebut.
3. Tentukan nilai-nilai parameter $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_r$ sedemikian hingga $g(x_i\,;\, a_0, a_1, \ldots, a_r)$ melalui "hampir" semua titik-titik data. Bentuk $g(x_i\,;\, a_0, a_1, \ldots, a_r)$ mempunyai arti fungsi $g(x_i)$ dengan parameter $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_r$.
4. Apabila koordinat dari titik-titik percobaan adalah $M(x_i, y_i)$, dengan $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ maka selisih ordinat antara titik-titik tersebut dengan fungsi $g(x_i\,;\, a_0, a_1, \ldots, a_r)$ adalah

$$E_i = M_i G_i = y_i - g(x_i\,;\, a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots, a_r)$$
$$= y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \ldots. + a_r x_i^r)$$

5. Pilih suatu fungsi $g(x)$ yang mempunyai nilai E_i minimum yakni

$$D^2 = \sum_{i=1}^{n} E_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - g(x_i)\}^2 \tag{5.2}$$

6. Tentukan nilai parameter a_0, a_1, …. , a_r sedemikian sehingga D^2 adalah minimum. D^2 menjadi minimum jika turunan pertamanya terhadap a_0, a_1, …. ,a_r sama dengan nol,yakni

$$\begin{aligned} \frac{\partial D^2}{\partial a_0} &= 0 \\ \frac{\partial D^2}{\partial a_1} &= 0 \\ &. \\ &. \\ &. \\ \frac{\partial D^2}{\partial a_r} &= 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

7. Selesaikan sistem (5.3) untuk memperoleh nilai parameter $a_0, a_1, a_2, ..., a_r$.
8. Subsitusikan nilai-nilai parameter yang diperoleh dalam langkah 7 ke persamaan polinom (5.1) sehingga diperoleh bentuk fungsi $g(x)$.

5.4 METODE KUADRAT TERKECIL UNTUK KURVA LINIER

Pilih fungsi $g(x)$ dalam (5.1) beberbentuk:

$$g(x) = a + b\,x \tag{5.4}$$

dalam hal ini, $a_0 = a$ dan $a_1 = b$.

Bentuk (5.4) adalah bentuk paling sederhana dari regresi. Jumlah kuadrat dari galat dihitung dengan menggunakan (5.2) sehingga diperoleh

$$D^2 = \sum_{i=1}^{n} E_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - a - bx_i\}^2 \tag{5.5}$$

Turunkan persamaan (5.5) satu kali terhadap a dan b, lalu samakan dengan nol.

Turunan terhadap a memberikan hasil:

$$\frac{\partial D^2}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a - bx_i\right)^2 = 0$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - abx_i\right) = 0$$

$$\sum y_i - \sum a - \sum bx_i = 0 \qquad (5.6)$$

Dan turunan terhadap b memberikan hasil:

$$\frac{\partial D^2}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a - bx_i\right)^2 = 0$$

$$-2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(y_i - a - bx_i\right)x_i\right] = 0$$

$$\sum y_i x_i - \sum ax_i - \sum bx_i^{\ 2} = 0 \qquad (5.7)$$

Persamaan-persamaan (5.6) dan (5.7) dapat disederhakan menjadi :

$$na + \sum x_i b = \sum y_i \qquad (5.8)$$

$$\sum x_i \ a + \sum x^2{}_i b = \sum x_i y_i \qquad (5.9)$$

dengan $\sum a = na$.

Tinjau persamaan (5.8), ia dapat ditulis sebagai

$$na = \sum y_i - \sum x_i b = \sum y_i$$

$$a = \frac{1}{n}\left(\sum y_i - \sum x_i b\right) \qquad (5.10)$$

$$a = \frac{1}{n}\sum y_i - \frac{1}{n}\sum x_i b$$

atau

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \qquad (5.11)$$

Subsitusi (5.10) ke (5.9), diperoleh

$$\sum x_i \frac{1}{n}\left(\sum y_i - \sum x_i b\right) + \sum x_i^{\ 2} b = \sum x_i y_i$$

$$\sum x_i \sum y_i - \left(\sum x_i\right)^2 b + n \pm \sum x_i^{\ 2} b = n\sum x_i y_i$$

$$b\left[n\sum x_i^{\ 2} - \left(\sum x_i\right)^2\right] = n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i$$

atau

$$b = \frac{n\sum x_i^2 y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{5.12}$$

Subsitusi *a* dan *b* masing-masing ke (5.11) dan (5.12) maka fungsi *g*(*x*) dapat ditentukan bentuknya.

Persamaan garis lain, selain persamaan (5.4) memberikan jumlah kuadrat yang lebih besar. Dengan demikian persamaan (5.4) adalah perkiraan terbaik dari data .Untuk mengetahui derajat kesesuaian dari persamaan yang didapat ,dihitung nilai koefisien korelasi yang berbentuk :

$$r = \sqrt{\frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2}} \tag{5.13}$$

Dengan r adalah koefisien korelasi ,sedang D^2 dan D_t^2 diberikan oleh bentuk :

$$D_t^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2$$

$$D^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - a_0 - a_1 x\right)^2$$

Nilai r bervariasi antara 0 dan 1. Untuk perkiraan yang sempurna nilai $r = 1$. Apabila $r = 0$ perkiraan suatu fungsi sangat jelek. Koefisien korelasi ini juga dapat digunakan untuk memilih suatu persamaan dari beberapa alternative yang ada, terutama di dalam regresi garis tidak lurus. Kurva lengkung dapat didekati dengan beberapa tipe persamaan, misalnya bentuk $y = a\,x^{\,b}$, $y = a\,e^{\,b}$, $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, atau persamaan lain. Dari beberapa alternative tersebut dipilih persamaan yang mempunyai nilai koefisien korelasi terbesar (paling mendekati 1) .

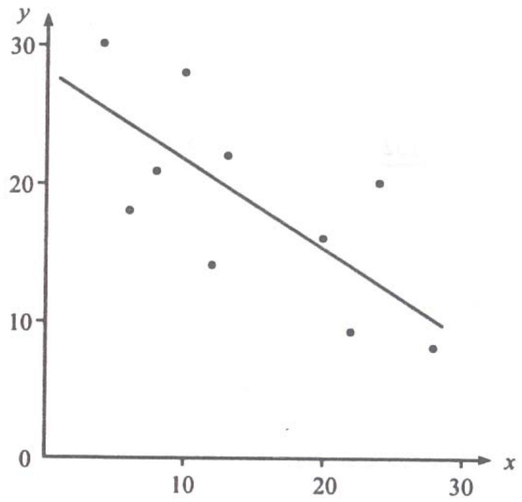
Contoh 5.1

Tentukan persamaan garis yang mewakili data berikut :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	4	6	8	10	14	16	20	22	24	28

Penyelesaian:

Tempatkan pasangan data ke dalam sistem koordinat *xy*. Kemudian buat garis lurus dengan teknik "tangan bebas" yang mana garis lurus tersebut sedapat mungkin melalui semua data yang ada (lihat Gambar 5.3).



Gambar 5.3. Sebaran titik-titik data pada sistem koordinat

Dengan menggunakan metode kuadrat terkecil, bentuk fungsi $g(x)$ berupa garis lurus dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut

1. Untuk data yang diberikan, buat tabel sebagaimana yang ditampilkan oleh Tabel 5.2.

Tabel 5.2.

No	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	4	30	120	16
2	6	18	108	36
3	8	22	176	64
4	10	28	280	100
5	14	14	196	196
6	16	22	352	256
7	20	16	320	400
8	22	8	176	484
9	24	20	480	576
10	28	8	224	784
$\sum$	152	186	2432	2912

2. Tentukan nilai rerata dari x dan y yakni:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{152}{10} = 15,2$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{186}{10} = 18,6$$

3. Asumsikan persamaan garis yang mewakili titik-titik data adalah persamaan (5.4) dengan koefisien-koefisiennya adalah (5.11) dan (5.12)
4. Dari Tabel 5.2., (5.12) dan (5.11) masing-masing memberikan

$$b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

$$= \frac{10 \times 2432 - 152 \times 186}{10 \times 2912 - (152)^2} = -\frac{3952}{6016} = -0,6569$$

dan

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 18,6 + 0,6569 \times 15,2 = 28,5849$$

Jadi persamaan garis untuk tabel data sebagaimana diberikan dalam soal adalah :

$$y = 28,5849 - 0,6569\, x$$

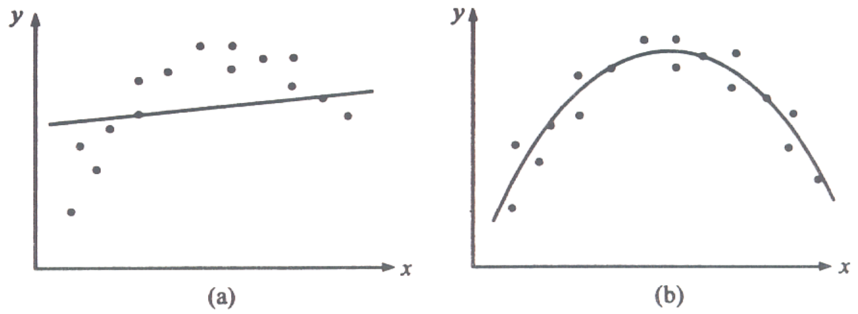
Catatan:

Penyelesaian terhadap permasalahan dalam Contoh 5.1, proses aritmatikanya menggunakan alat *kalkulator*. Apabila jumlah data banyak maka perlu dilakukan dengan menggunakan program komputer .

Untuk dicoba: Dengan menggunakan program komputer, persamaan garis yang diperoleh adalah y =28,5851 – 0,6569x, dan koefisien korelasi adalah r =0,7232. Benarkah?

5.5 LINIERISASI KURVA TIDAK LINIER

Ketika dalam praktek dijumpai bahwa sebaran titik-titik pada sistem koordinat mempunyai kecendrungan (*trend*) berupa kurva lengkung, proses linerisasi perlu dilakukan agar persamaan (5.4) bisa digunakan. Perhatikan sebaran data yang ditampilkan dalam Gambar 5.4. Data diketahui menyebar **tidak linear**. Dalam gambar 5.4.a titik data diwakili oleh kurva linier, sedang Gambar 5.4.b diwakili oleh kurva lengkung.



Gambar 5.4. Titik data didekati dengan garis lurus (a) dan lengkung (b).

Jelaslah bahwa pendekatan dengan kurva lengkung memberikan hasil yang lebih baik daripada garis lurus (kurva linier).
Proses linerisasi dimaksudkan agar persamaan regresi linier dapat digunakan untuk mempresentasikan kurva lengkung. Oleh karena itu perlu dilakukan transformasi koordinat sedemikian hingga sebaran titik data bisa dipresentasikan dalam kurva linier.

Fungsi yang digunakan untuk transformasi data non linear menjadi linear satu diataranya adalah fungsi logaritma. Fungsi ini biasa digunakan untuk asumsi fungsi g(x) berbentuk ekspnensial ($y = a_1 e^{b_1 x}$ misalnya) atau perpangkatan ($y = a_2 x^{b_2}$ misalnya).

