Fungsi

Berapa lama waktu yang dibutuhkan komputer untuk mengeksekusi sebuah program? Jawabannya bergantung pada ukuran masukan yang diberikan. Kalau program kita mengalikan matriks yang berukuran 10×10 tentu kebutuhan waktunya berbeda jika matriknya berukuran 100×100. Ini berarti ada hubungan antara ukuran masukan dengan kebutuhan waktu program. Dengan kata lain, kebutuhan waktu sebuah program adalah *fungsi* dari ukuran masukan.

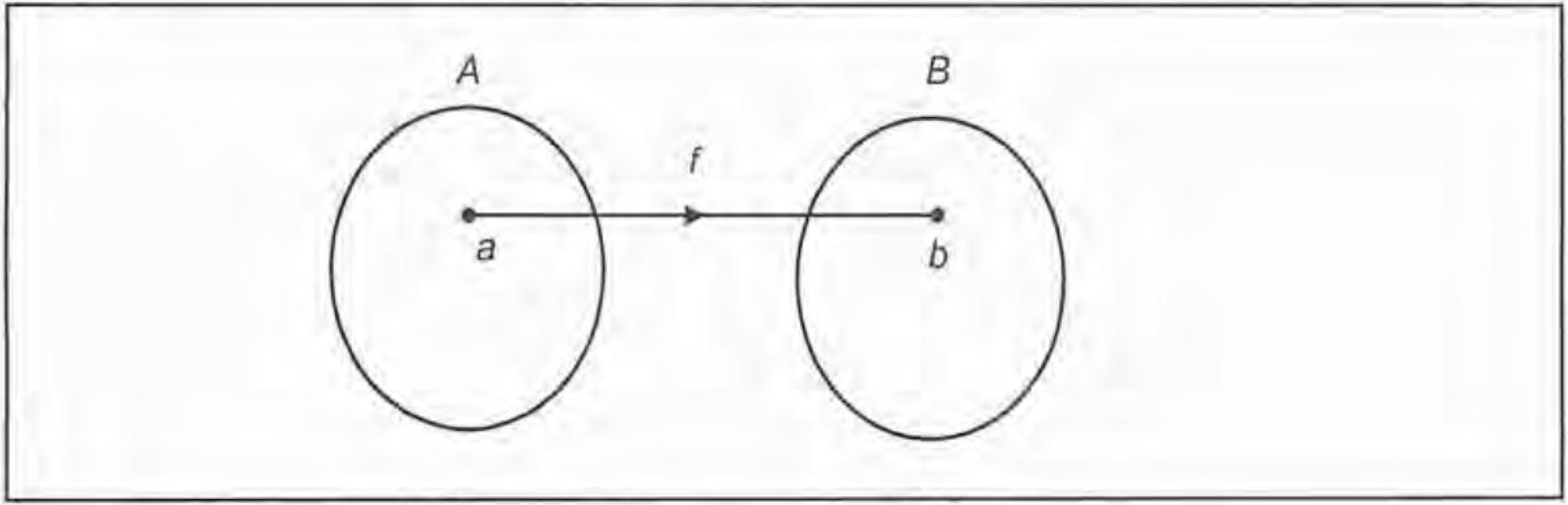
Konsep fungsi sangat penting di dalam matematika diskrit. Fungsi sering dipakai untuk mentransformasikan elemen di sebuah himpunan dengan elemen di himpunan lain.

DEFINISI 3.13. Misalkan A dan B himpunan. Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B. Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan

$$f : A \rightarrow B$$

yang artinya f **memetakan** A ke B.

Nama lain untuk fungsi adalah **pemetaan** atau **transformasi**. Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b di dalam B. Himpunan A disebut **daerah asal** (*domain*) dari f dan himpunan B disebut **daerah hasil** (*codomain*) dari f. Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan **bayangan** (*image*) dari a dan a dinamakan **pra-bayangan** (*pre-image*) dari b. Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut **jelajah** (*range*) dari f. Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin *proper subset*) dari B. Gambar 3.5 merepresentasikan fungsi dari A ke B..



