Chapitre 2 Équations non linéaire

Pour une fonction *f* donnée, on veut résoudre (trouver *x*)

$$f(x) = 0$$

• Pour certains cas c'est facile (les polynômes de degré ≤ 4 par exemple). Mais on à rien pour les polynômes degrés supérieurs. Et rien pour une fonction quelconque.

• On voudrait une **méthode systématique**, on cherche plutôt une méthode s'appuyant le moins possible sur des particularités de la fonction.

Définition Un point *x* pour lequel la fonction *f* « touche » l'axe des *x* ($f(x) = 0$) est appelé **racine de la fonction *f***.

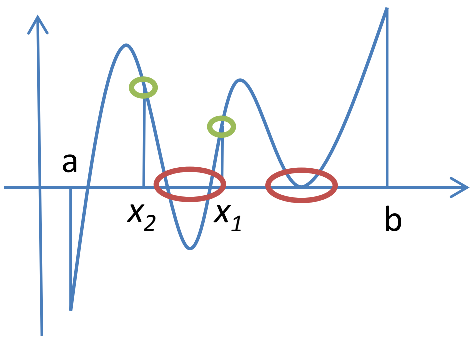
Dans ce chapitre on cherchera à construire des méthodes permettant de trouver les racines d'une fonction quelconque.

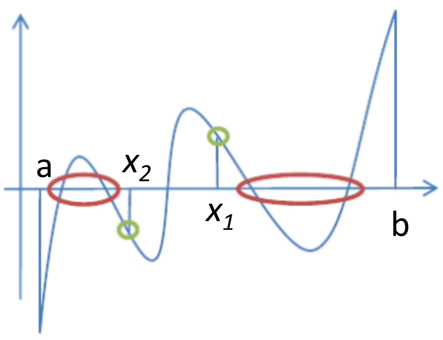
Méthode de la bissection.

1. Choisir un intervalle de départ contenant un changement de signe de la fonction.
2. Approximer la racine par le point milieu de l'intervalle.
3. Déterminer le sous intervalle contenant la racine et retour à 2.

Après n passages dans l'étape 2 on aura une approximation x_n de la racine.

Est-ce que ça marche tout le temps (n'importe quel *f*)? NON

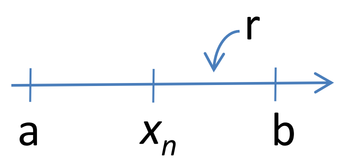




- La fonction doit **couper l'axe**: on doit avoir un changement de signe de *f*.
- S'appuie sur une connaissance « graphique » de la fonction, il faut trouver un intervalle de départ contenant un changement de signe. On peut « rater » des racines très proches les unes des autres.

Erreur d'approximation?

Si x_n est l'approximation de la racine r à la n$^{\text{ième}}$ étape de la bissection,



- À chaque étape, r et x_n se trouvent dans l'intervalle: l'erreur absolue est moins grande que la moitié de la longueur de l'intervalle.
- À chaque étape on divise l'intervalle en 2 pour la prochaine étape.

Conclusion pour f une fonction ayant une racine en r. Notons x_n la suite d'approximation obtenue par la méthode de la bissection. On dira que **la suite est convergente vers r** (notée $x_n \to r$) avec

$$\Delta r = |r - x_n| < \frac{L}{2^n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Où L est la longueur de l'intervalle initial.

Remarque pour un intervalle de départ donné, pour **garantir une erreur absolue inférieure à *e* donnée**, il suffit que

$$\Delta r < \frac{L}{2^n} \leq e \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{L}{e}\right) \leq n \ln 2 \Longleftrightarrow \frac{\ln L - \ln e}{\ln 2} \leq n$$

La dernière question est celle de l'arrêt de la méthode, pour cela introduisons du vocabulaire.

Méthode itérative: méthode dans laquelle on applique de **manière répétitive** (en boucle) une méthode plus simple.

Itération: une application de la méthode contenue dans la boucle d'une méthode itérative.

La bissection est une méthode itérative. Une itération consistant à calculer le point milieu et à déterminer le prochain sous-intervalle (contenant la racine).

Une méthode itérative **produit une suite d'approximation**.

Une méthode itérative est **convergente si la suite d'approximation converge**.
La méthode itérative est **divergente si la suite d'approximation diverge**.
La méthode itérative est **non-convergente** si la suite d'approximation **ne converge pas, mais ne diverge pas** (pensez à $x_n = (-1)^n$).

