

مأموریت کیهانی

مقدمه

سال ۲۴۰۳ هجری شمسی، در اعماق کهکشان راه شیری، منظومه‌ای به نام "اپسیلون" کشف شده است. این منظومه شامل سه سیاره با مدارهای جذاب و متفاوت است که اطراف یک ستاره درخشان به نام "آی‌او" می‌چرخند. اخترشناسان علاقه‌مند به مطالعه رفتار این سیارات و حرکت‌شان در مدارهای مختصاتی هستند. هدف شما در این پروژه، مدل‌سازی حرکات این سیارات، تحلیل ریاضی پارامترهای مرتبط و اجرای محاسبات عددی است. شما باید این مأموریت را با استفاده از زبان R کامل کنید.

اهداف پروژه

۱. تحلیل و مدل‌سازی حرکت سیارات در منظومه اپسیلون با استفاده از **مختصات قطبی**
۲. استفاده از **مشتق‌گیری عددی** برای تحلیل سرعت و شتاب سیارات
۳. به‌کارگیری **انتگرال‌گیری عددی** برای محاسبه طول قوس مدارها
۴. رسم نمودارها و تجسم حرکات سیارات

جزئیات مأموریت

مرحله ۱: تعریف مدارهای سیارات

سه سیاره با نام‌های **قطب‌نما**، **ره‌یاب** و **گران‌یگاه** به ترتیب به صورت زیر در مدار ستاره خود حرکت می‌کنند:

• **قطب‌نما:**

$$r(t) = 3 + 2 \cdot \sin(t)$$

$$\theta(t) = 2t$$

• **ره‌یاب:**

$$r(t) = 4 + \cos(3t)$$

$$\theta(t) = t^2$$

• گرانیگاه:

$$r(t) = 5 - \sin(2t)$$

$$\theta(t) = 3t$$

مسئولیت شما

۱. معادلات قطبی هر سیاره را به مختصات کارتزین (x و y) تبدیل کنید:

$$x(t) = r(t) \cdot \cos(\theta(t))$$

$$y(t) = r(t) \cdot \sin(\theta(t))$$

۲. مختصات (x, y) هر سیاره را برای بازه زمانی $[0, 2\pi]$ با تقسیم به 50 نقطه محاسبه کنید.

۳. نمودار حرکت هر سیاره را در صفحه مختصات کارتزین رسم کنید.

مرحله ۲: محاسبه طول قوس مدار سیارات

طول قوس هر مدار را با استفاده از فرمول زیر محاسبه کنید:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

مسئولیت شما

۱. با استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری عددی، طول قوس هر مدار را در بازه $[0, 2\pi]$ محاسبه کنید.

مرحله ۳: مدل‌سازی سه‌بعدی منظومه اسیلون

برای نمایش بهتر این منظومه، حرکت سیارات را در یک فضای سه‌بعدی شبیه‌سازی کنید. فرض کنید که

مختصات $z(t)$ هر سیاره به صورت زیر باشد:

• قطب‌نما:

$$z(t) = \cos(t)$$

• ره‌یاب:

$$z(t) = \sin(2t)$$

• گرانیگاه:

$$z(t) = \sin(t) + \cos(t)$$

مسئولیت شما

۱. مختصات سه‌بعدی (x, y, z) هر سیاره را محاسبه کنید.
۲. نمودار سه‌بعدی حرکت سیارات را با استفاده از کتابخانه **plotly** رسم کنید.

مرحله ۴: بررسی سرعت و شتاب سیارات (نمره اضافه)

با استفاده از فرمول‌های مشتق‌گیری عددی، سرعت و شتاب سیارات را محاسبه کنید.

• فرمول سرعت:

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

• فرمول شتاب:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

مسئولیت شما

۱. با استفاده از روش‌های عددی مشتق‌گیری، سرعت لحظه‌ای $v(t)$ و شتاب $a(t)$ هر سیاره را در بازه $[0, 2\pi]$ محاسبه کنید.
۲. نمودار سرعت و شتاب هر سیاره را به صورت جداگانه رسم کنید.

نکات مهم

۱. پروژه را می‌توان به صورت انفرادی یا تیم‌های ۲ نفره انجام داد. در صورت انجام پروژه به صورت تیمی، فقط سرگروه تیم پاسخ پروژه را بارگزاری نماید.
۲. ارائه آنلاین پروژه الزامی می‌باشد و در صورت عدم ارائه پروژه، نمره‌ای به دانشجو تعلق نخواهد گرفت.
۳. زمان ارائه آنلاین پروژه در انتهای ترم اطلاع‌رسانی خواهد شد.
۴. ارسال فایل توضیحات پروژه الزامی می‌باشد.
۵. بخشی از نمره پروژه مربوط به کامنت‌نویسی در فایل R می‌باشد.
۶. فایل نهایی ارسالی، باید شامل کدهای R + فایل PDF توضیحات پروژه باشد.