Gambar 3.5 Fungsi f memetakan A ke B

Fungsi adalah relasi yang khusus. Kekhususan ini tercakup pada dua hal penting

1. Tiap elemen di dalam himpunan A, yang merupakan daerah asal f, harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan f.
2. Frasa "dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B" berarti bahwa jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$.

Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

1. Himpunan pasangan terurut.
   Ingatlah bahwa fungsi adalah relasi, sedangkan relasi biasanya dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut.

2. Formula pengisian nilai (*assignment*).
   Di dalam kuliah aljabar atau kalkulus, fungsi dispesifikasikan dalam bentuk rumus pengisian nilai (*assignment*), misalnya $f(x) = 2x + 10$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = 1/x$. Jika himpunan daerah asal maupun daerah hasil fungsi tidak dinyatakan secara spesifik, maka diasumsikan daerah asal fungsi adalah **R** dan daerah hasilnya juga **R**. Dalam himpunan pasangan terurut kita mendefinisikan fungsi sebagai $f = \{(x, x_2) \mid x \in \mathbf{R}\}$.

Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

3. Kata-kata

   Fungsi dapat dinyatakan secara eksplisit dalam rangkaian kata-kata. Misalnya "*f* adalah fungsi yang memetakan jumlah bit 1 di dalam suatu *string* biner".

Fungsi dapat dispesifikasikan dalam berbagai bentuk, diantaranya:

4. Kode program (*source code*)

Fungsi dispesifikasikan dalam bentuk kode program komputer. Misalnya dalam Bahasa Pascal, fungsi yang mengembalikan nilai mutlak dari sebuah bilangan bulat x , yaitu $|x|$, ditulis sebagai berikut:

```
function abs(x : integer) : integer;
begin
   if x < 0 then
      abs := -x
   else
      abs := x;
end;
```

Daerah asal dari fungsi `abs` di atas secara jelas dinyatakan himpunan bilangan bulat (**integer**), dan daerah hasilnya juga himpunan bilangan bulat.

Contoh 3.37

Relasi $f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B. Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$. Daerah asal dari f adalah A dan daerah hasil adalah B. Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.

■

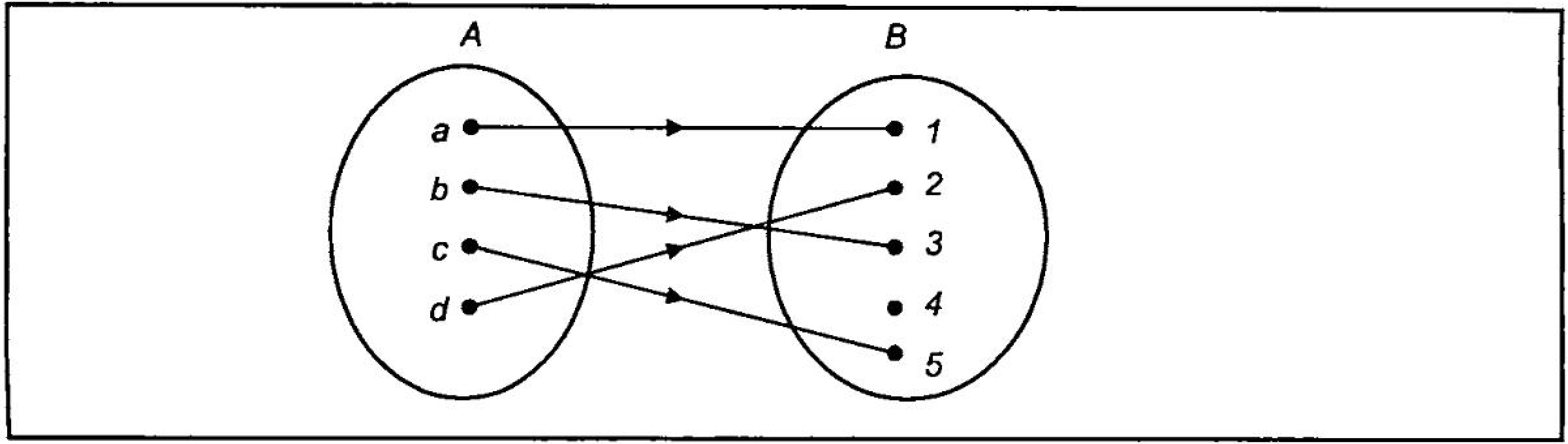
Contoh 3.38

Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B, meskipun u merupakan bayangan dari dua elemen A. Daerah asal fungsi adalah A, daerah hasilnya adalah B, dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$.

