# 题目 1

**解**：将输入 $f(t)$ 代入到以上微分方程，得

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=2\delta(t)+6U(t)$$

由于等号右端含 $2\delta(t)$，故 $y''(t)$ 应包含冲激函数，从而 $y'(t)$ 在 $t=0$ 处将跃变，但 $y'(t)$ 不含冲激函数，否则 $y''(t)$ 将含有 $\delta'(t)$ 项。由于 $y'(t)$ 含有阶跃函数，故 $y(t)$ 在 $t=0$ 处是连续的。

对上述方程两端从 $0^-$ 到 $0^+$ 进行积分，有

$$\int_{0^-}^{0^+}y''(t)\mathrm{d}t+3\int_{0^-}^{0^+}y'(t)\mathrm{d}t+2\int_{0^-}^{0^+}y(t)\mathrm{d}t=2\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t+6\int_{0^-}^{0^+}U(t)\mathrm{d}t$$

由于 $\int_{0^-}^{0^+}y(t)\mathrm{d}t=0$，$\int_{0^-}^{0^+}U(t)\mathrm{d}t=0$，由上式得

$$[y'(0^+)-y'(0^-)]+3[y(0^+)-y(0^-)]=2$$

又 $y(t)$ 在 $t=0$ 处是连续的，故

$$y(0^+)-y(0^-)=0\text{，即 }y(0^+)=y(0^-)=2$$

$$y'(0^+)-y'(0^-)=2\text{，即 }y'(0^+)=y'(0^-)+2=2$$

可见：当微分方程式等号右端含有冲激函数（及其各阶导数）时，响应 $y(t)$ 及其各阶导数中，有些将发生跃变。这可利用微分方程两端各奇异函数项的系数相平衡的方法来判断，并从 $0^-$ 到 $0^+$ 积分，求得时刻 $0^+$ 的初始值。

# 题目 2

已知 $y(0^-)=2$，$y'(0^-)=0$，$f(t)=U(t)$，求该系统的零输入响应和零状态响应。

**解**：(1) 零输入响应 $y_x(t)$

零输入响应是激励为零，仅由初始状态引起的响应，故 $y_x(t)$ 是方程

$$y''_x(t)+3y'_x(t)+2y_x(t)=0$$

且满足 $y(0^+)$，$y'(0^+)$ 的解。由于 $y_f(0^-)=y'_f(0^-)=0$，且激励也为零，故有

$$y_x(0^+)=y_x(0^-)=y(0)=2$$

$$y'_x(0^+)=y'_x(0^-)=y'(0)=0$$

系统的特征根为 $-1$、$-2$，故零输入响应

$$y_x(t)=C_{x1}\mathrm{e}^{-t}+C_{x2}\mathrm{e}^{-2t}$$

将初始值代入上式及其导数，得

$$y_x(0^+)=C_{x1}+C_{x2}=2$$

$$y'_x(0^+)=-C_{x1}-2C_{x2}=0$$

由上式解得 $C_{x1}=4$，$C_{x2}=-2$。故

$$y_x(t)=4\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t},t\geqslant 0$$

(2) 零状态响应 $y_f(t)$

零状态响应是初始状态为零，仅由激励引起的响应，它是方程[考虑到 $f(t)=U(t)$]

$$y''_f(t)+3y'_f(t)+2y_f(t)=2\delta(t)+6U(t)$$

且满足 $y_f(0^-)=y'_f(0^-)=0$ 的解。

由于上式等号右端含有 $\delta(t)$ 项，故 $y''_f(t)$ 应含有冲激函数，故 $y'_f(t)$ 将跃变，而 $y_f(t)$ 在 $t=0$ 是连续的。对上式从 $0^-$ 到 $0^+$ 积分，得

$$\int_{0^-}^{0^+}y''_f(t)\mathrm{d}t+3\int_{0^-}^{0^+}y'_f(t)\mathrm{d}t+2\int_{0^-}^{0^+}y_f(t)\mathrm{d}t=2\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t+6\int_{0^-}^{0^+}U(t)\mathrm{d}t$$