La bissection est une méthode toujours convergente: fermée. Ce n'est pas le cas de toute les méthodes. **Certaines méthodes ne convergeront que dans certaines conditions de départ et divergeront autrement**.

Quand est-ce qu'on arrive? Une méthode itérative donne à chaque itération une approximation. Dans un monde idéal on arrêterait lorsque

$$|x_n - r| = 0$$

Les erreurs de troncature, de représentation, le trop grand nombre d'itérations, etc. font en sorte que cette condition n'est presque jamais réalisable.

Critère d'arrêt: condition vérifiée à chaque itération permettant l'arrêt de la méthode:

- **critère de convergence** une condition indiquant la convergence de la suite. **Indicateur définissant une solution acceptable (succès).**
- **critère de divergence/non-convergence** une condition indiquant l'instabilité ou l'impossibilité d'atteindre la convergence. **Indicateur définissant un échec de la méthode.**

Tolérance Valeur choisie pour l'évaluation d'un critère d'arrêt.

En général on utilisera plus d'un critère à la fois. Les valeurs de tolérances étant basées sur les qualités attendues pour la solution: rapidité de calcul, nombre de C.S. estimé, etc.

Les critères les plus fréquemment utilisés

$$\left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}\right| \leq Tol_r \quad |f(x_n)| \leq Tol_f \quad \left|\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n}\right| \geq Tol_d \quad n \geq n_{max}$$

Une méthode inconnue, produit le résultat:

Iter.	x_i	$f(x_i)$	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert / \lvert x_i\rvert$
0	9.9900000000E-01	9.9800100000E-01	----	----
1	9.9800100000E-01	9.9600599600E-01	9.9900000000E-04	1.0010010010E-03
2	9.9600599600E-01	9.9202794407E-01	1.9950039990E-03	2.0030040050E-03
3	9.9202794407E-01	9.8411944182E-01	3.9780519311E-03	4.0100200351E-03
4	9.8411944182E-01	9.6849107576E-01	7.9085022543E-03	8.0361203308E-03
…				
11	1.2886052215E-01	1.6605034170E-02	2.3011095604E-01	1.7857366414E+00
12	1.6605034170E-02	2.7572715978E-04	1.1225548798E-01	6.7603286351E+00
13	2.7572715978E-04	7.6025466639E-08	1.6329307010E-02	5.9222700524E+01
14	7.6025466639E-08	5.7798715777E-15	2.7565113431E-04	3.6257736584E+03
15	5.7798715777E-15	3.3406915455E-29	7.6025460859E-08	1.3153486170E+07
16	3.3406915455E-29	1.1160220002E-57	5.7798715777E-15	1.7301422472E+14

La méthode converge!

La méthode diverge!

Attention: il est clair que la méthode converge vers 0 une racine de f. Le critère d'arrêt à droite est **mal choisi** (division par zéro) et renvoie un faux négatif.

La **bissection** peut être **lente** (beaucoup d'itérations == propagation d'erreur), exige une connaissance *a priori* de la position des racines et **n'est pas toujours applicable**.

On construit une méthode **plus rapide et plus générale** en s'appuyant sur la notion de **point fixe** et sur les résultats théoriques s'y rattachant**.**

Définition Soit g une fonction réelle. Un point x tel que $\boldsymbol{g(x) = x}$ est appelé **point fixe de $\boldsymbol{g}$**.

Remarques

- Si **x** est un point fixe de g alors c'est une racine de $f(x) = x-g(x)$. **La recherche d'un point fixe est similaire à la recherche d'une racine**.
- Tous les points fixes de $g_-(x) = x - f(x)$ et $g_+(x) = x + f(x)$ sont des racines de $f(x)$.
- On peut « fabriquer » de nombreuses fonctions dont un point fixe correspond à une racine spécifique d'une fonction donnée.

Méthode du point fixe

- x_0 donné
- $x_{n+1} = g(x_n) \quad n=1,2,\ldots$

Facile, semble générale. Mais est-ce que ça marche vraiment?

