Simulation — TD №1

Traitez les exercices 1 à 5 en utilisant d'une part un générateur pseudo-aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ *de bonne qualité, et d'autre part en utilisant un* mauvais *générateur, comme le suivant :*

$$u^*_{n+1} = (5u^*_n + 1) \; \textit{mod} \, 65536 \qquad \textit{et} \qquad u_n = u^*_n / 65536 \,.$$

Exercice 1
Produisez 10 valeurs du générateur pseudo-aléatoire qui changent à chaque exécution, et 10 valeurs qui sont toujours les mêmes à chaque exécution de votre fonction.

Exercice 2
Pour plusieurs valeurs de n, tracez un histogramme de n valeurs successives du générateur.

Mesurez la différence entre cet histogramme et un histogramme « plat ». Quelle était la probabilité d'observer une différence inférieure à celle-ci ?

Exercice 3
Toujours avec un ou plusieurs générateurs de loi uniforme sur $[0,1[$, tracez les n premiers points (u_i, u_{i+1}), $i = 1, \dots, n$ sur le carré $[0,1[\times[0,1[$, pour plusieurs valeurs de n.

Exercice 4
On considère la suite

$$m_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i \,.$$

On fait l'hypothèse que le générateur utilisé est parfait, c'est-à-dire que les u_i peuvent être représentés comme une réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1) En théorie, que peut-on dire de la convergence de m_n ? Tracez un graphe qui permet d'observer cette convergence.

2) Appliquez le théorème central limite afin de définir un intervalle auquel m_n devrait appartenir dans 95 % des cas. Cela s'applique-t-il bien au générateur considéré ?

Exercice 5
Pour une grande valeur de n et plusieurs valeurs de k, observez la répartition du k^{e} chiffre après la virgule des nombres $u_1, \dots, u_n$.

Exercice 6
Si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, quelle est la loi de $X = -\ln(U)$?

En déduire une méthode de simulation de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$.

Exercice 7
Simulez un grand nombre de réalisations de la position au temps $10\,000$ de la marche au hasard symétrique sur $\mathbb{Z}$. Tracez l'estimation de la loi de cette position. Comparez avec le résultat théorique.

Exercice 8
Comparez le temps utilisé pour la simulation d'une loi discrète quelconque, en utilisant ou non une table de Walker.

Exercice 9
Soit v_d le volume de la boule unité B_d de $\mathbb{R}^d$. Si $U_1, \ldots, U_d$ sont indépendantes de loi $\mathcal{U}([-1, 1])$,

$$v_d = 2^d\, \mathbb{P}\left[(U_1, \ldots, U_d) \in B_d\right] = 2^d\, \mathrm{E}[\mathbf{1}_{B_d}(U_1, \ldots, U_d)]\,.$$

Mettre en œuvre une méthode d'approximation de v_d par la méthode de Monte Carlo. Que remarque-t-on pour de grandes valeurs de d ?

Si les U_i suivent maintenant une loi de densité f, montrer que

$$v_d = \mathrm{E}\,\frac{\mathbf{1}_{B_d}(U_1, \ldots, U_d)}{\prod_{i=1}^d f(U_i)}\,.$$

Calculer de meilleures estimations de v_d.