由于 $\int_{0^-}^{0^+}y_f(t)\mathrm{d}t=0$，$\int_{0^-}^{0^+}U(t)\mathrm{d}t=0$，得

$$[y'_f(0^+)-y'_f(0^-)]+3[y_f(0^+)-y_f(0^-)]=2$$

又 $y_f(t)$ 在 $t=0$ 处是连续的，故

$$y_f(0^+)-y_f(0^-)=0\text{，即 }y_f(0^+)=y_f(0^-)=0$$

$$y'_f(0^+)-y'_f(0^-)=2\text{，即 }y'_f(0^+)=y'_f(0^-)+2=2$$

$t>0$ 时，有

$$y''_f(t)+3y'_f(t)+2y_f(t)=6$$

不难求得其齐次解为 $C_{f1}\mathrm{e}^{-t}+C_{f2}\mathrm{e}^{-2t}$，其特解为常数 3，于是有

$$y_f(t)=C_{f1}\mathrm{e}^{-t}+C_{f2}\mathrm{e}^{-2t}+3$$

将初始值代入上式及其导数，得

$$y_f(0^+)=C_{f1}+C_{f2}+3=0$$

$$y'_f(0^+)=-C_{f1}-2C_{f2}=2$$

解得 $C_{f1}=-4$，$C_{f2}=1$。最后得系统的零状态响应

$$y_f(t)=-4\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}+3,t\geqslant 0$$

# 题目 3

**解**：本例中已知的是 $0^+$ 时刻的初始值，有

$$\begin{cases}y(0^+)=y_x(0^+)+y_f(0^+)=3\\y'(0^+)=y'_x(0^+)+y'_f(0^+)=1\end{cases}$$

按上式无法区分 $y_x(t)$ 和 $y_f(t)$ 在 $t=0^+$ 时的值。

可先求出零状态响应。由于零状态响应是指 $y_f(0^-)=y'_f(0^-)=0$ 时的方程的解，因此本

例中的零状态响应的求法和结果与例 2.5 相同，即

$$y_f(t) = -4e^{-t} + e^{-2t} + 3, t \geqslant 0$$

由上式可求得 $y_f(0^+) = 0, y'_f(0^+) = 2$，故 $y_x(0^+) = 3, y'_x(0^+) = -1$。

本例中，零输入响应的形式也与例 2.5 相同，有

$$y_x(t) = C_{x1}e^{-t} + C_{x2}e^{-2t}$$

将初始值代入，有

$$y'_x(0^+) = C_{x1} + C_{x2} = 3$$

$$y'_x(0^+) = -C_{x1} - 2C_{x2} = -1$$

由上式解得 $C_{x1} = 5, C_{x2} = -2$，于是得该系统的零输入响应

$$y_x(t) = 5e^{-t} - 2e^{-2t}, t \geqslant 0$$

# 题目 4

**解：**先求 $f(t)$ 作用于上述系统所引起的零状态响应 $y_1(t)$，即

$$y'_1(t) + 2y_1(t) = f(t)$$

且初始状态为零，即 $y_1(0^-) = 0$。

由于当 $f(t) = U(t)$ 时，等号右端仅有阶跃函数，故 $y'_1(t)$ 含有跳跃，而 $y_1(t)$ 在 $t = 0$ 处是连续的，从而有 $y_1(0^+) = y_1(0^-) = 0$。

不难求得

$$y_1(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})U(t)$$

故

$$y'_1(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})\delta(t) + e^{-2t}U(t) = e^{-2t}U(t)$$