Supposons ***g* suffisamment différentiable** avec un point fixe $g(r) = r$

- soit l'erreur d'approximation: $e_n = x_n - r$.
- En se basant le théorème de Taylor (**e_n petit**):

$$e_{n+1} = g(r+e_n) - g(r) = g^{(1)}(r)e_n + \frac{g^{(2)}(r)}{2}e_n^2 + \frac{g^{(3)}(r)}{3!}e_n^3 + \ldots$$

- Si $g^{(1)}(r) \neq 0$ et les termes d'ordres supérieurs sont négligeables, on peut écrire

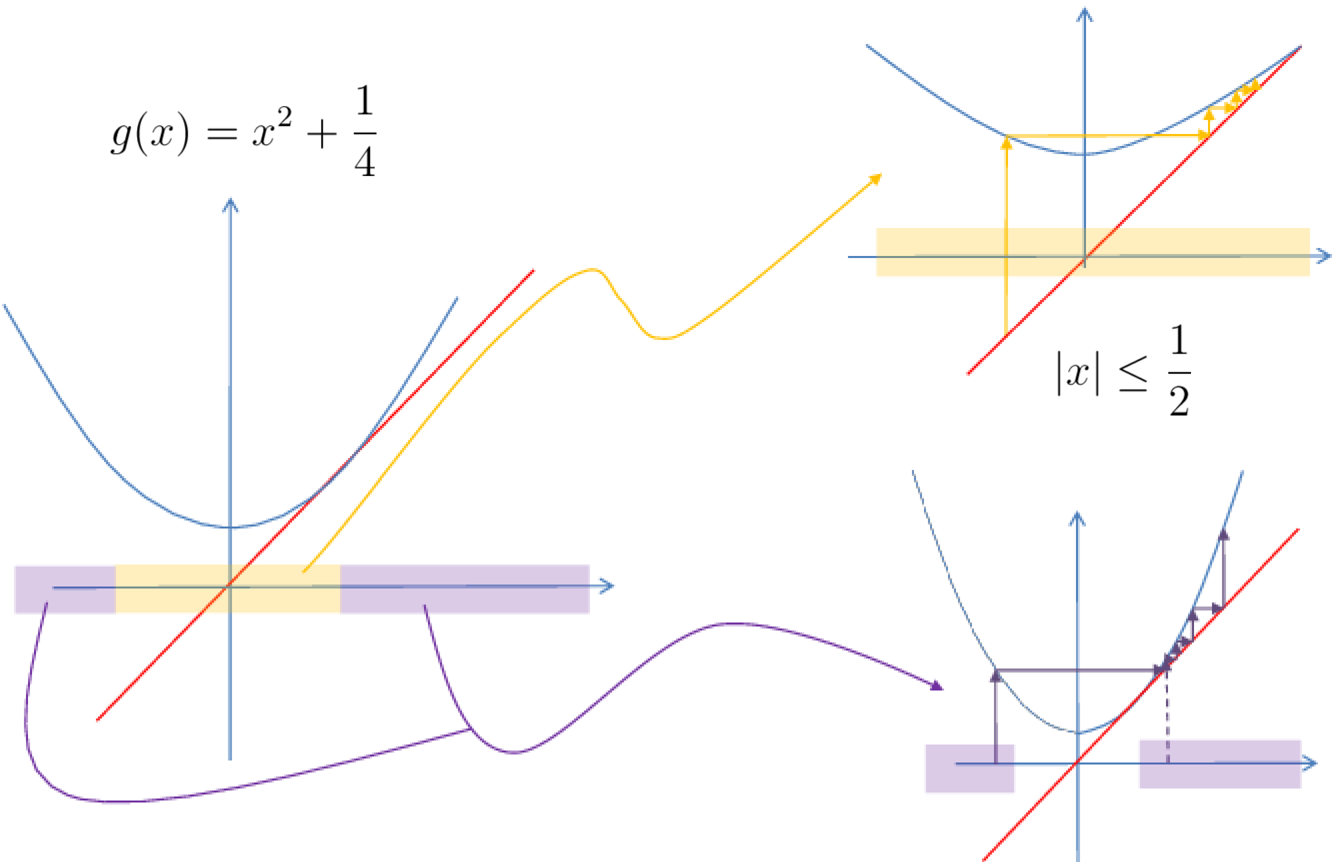
$$e_{n+1} \approx g^{(1)}(r)e_n = (g^{(1)}(r))^2 e_{n-1} = (g^{(1)}(r))^3 e_{n-2} = \ldots = (g^{(1)}(r))^{n+1} e_0$$

- Si $0 < |g^{(1)}(r)| < 1$, e_{n+1} tend vers zéro et **la méthode converge vers r.**
- Si $|g^{(1)}(r)| > 1$, e_{n+1} ne peut pas décroitre et la **méthode ne peut pas converger vers r.**
- Si $-1 < g^{(1)}(r) < 0$, le signe de l'erreur alternera, on aura donc des approximations qui seront alternativement supérieures ($e_{n+1} > 0$) et inférieures ($e_{n+1} < 0$) à r.