5.5.1 Fungsi Eksponensial Umum

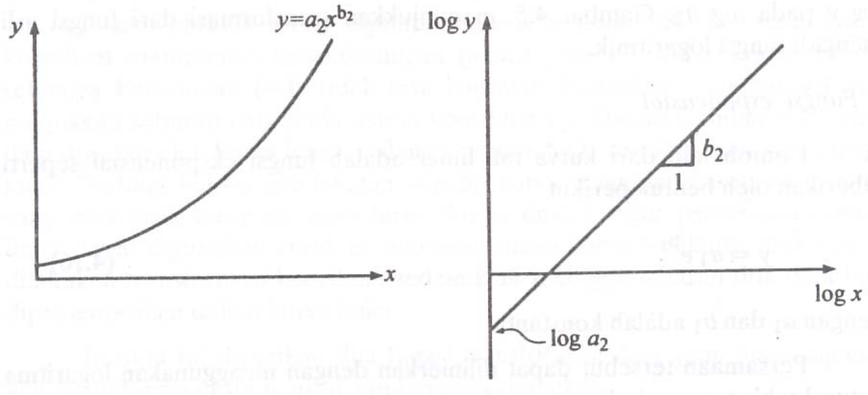
Fungsi eksponensial dalam bentuk umum diberikan oleh bentuk berikut ini.

$$y = a_2 x^{b_2} \tag{5.14}$$

dengan a_2 dan b_2 adalah koefisien konstan.
Fungsi (5.14) dapat dilinierkan dengan menggunakan sifat fungsi logaritma sehingga didapat :

$$\log y = b_2 \log x + \log a_2 \tag{5.15}$$

yang merupakan hubungan log-log antara log y dan log x. Fungsi tersebut mempunyai bentuk garis lurus dengan kemiringan b_2 dan memotong sumbu log y pada log a_2.
Gambar 5.5. menunjukan transformasi dari fungsi asli menjadi fungsi logaritma.



Gambar 5.5. Kurva sebelum (kiri) dan sesudah transformasi (kasnan).

5.5.2. Fungsi Eksponensial Asli

Fungsi eksponensial didefinisikan sebagai berikut :

$$y = a_1 e^{b_1 x} \tag{5.16}$$

dengan a_1 dan b_1 adalah konstanta.

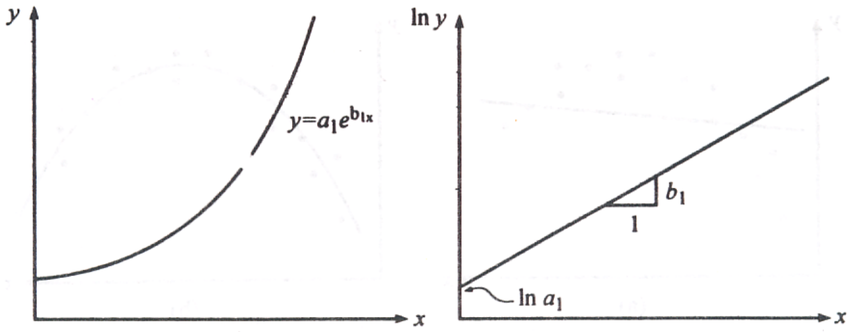
(5.16) dapat dilinierkan dengan menggunakan logaritma natural sehingga menjadi :

$$\ln y = \ln a_1 + b_1 x \ln e$$

Oleh karena ln e = 1, maka :

$$\ln y = \ln a_1 + b_1 \mathrm{x} \tag{5.17}$$

Persamaan (5.17) merupakan hubungan semi logaritma antara ln y dan x. Persamaan tersebut mempunyai bentuk garis lurus dengan kemiringan b_1 dan memotong sumbu ln y pada ln a_1. Gambar 5.6. menunjukkan transformasi dari fungsi asli menjadi fungsi logaritmik.



Gambar 5.6. Transformasi fungsi eksponensial

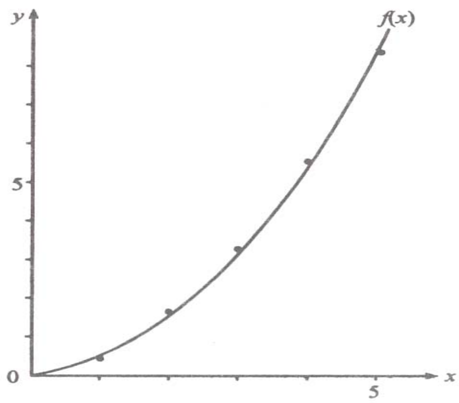
Contoh 5.2

Tentukan persamaan kurva lengkung yang mewakili data berikut ini.

x	1	2	3	4	5
y	0,5	1,7	3,4	5,7	8,4

Penyelesaian:

Gambar 5.7. menunjukkan sebaran titik data pada sistem koordinat xy. Dicoba untuk mencari kurva dengan menggunakan dua bentuk transformasi, yaitu transformasi log dan ln.



Gambar 5.7. Sebaran data dan kurva lengkung

a. Transformasi Logaritma Biasa (log)

Misalkan persamaan kurva yang dicari adalah :

$$y = a\,x^{b}$$

Transformasi dengan menggunakan fungsi log, sehingga :

$$\log y = \log a\,x^{b} \quad \longrightarrow \quad \log y = \log a + b \log x$$

Dilakukan dengan transformasi berikut :

$P = \log y$ $\qquad$ $B = b$

$A = \log a$ $\qquad$ $q = \log x$

Sehingga persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk :

$$p = A + B\,q$$

Hitungan dilakukan dengan menggunakan Tabel 5.3. Dari hitungan dalam tabel 5.3 didapat beberapa parameter berikut ini.

$$\bar{q} = \frac{\sum \log x_i}{n} = \frac{2,0791}{5} = 0,4158$$

$$\bar{p} = \frac{\sum \log y_i}{n} = \frac{2,1411}{5} = 0,42822$$

Tabel 5.3. Hitungan regresi linier dengan transformasi log

No	x_i	y_i	$q_i = \log x_i$	$p_i = \log y_i$	$q_i\, p_i$	q_i^2
1	1	0,5	0	-0,3010	0	0
2	2	1,7	0,3010	0,2304	0,0693	0,0906
3	3	3,4	0,4771	0,5315	0,2536	0,2276
4	4	5,7	0,6020	0,7559	0,4550	0,3624
5	5	8,4	0,6990	0,9243	0,6461	0,4886
$\sum$	15	19,7	2,0791	2,1411	1,4240	1,1692

Koefisien A dan B dihitung dengan persamaan (5.11) dan (5.12).

$$B = \frac{n\sum q_i p_i - \sum q_i \sum p_i}{n\sum q_i \left(\sum q_i\right)^2}$$

$$= \frac{5(1,4240) - (2,0791)(2,1411)}{5 \times 1,1692 - 2,0791 \times 2,0791} = \frac{2,6684}{1,5233} = 1,7572$$

Setelah nilai B didapat kemudian dicari nilai A :

$$A = \bar{p} - B\bar{q} = 0,42822 - 1,7572 \times 0,4158 = -0,3024$$

Dengan demikian persamaan transformasi adalah :

$$p = -0,3024 + 1,7572q$$

Mengingat :

$A = \log a \longrightarrow$ -0,3024 = $\log a \longrightarrow$ a = 0,4984

$B = b \longrightarrow$ b = 1,17572

Maka persamaan yang dicari adalah :

$$y = 0,4984x^{1,7572}$$

b. Transformasi Logaritma Natural (ln)

Misalkan persamaan kurva mempunyai bentuk :

$$y = ae^{bx}$$

Transformasi dengan menggunakan fungsi ln, sehingga persamaan di atas menjadi :

$$\ln y = \ln a\, e^{bx} = \ln a + \ln e^{bx}$$

$$\ln y = \ln a + bx$$

Dilakukan transformasi berikut :

$$p = \ln y \qquad A = \ln a$$

$$q = x \qquad B = b$$

Sehingga persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk :

$$p = A + B\,q$$

Hitungan dilakukan dengan menggunakan Tabel 5.4.

Dari hitungan Tabel 5.4 didapat beberapa parameter berikut ini.

$$\overline{q} = \frac{\sum q_i}{n} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\overline{p} = \frac{\sum p_i}{n} = \frac{4{,}93}{5} = 0{,}986$$

Tabel 5.4. Hitungan regresi linier dengan transformasi ln

No	$x_i = q_i$	y_i	$q_i^{\;2} = x_i$	$p_i = \ln y_i$	$q_i p_i$
1	1	0,5	1	-0,6931	-0,6931
2	2	1,7	4	0,5306	1,0612
3	3	3,4	9	1,2238	3,6714
4	4	5,7	16	1,7405	6,962
5	5	8,4	25	2,1282	10,641
$\sum$	15	19,7	55	4,93	21,6425

Koefisien *A* dan *B* dihitung dengan persamaan (5.11) dan (5.12).

$$B = \frac{n\sum q_i p_i - \sum q_i p_i}{n\sum q_i^{\;2} - \left(\sum q_i\right)^2}$$

$$= \frac{5 \times 21{,}6425 - 15 \times 4{,}93}{5 \times 55 - (15)^2} = \frac{34.2625}{50} = 0{,}68525$$

Setelah nilai *B* didapat kemudian dicari nilai *A*, yaitu :

$$A = \overline{p} - B\,\overline{q} = 0{,}986 - 0{,}68525 \times 3{,}0 = -1{,}06975$$

Dengan demikian persamaan transformasi adalah :

$$p = -1{,}06975 + 0{,}68525\,q$$

Mengingat :

$A = \ln a \longrightarrow -1{,}06575 = \ln a \longrightarrow a = 0{,}3431$

$B = b \longrightarrow b = 0{,}68525$

maka persamaan yang dicari adalah :

$$y = 0{,}3431 e^{0{,}68525x}$$

Untuk memilih salah satu dari kedua hasil terbaik, dihitung nilai koefisien korelasi. Koefisien korelasi dihitung dengan menggunakan persamaan (5.13) :

$$r = \sqrt{\frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2}}$$

dengan

$$D_t^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^2$$

$$D_t^2 = \sum \left(y_i - a_0 - a_1 x\right)^2$$

Hitungan dilakukan dengan menggunakan Tabel 5.5.

Tabel 5.5. Hitungan koefisien korelasi

No	x_i	y_i	Transformasi log			Transformasi ln		
			$g(x_i)$	D^2	D_t^2	$g(x_i)$	D^2	D_t^2
1	1	0,5	0,4984	0,000003	11,8336	0,6835	0,03367	11,8336
2	2	1,7	1,6848	0,000231	5,0176	1,3563	0,11813	5,0176
3	3	3,4	3,4354	0,00125	0,2916	2,6912	0,50240	0,2916
4	4	5,7	5,6953	0,000022	3,0976	5,3401	012953	3,0976
5	5	8,4	8,4296	0,000876	19,8916	10,5963	4,82373	19,8916
	15	19,7	$\sum$	0,00238	40,132	$\sum$	5,60746	40,132

Dengan menggunakan hitungan yang diberikan dalam Tabel 5.5., dihitung nilai koefisien korelasi berikut ini.