$$y''_1(t) = e^{-2t}\delta(t) - 2e^{-2t}U(t) = \delta(t) - 2e^{-2t}U(t)$$

根据零状态响应的微分特性和线性性质，本系统的零状态响应满足

$$y_f(t) = y''_1(t) + y'_1(t) + 2y_1(t)$$

代入上述各式得

$$y_f(t) = \delta(t) + (1 - 2e^{-2t})U(t)$$

# 题目 5

**解**：由已知 $y(t)=5e^{-t}+3e^{-2t}\quad t\geqslant 0$，可得

(1) 因为特征根为 1，故 $y_x(t)=5e^{-t}\quad t\geqslant 0$

$$y_f(t)=3e^{-2t}U(t)$$

(2)
$$y_x'(t)+y_x(t)=0$$

$$y_x(0^+)=y_x(0^-)=y(0^-)=10$$

故
$$y_x(t)=10e^{-t}\quad t\geqslant 0$$

(3)
$$y_f(t)=3e^{-2(t-2)}U(t-2)$$

(4)
$$y_f(t)=3e^{-2t}\delta(t)-6e^{-2t}U(t)+6e^{-2t}U(t)=3\delta(t)$$

# 题目 6

解：(1) ①由零输入响应的性质可知：

$$y_{zi}''(t)+4y_{zi}'(t)+3y_{zi}(t)=0$$

$$y_{zi}'(0_+)=y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=1$$

$$y_{zi}(0_+)=y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$$

特征方程为：$\lambda^2+4\lambda+3=0$

特征根为：$\lambda_1=-3,\lambda_2=-1$

微分方程的解为：$y_{zi}(t)=C_1e^{-3t}+C_2e^{-t},t\geqslant 0$

代入初始条件得：$y_{zi}(0_+)=C_1+C_2=1\qquad y_{zi}'(0_+)=-3C_1-C_2=1$

解得：$C_1=-1$，$C_2=2$

故系统零输入响应为：$y_{zi}(t)=-e^{-3t}+2e^{-t},t\geqslant 0$

②由零状态响应的性质可知：

$$y_{zs}''(t)+4y_{zs}'(t)+3y_{zs}(t)=\varepsilon(t)$$

$$y_{zs}'(0_+)=y_{zs}'(0_-)=0,\quad y_{zs}(0_+)=y_{zs}(0_-)=0 \text{（无冲激项）}$$

齐次解为： $y_{zsh}(t)=C_3e^{-3t}+C_4e^{-t},t\geqslant 0$

特解为： $y_{zsp}(t)=\frac{1}{3},t\geqslant 0$

全解为：$y_{zs}(t)=y_{zsh}(t)+y_{zsp}(t)=C_3e^{-3t}+C_4e^{-t}+\frac{1}{3},\quad t\geqslant 0$

代入初始条件得： $y_{zs}(0_+)=C_3+C_4+\frac{1}{3}=0 \qquad y_{zs}'(0_+)=-3C_3-C_4=0$

解得：$C_3=\frac{1}{6},C_4=-\frac{1}{2}$

故系统零状态响应为： $y_{zs}(t)=\frac{1}{6}e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{3},\quad t\geqslant 0$

综上，系统全响应为：$y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=-\frac{5}{6}e^{-3t}+\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{3},\quad t\geqslant 0$ 。

（2）由零输入响应的性质可知：

$$y_{zi}''(t)+4y_{zi}'(t)+4y_{zi}(t)=0$$

$$y_{zi}'(0_+)=y_{zi}'(0_-)=y'(0_-)=2$$

$$y_{zi}(0_+)=y_{zi}(0_-)=y(0_-)=1$$

特征方程为：$\lambda^2+4\lambda+4=0$

特征根为：$\lambda_1=\lambda_2=-2$

齐次解为：$y_{zi}(t)=(C_1t+C_2)e^{-2t},t\geqslant 0$

代入初始条件得： $y_{zi}(0_+)=C_2=1 \qquad y_{zi}'(0_+)=C_1-2C_2=2$

解得：$C_1=4,C_2=1$

故系统零输入响应为： $y_{zi}(t)=(4t+1)e^{-2t},t\geqslant 0$

②由零状态响应的性质可知：

$$y_{zs}''(t)+4y_{zs}'(t)+4y_{zs}(t)=2e^{-t}\varepsilon(t)+\delta(t)$$

$$y_{zs}'(0_-)=0,\quad y_{zs}(0_-)=0$$

方程右端含$\delta(t)$，比较可得：

$$y_{zs}'(0_+)=y_{zs}'(0_-)+1=1,y_{zs}(0_+)=y_{zs}(0_-)=0$$

齐次解为： $y_{zsh}(t)=(C_3t+C_4)e^{-2t},t>0$

特解为： $y_{zsp}(t)=2e^{-t},t>0$

全解为： $y_{zs}(t)=(C_3t+C_4)e^{-2t}+2e^{-t},t\geqslant 0$

解得： $C_3=-1,C_4=-2$

故系统零状态响应为： $y_{zs}(t)=-(t+2)e^{-2t}+2e^{-t},t\geqslant 0$

综上，系统全响应为： $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=(3t-1)e^{-2t}+2e^{-t},t\geqslant 0$。

