题目 1

解： $(1)(p^2+3p+2)=y(t)=f(t)$

$$H(p)=\frac{y(t)}{f(t)}=\frac{1}{p^2+3p+2}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}$$

所以 $$h(t)=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})U(t)$$

(2) $$y(t)=f(t)*h(t)=(-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}+t\mathrm{e}^{-t})U(t)$$

题目 2

解：(1) 设 $\cos it$，$\cos rt$ 是余弦函数集中的任意两个函数，若 $i\neq r$，则

$$\int_0^{2\pi}\cos it\cos rt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(i+r)t}{i+r}+\frac{\sin(i-r)t}{i-r}\right]_0^{2\pi}=0$$

若 $i=r$，则

$$\int_0^{2\pi}(\cos it+\cos rt)\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\cos^2 it\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2i}\sin 2it\right)_0^{2\pi}=\pi$$

故余弦函数集$\{\cos nt\}$在时间区间$[0,2\pi]$是正交函数集。

(2) 要证明一个正交函数集是不完备的，只需要找到一个函数与该函数集正交即可。而所谓一个函数与某个函数集正交，指的是这个函数与函数集中的每个函数都正交。因此不能用余弦函数集中某个特指的函数来证明，而必须用一般表达式证明。我们选 $\sin t$，看它在时间区间$[0,2\pi]$内是否与$\{\cos nt\}$正交。由于

$$\int_0^{2\pi}\sin t\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(n+1)t}{n+1}+\frac{\cos(n-1)t}{n-1}\right]_0^{2\pi}=0\quad(n\neq 1)$$

当 $n=1$ 时，有$\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\mathrm{d}t=0$，因此，$\sin t$ 在时间区间$[0,2\pi]$内与$\{\cos nt\}$正交。故$\{\cos nt\}$不是区间$[0,2\pi]$内的完备正交函数集。

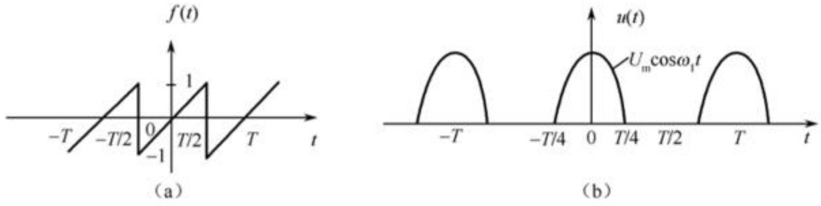
(3) 当 $i\neq r$ 时，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos i\cos rt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(i+r)t}{i+r}+\frac{\sin(i-r)t}{i-r}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{i^2-r^2}\left[i\sin\frac{i\pi}{2}\cos\frac{r\pi}{2}-\mathrm{j}\cos\frac{i\pi}{2}\sin\frac{r\pi}{2}\right]$$

由于对于任意的正整数 i,r，此式都不等于零(例如 $i=1,r=2$，此式等于$\frac{1}{3}$)，故$\{\cos nt\}$不是区间$[0,\pi/2]$内的正交函数集。

由此例可以看出：(1) 一个函数集是否正交，与它所在的区间有关，在某个区间正交，在另一个区间可能不正交；(2) 正交函数集的定义规定，函数集中所有函数应两两正交，不能从一个函数中某几个相互正交就说该函数集是正交函数集。

题目 3



图例 3.3

解:图例 3.3(a) 图所示信号为时间 t 的实、奇周期函数,所以傅里叶级数系数 $a_k=0$,系数

$$b_k=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

在 $t=0\sim T/2$ 区间,$f(t)$ 的表达式为,$f(t)=\frac{2}{T}t$,由此可得

$$b_k=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2}{T}t\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

应用分部积分,令 $u=\frac{2}{T}t$,$\mathrm{d}v=\sin(k\omega_1 t)\mathrm{d}t$,则 $\mathrm{d}u=\frac{2}{T}\mathrm{d}t$,$v=-\frac{1}{k\omega_1}\cos(k\omega_1 t)$,考虑到 $\omega_1=2\pi/T$, 所以

$$\begin{aligned}b_k&=\frac{4}{T}\left[\frac{2}{T}t\left(-\frac{1}{k\omega_1}\cos(k\omega_1 t)\right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}-\int_0^{\frac{T}{2}}-\frac{1}{k\omega_1}\cos(k\omega_1 t)\ \frac{T}{2}\mathrm{d}t\right.\\&=\frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}+\frac{8}{T^2k^2\omega_1^2}\sin(k\omega_1 t)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}}\\&=\frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}+\frac{8}{T^2k^2\omega_1^2}\sin(k\pi)=\frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1},\qquad k=1,2,3,\cdots\end{aligned}$$