On appelle **taux de convergence** d'une méthode de point fixe la valeur de $|g^{(1)}(r)|$. Il sert à comparer des méthodes, plus le **taux est petit** (mais dans]0,1[) plus la **convergence sera rapide**.

Et si $g^{(1)}(r) = 1$? Indéterminé, dépendra de la fonction et du point de départ!

$$g(x) = x^2 + \frac{1}{4}$$



$$|x| \leq \frac{1}{2}$$

Convergence de la méthode: on s'approche du point fixe

$$|x| > \frac{1}{2}$$

Divergence de la méthode: on s'éloigne du point fixe

Jusqu'ici:

Bissection: on approxime la racine par une suite de points milieux d'intervalles emboités contenant la racine et dont la longueur est divisée par deux à chaque étape.

- terme d'erreur connu
- méthode simple mais qui ne fonctionne que si la fonction coupe l'axe des x.

Méthode du point fixe: on remplace la recherche d'une racine de f par la recherche de point fixe d'une fonction g fabriquée uniquement dans ce but.

Si *g* est suffisamment dérivable et $g^{(1)}(r) \neq 0$

$$e_{n+1} \approx g^{(1)}(r)e_n = (g^{(1)}(r))^2 e_{n-1} = (g^{(1)}(r))^3 e_{n-2} = \ldots = (g^{(1)}(r))^{n+1} e_0$$

- Si $0 < |g^{(1)}(r)| < 1$, **la méthode converge vers r.**
- Si $|g^{(1)}(r)| > 1$, la **méthode ne peut pas converger vers r.**
- Si $|g^{(1)}(r)| = 1$ la convergence dépendra du point de x_0 et de la nature de *g*

Le comportement de la méthode (conv./div.) dépend de x_0, car le dev. de Taylor sous-entend que l'on est « proche » de r.

Et si $g^{(1)}(r) = 0$? On reprend Taylor mais on garde la dérivée 2^{eme} (négligeant les termes sup.)

$$e_{n+1} \approx \frac{g^{(2)}(r)}{2} e_n^2 = \frac{(g^{(2)}(r))^3}{8} e_{n-1}^4 = \ldots = \left(\frac{g^{(2)}(r) e_0}{2} \right)^{2^{n+1}-1} e_0$$

On pourrait faire une analyse similaire à la précédente. À retenir : la convergence dépendra **explicitement du point de départ** ($e_0 = x_0 - r$).

Définition La méthode du point fixe **converge à l'ordre p** si il y a une constante C telle que

$$|e_{n+1}| \approx C |e_n|^p$$

Remarques

- Une convergence d'**ordre 1 est linéaire**, d'**ordre 2 est quadratique**, **d'ordre 3 cubique**, etc.
- $0 < |g^{(1)}(r)| < 1$ la méthode converge à l'ordre 1 (linéaire).
- Si la méthode converge et que $g^{(1)}(r) = 0$ alors la convergence est au moins d'ordre 2 (quadratique). Elle est quadratique si la dérivée 2^{eme} est non nulle.
- La convergence cubique!? La dérivée 1^{ere} et 2^{eme} sont nulles en r, on recommence l'exercice mais avec la dérivée 3^{eme} (la convergence dépend de $g^{(3)}(r)$ et e_0)

Remarques

•On ne connait pas *r.* Si x_n est proche de *r* on aura

$$E_{n+1} = |x_{n+1} - x_n| \approx e_{n+1} = |x_{n+1} - r|$$

• On pourra mesurer l'ordre (ou valider un algorithme) en estimant l'ordre à partir des approximations d'erreur!

