题目 1

证明：令 $x=at-b, a\neq 0$，则有 $t=\frac{x}{a}+\frac{b}{a}$，$dt=\frac{1}{a}dx$，分为两种情况讨论：

（1）若 $\mathbf{a}>0$，则有 $\mathbf{a}=+|\mathbf{a}|$，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at-b)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{b}{a}\right)\delta(x)\frac{1}{a}dx$$

$$=\frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a}+\frac{b}{a}\right)\bigg|_{x=0}=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{b}{a}\right)$$

（1）若 $\mathbf{a}<0$，则有 $\mathbf{a}=-|\mathbf{a}|$，因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at-b)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{b}{a}\right)\delta(x)\frac{1}{a}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f\left(-\frac{x}{a}+\frac{b}{a}\right)\delta(x)\frac{1}{-a}dx$$

$$=\frac{1}{a}f\left(-\frac{x}{a}+\frac{b}{a}\right)\bigg|_{x=0}=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{b}{a}\right)$$

综上，$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at-b)dt=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{b}{a}\right)$

命题得证。

题目 2

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt$

$= f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$

题目 3

3. $[f(t)\delta(t)]' = [f(0)\delta(t)]' = f(0)\delta'(t)$

$[f(t)\delta(t)]' = f'(t)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$

$f(0)\delta'(t) = f'(t)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$

$= f'(0)\delta(t) + f(t)\delta'(t)$

$\Rightarrow f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta'(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\delta'(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(0)\delta(t)dt$$

$$= f(0)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - f'(0)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt$$

$$= 0 - f'(0) = f'(0)$$

题目 4

略，用 LTI 定义证明即可，经同时证明齐次性和叠加性。

题目 5

5. 略。注意反转和伸缩都是"时变"的。

题目 6

解：(1) 因为 $y(t) = f(t-2)$

输出值只取决于输入的过去值，如 $t=6$ 时，输出 $y(6) = f(4)$，故为因果系统。

(2) 因为 $y(t) = f(t+2)$

输出值取决于输入的将来值，如 $t=6$ 时，$y(6) = f(8)$，故为非因果系统。

题目 7

解：(1) 由系统的线性时不变性及因果性得，并由于

$$f_1(t) \to y_1(t) = \frac{d}{dt}f_1(t)$$

$$f_2(t) \to y_2(t) = \frac{d}{dt}f_2(t)$$

$$\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) \to \frac{d}{dt}[\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t)]$$

$$= \Lambda_1 \frac{df_1(t)}{dt} + \Lambda_2 \frac{df_2(t)}{dt} = \Lambda_1 y_1(t) + \Lambda_2 y(t)$$

故系统是线性的。

又因有

$$f(t-t_0) \to \frac{d}{dt}f(t-t_0) = \frac{df(t-t_0)}{d(t-t_0)} = y(t-t_0)$$

故得系统是时不变系统。　这个答案是一阶的，二阶可同理。

当 $t<0$ 时，因有 $f(t)=0$，故 $t<0$ 时有 $y(t)=0$。故系统是因果系统。

(2) 由于

$$f_1(t) \to y_1(t) = f_1(t)U(t)$$
$$f_2(t) \to y_2(t) = f_2(t)U(t)$$
$$\begin{aligned}\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) \to [\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t)]U(t) &= \Lambda_1 f_1(t)U(t) + \Lambda_2 f_2(t)U(t) \\ &= \Lambda_1 y_1(t) + \Lambda_2 y_2(t)\end{aligned}$$

故系统是线性的。

由已知有

$$f(t-t_0) \to f(t-t_0)U(t) \neq f(t-t_0)U(t-t_0)$$

故系统是时变系统。

因有 $y(0) = f(0)U(0)$，故系统是因果系统。

(3) 由于

$$f_1(t) \to y_1(t) = \sin[f_1(t)]\,U(t)$$
$$f_2(t) \to y_2(t) = \sin[f_2(t)]\,U(t)$$
$$\begin{aligned}\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) &\to \sin[\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t)]\,U(t) \\ &= \Lambda_1 \sin[f_1(t)]\,U(t) + \Lambda_2 \sin[f_2(t)]\,U(t)\end{aligned}$$