Nilai r untuk transformasi log :

$$r = \sqrt{\frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2}} = \frac{40{,}132 - 0{,}00238}{40{,}132} = 0{,}99997$$

Nilai r untuk transformasi ln :

$$r = \sqrt{\frac{D_t^2 - D^2}{D_t^2}} = \frac{40{,}132 - 5{,}60746}{40{,}132} = 0{,}92751$$

Dari kedua nilai tersebut, koefisien korelasi *r* untuk transformasi log adalah lebih besar dari transformasi ln, sehingga dapat disimpulkan bahwa persamaan yang didapat dari transformasi log adalah lebih baik.

Soal Contoh 5.2 tersebut diselesaikan dengan hitungan kalkulator. Apabila jumlah data banyak perlu dihitung dengan program computer. Program 5.2. dan 5.3. adalah program analisis regresi linier dengan transformasi log dan ln. Kedua program tersebut serupa, hanya fungsi transformasi yang berbeda.

5.6 REGRESI POLINOMIAL

Di dalam sub bab terdahulu telah dijelaskan penurunan persamaan garis lurus dengan menggunakanmetode kuadrat terkecil. Untuk kurva lengkung persamaannya dapat diturunkan dengan melakukan transformasi data asli ke dalam bentuk lain yang sesuai. Selain dengan transformasi persamaan kurva lengkung juga dapat diturunkan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil.
Persamaan polynomial order r mempunyai bentuk:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_r x^r$$

jumlah kuadrat dari kesalahan adalah :

$$D^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_i^{\,2} + ... + a_r x_i^{\,r} \right) \right)^2$$

Dengan cara seperti dalam sub bab terdahulu, persamaan di atas diturunkan terhadap tiap koefisien dari polinomial dan kemudian disama-dengankan nol, sehingga diperoleh :

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\,2} + ... + a_r x_i^{\,r} \right) \right) = 0$$

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i \left(y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\,2} + ... + a_r x_i^{\,r} \right) \right) = 0$$

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \left(y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\,2} + ... + a_r x_i^{\,r} \right) \right) = 0$$

$$.$$

$$. \qquad (5.18)$$

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_r} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,r} \left(y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^{\,2} + ... + a_r x_i^{\,r} \right) \right) = 0$$

Persamaan (5.18) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^{\,2} & . & . & . & \Sigma x_i^{\,r} \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^{\,2} & \Sigma x_i^{\,3} & . & . & . & \Sigma x_i^{\,r+1} \\ \Sigma x_i^{\,2} & \Sigma x_i^{\,3} & \Sigma x_i^{\,4} & . & . & . & \Sigma x_i^{\,r+2} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \Sigma x_i^{\,r} & \Sigma x_i^{\,r+1} & \Sigma x_i^{\,r+2} & . & . & . & \Sigma x_i^{\,r+r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \\ . \\ . \\ . \\ \Sigma x_i^r y_i \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

Dengan semua penjumlahan adalah dari i = 1 sampai n. Dari r+1 pesamaan tersebut akan dicari bilangan tak diketahui $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_r$ dengan metode eliminasi koefisien tak diketahui. Koefisien matriks dari persamaan tersebut biasanya sangat padat (sangat sedikit koefisien nul) dan masing-masing koefisien sangat berbeda. Namun demikian biasanya nilai r adalah kecil sehingga sistem persamaan tersebut masih mudah diselesaikan.

Contoh 5.3

Cari persamaan kurva polynomial order dua yang mewakili data berikut :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	2,1	7,7	13,6	27,2	40,9	61,1

Penyelesaian :

Persamaan polynomial order 2 mempunyai bentuk :

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$E_i = y_i - g\,(x)$$

$$E_i^2 = \Sigma\left(y_i - a_0 - a_1 x - a_2 x^2\right)^2$$

$$D^2 = \Sigma E_i^2$$

Untuk polynomial order dua, diferensial dari D^2 terhadap tiap koefisien dari polynomial dan kemudian disama-dengankan nol menghasilkan bentuk :

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma x_i^2 y_i \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

Hitungan dilakukan dengan menggunakan Tabel 5.6.

Tabel 5.6 Hitungan regresi polynomial order dua

No	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
1	0	2,1	0	0	0	0	0
2	1	7,7	1	1	1	7,7	7,7
3	2	13,6	4	8	16	27,2	54,4
4	3	27,2	9	27	81	81,6	244,8
5	4	40,9	16	64	256	163,6	654,4
6	5	61,1	25	125	625	305,5	1527,5
	15	397,4	55	175	979	585,6	2488,8

Dengan melakukan hitungan dalam Tabel 5.6. maka sistem persamaan (5.20) menjadi :

$6a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 152{,}6$

$15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 585{,}6$

$55a_0 + 225a_1 + 275a_2 = 2488{,}8$

Penyelesaian dari persamaan di atas adalah

$a_2 = 1{,}860714$; $a_1 = 2{,}359286$; dan $a_0 = 2{,}478571$.

Dengan demikian persamaan kurva adalah :

$$y = 2{,}478571 + 2{,}359286x + 1{,}860714x^2$$

5.7. REGRESI LINIER DENGAN BANYAK VARIABEL

Metode regresi linier yang telah dipelajari di depan dapat dikembangkan untuk kasus di mana y adalah fungsi linier dari dua atau lebih variabel. Misalnya, y merupakan fungsi linier terhadap x_1 dan x_2 dalam bentuk :

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

Persamaan tersebut dapat digunakan untuk mempresentasikan data pengamatan di mana variabel yang dipelajari merupakan fungsi dari dua variabel.

Seperti telah diberikan di depan, nilai terbaik dari koefisien a_0, a_1, dan a_2 diperoleh dengan mencari kuadrat dari kesalahan yang dihitung dengan persamaan berikut :

$$D^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(a_0 + a_1 x_{1,i} + a_2 x_{2,i} \right) \right)^2$$

Dengan cara seperti dalam sub bab terdahulu, persamaan di atas diturunkan terhadap tiap koefisien dari polynomial, dan kemudian disama-dengankan nol, sehingga diperoleh :

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \left(a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i} \right) \right) = 0$$

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_{1,i} \left(y_i - \left(a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i} \right) \right) = 0 \qquad (5.21)$$

$$\frac{\partial D^2}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_{2,i} \left(y_i - \left(a_0 - a_1 x_{1,i} - a_2 x_{2,i} \right) \right) = 0$$

Persamaan (5.21) dapat ditulis dalam bentuk berikut :

$$\begin{aligned}
n a_0 \quad &+ \sum x_{1,i} a_1 \quad &+ \sum x_{2,i} a_2 \quad &= \sum y_i \\
\sum x_{1,i} a_0 \quad &+ \sum x_{1,i}^2 a_1 \quad &+ \sum x_{1,i} x_{2,i} a_2 \quad &= \sum x_{1,i} y_i \\
\sum x_{2,i} a_0 \quad &+ \sum x_{1,i} x_{2,i} a_1 \quad &+ \sum x_2^2 a_2 \quad &= \sum x_{2,i} y_i
\end{aligned}$$

atau dalam bentuk matriks menjadi :

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1,i} & \sum x_{2,i} \\ \sum x_{1,i} & \sum x_{1,i}^2 & \sum x_{1,i} x_{2,i} \\ \sum x_{2,i} & \sum x_{1,i} x_{2,,i} & \sum x_{2,i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1,i} y_i \\ \sum x_{2,i} y_i \end{bmatrix} \qquad (5.22)$$

Sistem persamaan (5.22) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode matriks untuk mendapatkan koefisien a_0, a_1, dan a_2.

Secara umum persamaan regresi linier dengan m variabel mempunyai bentuk berikut:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m$$

di mana koefisien a_0, a_1, a_2,… sampai a_m dapat dihitung dari persamaan berikut :

$$\begin{bmatrix} n & \Sigma x_{1,i} & \Sigma x_{2,i} & . \; . \; . & \Sigma x_{m,i} \\ \Sigma x_{1,i} & \Sigma x_{1,i}^2 & \Sigma x_{2,i} x_{1,i} & . \; . \; . & \Sigma x_{1,i} x_{m,i} \\ \Sigma x_{2,i} & \Sigma x_{2,i} x_{1,i} & \Sigma x_{2,i}^2 & . \; . \; . & \Sigma x_{2,i} x_{m,i} \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ . & . & . & . \; . \; . & . \\ \Sigma x_{m,i} & \Sigma x_{m,i} x_{1,i} & \Sigma x_{m,i} x_{2,i} & . \; . \; . & \Sigma x_{m,i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma y_i \\ \Sigma x_{1,i} y_i \\ \Sigma x_{2,i} y_i \\ . \\ . \\ . \\ \Sigma x_{m,i}^2 \end{bmatrix} \qquad (5.23)$$

Koefisien korelasi dapat dihitung dengan Persamaan (5.13).

Contoh 5.4.

Buat persamaan kurva yang mewakili data berikut :

x_1	0	2	2.5	1	4	7
x_2	0	1	2	3	6	2
y	5	10	9	0	3	27

Penyelesaian:

Pandang Tabel 5.7. berikut ini:

Tabel 5.7. Hitungan regresi linier dengan banyak variabel

	y	x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1y	x_2y
	5	0	0	0	0	0	0	0
	10	2	1	4	1	2	20	10
	9	2,5	2	6,25	4	5	22,5	18
	0	1	3	1	3	3	0	0
	3	4	6	16	36	24	12	18
	27	7	2	49	4	14	189	55
Σ	54	16,5		76,25	54	48	243,5	101

Nilai-nilai yang diperoleh dalam Tabel 5.7. dimasukkan dalam sistem persamaan (5.22), sehingga diperoleh :

$$\begin{bmatrix} 6 & 16{,}5 & 14 \\ 16{,}5 & 76{,}25 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ 243{,}5 \\ 101 \end{bmatrix}$$

Persamaan matriks ini dengan udah dapat diselesaikan, dan hasilnya adalah $a_0 = 5$, $a_1 = 4$, $a_2 = -3$. Persamaan kurva yang dihasilkan adalah :

$$y = 5 + 4x_1 - 3x_2$$

Soal- Soal Latihan

1. Diberikan data hubungan antara nilai *x* dan *y* berikut ini.Gambarkan sebaran titik data tersebut dalam sistem koordinat x-y. Pelajari bentuk kurva yang sesuai berdasar sebaran titik data tersebut, dan buatlah persamaan aris yang dapat mewakilinya. Hitung pula koefisien korelasinya.

x	1	3	5	7	10	12	13	16	18	20
y	3	2	6	5	8	7	10	9	12	10

2. Diberikan data hubungan antara nilai *x* dan *y* berikut ini. Gambarkan sebaran titik data tersebut dalam sistem koordinat *xy*. Pelajari bentuk kurva yang sesuai berdasar sebaran titik data tersebut, dan buatlah persamaan garis yang dapat mewakilinya. Hitung pula koefisien korelasinya.

x	4	6	8	10	14	16	20	22	24	28	28	34	36	38
y	30	18	22	28	14	22	16	8	20	8	14	14	0	8

3. Soal serupa dengan soal no 1. untuk titik data berikut :

x	1	2	4	4	8	12	16	20	24	28	30	34
y	10	12	18	22	20	30	26	30	26	28	22	20

4. Diberikan data hubungan antara nilai *x* dan *y* berikut ini. Gambarkan sebaran titik data tersebut dalam sistem koordinat *xy*. Pelajari bentuk kurva yang sesuai berdasar sebaran titik data tersebut, dan buatlah persamaan garis yang dapat mewakilinya. Hitung pula koefisien korelasinya.

x	1	2	2,5	4	6	8	8,5
y	0,4	0,7	0,8	1,0	1,2	1,3	1,4

5. Seperti dalam soal no. 4; dicoba membuat persamaan berpangkat untuk mewakili titik data tersebut.

6. Buatlah persamaan garis yang mewakili titik data dalam soal 4. dengan persamaan eksponensial, dan hitung koefisien korelasinya. Beri komentar dan buat kesimpulan terhadap hasil hitungan soal no.4,5 dan 6.