• Convergence linéaire: $\frac{E_{n+1}}{E_n} \to |g^{(1)}(r)| \qquad \frac{E_{n+1}}{E_n^2} \to \infty$

• Convergence quadratique: $\frac{E_{n+1}}{E_n} \to 0 \qquad \frac{E_{n+1}}{E_n^2} \to \frac{|g^{(2)}(r)|}{2}$

Pourquoi on aime la convergence quadratique?

$\mathbf{|x_0-r| = 0.1}$ pour une convergence linéaire: $|x_3-r| \approx C_1|\, x_2-r\,| \approx C_1^2|\, x_1-r\,| \approx C_1^3|\, x_0-r\,|=\mathbf{0.1C_1^3}$

$\mathbf{|x_0-r| = 0.1}$ pour une convergence quadratique:

$$\mathbf{|x_3-r|} \approx C_2|\, x_2-r\,|^2 \approx C_2\,(C_2|\, x_1-r\,|^2)^2 \approx C_2\,(C_2\,(C_2|\, x_0-r\,|^2)^2)^2=\mathbf{1x10^{-8}C_2^7}$$

Stratégie: si on peut, on choisit des *g* qui nous donne une convergence quadratique

Une méthode inconnue produit ce tableau:

Iter.	x_i	f(x_i)	E_i	|E_i+1|/|E_i|	|E_i+1|/|E_i|^2
0	1.0000000000E+000	-2.000000E+001			
1	7.6666666667E+000	4.296296E+002	6.666667E+000		
2	5.2302037387E+000	1.220724E+002	2.436463E+000	3.654694E-001	5.482042E-002
3	3.7426969187E+000	3.142688E+001	1.487507E+000	6.105190E-001	2.505759E-001
4	2.9948535683E+000	5.861285E+000	7.478434E-001	5.027495E-001	3.379813E-001
5	2.7770222259E+000	4.159856E-001	2.178313E-001	2.912794E-001	3.894925E-001
6	2.7590418664E+000	2.687565E-003	1.798036E-002	8.254257E-002	3.789288E-001
7	2.7589241814E+000	1.146346E-007	1.176850E-004	6.545199E-003	3.640193E-001
8	2.7589241764E+000	0.000000E+000	5.020130E-009	4.265734E-005	3.624704E-001

Conclusion: La méthode converge vers 2.7589241 une racine de la fonction *f*. La convergence est quadratique, car:

$$\frac{E_{i+1}}{E_i} \to 0 \qquad \frac{E_{i+1}}{E_i^2} \to 0.3624704$$

Une méthode inconnue **d'ordre 2** produit les résultats suivants

Iter.	x_i	$f(x_i)$	E_i	$\lvert E_{i+1}\rvert/\lvert E_i\rvert$	$\lvert E_{i+1}\rvert/\lvert E_i\rvert^2$
0	3.9000000000E+00	-6.877662E-05			
1	3.9256775621E+00	-2.154734E-05	2.567756E-02		
2	3.9446108896E+00	-6.771760E-06	1.893333E-02	7.373491E-01	2.871570E+01
3	3.9586457814E+00	-2.132483E-06	1.403489E-02	7.412797E-01	3.915211E+01
4	3.9690856434E+00	-6.724478E-07	1.043986E-02	7.438506E-01	5.300009E+01
....					
12	3.9969307913E+00	-6.697819E-11	1.024287E-03	7.494759E-01	5.483954E+02
13	3.9976986055E+00	-2.118759E-11	7.678142E-04	7.496086E-01	7.318348E+02
14	3.9982742415E+00	-6.702768E-12	5.756360E-04	7.497074E-01	9.764178E+02
15	3.9987058425E+00	-2.120533E-12	4.316010E-04	7.497811E-01	1.302526E+03
16	3.9990294725E+00	-6.708871E-13	3.236300E-04	7.498361E-01	1.737336E+03

Conclusion: Attention la méthode est en difficulté! On converge vers 4. une racine de la fonction *f*. Mais la convergence est **linéaire**, car:

$$\frac{E_{i+1}}{E_i} \to 0.7498361 \qquad \frac{E_{i+1}}{E_i^2} \to \infty$$

Le comportement de la méthode dépend de x_0, **comment choisir x_0 garantissant la convergence?**

Définition: le **bassin d'attraction** d'un point fixe r de g **est l'ensemble des points x_0 pour lesquels la méthode converge vers r**.

Idéalement, on choisit un point de départ dans ce bassin. Mais comment définir le bassin?