■

Bergantung pada bayangan, fungsi dibedakan menjadi fungsi satu-ke-satu (*one-to-one*), fungsi pada (*onto*), atau bukan salah satu dari keduanya. Kita tinjau definisi jenis setiap fungsi tersebut berikut ini.

DEFINISI 3.14. Fungsi f dikatakan **satu-ke-satu** (*one-to-one*) atau **injektif** (*injective*) jika tidak ada dua elemen himpunan A yang memiliki bayangan sama. Dengan kata lain, jika a dan b adalah anggota himpunan A, maka $f(a) \neq f(b)$ bilamana $a \neq b$. Jika $f(a) = f(b)$ maka implikasinya adalah $a = b$.



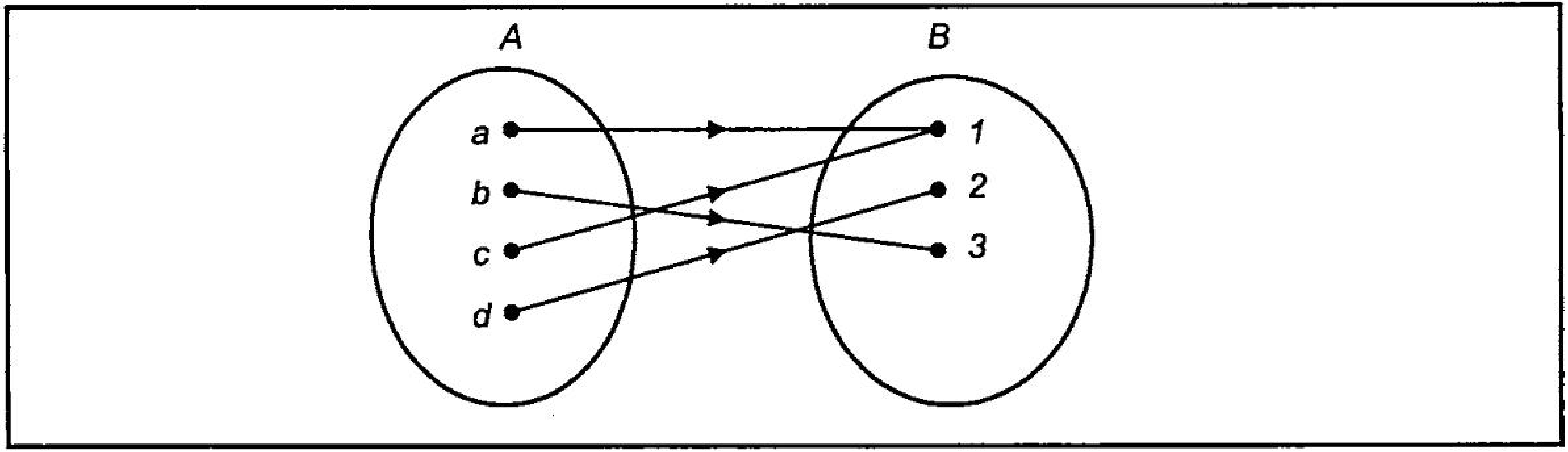
Gambar 3.6 Fungsi satu-ke-satu

Contoh 3.43

Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ adalah fungsi satu-ke-satu. Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ juga fungsi satu-ke-satu, tetapi relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena $f(1) = f(2) = u$.

■

DEFINISI 3.14. Fungsi f dikatakan **pada** (*onto*) atau **surjektif** (*surjective*) jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A. Dengan kata lain seluruh elemen B merupakan jelajah dari f. Fungsi f disebut fungsi pada himpunan B.



Gambar 3.7 Fungsi pada

Contoh 3.45

Relasi $f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi pada karena w tidak termasuk jelajah dari f. Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua anggota B merupakan jelajah dari f.

■

DEFINISI 3.14. Fungsi f dikatakan **berkoresponden satu-ke-satu** atau **bijeksi** (*bijection*) jika ia fungsi satu-ke-satu dan juga fungsi pada.