故系统是非线性系统。

又已知有

$$f(t-t_0) \to \sin[f(t-t_0)]U(t) \neq \sin[f(t-t_0)]\,U(t-t_0)$$

故系统是时变系统。

因有 $y(0) = \sin[f(0)]U(0)$，故系统是因果系统。

(4) 由于

$$f_1(t) \to y_1(t) = f_1(1-t)$$
$$f_2(t) \to y_2(t) = f_2(1-t)$$
$$\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) \to \Lambda_1 f_1(1-t) + \Lambda_2 f_2(1-t) = \Lambda_1 y_1(t) + \Lambda_2 y(t)$$

故系统是线性系统。

设系统的激励为 $f(t)$，延时 t_0，即 $f(t-t_0)$；其折叠信号是 $f(-t-t_0)$；再右移 1，结果是

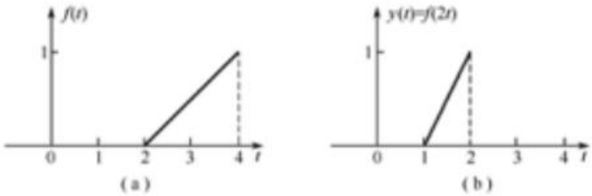
$$f(1-t-t_0) = f[1-(t+t_0)] = y(t+t_0)$$

可见，激励延时 t_0，响应反而超前 t，说明系统是时变的且是非因果的。

(5) 由于

$$f_1(t) \to f_1(2t)$$
$$f_2(t) \to f_2(2t)$$
$$\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) \to \Lambda_1 f_1(2t) + \Lambda_2 f_2(2t) = \Lambda_1 y_1(t) + \Lambda_2 y_2(t)$$

故系统是线性的。



图例 1.14

设激励 $f(t)$ 的波形如图例 1.14(a) 所示，则响应 $y(t) = f(2t)$ 的波形如图例 1.14(b) 所示。可见，响应产生在激励之前，故系统是非因果系统，且是时变的。

(6) 由于

$$f_1(t) \to [f_1(t)]^2$$
$$f_2(t) \to [f_2(t)]^2$$
$$\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) \to [\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t)]^2 \neq \Lambda_1[f_1(t)]^2 + \Lambda_2[f_2(t)]^2$$

故系统是非线性的。

又因有

$$f(t) \to [f(t)]^2$$

故有

$$f(t-t_0) \to [f(t-t_0)]^2 = y(t-t_0)$$

故系统是时不变的。

由 $y(t) = [f(t)]^2$ 知，当 $t < 0$ 时，$f(t) = 0$，故 $y(t) = 0$。故系统是因果的。

(7) 由于

$$f_1(t) \to \int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$f_2(t) \to \int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$\begin{aligned}\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) \to \int_{-\infty}^{t} [\Lambda_1 f_1(\tau) + \Lambda_2 f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau &= \Lambda_1\int_{-\infty}^{t} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau + \Lambda_2\int_{-\infty}^{t} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \Lambda_1 y_1(t) + \Lambda_2 y_2(t)\end{aligned}$$

故系统是线性的。

又因有

$$f(t-t_0) \to \int_{-\infty}^{t} f(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau \xlongequal{x=\tau-t_0} \int_{-\infty}^{5t-t_0} f(x)\mathrm{d}x \neq \int_{-\infty}^{5(t-t_0)} f(x)\mathrm{d}x = y(t-t_0)$$

故系统是时不变的。

当 $t < 0$ 时，$f(t) = 0$，故 $y(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau = 0$。故系统是因果的。

(8) 由于

$$f_1(t) \to \int_{-\infty}^{5t} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$f_2(t) \to \int_{-\infty}^{5t} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$\begin{aligned}\Lambda_1 f_1(t) + \Lambda_2 f_2(t) \to \int_{-\infty}^{5t} [\Lambda_1 f_1(\tau) + \Lambda_2 f_2(\tau)]\mathrm{d}\tau &= \Lambda_1\int_{-\infty}^{5t} f_1(\tau)\mathrm{d}\tau + \Lambda_2\int_{-\infty}^{5t} f_2(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &= \Lambda_1 y_1(t) + \Lambda_2 y_2(t)\end{aligned}$$

