信号与系统课程笔记：Lecture 7

授课教师：秦雨潇
笔记记录：曹时成

2023 年 10 月 13 日（第六周，周五）

1 课堂回顾：如何判断是不是 LTI？

例：$f(t) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)e^{\tau}\,d\tau$

即判断：$f(t-t_0) = y(t-t_0)$ 是否成立？成立则为 LTI，不成立则不是

在这里：

（1）$f(t-t_0) = e^{-t}\int_{-\infty}^{t} f(\tau - t_0)e^{\tau}\,d\tau$

（2）$y(t-t_0) = e^{-(t-t_0)}\int_{-\infty}^{t-t_0} f(\tau)e^{\tau}\,d\tau$

进行积分换元化简，可推导（1）与（2）是相等的，该例子为 LTI。

2 矢量的分解

我们希望，对于我们的矢量 $\vec{A} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$，可以分解为“子矢量”$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, 且“子矢量”满足如下性质, 则这组“子矢量”被称为一组“正交基”

（1）$\vec{v}_{\perp}\vec{v}_j \qquad i \neq j\ ,\quad i, j \leqq n$

（2）$\parallel \vec{v}_i \parallel = 1 \leftrightarrow$ 类似于 $(”\delta(t), \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\,dt = 1”)$

（3）对于 $\vec{A} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ，$span\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

则必有：$vecA = C_1\vec{v}_1 + C_2\vec{v}_2 +, \ldots, C_n\vec{v}_n$

其中：$C_i = \frac{\langle \vec{A}, \vec{v}_i \rangle}{\|\vec{v}_i\|^2}$

C_i 是 $\vec{A}$ 在 $\vec{v}_i$ 上的投影

3 信号的分解

我们希望，对于我们的一个信号 $f(t)$，可以分解为“子信号”$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, 且“子信号”满足如下性质，则这组“子信号”被称为一组“正交完备集”

(1)“子信号”是正交的

(2)“子信号”是单位的

$$\int_{\tau_a}^{\tau_b} \vec{v}_i \vec{v}_j \, d\tau = \begin{cases} 0 & i \neq j, \qquad \text{``}ortho\text{''} \\ 1 & i = j, \qquad \text{``}normal\text{''} \end{cases}$$

(3) 完备性

如果在 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ 以外，不存在任何 $g(t) \neq 0$, 满足 $\langle \vec{v}_i(t), g(t) \rangle = 0, (t \in [t_a, t_b])$, 则称，$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ 为 $f(t)$ 的正交完备集。

维度 n 有可能是无限的。

则有：$f(t) = C_1\vec{v}_1(t) + C_2\vec{v}_2(t) +, \ldots, C_n\vec{v}_n(t)$

其中：$C_i = \frac{\langle f(t), \vec{v}_i(t) \rangle}{\|\vec{v}_i\|^2}$

4 思考题：下面这四个特殊信号是不是正交完备集

（1）δ 函数:$\delta[k-\tau]$

（2）阶跃函数:$u[k-\tau]$

（3）门函数:$rect[k-\tau]$

（4）随机分布函数:$N(\mu, \delta) : f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$