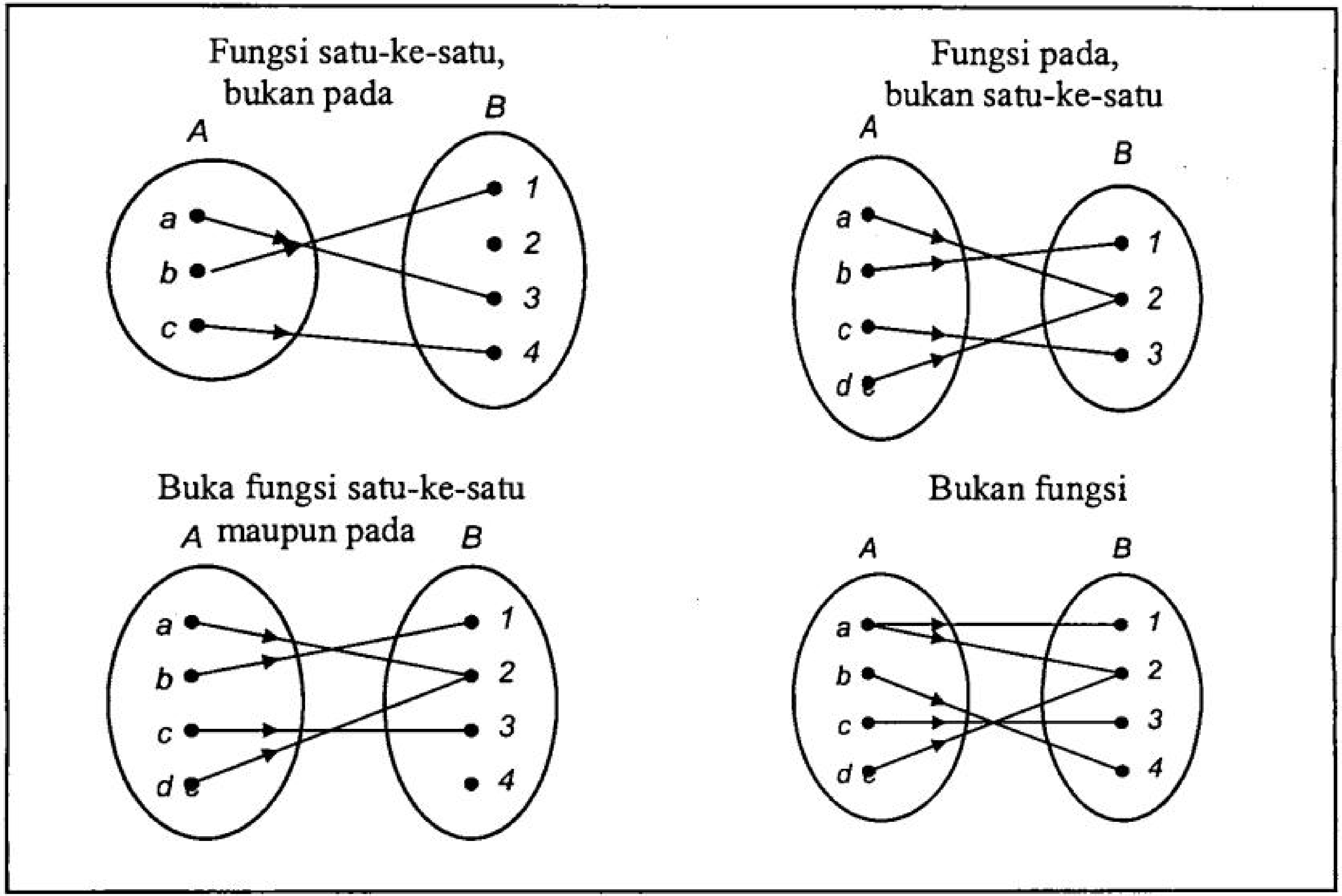
Contoh 3.47

Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada.