故系统是线性的。

又因有

$$f(t-t_0) \to \int_{-\infty}^{5t} f(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau \xlongequal{x=\tau-t_0} \int_{-\infty}^{5(t-t_0)} f(x)\mathrm{d}x \neq \int_{-\infty}^{5(t-t_0)} f(x)\mathrm{d}x = y(t-t_0)$$

故系统是时变的。

对于 $y(t) = \int_{-\infty}^{5t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$，取 $t = 1$，有

$$y(1) = \int_{-\infty}^{5} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

故系统是非因果的。

题目 8

解：因已知有

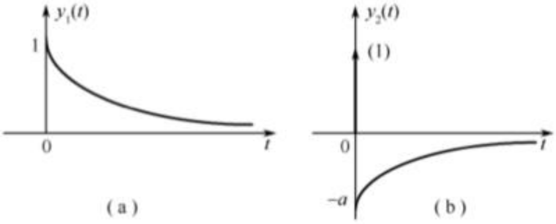
$$f_1(t)=U(t)\rightarrow y_1(t)=\mathrm{e}^{-at}U(t)$$

$y_1(t)$ 的波形如例图 1.22(a) 所示。

又因有 $\delta(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t)$，故

$$y_2(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y_1(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-at}U(t)]=-a\mathrm{e}^{-at}U(t)+\mathrm{e}^{-at}\delta(t)=\delta(t)-a\mathrm{e}^{-at}U(t)$$

$y_2(t)$ 的波形如图例 1.22(b) 所示。



(a)　　(b)

题目 9

解: 先列写特征方程, 解出特征根, 得到齐次解表达式。再将边界条件代入, 确定表达式中的待定系数, 最终得到零输入响应。

(1) 特征方程为 $\alpha^2+2\alpha+2=0$, 解得 $\alpha_{1,2}=-1\pm\mathrm{j}$, 齐次解表示式为

$$\begin{aligned}r(t)&=A_1\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{j})t}+A_2\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{j})t}\\&=\mathrm{e}^{-t}(A_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}+A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t})\\&=\mathrm{e}^{-t}(B_1\cos t+B_2\sin t)\end{aligned}\tag{1}$$

对式 (1) 两侧求导得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)&=-\mathrm{e}^{-t}(B_1\cos t+B_2\sin t)+\mathrm{e}^{-t}(-B_1\sin t+B_2\cos t)\\&=\mathrm{e}^{-t}\left[-B_1(\cos t+\sin t)+B_2(\cos t-\sin t)\right]\end{aligned}\tag{2}$$

将边界条件 $r(0_+)=1$ 和 $r'(0_+)=2$ 分别代入式 (1) 和式 (2) 得到

$$\begin{cases} B_1=1 \\ -B_1+B_2=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B_1=1 \\ B_2=3 \end{cases}$$

将 B_1、B_2 代入式 (1) 得到零输入响应

$$r(t)=\mathrm{e}^{-t}(\cos t+3\sin t)u(t)$$

(2) 特征方程为 $\alpha^2+2\alpha+1=0$, 解得二重根 $\alpha_1=\alpha_2=-1$, 齐次解表示式为

$$r(t)=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2t\mathrm{e}^{-t} \tag{3}$$

对式 (3) 两侧求导得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)=-A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-t}-A_2t\mathrm{e}^{-t} \tag{4}$$

将边界条件 $r(0_+)=1$ 和 $r'(0_+)=2$ 分别代入式 (3) 和式 (4), 得到

$$\begin{cases} A_1=1 \\ -A_1+A_2=2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_1=1 \\ A_2=3 \end{cases}$$