（3）①由零输入响应的性质可知：

$$y_{zi}''(t)+2y_{zi}'(t)+2y_{zi}(t)=0$$

$$y_{zi}(0_+)=y_{zi}(0_-)=0$$
$$y_{zi}'(0_+)=y_{zi}'(0_-)=1$$

特征方程为：$\lambda^2+2\lambda+2=0$

特征根为：$\lambda_{1,2}=-1\pm j$

齐次解为： $y_{zi}(t)=C_1e^{-t}\cos t+C_2e^{-t}\sin t$

解得：$C_1=0,C_2=1$

故系统零输入响应为： $y_{zi}(t)=e^{-t}\sin t,t\geqslant 0$ 。

②由零状态响应的性质知：

$$y_{zs}''(t)+2y_{zs}'(t)+2y_{zs}(t)=\delta(t)$$

方程右端含 $\delta(t)$，比较可得：

$$y_{zs}'(0_+)=y_{zs}'(0_-)+1=1,\quad y_{zs}(0_+)=y_{zs}(0_-)=0$$

方程的解为： $y_{zs}(t)=C_3e^{-t}\cos t+C_4e^{-t}\sin t, t>0$

解得：$C_3=0, C_4=1$

故系统零状态响应为： $y_{zs}(t)=e^{-t}\sin t,\quad t\geqslant 0$

综上，系统全响应为： $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)=2e^{-t}\sin t, t\geqslant 0$ 。

# 题目 7

解：（1）设冲激响应为$h(t)$，则有：

$$h''(t)+4h'(t)+3h(t)=\delta(t)$$
$$h'(0_-)=h(0_-)=0$$

比较可知，$h''(t)$中含冲激项，所以$h'(0_+)-h'(0_-)=1$，$h(0_+)-h(0_-)=0$

微分方程齐次解为： $h(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-3t}, t>0$

代入初始条件得： $h(0_+)=c_1+c_2=0$ $\quad h'(0_+)=-c_1-3c_2=1$

解得：$c_1=0.5, c_2=-0.5$.

故系统的冲激响应为： $h(t)=0.5(e^{-t}-e^{-3t})\varepsilon(t)$ 。

（2）冲激响应$h\left(t\right)$满足：

$$h''(t)+4h'(t)+4h(t)=\delta'(t)+3\delta(t)$$
$$h'(0_-)=h(0_-)=0$$

当$f\left(t\right)$为$\delta(t)$时，$h''_1(t)+4h'_1(t)+4h_1(t)=\delta(t)$

比较可得：$h'_1(0_+)=1, h_1(0_+)=0$

齐次解为：$h_1(t)=(c_1t+c_2)e^{-2t}\varepsilon(t)$

代入初始条件得：$h_1(t)=te^{-2t}\varepsilon(t)$，$h(t)=3h_1(t)+h'_1(t)$

故系统的冲激响应为：$h(t)=(t+1)\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$ 。

（3）冲激响应$h\left(t\right)$满足：

$$h''(t)+2h'(t)+2h(t)=\delta'(t)$$
$$h'(0_-)=h(0_-)=0$$

当$f\left(t\right)$为$\delta(t)$时，$h''_1(t)+2h'_1(t)+2h_1(t)=\delta(t)$

比较可得：$h'_1(0_+)=1, h_1(0_+)=0$

齐次解为：$h_1(t)=c_1e^{-t}\cos t+c_2e^{-t}\sin t, t>0$

代入初始值得：$h_1(t)=e^{-t}\sin t, t>0$，$h(t)=h'_1(t)$

故系统冲激响应为：$h(t)=e^{-t}(\cos t-\sin t)\varepsilon(t)$ 。

# 题目 8

解：各元件端电流和端电压关系为：

$$u_R(t)=Ri_R(t),u_L(t)=L\frac{d}{dt}i_L(t),i_c(t)=c\frac{d}{dt}u_c(t)$$

根据电路元件关系有：$i_R=i_c(t)=i_L(t),u_s(t)=u_R(t)+u_c(t)+u_L(t)$

联立各式可得：$LCu_C''(t)+RCu'_C(t)+u_C(t)=u_S(t)$

代入数据得：$u_C''(t)+3u_C'(t)+2u_C(t)=2\cos t\varepsilon(t)$

零状态响应全解为：$u_{Czs}(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+\frac{1}{5}\cos t+\frac{3}{5}\sin t$，$t\geqslant0$

方程右端无冲激项，所以

$$u_{Czs}(0_+)=C_1+C_2+\frac{1}{5}=0\quad,\quad u_{Czs}'(0_+)=-C_1-2C_2+\frac{3}{5}=0$$

解得：$C_1=-1,C_2=\frac{4}{5}$.