■

Contoh 3.48

Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena f adalah fungsi satu-ke-satu maupun fungsi pada. ■



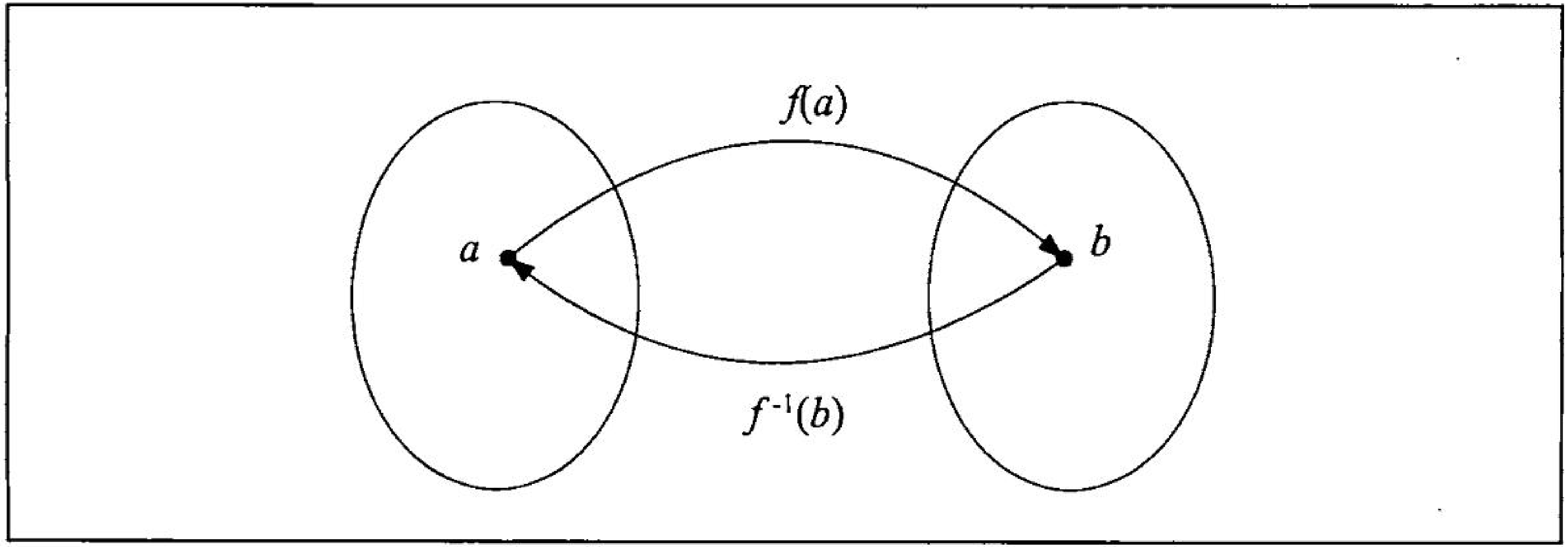
Gambar 3.8 Perbedaan empat tipe korespondensi

Fungsi Inversi

Jika f adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari A ke B, maka kita dapat menemukan **balikan** atau **inversi** (*invers*) dari f. Fungsi inversi dari f dilambangkan dengan f^{-1}. Misalkan a adalah anggota himpunan A dan b adalah anggota himpunan B, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$. Gambar 3.9 memperlihatkan diagram panah yang menggambarkan f^{-1} sebagai inversi fungsi f.

Fungsi Inversi

Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.



Gambar 3.9 Fungsi f^{-1} sebagai inversi fungsi f

Contoh 3.49

Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu. Inversi fungsi f adalah $f^{-1} = \{(u, 1), (w, 2), (v, 3)\}$. Jadi, f adalah fungsi *invertible*.

■

Contoh 3.50

Tentukan inversi fungsi $f(x) = x - 1$.

<u>Penyelesaian</u>:
Dari Contoh 3.48 kita sudah menyimpulkan bahwa $f(x) = x - 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada. Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x - 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, inversi fungsi balikannya adalah $f^{-1}(y) = y + 1$.