将 A_1、A_2 代入式 (3) 得到零输入响应

$$r(t)=(1+3t)\mathrm{e}^{-t}u(t)$$

(3) 特征方程为 $\alpha^3+2\alpha^2+\alpha=0$, 解得 $\alpha_1=0,\alpha_2=\alpha_3=-1$, 齐次解表示式为

$$r(t)=A_1+A_2\mathrm{e}^{-t}+A_3t\mathrm{e}^{-t} \tag{5}$$

对式 (5) 两侧求两次导数, 依次得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)=-A_2\mathrm{e}^{-t}+A_3\mathrm{e}^{-t}-A_3t\mathrm{e}^{-t} \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)=A_2\mathrm{e}^{-t}-2A_3\mathrm{e}^{-t}+A_3t\mathrm{e}^{-t} \tag{7}$$

将边界条件 $r(0_+)=r'(0_+)=0$ 和 $r''(0_+)=1$ 分别代入式 (5)、式 (6) 和式 (7), 得到

$$\begin{cases} A_1+A_2=0 \\ -A_2+A_3=0 \\ A_2-2A_3=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_1=1 \\ A_2=A_3=-1 \end{cases}$$

将 A_1、A_2 和 A_3 代入式 (5) 得到零输入响应

$$r(t)=\left[1-(1+t)\mathrm{e}^{-t}\right]u(t)$$

题目 10

解：由电路图可知： $u_C(t)+RC\frac{du_C(t)}{dt}=u_S(t)$

代入初始条件得： $u_C'(t)+2u_C(t)=2u_S(t)$

（1）当 $u_S(t)=\varepsilon(t)$ 时，方程等号右端不含冲激项，故

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=-1$$

微分方程齐次解为： $u_{Ch}(t)=C_1e^{-2t}$

特解为： $u_{Cp}(t)=1$， $t\geqslant0$

全解为： $u_C(t)=u_{Ch}(t)+u_{Cp}(t)=C_1e^{-2t}+1$， $t\geqslant0$

代入初始条件得： $u_C(0_+)=C_1+1=-1$

得：C_1=-2；

则电路在此激励下全响应为： $u_C(t)=-2e^{-2t}+1$， $t\geqslant0$ 。

（2）当 $u_S(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$ 时，方程等号右端不含冲激项，故

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=-1$$

微分方程齐次解为： $u_{Ch}(t)=C_1e^{-2t}$

特解为： $u_{Cp}(t)=2e^{-t}$， $t\geqslant0$

全解为： $u_C(t)=u_{Ch}(t)+u_{Cp}(t)=C_1e^{-2t}+2e^{-t}$， $t\geqslant0$

代入初始条件得：$C_1=-3$

则电路在此激励下全响应为： $u_C(t)=-3e^{-2t}+2e^{-t}$， $t\geqslant0$ 。

（3）当激励 $u_S(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)$ 时，方程右端不含冲激项，故

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=-1$$

齐次解为： $u_{Ch}(t)=C_1e^{-2t}$

特解为：$u_{Cp}(t)=2te^{-2t}$， $t\geqslant0$

全解为： $u_C(t)=u_{Ch}(t)+u_{Cp}(t)=C_1e^{-2t}+2te^{-2t}$， $t\geqslant0$

代入初始条件得： $u_C(0_+)=C_1=-1$

则电路在此激励下全响应为： $u_C(t)=-e^{-2t}+2te^{-2t}$， $t\geqslant0$ 。

（4）当激励$u_s(t)=t\varepsilon(t)$时，方程右端不含冲激项，故

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=-1$$

齐次解为： $u_{Ch}(t)=C_1\mathrm{e}^{-2t}$

特解为： $u_{Cp}(t)=t-0.5,\quad t\geqslant 0$

全解为： $u_C(t)=u_{Ch}(t)+U_{Cp}(t)=C_1\mathrm{e}^{-2t}+t-0.5,\quad t\geqslant 0$

代入初始条件得： $u_C(0_+)=C_1-0.5=-1$，即 $C_1=-0.5$

则电路在此激励下全响应为： $u_C(t)=-0.5\mathrm{e}^{-2t}+t-0.5,\quad t\geqslant 0$ 。