故得图例 3.3(a) 所示信号 $f(t)$ 的傅里叶级数三角函数展开式为

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin(k\omega_1 t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}\sin(k\omega_1 t)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\sin(\omega_1 t)-\frac{1}{2}\sin(2\omega_1 t)+\cdots+(-1)^{k+1}\ \frac{1}{k}\sin(k\omega_1 t)\right]$$

图例 3.3(b) 图所示信号为时间 t 的实、偶周期函数,所以傅里叶级数系数 $b_k=0$,系数

$$a_k=\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}u(t)\cos(k\omega_1 t)\mathrm{d}t$$

由图例 3.3(b) 图可知 $u(t)$ 在 $t=0\sim T/2$ 区间的函数表达式为

$$u(t)=\begin{cases}U_m\cos\omega_1 t, & 0\leqslant t\leqslant T/4\\0, & T/4\leqslant t\leqslant T/2\end{cases}$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} U_m \cos(\omega_1 t)\cos(k\omega_1 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} U_m \left\{\frac{1}{2}\cos[(k+1)\omega_1 t] + \frac{1}{2}\cos[(k-1)\omega_1 t]\right\}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2U_m}{T}\cdot\frac{\sin[(k+1)\omega_1 t]}{(k+1)\omega_1}\bigg|_0^{\frac{T}{4}} + \frac{2U_m}{T}\cdot\frac{\sin[(k-1)\omega_1 t]}{(k-1)\omega_1}\bigg|_0^{\frac{T}{4}} \\
&= \frac{U_m}{(k+1)\pi}\sin\left[(k+1)\ \frac{\pi}{2}\right] + \frac{U_m}{(k-1)\pi}\sin\left[(k-1)\ \frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}
$$

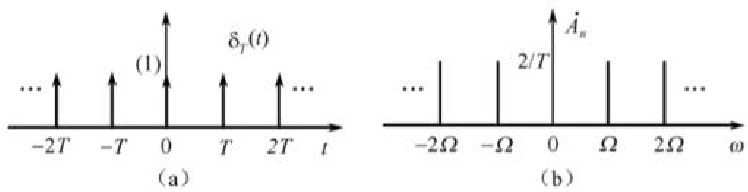
于是有

$$
a_0 = \frac{2U_{\mathrm{m}}}{\pi}, a_1 = \frac{2U_{\mathrm{m}}}{2}, a_2 = \frac{2U_{\mathrm{m}}}{3\pi}, a_3 = 0, a_4 = -\frac{2U_{\mathrm{m}}}{15\pi}, \cdots
$$

所以 $u(t)$ 的傅里叶级数展开式为

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t) \\
&= \frac{U_{\mathrm{m}}}{\pi} + \frac{U_{\mathrm{m}}}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{2U_{\mathrm{m}}}{3\pi}\cos(2\omega_1 t) - \frac{2U_{\mathrm{m}}}{15\pi}\cos(4\omega_1 t) + \cdots \\
&= \frac{U_{\mathrm{m}}}{\pi} + \frac{2U_{\mathrm{m}}}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{3}\cos(2\omega_1 t) - \frac{1}{15}\cos(4\omega_1 t) + \cdots\right]
\end{aligned}
$$

题目 4



图例 3.4

解：

$$
\dot{A}_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t
$$

$$
= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega 0}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}
$$

$$
\delta_T(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{T}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}, \Omega = \frac{2\pi}{T}
$$

其频谱如图例 3.4(b) 所示。

题目 5

解：本问题给出的两个周期信号均为三角函数表示的级数形式，所以只需对照周期信号的三角函数形式的傅里叶级数展开式

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos(k\omega_1 t+\varphi_k)$$

为此 $f(t)$ 的可表示为

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left[\cos(\omega_1 t)+\frac{1}{3}\cos(3\omega_1 t+\pi)+\frac{1}{5}\cos(5\omega_1 t)+\frac{1}{7}+\cos(7\omega_1 t+\pi)+\cdots\right]$$

由此可得

$$\frac{A_0}{2}=0$$

$$A_1=\frac{4}{\pi},\quad \varphi_1=0$$

$$A_3=\frac{4}{3\pi},\quad \varphi_3=\pi$$

$$A_5=\frac{4}{5\pi},\quad \varphi_5=0$$

$$A_7=\frac{4}{7\pi},\quad \varphi_7=\pi$$

……

据此可画得(1)题中所给周期信号 $f(t)$ 的单边振幅频谱图与相位频谱图，如例图 3.5(a)、(b) 所示。

考虑正弦函数与余弦函数的变化关系，类似地将(2)中所给出的周期信号改写为用余弦函数表示的傅里叶级数形式，即

$$f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left[\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{3}\cos\left(6\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+\cdots\right]$$