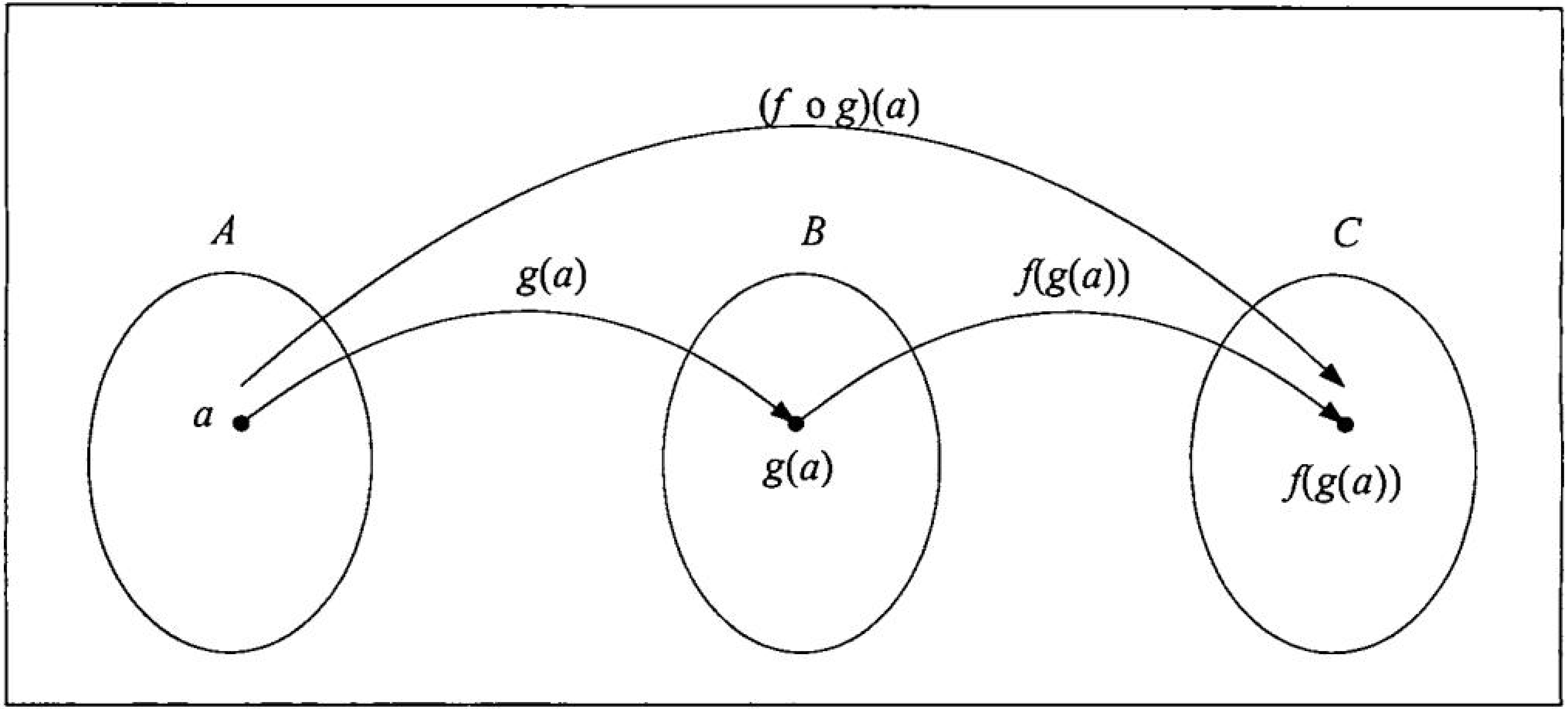
■

Komposisi Fungsi

Karena fungsi merupakan bentuk khusus dari relasi, kita juga dapat melakukan komposisi dari dua buah fungsi. Misalkan g adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan B, dan f adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C. Komposisi f dan g, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari A ke C yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Dengan kata lain, $f \circ g$ adalah fungsi yang memetakan nilai dari $g(a)$ ke f.



Gambar 3.10 Komposisi dua buah fungsi

Contoh 3.52

Diberikan fungsi $g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$ yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi $f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$ yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$. Fungsi komposisi dari A ke C adalah

$$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x)\}$$

■

Contoh 3.53

Diberikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tentukan $f \circ g$ dan $g \circ f$.

Penyelesaian:

(i) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = x^2 + 1 - 1 = x^2$.

(ii) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$.