故系统的零状态响应为：$u_{Czs}(t)=-e^{-t}+\frac{4}{5}e^{-2t}+\frac{1}{5}\cos t+\frac{3}{5}\sin t$，$t\geqslant0$ 。

# 题目 9

**解法一：**根据冲激响应的定义，当 $f(t)=\delta(t)$ 时，系统的零状态响应 $y_f(t)=h(t)$，故 $h(t)$ 满足

$$\begin{cases} h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta(t) \\ h'(0^-)=h(0^-)=0 \end{cases}$$

由于冲激函数仅在 $t=0$ 处作用，而在 $t>0$ 区间函数为零。因而，系统的冲激响应与该系统的零输入响应（即相应的齐次解）具有相同的函数形式。

微分方程的特征根为 $-2,-3$。故系统的冲激响应

$$h(t)=(C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t})U(t)$$

为确定常数 $C_1$ 和 $C_2$，需要求出 $0^+$ 时刻的初始值 $h(0^+)$ 和 $h'(0^+)$。微分方程两端奇异函数要平衡，$h''(t)$ 中应含有 $\delta(t)$，相应地，$h''(t)$ 的积分项 $h'(t)$ 中含有 $U(t)$，但它不含 $\delta(t)$，从而 $h(t)$ 在 $t=0$ 处连续。对原微分方程从 $0^-$ 到 $0^+$ 逐项积分，并考虑 $h(t)$ 在 $t=0$ 处连续，且 $\int_{0_-}^{0_+}h(t)dt=0$ 得

$$h(0^+)=h(0^-)=0 \quad h'(0^+)=1+h'(0^-)=1$$

将以上初始值代入冲激响应通式，得

$$h(0^+)=C_1+C_2=0$$

$$h'(0^+)=-2C_1-3C_2=1$$

解得 $C_1=1, C_2=-1$，得系统的冲激响应

$$h(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})U(t)$$

**解法二：**系统的传输算子为

$$H(p)=\frac{1}{p^2+5p+6}=\frac{1}{p+2}-\frac{1}{p+3}$$

故

$$h(t)=(e^{-2t}-e^{-3t})U(t)$$

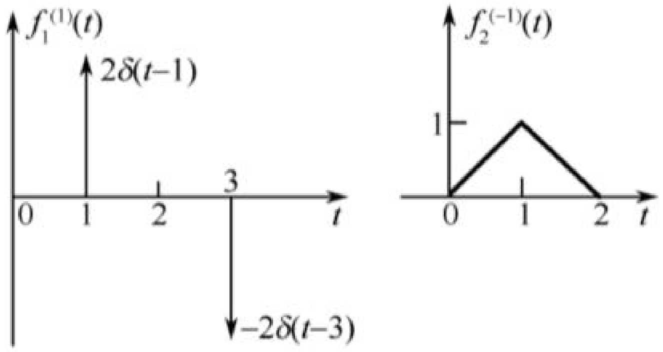
# 题目 10

**解：**(1)
$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}3e^{-2\tau}U(\tau)\cdot 2U(t-\tau)d\tau$$
$$=6\int_{0^+}^{t}e^{-2\tau}d\tau=3(1-e^{-2t})U(t)$$

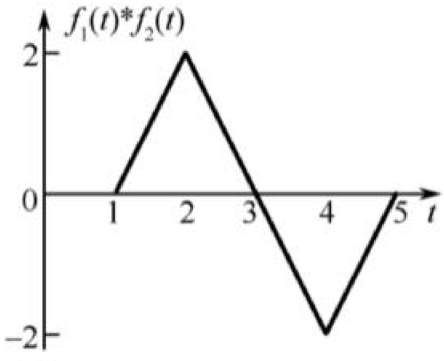
(2)
$$f_1(t)*f_3(t)=\int_{-\infty}^{\infty}3e^{-2\tau}U(\tau)\cdot 2U(t-\tau-2)d\tau$$
$$=6\int_{0^+}^{t-2}e^{-2\tau}d\tau=3[1-e^{-2(t-2)}]U(t-2)$$

# 题目 11

解：直接求$f_1(t)$和$f_2(t)$的卷积将比较复杂，利用函数与冲激函数的卷积较为方便。对$f_1(t)$求导数得$f_1^{(1)}(t)$，对$f_2(t)$求积分得$f_2^{(-1)}(t)$，其波形图如下图 a 所示。卷积$f_1^{(1)}(t)*f_2^{(-1)}(t)=f_1(t)*f_2(t)$，如下图 b 所示




(a)




(b)