7. Buatlah persamaan garis yang mewakili titik data berikut. Langkah pertama yang saudara kerjakan adalah menggambarkan sebaran titik data tersebut dalam sistem koordinat xy. Pelajari bentuk kurva yang sesuai berdasar sebaran titik data tersebut, dan buatlah persamaan garis yang dapat mewakilinya. Dicoba membuat persamaan berpangkat. Hitung koefisien korelasi.

x	0,05	0,11	0,15	0,31	0,46	0,52	0,70	0,74	0,82	0,98	1,17
y	0,956	0,890	0,832	0,717	0,571	0,539	0,378	0,370	0,306	0,242	0,104

8. Buatlah persamaan garis yang mewakili titik data dalam soal 7. dengan persamaan eksponensial, dan hitung koefisien korelasinya. Bandingkan hasil dalam Contoh 3, soal 7 dan soal 8; pilihlah persamaan yang paling baik.

9. Kerjakan seperti soal no.7 untuk titik data berikut. Dicoba dengan bentuk persamaan berpangkat, eksponensial, dan polinomial. Hitung koefisien korelasi untuk masing-masing bentuk persamaan.

x	0,05	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4
y	550	750	1000	1400	2000	2700	3750

10. Buatlah kurva regresi linier dengan banyak variabel yang dapat mempresentasikan data berikut ini.

x_1	0	1	2	0	1	2
x_2	2	2	4	4	6	6
y	19	12	11	24	22	15

11. Buatlah kurva regresi linier dengan banyak variabel yang dapat mempresentasikan data berikut ini.

x_1	1	1	2	2	3	3	4	4
x_2	1	2	1	2	1	2	1	2
y	18	12,8	25,7	20,6	35	29,8	45,5	40,3

12. Buatlah program komputer untuk metode regresi linier dengan tiga variabel bebas.

BAB VI

SOLUSI NUMERIK MASALAH NILAI AWAL

6.1. PENGERTIAN MASALAH NILAI AWAL DAN METODE LANGKAH TUNGGAL

Sejumlah fenomena alam (masalah-masalah di dalam sains dan teknik) dapat dibuat model matematikanya dalam bentuk persamaan atau sistem persamaan diferensial. Oleh karena itu, jika ingin menganalisis suatu fenomena alam dapat dilakukan dengan menganalisis solusi persamaan atau sistem persamaan diferensial terkait dengannya.

Ada banyak metode analitik dan numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan atau sistem persamaan diferensial. Dalam bagian ini, akan lebih difokuskan pada sebuah persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equations*) dengan menggunakan metode numerik.

Definisi 6.1

Masalah nilai awal (MNA) adalah sebuah masalah yang melibatkan satu atau lebih fungsi yang tidak diketahui beserta turunan-turnannya dalam sebuah persamaan yang memenuhi syarat awal yang diberikan.

Dengan definisi di atas, MNA untuk sistem persamaan diferensial orde pertama diberikan dalam bentuk berikut ini

$$y' = f(x,y),\ \ y(x_0) = y_0,\ \ x \in [a,b] \tag{6.1}$$

dengan simbol "*prime*" menyatakan turunan pertama terhadap *x, y* adalah sebuah vektor dengan *D*-dimensional $\left(y \in \Re^D\right)$, dan $f : \Re x \Re^D \to \Re^D$.

Persamaan (6.1) akan mempunyai penyelesaian tunggal (eksis dan unik) jika fungsi *f* memenuhi sebuah syarat Lipschitz.

Teorema berikut beserta buktinya dapat dijumpai dalam hampir semua buku-buku persamaan diferensial, Gear (1971) misalnya.

Teorema 6.1

Jika persamaan (6.1) adalah sebuah persamaan diferensial sedemikian hingga *f*(*x,y*) kontinu dalam interval [*a,b*], dan *f* memenuhi syarat Lipschitz yaitu ada sebuah konstanta *L* sedemikian hingga

$$\left|f(x,y)-f(x,y^*)\right|\le L\left|y-y^*\right|$$

untuk semua $x\in[a,b]$ dan semua *y, y*,* kemudian ada fungsi *y*(*x*) yang terdeferensial dan kontinu sedemikian hingga

$$y'=f(x,y) \tag{6.2}$$

dan memenuhi syarat awal $y(x_0)=y_0$.

Jika peubah bebas *x* tidak muncul secara eksplisit dalam persamaan (6.1) yakni

$$y'=f(y),\quad y\ \in\Re^D \tag{6.3}$$

dengan syarat awal

$$y(x_0)=y_0$$

maka persamaan (6.3) disebut sistem mandiri atau sistem *autonomous*.

Fungsi *f* diasumsikan analitik dalam lingkungan nilai awal $y(x_0)=y_0$.

Penyelesaian secara numerik permasalahan (6.1) beserta syarat awalnya adalah sebuah himpunan diskrit nilai-nilai *y,* katakanlah $\{y_n\}$, berkenaan dengan himpunan diskrit nilai-nilai *x*,

$$x_n,\ n=0,1,2,3,..,N.$$

Nilai-nilai *x* ini biasanya diperoleh dalam perlakuan langkah demi langkah. Tentu, nilai-nilai ini berada atau sangat dekat kepada kurva solusi eksak yakni

$$y_n\cong y(x_n),$$

dengan $x_{n+1}=x_n+h_n$, $n=0,1,2,..,N-1$; $x_0=a$, $x_N=b$, and h_n disebut **ukuran langkah** (*step-size*). Ukuran langkah biasanya diambil konstan.

Dalam metode numerik ada dua tipe metode untuk menyelesaikan permasalahan (6.1). Tipe yang pertama adalah tipe **metode langkah tunggal** (*one-step method*). Metode yang termasuk dalam tipe ini misalnya, metode *Taylor*, *Euler*, *Mid Point Rule*, dan *Runge-Kutta*. Sedangkan tipe yang kedua adalah tipe **metode langkah ganda** (*multi step method*). Metode yang termasuk dalam tipe ini adalah metode-metode *Adam*, *Nyström*, *Adams-Bashforth*, dan *Milne-Simpson*. Di sini akan difokuskan hanya pada metode langkah tunggal.

Definisi 6.2

Sebuah **metode langkah tunggal bentuk eksplisit** berkenaan dengan penyelesaian persamaan (6.1) adalah sebuah metode yang mana dapat ditulis ke dalam bentuk berikut ini

$$y_{n+1} = y_n + h_n\,\psi\,(x_n, y_n, h_n), \tag{6.4}$$

dengan $\psi\,(x_n, y_n, h_n)$ disebut fungsi ***increment,*** dan bergantung hanya pada x_n , y_n , dan h_n, dan $n = 0,1,...N$.

Definisi 6.3

Metode (6.4) dikatakan ***konvergen*** untuk menyelesaikan masalah nilai awal (6.1) jika $y_n \to y(x)$ untuk semua $x \in [a,b]$, seiring dengan $n \to \infty$ dan $y_0 \to y(0)$ dengan $h = x/n$ untuk setiap persamaan diferensial (6.1) yang mana memenuhi syarat Lipschitz.

Definisi 6.4

Metode (6.4) adalah ***stabil*** jika untuk sebuah persamaan diferensial yang memenuhi sebuah syarat Lipschitz ada konstanta positif h_0 dan C sedemikian hingga selisih antara dua penyelesaian numerik y_n dan $\tilde{y}_n$ masing-masing memenuhi (6.4) sedemikian hingga

$$\|y_n - \tilde{y}_n\| \le C\|y_n - \tilde{y}_n\| \quad \text{untuk semua } 0 \le h \le h_0$$

Teorema 6.2

Jika $\psi(x, y,h)$ memenuhi sebuah syarat Lipschitz dengan konstanta L, maka metode (6.4) adalah ***stabil***.

Teorema 6.3

Jika $\psi(x, y,h)$ adalah kontinu dalam x, y, dan h untuk $x \in [0,b]$, $h \in [0, h_0]$ dan semua y, dan jika $\psi(x, y,h)$ memenuhi sebuah syarat Lipschitz pada y dalam interval itu, syarat perlu dan cukup untuk konvergen adalah

$$\psi\,(x, y, 0) = f(x,y) \tag{6.5}$$

Syarat (6.5) juga disebut ***syarat konsisten.***

6.2. APROKSIMASI DERET TAYLOR SEBAGAI FUNGSI SOLUSI MNA

Pandang MNA (6.1) beserta syarat awalnya. Bila $y(x)$ yang terdeferensial dan kontinu diasumsikan sebagai solusi eksak dari (6.1), maka ekspansi deret Taylor untuk $y(x)$ disekitar $x = x_0$ dapat dinyatakan oleh (lihat Teorema 1.1)

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)\,y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}y^{(n-1)}(x_0) + R_n \quad (6.6)$$

Sekali nilai-nilai $y', y'', y''', \text{dst}$ diketahui, maka (6.6) memberikan deret pangkat untuk *y*. Bentuk y_0', y_0'', y''', dst adalah derivatif total yang didefinisikan dalam bentuk

$$\begin{aligned} y' &= y^{(1)} = f(x, y) = f \\ y'' &= y^{(2)} = f_x + f_y f \\ y''' &= y^{(3)} = f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + f_{yy} f^2 + f_y^2 f \\ dst \end{aligned} \quad (6.7)$$

Contoh 6.1

Diberikan MNA sebagai berikut

$$y' = x - y^2 \text{ dengan syarat awl } y(0) = 1$$

Gunakan deret Taylor (6.6) untuk mendapatkan nilai $y(0{,}1)$. Lakukan ekspansi Taylor hingga ketelitian empat tempat desimal.