■

Beberapa Fungsi Khusus

1. Fungsi *Floor* dan *Ceiling*

Misalkan x adalah bilangan riil, berarti x berada di antara dua bilangan bulat. Fungsi *floor* dari x, dilambangkan dengan $\lfloor x \rfloor$ dan fungsi *ceiling* dari x dilambangkan dengan $\lceil x \rceil$. Definisi kedua fungsi tersebut adalah:

$\lfloor x \rfloor$ menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x

$\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x

Dengan kata lain, fungsi *floor* membulatkan x ke bawah, sedangkan fungsi *ceiling* membulatkan x ke atas.

Contoh 3.53

Beberapa contoh nilai fungsi *floor* dan *ceiling*:

$$\lfloor 3.5 \rfloor = 3 \qquad \lceil 3.5 \rceil = 4$$
$$\lfloor 0.5 \rfloor = 0 \qquad \lceil 0.5 \rceil = 1$$
$$\lfloor 4.8 \rfloor = 4 \qquad \lceil 4.8 \rceil = 5$$
$$\lfloor -0.5 \rfloor = -1 \qquad \lceil -0.5 \rceil = 0$$
$$\lfloor -3.5 \rfloor = -4 \qquad \lceil -3.5 \rceil = -3$$

■

2. Fungsi modulo

Misalkan a adalah sembarang bilangan bulat dan m adalah bilangan bulat positif. Fungsi modulo adalah fungsi dengan operator **mod**, yang dalam hal ini:

$a \bmod m$ memberikan sisa pembagian bilangan bulat bila a dibagi dengan m

Secara lebih rinci, $a \bmod m = r$ sedemikian sehingga $a = mq + r$, dengan $0 \le r < m$.

Contoh 3.55

Beberapa contoh fungsi modulo

$$25 \bmod 7 = 4$$
$$15 \bmod 4 = 3$$
$$3612 \bmod 45 = 12$$
$$0 \bmod 5 = 0$$
$$-25 \bmod 7 = 3 \qquad (\text{sebab } -25 = 7 \cdot (-4) + 3\ )$$

■

3. Fungsi Faktorial

Untuk sembarang bilangan bulat tidak-negatif n, faktoral dari n, dilambangkan dengan $n!$, didefinisikan sebagai

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots . \times (n-1) \times n & , n > 0 \end{cases}$$

Contoh 3.57

Beberapa contoh fungsi faktorial

$$0! = 1$$
$$1! = 1$$
$$4! = 1 \,.\, 2 \,.$$
$$5! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 = 120$$

■

4. Fungsi Eksponensial dan Logaritmik

Fungsi eksponensial berbentuk

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n} & , n > 0 \end{cases}$$

Untuk kasus perpangkatan negatif,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Fungsi logaritmik berbentuk

$$y = {}^a\log x \leftrightarrow x = a^y$$

Contoh 3.58

Beberapa contoh fungsi eksponensial dan logaritmik

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

$$4^{-3} = \frac{1}{64}$$

$$^4\log 64 = 3 \text{ karena } 64 = 4^3$$

$$\lfloor {}^2\log 1000 \rfloor = 9 \text{ karena } 2^9 = 512 \text{ tetapi } 2^{10} = 1024$$

■

Fungsi Rekursif

Tinjau kembali fungsi untuk menghitung faktorial dari bilangan bulat tak-negatif n yang didefinisikan sebagai berikut:

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1 \times 2 \times \cdots . \times (n-1) \times n & , n > 0 \end{cases}$$

Sebagai contoh,

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \\ 2! &= 1 \times 2 \\ 3! &= 1 \times 2 \times 3 \\ 4! &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \end{aligned}$$

Fungsi Rekursif

Sekarang coba perhatikan bahwa faktorial dari n dapat didefinisikan dalam terminologi faktorial juga:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \times 0! \\ 2! &= 2 \times 1! \\ 3! &= 3 \times 2! \\ 4! &= 4 \times 3! \end{aligned}$$

Nyatalah, bahwa untuk $n > 0$ kita melihat bahwa

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n = (n-1)! \times n.$$

Fungsi Rekursif

Dengan menggunakan notasi matematika, maka $n!$ didefinisikan dalam hubungan rekursif sebagai berikut:

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n \times (n-1)! & , n > 0 \end{cases}$$

Jika kita misalkan $f(n) = n!$, maka fungsi faktorial di atas dapat juga ditulis sebagai

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n \times f(n-1) & , n > 0 \end{cases}$$

Kita dapat melihat bahwa dalam proses perhitungan faktorial bilangan tak-negatif n terdapat definisi faktorial itu sendiri. Cara pendefinisian seperti itu, yang mendefiniskan sebuah objek dalam terminologi dirinya sendiri dinamakan definisi rekursif.