式中，基波角频率 $\omega_1=2\pi$ rad/s；除直流分量以外的各谐波分量的初相位均为 $\pi/2$。容易求得：

$$\frac{A_0}{2}=\frac{1}{2}$$

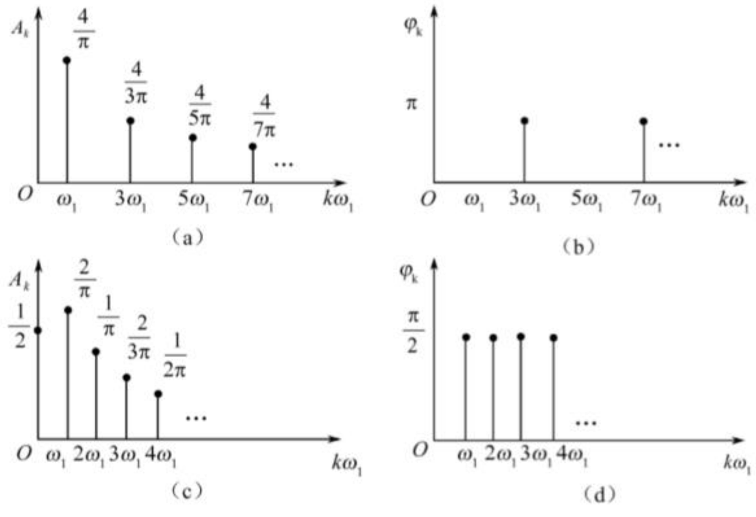
$$A_1=\frac{2}{\pi},\quad \varphi_1=\frac{\pi}{2}$$

$$A_2=\frac{2}{\pi},\quad \varphi_2=\frac{\pi}{2}$$

$$A_3=\frac{2}{3\pi},\quad \varphi_3=\frac{\pi}{2}$$

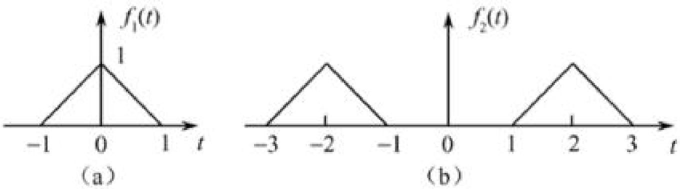
……

由此可画得(2)题中所给周期信号 $f(t)$ 的单边振幅频谱图与相位频谱图如例图 3.5(c)、(d) 所示。



图例 3.5

题目 6



图例 3.7

解:对图例 3.7(a) 有 $f_1''(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1)$,故

$$(\mathrm{j}\omega)^2 F_1(\mathrm{j}\omega) = 1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 2\times 1 + 1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega} = (\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega}{2}})^2$$

故得

$$F_1(\mathrm{j}\omega) = \left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2 = Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

对图例 3.7(b) 有 $f_2(t) = f_1(t+2) + f_1(t-2)$,故

$$F_2(\mathrm{j}\omega) = F_1(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega} + F_1(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}$$

$$= 2F_1(\mathrm{j}\omega)\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega}}{2} = 2Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos 2\omega$$

题目 7

解：自相关函数

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^{\alpha\tau}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha t}\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}t$$

分段讨论：

当 $\tau<0$ 时，$R(\tau)=\mathrm{e}^{\alpha\tau}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha t}\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\alpha\tau}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{\alpha\tau}$；

当 $\tau>0$ 时，$R(\tau)=\mathrm{e}^{\alpha\tau}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha t}\varepsilon(t-\tau)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{\alpha\tau}\int_{\tau}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha\tau}$。

综上可知，　$R(\tau)=\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha|\tau|}$。

题目 8

解：周期信号的基波角频率 Ω 为信号中各频率成分中频率最小的信号的频率，且其余信号的角频率均为此角频率的整数倍，$T=\frac{2\pi}{\Omega}$。

（1）角频率为 $\Omega=100\mathrm{rad/s}$，周期为 $T=\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{2\pi}{100}=\frac{\pi}{50}\mathrm{s}$。

（2）角频率为 $\Omega=\frac{\pi}{2}\mathrm{rad/s}$，周期为 $T=\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4\mathrm{s}$。

（3）cos2t 的角频率为 $\Omega_1=2\mathrm{rad/s}$，sin4t 的角频率为 $\Omega_2=4\mathrm{rad/s}$，取两者的最大公约数即为复合信号的基波角频率 $\Omega=2\mathrm{rad/s}$，周期为 $T=\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{2\pi}{2}=\pi\mathrm{s}$。

（4）三个分解信号的角频率分别为 $\Omega_1=2\pi,\Omega_2=3\pi,\Omega_3=5\pi$，基波角频率为 π，周期为 $T=\frac{2\pi}{\Omega}=\frac{2\pi}{\pi}=2\mathrm{s}$。

（5）角频率为 $\Omega=\frac{\pi}{4}\mathrm{rad/s}$，周期为 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8\mathrm{s}$。

（6）$\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ 的角频率分别为 $\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{5}$，基波角频率为 $\frac{\pi}{30}\mathrm{rad/s}$，周期为 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{30}}=60\mathrm{s}$。