Penyelesaian:

Deret Taylor untuk $y(x)$ disekitar $x = x_0 = 0$ dinyatakan oleh

$$y(x) = 1 + xy_0' + \frac{x^2}{2!}y_0'' + \frac{x^3}{3!}y_0''' + \frac{x^4}{4!}y_0^{(4)} + \cdots \quad (6.8)$$

dengan

$$\begin{aligned} y_0' &= x_0 - \{y(x_0)\}^2 = 0 - 1 = -1 \\ y'' &= 1 - 2\{y(x_0)\}\cdot y'(x_0) = 1 - 2\cdot 1\cdot(-1) = 3 \\ y''' &= -2\big(y'(x_0)\cdot y'(x_0)\big) - 2\{y(x_0)\}\cdot y''(x_0) \\ &= -2(-1\cdot -1) - 2\{1\}\cdot 3 = -8 \\ dst \end{aligned}$$

Subsitusikan nilai-nilai y_0', y_0'', y''', dst ke persamaan (6.8) diperoleh :

$$y(x) = 1 + x(-1) + \frac{x^2}{2!}(3) + \frac{x^3}{3!}(-8) + \frac{x^4}{4!}(34) + \frac{x^5}{5!}(-186) + \cdots\cdots$$
$$= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{17}{12}x^4 + \frac{31}{20}x^5 + \cdots$$

Untuk mendapatkan nilai y (0,1) teliti keempat tempat desimal, cukup dihitung sampai suku yang mengandung x^4, dan diperoleh hasil sebagai berikut :

$$y(x) = 1 - (0{,}1) + \frac{3}{2}(0{,}1)^2 - \frac{4}{3}(0{,}1)^3 + \frac{17}{12}(0{,}1)^4$$
$$= 0{,}9138$$

Apabila diinginkan untuk mencari batas-batas nilai x dari deret di atas, dengan kekeliruan setelah suku yang memuat x^4 , maka dapat dihitung nilai-nilai dari y teliti keempat tempat desimal yakni

$$\frac{31}{20}x^5 \le \frac{1}{2}10^{-4}$$
$$\frac{31}{20}x^5 \le 0{,}00005$$
$$x \le 0{,}126$$

6.3. APROKSIMASI FUNGSI SOLUSI MNA DENGAN METODE PICARD

Tinjau kembali MNA yang diberikan dalam bentuk (6.1). Dari teorema dasar kalkulus, integrasi persamaan differensial (6.1) memberikan bentuk

$$y = y_0 - \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx \tag{6.9}$$

Pada persamaan (6.9), fungsi y yang tidak diketahui muncul sebagai integran. Persamaan (6.9) disebut persamaan integral. Dengan demikian persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan metode aproksimasi pertama untuk y diperoleh dengan meletakkan y_0 untuk y diruas kanan dari persamaan no (6.9) dan ditulis

$$y^{(1)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0)\,dx$$

Integral pada ruas kanan sekarang dapat diselesaikan dan hasil dari $y^{(1)}$ substitusikan ke y dalam integral dari (6.9) untuk memperoleh aproksimasi kedua $y^{(2)}$.

$$y^{(2)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^{(1)})\, dx$$

Analog, akan diperoleh rumusan sebagaimana berikut ini

$$\left.\begin{array}{l} y^{(n)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^{(n-1)})\, dx \\ \text{dengan} \quad y^{(0)} = y_0 \end{array}\right\} \tag{6.10}$$

Jadi berdasarkan uraian di atas metode Picard menghasilkan suatu barisan dari aproksimasi $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}$.

Contoh 6.2

Selesaikan MNA pada Contoh 6.1. dengan menggunakan formula (6.10)

Penyelesaian:

Dari syarat awal diperoleh $y^{(0)} = 1$. Rumusan (6.10) untuk n = 1 dan 2 masing-masing memberikan

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^{(0)})\, dx \\ &= 1 + \int_{0}^{x} f(x + y^{(0)})^2\, dx \\ &= 1 + \int_{0}^{x} f(x+1)\, dx \\ &= 1 + \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^x \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \end{aligned}$$

dan

$$y^{(2)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y^{(1)})\, dx$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} (x + y^{(1)\,2})\, dx$$

$$= 1 + \int_{x_0}^{x} \left[\left(x + \left(1 + x + \frac{1}{2} x^2 \right)^2 \right) \right] dx$$

$$= 1 + \int_{x_0}^{x} \left(x + 1 + 2x + x^2 + x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right) dx$$

$$= 1 + \left[x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{20} x^5 \right]_0^x$$

$$= 1 + x + \frac{3}{2} x^2 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{20} x^5$$

Dari hasil yang baru saja diperoleh memberikan informasi betapa rumitnya untuk nilai $n > 2$. Oleh karena itu metode ini memiliki kelemahan dalam efisien kerja.

Contoh 6.3

Diberikan MNA dalam bentuk

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2 + 1}$$

dengan syarat awal $y = 0$ untuk $x = 0$.

Gunakan metode Picard untuk menghitung y dimana $x = 0{,}25$, $x = 0{,}5$ dan $x = 1{,}0$ teliti sampai tiga tempat desimal.

Penyelesaian:

Perhatikan syarat awal MNA yang diberikan. Ini berarti $y^{(0)} = y_0 = 0$. Oleh karena itu, berdasarkan rumus (6.10) diperoleh

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{x^2}{y^2 + 1}\, dx$$

$$y = 0 + \int_{0}^{x} \frac{x^2}{y^2 + 1}\, dx = \int_{0}^{x} \frac{x^2}{y^2 + 1}\, dx$$

Kemudian,

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= \int_0^x \frac{x^2}{y^2+1}\,dx \\ &= \int_0^x \frac{x^2}{0\ +1}\,dx \\ &= \int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \end{aligned}$$

dan

$$y^{(2)} = \int_0^x \frac{x^2}{y^{(1)\ 2}+1}\,dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^x \frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}x^3\right)^2 + 1}\,dx \\ &= \int_0^x \frac{x^2}{\frac{1}{9}x^6 + 1}\,dx = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg]_0^x \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{81}x^9 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

Hasil integral menunjukan bahwa $y^{(1)}$ dan $y^{(2)}$ suku pertamanya bersesuaian, yaitu $\frac{1}{3}x^3$.

Untuk mencari batas dari nilai-nilai x sedemikian hingga deret dengan suku $\frac{1}{3}x^3$ sendiri akan memberikan hasil teliti hingga tiga tempat desimal dapat dilakukan dengan cara sbb:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{81}x^9 \leq \mathbf{\frac{1}{2}}\ 10^{-3} \\ &\Leftrightarrow x \leq 0,7 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil di atas diperoleh

$y(0,25) = \frac{1}{3}(0\ ,\ 25)^3 = 0,005$; $\quad y(0,5) = \frac{1}{3}(0,5)^3 = 0,042$;

$y(1,0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{81} = 0,321$

6.4. METODE EULER

Mulai dari bagian ini hingga akhir bagian, metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan MNA (6.1) hanya melalui nilai-nilai fungsi yang diketahui sebaelumnya.

Tinjau MNA (6.1). Misalkan ingin diketahui nilai-nilai y pada $x = x_r = x_o + r\,h$ dengan $r = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Untuk $n = 1$. Persamaan (6.9) menjadi

$$y(x_1) = y_1 = y_0 - \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx \tag{6.11}$$

Dalam (6.11), bila diasumsikan $f(x,y) \approx f(x_0, y_0)$ untuk $x_0 \le x \le x_1$, maka (6.11) menjadi

$$\begin{aligned} y_1 &\approx y_0 + \int_{x_0}^{x1} f(x_0,y_0)\,dx \\ &= y_0 + f(x_0,y_0)\int_{x_0}^{x1} dx = y_0 + f(x_0,y_0)(x_1 - x_0) \\ &= y_0 + hf(x_0,y_0) \end{aligned}$$

Analog, untuk $x_n \le x \le x_{n+1}$ diperoleh

$$y_{n+1} = y_n + hf\ (x_n, y_n) \tag{6.12}$$

dengan $x_n - x_{n-1} = h$ dan $n = 0, 1, 2, \ldots, N$

Persamaan (6.12) adalah sebuah integrator yang dikenal dengan sebuatan integrator **metode Euler**. Integrator (6.12) merupakan integrator yang paling sederhana untuk menyelesaikan MNA (6.1). Dengan integrator ini pula, metode-metode implisit dapat memulai proses penyelesaian MNA. Metode ini, kurang akurat karena adanya asumsi $f(x,y) \approx f(x_0,y_0)$ untuk $x_0 \le x \le x_1$ yang pada prinsipnya sangat beresiko tinggi. Asumsi ini akan sangat mendekati yang diharapkan jika nilai $h << 1$. Jika ini dilakukan konsekuensinya adalah semakin banyaknya iterasi yang harus dilakukan.

Contoh 6.4

Gunakan metode Euler, untuk menyelesaikan persamaan differensial

$$y' = -y\ ;\ \text{dengan syarat}\ y(0) = 1\ .$$

Penyelesaian :

Misalkan *h* yang akan digunakan adalah 0.01 untuk *x* dalam interval [0,04].

Penggunaan integrator (6.12) dengan *h* = 0,01 memberikan hasil berikut :

$$y\ (0,01) = 1 + (0,01)\ (-1) = 0,99$$
$$y\ (0,02) = 0,99 + (0,01)\ (-0,99) = 0,9801$$

$$y\ (0,03) = 0,9801 + (0,01)\ (-0,9801) = 0,9703$$
$$y\ (0,04) = 0,9703 + (0,01)\ (-0,9703) = 0,9606$$

Solusi eksak dari persamaan differensial di atas adaalah $y = e^{-x}$, dan dari nilai $x =$ 0,04 diperoleh nilai y = 0,9606.

6.5. METODE RUNGE-KUTTA

Seperti telah disampaikan di bagian sebelumnya, bahwa metode Euler kurang efisien dalam masalah-masalah praktis, karena dalam metode Euler diperlukan $h << 1$ untuk memperoleh hasil yang cukup teliti (akurat). Metode Runge-kutta dibuat untuk mendapatkan ketelitian yang lebih tinggi dan kelebihan dari metode ini adalah bahwa untuk memperoleh hasil-hasil tersebut hanya diperlukan nilai-nilai fungsi dari titik-titik sebarang yang dipilih pada suatu interval bagian.

6.5.1 Metode Runge-Kutta Orde 2

Metode Runge-Kutta Orde 2 diberikan dalam skema berikut

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right) \tag{6.14}$$

dengan

$$k_1 = hf\left(x_n, y_n\right), \quad k_2 = hf\left(x_n, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

6.5.2 Metode Runge-Kutta Orde 4

Metode Runge-Kutta orde empat diberikan dalam rumus berikut ini:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (6.15)$$

dengan

$k_1 = f(x_n, y_n),\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}), k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}), k_4 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + k_3)$

$h = step\ size$

Contoh 6.5

Diberikan MNA dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = y - x \text{, dengan } y\ (0) = 2\ .$$

Tentukan y (0,1) dan y (0,2) teliti hingga empat tempat desimal :

Penyelesaian:

(i) Metode Runge-Kutta Orde Dua

Pilih $h = 0{,}1$, $f(x, y) = y - x$, dan y (0) = 2. Kemudian tentukan nilai-nilai koefisien k_1 dan k_2 dengan cara berikut:

$$k_1 = hf_0 = hf(x_0, y_0) = 0{,}1 f\ (0{,}2) = 0{,}1\ (2 - 0) = 0{,}2$$
$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0{,}1\ [f\ (0 + 0{,}1\ ,\ 2 + 0{,}2)]$$
$$k_2 = 0{,}1\ [f(\ 0{,}1\ ;\ 2{,}2)]$$
$$k_2 = 0{,}1\ (2{,}2 - 0{,}1) = 0{,}21$$

Kemudian dihitung nilai y pertama yaitu

$$\begin{aligned} y_1 &= y\ (0{,}1) \\ &= y_0 + ½\ (k_1 + k_2) \\ &= 2 + ½\ (0{,}2 + 0{,}21) \\ &= 2{,}2050 \end{aligned} \qquad (6.15)$$

Guna mendapatkan nilai fungsi $y_2 = y(0{,}2)$, diperlukan $x_o = 0{,}1$ dan $y_o = 2{,}2050$.

