Simulation — TD №2

On considère un contrat d'assurance concernant $N = 1000$ assurés sur un an. Chaque assuré déclare au maximum un sinistre dans l'année, avec probabilité $p = 5.10^{-3}$.

Le montant remboursé pour un sinistre est aléatoire.

On note X le remboursement total de tous les sinistres d'une années. On cherche à calculer la probabilité $p_* = \mathbb{P}\left[X \geq 1.75 \times \mathrm{E}\, X\right]$.

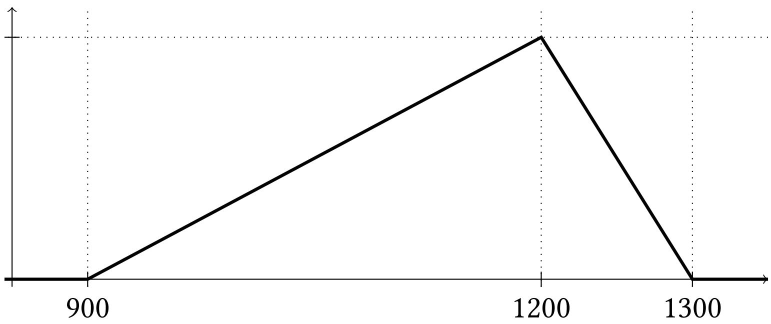
1. Cas normal

On suppose que le montant (en euros) du remboursement d'un sinistre suit la loi normale de paramètres $m = 1000$ et $\sigma = 150$.

- Déterminer une approximation de p_* par simulation.
- Calculer la valeur exacte de p_* sous la forme d'une somme faisant intervenir la fonction de répartition de la loi normale, et faire une application numérique à l'aide des fonctions `dbinom` et `pnorm`.

2. Modèle plus précis

On suppose maintenant qu'avec probabilité $2/10$, le montant d'un remboursement est forfaitaire, égal à 800 €. Avec probabilité $8/10$, il suit une loi continue dont la densité est proportionnelle à la fonction représentée dans le graphe suivant :



- Programmer une fonction qui simule la loi d'un remboursement.
- Donner une valeur approchée de l'espérance et de la variance de cette loi, en utilisant la méthode de Monte Carlo. Comparer avec les valeurs exactes.
- Programmer une fonction qui simule X.
- Calculer une approximation de p_*.
- Utiliser une méthode de réduction de variance par variable de contrôle pour obtenir une approximation plus précise de p_* (en utilisant le calcul exact de la valeur p_* dans le cas normal). On pourra comparer deux méthodologies :
  1. Simuler le nombre de sinistres, puis séparément la valeur de X dans le cas approché normal et dans le cas exact.
  2. Simuler le nombre de sinistres. Pour chaque sinistre, simuler une variable de loi uniforme sur $[0, 1[$, et transformer cette valeur par la fonction $G = F^{-1}$ correspondant au cas approché normal puis au cas exact.

3. Dépendance

Étudier un cas où « la probabilité p est rendue aléatoire » : commencer par rendre cette expression rigoureuse, expliquer comment cela permet d'introduire une dépendance entre les assurés, et mesurer l'impact de cette dépendance sur la valeur de p_*.