DEFINISI 3.15. Fungsi *f* dikatakan fungsi rekursif jika definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri.

Nama lain dari fungsi rekursif adalah **relasi rekursif** (*recurrence relation*). Ingatlah bahwa fungsi adalah bentuk khusus dari relasi.

Fungsi rekursif disusun oleh dua bagian:

(a) *Basis*

Bagian yang berisi nilai awal yang tidak mengacu pada dirinya sendiri. Bagian ini juga sekaligus menghentikan definisi rekursif (dan memberikan sebuah nilai yang terdefinisi pada fungsi rekursif).

(b) *Rekurens*

Bagian ini mendefinisikan argumen fungsi dalam terminologi dirinya sendiri. Setiap kali fungsi mengacu pada dirinya sendiri, argumen dari fungsi harus lebih dekat ke nilai awal (basis).

Tinjau kembali perhitungan $n!$ secara rekursif. Dengan mengingat kembali definisi rekursif dari faktorial:

(a) basis:

$$n! = 1 \quad , \text{jika } n = 0$$

(b) rekurens:

$$n! = n \times (n - 1)! \quad , \text{jika } n > 0$$

maka $5!$ dihitung dengan langkah berikut:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & 5! = 5 \times 4! \qquad \text{(rekurens)} \\
(2) & \quad 4! = 4 \times 3! \\
(3) & \qquad 3! = 3 \times 2! \\
(4) & \qquad\quad 2! = 2 \times 1! \\
(5) & \qquad\qquad 1! = 1 \times 0! \\
(6) & \qquad\qquad\quad 0! = 1
\end{array}
$$

Pada baris (6) kita memperoleh nilai yang terdefinisi secara langsung dan bukan faktorial dari bilangan lainnya. Dengan melakukan runut-balik (*backtrack*) dari baris (6) ke baris (1), kita mendapatkan nilai pada setiap baris untuk menghitung hasil pada baris sebelumnya:

$$
\begin{array}{ll}
(6') & 0! = 1 \\
(5') & 1! = 1 \times 0! = 1 \times 1 = 1 \\
(4') & 2! = 2 \times 1! = 2 \times 1 = 2 \\
(3') & 3! = 3 \times 2! = 3 \times 2 = 6 \\
(2') & 4! = 4 \times 3! = 4 \times 6 = 24 \\
(1') & 5! = 5 \times 4! = 5 \times 24 = 120
\end{array}
$$

Jadi, $5! = 120$.

Di bawah ini adalah contoh-contoh fungsi rekursif lainnya:

1. $$F(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ 2F(x-1) + x^2 & , x \neq 0 \end{cases}$$

2. Fungsi Chebysev

$$T(n, x) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ x & , n = 1 \\ 2xT(n-1, x) - T(n-2, x) & , n > 1 \end{cases}$$

Fungsi Chebysev di atas mempunyai dua buah basis, yaitu jika $n = 0$ dan $n = 1$.

3. Fungsi Fibonacci:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & , n = 0 \\ 1 & , n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2) & , n > 1 \end{cases}$$

Contoh 3.59

Nyatakan perpangkatan a^n (a bulat dan $n > 0$) sebagai fungsi rekursif.

Penyelesaian:

(i) Nyatakan a^n dalam argumen rekursif

$$a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a \qquad \text{(sebanyak } n \text{ kali)}$$
$$= a \times a^{n-1} \qquad \text{(rekurens)}$$

(ii) Tentukan kasus eksplisit yang tidak memerlukan pemanggilan rekursif lagi (basis)

$$a^n = 1 \quad \text{jika } n = 0 \qquad \text{(basis)}$$

Jadi, fungsi rekursif untuk perpangkatan adalah:

$$a^n = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ a \times a^{n-1} & , n > 0 \end{cases}$$