Dengan cara yang sama diperoleh:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= h\, f(x_0, y_0) \\
&= 0{,}1\ f(\ 0{,}1\ ;\ 2{,}2050) \\
&= 0{,}1\ f(2{,}2050\ -\ 0{,}1\ )\ =\ 0{,}2105 \\
k_2 &= h\ f(x_0 + h\ , y_0 +\ k_1) \\
&= 0{,}1 f(\ 0{,}2\ ,\ 2{,}4155) \\
&= 0{,}1 f\ (2{,}4155 - 0{,}2\ )\ =\ 0{,}22155
\end{aligned}
$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_0\ +\ \tfrac{1}{2}(k_1 +\ k_2) \\
&= 2{,}2050\ +\ \tfrac{1}{2}(0{,}2105\ +\ 0{,}22155) \\
&= 2{,}4210
\end{aligned}
$$

Analog, akan diperoleh pula

$$y_3 = y\,(0{,}3) = 2{,}6492$$

dan

$$y_4 = y\,(0{,}4) = 2{,}8909.$$

Untuk keperluan pembanding, dapat diperlihatkan bahwa ketika pilihan $h = 0{,}2$ diperoleh

$$y\,(0{,}2) = 2{,}4200 \text{ dan } y\,(0{,}4) = 2{,}8880.$$

Dari hasil nemerik ini, memperlihatkan betapa pilihan h memainkan peranan dalam hal keakuratan aproksimasi.

Sementara itu, solusi secara analitik MNA dalam Contoh 6.5 adalah fungsi $y = x + 1 + e^x$.

Solusi analitik untuk nilai-nilai y (0,2) dan y (0,4) berturut-turut adalah 2,4214 dan 2,8918.

Berikut ini rekapitulasi nilai-nilai fungsi solusi Contoh 6.5. yang telah dikemukakan.

x	y hitung	y eksak	selisih	Rasio
0,2	h = 0,1 : 2,4210 h = 0,2 : 2,4200	2,4214	0,0004 0,0014	3,5
0.3	h = 0,1 : 2,8909 h = 0,2 : 2,8880	2,4918	0,0009 0,0038	4,2

Dari tabel di atas terlihat bahwa metode Runge-Kutta orde dua konvergen.

(ii). Metode Runge-Kutta Orde Empat

Analog dengan langkah-langkah penyelesai MNA dengan metode Runge-Kutta orde dua, Metode Runge-Kutta orde empat (6.15) memberikan untuk h = 0,1:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\, f(x_0, y_0) = 0{,}1\ (0{,}2) \\
&= 0{,}1 f\ (2 - 0)\ = 0{,}2 \\
k_2 &= h\, f(x_0\ +\ ½\, h\ , y_0 + ½\, k_1) \\
&= 0{,}1 f(0{,}05\ , 2{,}1) \\
&= 0{,}1\ (2{,}1 - 0{,}05) =\ 0{,}205 \\
k_3 &= h\ f\ (x_0 + ½\, h\ , y_0 +\ ½\, k_2) \\
&= 0{,}1 f(0{,}05\ , 2 + 0{,}1025) \\
&= 0{,}1\ (2{,}1025 - 0{,}05) = 0{,}20525 \\
k_4 &= h\, f(x_0 +\ h\ , y_0 + k_3) \\
&= 0{,}1 f(0{,}1\ ,\ 2{,}20525) \\
&= 0{,}1\ (2{,}20525\ -\ 0{,}1) =\ 0{,}21053
\end{aligned}$$

Dari nilai-nilai tersebut diperoleh :

$$\begin{aligned}
\text{y1} = y(0{,}1) &= y_0\ +\ (\ k_1\ +\ 2\, k_2\ +\ 2\, k_3\ +\ k_4) \\
&= 2 + (\ 0{,}2 + 0{,}410 + 0{,}4105 + 0{,}21043) \\
&= 2{,}2052
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama didapat juga y (0,2) = 2,4214

6.6. METODE-METODE BENTUK IMPLISIT

Metode-metode yang telah dibahas sebelumnya adalah metode-metode bentuk eksplisit (terbuka) yakni metode yang memberikan secara langsung nilai-nilai y_{n+1} ketika nilai $\left(x_{n,} y_n\right)$ diberikan/diketahui. Metode eksplisit juga dikenal sebagai metode prediksi (*predictor*). Sebaliknya, metode implisit, ia **tidak langsung** memberikan nilai-nilai y_{n+1} ketika pasangan nilai $\left(x_{n,} y_n\right)$ diberikan. Metode ini memerlukan beberapa kali proses yang sama/berulang atau memerlukan nilai $\left(x_{n+1,} y_{n+1}\right)$ untuk mendapatkan nilai-nilai y_{n+1}. Dengan keadaan ini, metode implisit memerlukan waktu lebih lama dibandingkan metode eksplisit. Hal ini dikarenakan perlunya proses ekstra untuk mendapatkan nilai yang sama atau sangat dekat dengan y_{n+1}. Metode implisit juga dikenal dengan sebutan metode *corrector* karena cara kerja metode ini adalah mengoreksi setiap nilai aproksimasi y_{n+1} yang sesuai yakni ketika berlaku kondisi

$$y_{n+1} \approx \left| y_{n+1}^{k+1} - y^{k}{}_{n+1} \right| < \text{toleransi}, \quad k = 0,1,2,\cdots,N \tag{6.16}$$

Toleransi dalam persamaan (6.16) diambil sesuai kebutuhan (umumnya toleransi << 0.1). Untuk $k = 0$, nilai y_{n+1}^{0} paling mudah diambil dari metode Euler (persamaan (6.12). Dua metode implisit yang cukup dikenal adalah metode **Aturan Nilai Tengah** (*Mid Point Rule*) dan metode **Gauss-Legendre**.

6.6.1 Metode Aturan Nilai Tengah (*Mid Point Rule*)

Metode Aturan Nilai Tengah diberikan dalam bentuk sebagai berikut

$$y_{n+1} = y_n + h\, f\left(\frac{y_{n+1} + y_n}{2} \right) \tag{6.17}$$

6.6.2 Metode Gauss-Legendre Orde Empat

Metode Gauss-Legendre orde empat diberikan dalam bentuk berikut

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} \right) \tag{6.18}$$

dengan

$$k_1 = f\left(x_n, y_n + \tau\left(\frac{k_1}{4} + \frac{\left(3 - 2\sqrt{3}\right)k_2}{12} \right) \right); \quad k_2 = f\left(x_n, y_n + \tau\left(\frac{\left(3 + 2\sqrt{3}\right)k_1}{12} + \frac{k_2}{4} \right) \right)$$

Soal-soal Latihan

1. Dari $\frac{dy}{dx} = xy + 1$, dan y (0) = 1, tentukan untuk y (x) dan hitunglah y(0,1) teliti hingga empat tempat desimal.

2. Gunakan metode deret Taylor, untuk membuktikan bahwa solusi dari

   $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$, dengan x = 0, y = c, $\frac{dy}{dx} = 0$, dapat dinyatakan oleh :

$$y = c\left[1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1 \times 4}{6!}x^6 - \frac{1 \times 4 \times 9}{9!}x^9 + \ldots\right]$$

3. Diberikan MNA sbagai berikut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + y} \quad ;\text{dengan syarat awal } y(4) = 4$$

Gunakan deret Taylor untuk mendapatkan $y(4,1)$ dan $y(4,2)$.

4. Untuk MNA berikut ini, tentukanlah solusi persamaan tersebut dalam bentuk perpangkatan dari x dengan memakai metode Picard, kemudian hitung y (0,1) teliti hingga empat tempat desimal.

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2 \quad ;\text{dengan syarat awal } y(0) = 1$$

5. Selesaikan dengan menggunakan metode Euler persamaan differensial

$$\frac{dy}{dx} = x + y \text{ dengan syarat y(0)} = 0 \text{ pilih h} = 0{,}2, \text{ dan hitung y (0,4) dan y (0,6)}$$

6. Diberikan persamaan $\frac{dy}{dx} = x^2 + y$ dan $y(0) = 1$

Tentukan y (0,02), y (0,04), dan y (0,06), dengan menggunakan modifikasi metode Euler.

7. Gunakan metode oerde keempat Runge-Kutta untuk mencari nilai y untuk x = 1, bila diketahui bahwa y = 1 untuk x = 0

dan $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$

8. Buatlah daftar solusi dari

$$\frac{dy}{dx} = x + y \text{ dengan } y(0) = 0$$

Untuk 0,4 < x ≤ 1,0 dengan h = 0,1, menggunakan formula RK4 dan Mid Point Rule.

BAB VII
APLIKASI-APLIKASI METODE NUMERIK

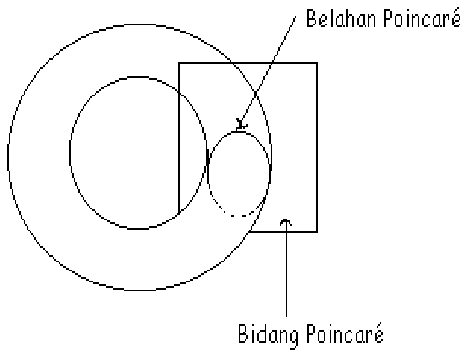
7.1 TEKNIK INTERPOLASI LINEAR UNTUK BELAHAN POINCARÉ

7.1.1 Pengertian Belahan Poincaré

Belahan Poincaré yaitu sebuah bidang potong berdimensi dua tempat dimana trayektori-trayektori dari sebuah penyelesaian sistem dinamik melewatinya. Dari belahan Poincaré akan diperoleh sebuah photo fase (*phase portrait*) yang di dalam ilmu Fisika disebut juga dengan photo *stroboscopic*. Belahan Poincaré secara umum diperlukan untuk menyederhanakan proses penganalisaan suatu sistem dinamik guna mendapatkan informasi sebanyak-banyaknya mengenai sifat-sifat sistem tersebut (sifat stabil atau tidak stabilnya orbit-orbit periodik, misalnya).

Guna mengetahui perilaku dari suatu sistem dinamik yang berdimensi tiga atau empat umumnya dibentuk sebuah bidang Poincaré yang dilalui oleh trayektori-trayektori sistem tersebut. Pengertian bidang Poincaré yang terjadi pada trayektori-trayektori yang membentuk sebuah *torus* dapat dijelaskan melalui proses geometri berikut (Gambar 7.1).

Gambar 7.1: Sebuah *torus* (trayektori-trayektori yang membentuk sebuah "donut") dengan sebuah bidang. Belahan yang terjadi dikenal dengan sebutan *belahan* Poincaré.



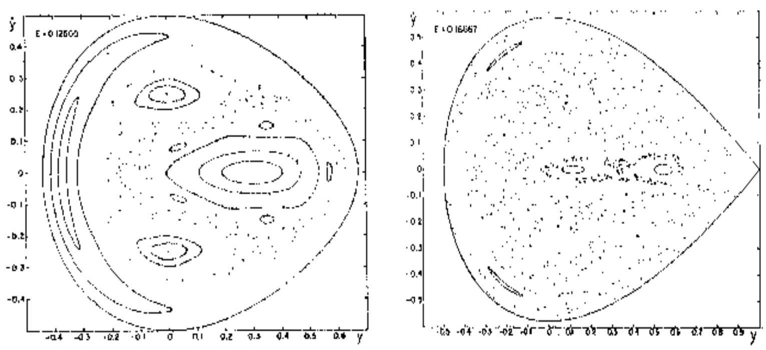
Dengan adanya belahan Poincaré akan memberikan sejumlah informasi penting tentang trayektori misalnya sifat kestabilan orbit-orbit periodik (stabil atau tidak stabil), tipe periodik (periodik atau quasi periodik), dan tipe perpindahan atau pegerakan trayektori (*chaos* atau *regular*) (Hilborn, 1994). Satu contoh sistem dinamik yang melibatkan belahan Poincaré sebagai alat untuk menganalisis trayektori-trayektori dari sistem tersebut (Hénon, 1964), adalah masalah Hénon-Heiles. Masalah Hénon-Heiles adalah model Hamiltonian yang diberikan dalam bentuk (Hilborn, 1994)

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2}q_2^2 + \left(q_1^2 q_2 - \frac{1}{3}q_2^3\right) \tag{7.1}$$

Sistem Hamiltonian di atas adalah *non-integrable* dan memiliki dua derajat kebebasan atau berdimensi empat. Adapun sistem persamaan diferensial orde pertama dari persamaan Hamiltonian (7.1) adalah:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= q_1 + 2q_1q_2 \\ \dot{p}_2 &= q_2 + q_1^2 - q_2^2 \\ \dot{q}_1 &= -p_1 \\ \dot{q}_2 &= -p_{2.} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Sistem Hamiltonian Hénon-Heiles sangat bergantung pada nilai energi $E = H$. Bervariasinya nilai energi E akan bervariasi pula bentuk trayektorinya. Dua buah belahan Poincaré berikut ini mewakili dua jenis energi E yang berbeda (Hénon,1981):

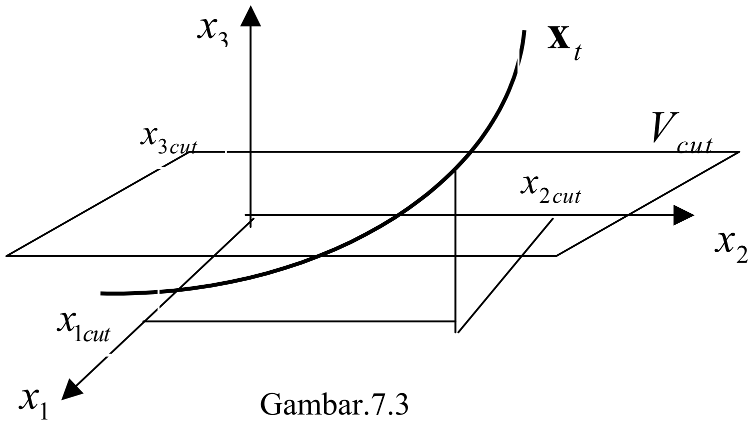


Gambar 7.2:
Suatu bentuk belahan Poincaré dari masalah Hénon-Héiles.
(*i*). *Hénon-Héiles dengan E=0.125* dan (*ii*). *Hénon-Héiles dengan E=0.16667.*

Dari semua bentuk belahan Poincaré di atas setiap invarian kurva, gugusan "pulau" invarian ellip, dan "lautan" chaotik mengandung makna yang sangat berarti dimana mereka menggambarkan sifat-sifat trayektori.

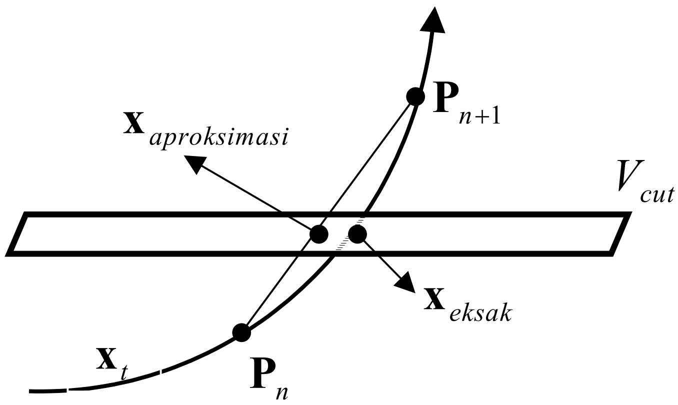
7.1.2 Konsep Interpolasi Linear Pada Bidang

Guna mendapatkan data trayektori dari sebuah sistem dinamik yang berada pada atau cukup dekat pada bidang Poincaré yang diinginkan dapat digunakan metode Interpolasi Linear. Metode ini dapat diilustrasikan melalui proses geometri berikut ini. Asumsikan sebuah trayektori $\mathbf{x}(t)$ dalam ruang $\Re^3$ melintasi sebuah bidang datar V_{cut} sebagaimana dilukiskan pada Gambar 7.3.

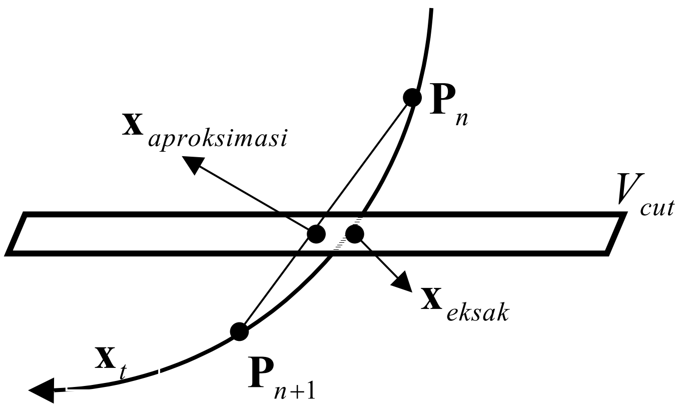


Gambar.7.3

Kemudian asumsikan dua buah titik $\mathbf{p}\left(x_1\left(t_n\right), x_2\left(t_n\right), x_3\left(t_n\right)\right)=\mathbf{p}_n$ dan $\mathbf{p}\left(x_1\left(t_{n+1}\right), x_2\left(t_{n+1}\right), x_3\left(t_{n+1}\right)\right)=\mathbf{p}_{n+1}$ adalah berada pada sisi yang berbeda dari bidang potong $V_{cut}=x_{3cut}$ (perhatikan Gambar 7.4.a atau 7.4.b).



Gambar.7.4a



Gambar 7.4b

Dari kondisi yang ditampilkan oleh Gambar 7.4a atau 7.4b persamaan garis lurus yang terbentuk akan memotong bidang x_{3cut} di titik $\mathbf{x}_{aproksimasi}$ sehingga hubungan berikut ini diperoleh:

$$\frac{x_1^*(t)-x_1(t_n)}{x_1(t_{n+1})-x_1(t_n)}=\frac{x_2^*(t)-x_2(t_n)}{x_2(t_{n+1})-x_2(t_n)}=\frac{x_3^*(t)-x_3(t_n)}{x_3(t_{n+1})-x_3(t_n)} \tag{7.3}$$

dengan $x_1^*(t), x_2^*(t),$ dan $x_3^*(t)$ adalah komponen dari $\mathbf{x}_{aproksimasi}$.

Oleh karena $x_3(t)=x_{3cut}$ maka persamaan (3) dapat ditulis menjadi:

$$x_1^*(t)=x_1(t_n)+\left(x_1(t_{n+1})-x_1(t_n)\right)\left(\frac{x_{3cut}-x_3(t_n)}{x_3(t_{n+1})-x_3(t_n)}\right) \tag{7.4a}$$

$$x_2^*(t)=x_2(t_n)+\left(x_2(t_{n+1})-x_2(t_n)\right)\left(\frac{x_{3cut}-x_3(t_n)}{x_3(t_{n+1})-x_3(t_n)}\right) \tag{7.4b}$$

$$x_3^*(t)=x_{3cut} \tag{7.4c}$$

Persamaan-persamaan (7.4a), (7.4b), dan (7.4c) adalah persamaan linear (garis lurus) terhadap peubah x_{3cut} yang dibentuk untuk menginterpolasi sebuah titik pada bidang potong. Oleh karena itu cara yang diilustrasikan di atas dinamakan ***interpolasi linear***.

7.2 SOLUSI NUMERIK SISTEM SUSPENSI MOBIL

7.2.1. Sistem Persamaan Diferensial dan Sistem Suspensi Mobil

Diketahui bahwa bentuk persamaan diferensial biasa orde dua yang didefinisikan dengan

$$a_2\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=f(t) \tag{7.5}$$

dengan syarat awal $x(0)=x_0$ dan $x'(0)=v_0$ memiliki sejumlah aplikasi pada berbagai bidang ilmu, ilmu fisika dan ilmu teknik misalnya. Aplikasi yang dimaksud tiga diantaranya adalah model matematika untuk sistem suspensi pada mobil, pendulum teredam atau tidak teredam, dan rangkaian listrik. Menarik untuk dipelajari bahwa bervariasinya nilai-nilai koefisien $a_2, a_1,$ dan a_0 serta fungsi $f(t)$ pada persamaan (7.5) memberikan interprestasi yang berbeda pada setiap aplikasinya.

Salah satu bentuk khusus dari persamaan diferensial (7.5) yang cukup dikenal dan merupakan model matematika pada sistem suspensi mobil diberikan dalam bentuk

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\delta\frac{dx}{dt}+kx=f(t)\ ;\ x(0)=x_0 \quad \text{dan} \quad x'(0)=v_0 \tag{7.6}$$

dengan

$m =$ porsi massa mobil yang didukung oleh sistem suspensi

$\delta =$ koefisien peredam shock absorber (proporsional)

$k =$ konstanta kekakuan pegas/per (proporsional)

$f(t) =$ fungsi gaya

$x =$ fungsi waktu untuk perubahan vertikal dari posisi diam

$x' =$ kecepatan perubahan x

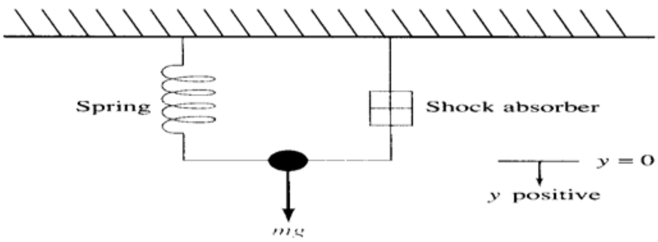
$x'' =$ percepatan perubahan x

$v_0 =$ kecepatan awal dari pusat massa

Pemilihan nilai rasio rancangan $\frac{\delta}{m}$ dan $\frac{k}{m}$ dengan tepat diharapkan memberikan keamanan dan kenyamanan pengendara mobil.

Guna menyelesaikan persamaan (7.6) tidaklah sulit dilakukan secara analitik bila fungsi gaya $f(t)=0$ (persamaan diferensial orde dua homogen). Namun sebaliknya, penyelesaian dapat menjadi rumit jika fungsi gaya $f(t)\neq 0$ (persamaan diferensial orde dua non homogen). Oleh karena itu penyelesaian persamaan diferensial (7.6) dapat dilakukan dengan cara numerik. Selain menjanjikan kemudahan dalam menyelesaikan (7.6) karena didukung oleh pilihan integrator yang banyak (standar atau khusus), cara ini juga dengan mudah dapat menampilkan lintasan objek (trayektori) dari sejumlah fungsi gaya $f(t)\neq 0$ dan berbagai nilai rasio rancangan $\frac{\delta}{m}$ dan $\frac{k}{m}$ karena didukung oleh software komputer yang maju dan moderen.

Kerja suspensi mobil merupakan sistem kerja *spring* (pegas), *shock absorber*, dan massa. Sistem kerja suspensi mobil dapat dijelaskan oleh diagram berikut (Giordano and Weir, 1994).



Gambar.7.5 : Sistem Suspensi (*Spring-Shock Absorber*) Mobil

Persamaan diferensial dari sistem suspensi mobil yang ideal dengan dukungan pegas dan *shock absorber* sebagaimana diberikan pada persamaan (7.6). Dalam bentuk sistem persamaan diferensial, persaman tersebut dapat disajikan ke dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{f(t)}{m} - 2\alpha\, y - \omega_o^2\, x \end{aligned} \tag{7.7}$$

dengan syarat awal $x(0)=0 \quad dan \quad y(0)=v_0$. Dalam sistem (7.7) $2\alpha = \frac{\delta}{m}$ dan $\omega_o^2 = \frac{k}{m}$. Untuk keadaan jalan yang memiliki efek "papan cucian" (*washboard*), fungsi gaya $f(t)$ diberikan dalam bentuk

$$f(t) = F_0\, Cos(\omega t) \tag{7.8}$$

dengan F_0 adalah <u>amplitudo</u> dari fungsi gaya dengan periode $2\pi/\omega$ dan berfrekwensi $\frac{\omega}{2\pi}$. Selain itu untuk kondisi jalan dengan efek "berlobang dan tidak rata" (*bumpy road*) insinyur otomotif memberikan fungsi gaya $f(t)$ dalam bentuk

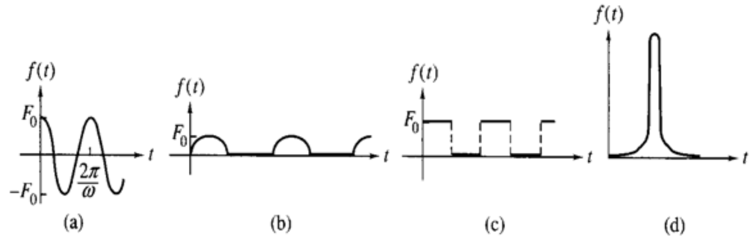
$$f(t) = F_0\, e^{-a\,t}\, Cos(\omega t) \quad \text{atau} \quad f(t) = F_0\, e^{-a\,t}\, Sin(\omega t) \tag{7.9}$$

dengan F_0, a, dan ω adalah konstanta-konstanta bernilai positif dan t adalah waktu. Dengan melibatkan fungsi gaya (7.9), sistem (7.7) menjadi

$$\frac{dx}{dt} = y\,; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{F_0\, Cos(\omega t)}{m} - 2\alpha\, y - \omega_o^2\, x \tag{7.10}$$

dengan syarat awal $x(0)=0 \quad dan \quad y(0)=v_0$.

Secara umum, kondisi jalan yang dikaitkan dengan fungsi gaya $f(t)$ memiliki beberapa tipe (Gambar 7.6.).



Gambar.7.6 : Empat tipe jalan yang diwakilkan oleh bentuk fungsi $f(t)$. Tipe *wash board* (a) *wake-up strips* (b dan c) dan *New York Pothole* (d)

Bentuk grafik fungsi dari fungsi gaya $f(t)$ yang diberikan pada (7.8) diwakili oleh Gambar.7.6 bagian a.

7.2.2 Agoritma untuk Penyelesaian Masalah Sistem Suspensi Mobil Dengan Menggunakan Metode Runge-Kutta Orde Empat Bentuk Eksplisit.

Guna menyelesaikan sistem persamaan diferensial (7.10) dengan fungsi gaya yang mempresentasikan efek *washboard* atau *bumpy road* secara numerik untuk sistem (7.10) dapat dilakukan dengan menggunakan skema metode Runge-Kutta orde empat bentuk eksplisit berikut ini:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{\tau}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{7.11}$$

dengan

$$k_1 = \mathbf{f}(t, x_1),\ k_2 = \mathbf{f}(t + \frac{\tau}{2}, x_1 + \frac{k_1}{2}),\quad k_3 = \mathbf{f}(t + \frac{\tau}{2}, x_1 + \frac{k_2}{2}),\quad k_4 = \mathbf{f}(t + \frac{\tau}{2}, x_1 + k_3)$$

$\tau = step\ size$

Algoritma yang digunakan untuk mendapatkan sejumlah data output yang meliputi data hasil perhitungan integrasi secara numerik dan kesesuain parameter δ dan k yang memberikan informasi tentang waktu pulih sistem *Coil Spring-Shock Absorber* yang "terbaik" (cepat kembali ke posisi equilibrium dan berjarak maksimum terendah) adalah sebagai berikut:

1. Set Fungsi Turunan berkenaan dengan sistem (7.7) dengan pilihan kondisi jalan *bumpy road* dan/atau *wash board* yang diberikan dalam bentuk sebuah fungsi sinus atau kosinus, atau kombinasi salah satu fungsi tersebut dengan fungsi eksponen;
2. Buat pilihan simulasi : misalnya cara simulasi terhadap parameter δ atau cara simulasi terhadap parameter k ;
3. Set Data Input;

- Ketika pilihan pertama dalam butir 2 yang dipilih, setting data input adalah step size, jumlah iterasi, syarat awal $x(0) = x_0$, $y(0) = v_0$, F_0, a, ω, jumlah parameter δ yang akan disimulasi (dalam hal ini diberlakukan rumus $n = (\delta_n - \delta_0)/\Delta\delta$,

  dengan n = jumlah parameter δ, δ_n = nilai akhir parameter δ, δ_0 = nilai awal parameter δ, dan $\Delta\delta$ = pertambahan nilai parameter δ), dan nilai parameter k.

- Sebaliknya, ketika pilihan kedua pada butir 2 yang dipilha, maka setting data input adalah : step size, jumlah iterasi, syarat awal $x(0)=x_0$, $y(0)=v_0$, F_0, a, ω, banyaknya parameter k yang akan disimulasi (dalam hal ini diberlakukan rumus $n=(k_n-k_0)/\Delta k$ dengan n = banyaknya parameter k, k_n = nilai akhir parameter k, k_0 = nilai awal parameter k, dan Δk = pertambahan nilai parameter k), dan nilai parameter δ;

4. Gunakan integrator (7.11) untuk menyelesaikan sistem (7.7) dengan perlakuan sebagaimana langkah 2 dan input yang sudah ditetapkan pada langkah 3;
5. Simpan data hasil integrasi numerik ke dalam file data, **c:/ Rk4x.dat** misalnya;
6. Simpan data waktu kembali ke posisi equlibrium dengan ketentuan $|x_n-x_0|<tol=1\,x\,10^{-12}$ ke dalam file data **c:/ waktunol.dat**;
7. Ulangi proses langkah ke 5 hingga ke 7 untuk parameter yang lain;
8. Selesai.

7.2.3 Eksperimen Numerik

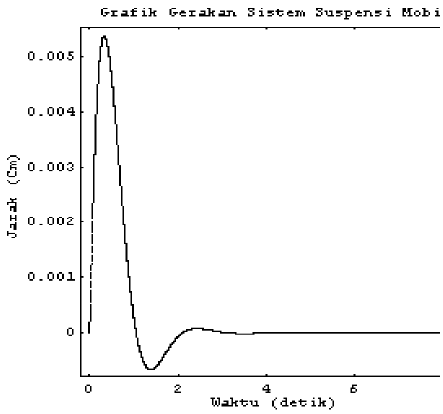
Eksperimen numerik dilakukan pada penyelesaian persoalan sistem *spring-shock absorber* untuk sebuah mobil *import* yang sistem suspensinya didisain menggunakan *coil spring-shock absorber*. ♣Misalkan suspensi mobil import menggunakan sistem *coil spring- shock absorber* untuk mendukung berat 350 kg. Kemudian konstanta kekakuan pegasnya adalah 140000 kg/cm. Sedangkan *shock absorber* yang digunakan adalah *dumping force* yang sama dengan 3500 kali kecepatan sesaat sistem secara vertikal (satuan dalam cm/detik). Misalkan sistem digetarkan oleh gaya $f(t)=1750\,e^{-2t}Sin(3t)$ (satuan dalam $kg-cm/detik^2$). Berkenaan dengan persamaan (7.10), sistem mobil import yang dimaksud dalam contoh ini memiliki spesifikasi sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{l} m = 350/9.8;\quad \delta = 3500; \\ k = 140000;\quad v_0 = 0;\quad f(t) = 1750\,e^{-2t}Sin(3t) \end{array}\right\} \tag{7.12}$$

Eksperimen numerik dapat dilakukan dengan menggunakan paket program (bahasa Turbo Pascal 6.0 misalnya) yang didasari kepada algoritma yang telah dikemukanan sebelumnya. Hasil running program diperoleh berupa data yang dapat dilihat dalam file

♣ Disalin dari buku *Mathematical Modelling Approach* by Giardano and Weir, 1994 hal. 281

data bernama **Rk4x.dat** yang ada di **drive C** untuk data hasil integrasi numerik dan file data bernama **waktunol.dat** di drive yang sama untuk melihat lamanya waktu kembali ke posisi equilibrium dan jarak maksimum dan waktu yang bersesuain yang dicapai dari posisi equilibrium. Ketika langkah-langkah atau proses di atas dilakukan secara benar akan diperoleh grafik fungsi sebagaimana ditampilkan dalam Gambar 7.7 berikut:



Gambar 7.7.
Grafik gerakan sistem suspensi sebuah mobil import dengan spesifikasi sistem suspensi sebagaimana ditunjukan persamaan (7.12).