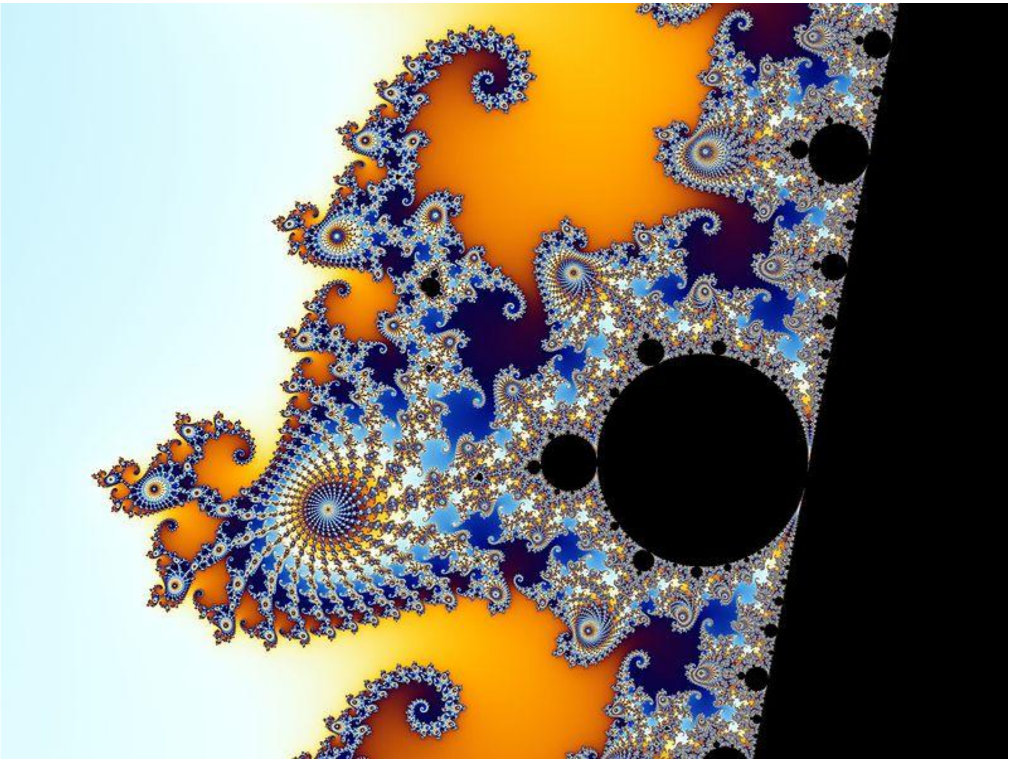
On voudrait une relation entre le bassin et la dérivée de g. On peut caractériser les points fixes.

Un point fixe est **attractif** si $0 < |g^{(1)}(r)| < 1$
un point fixe est **répulsif** si $|g^{(1)}(r)| > 1$
un point fixe est **indéterminé** si $g^{(1)}(r) = 1$

Pour une fonction g dont la dérivée est continue près de r

- si r est un point fixe attractif alors on garanti un bassin d'attraction contenant plus que r
- si r est un point fixe répulsif alors on ne peut rien dire sur le bassin d'attraction. Il peut être un singleton.
- si r est un point fixe indéterminé, on ne peut rien dire.

Pas très satisfaisant…



Complexité du bassin d'attraction.

Ici un exemple en dimension 2.

En noir les points du bassin.

En couleur: les points répulsifs avec gradation en fonction de leur « vitesse de divergence »

http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot

Un résultat existe dans des conditions particulières, c'est le théorème de point fixe:

Théorème Soit une fonction continue *g*(*x*) de[a,b] dans [a,b] et telle que

$$|g^{(1)}(x)| \leq k < 1 \quad \text{pour tout } x \in]a,b[$$

alors :

• Il existe un unique point fixe *r* de la fonction *g*(x) dans l'intervalle [a,b].

• L'algorithme des points fixes $x_{n+1}=g(x_n)$ converge vers r et ce, quelle que soit la valeur de x_0 dans [a,b].

C'est le mieux que nous avons concernant le bassin d'attraction. Cependant les conditions d'application sont assez restrictives.

Dans la réalité on choisira un point de départ en se basant sur

- Le respect de la réalité décrite et des dimensions des variables (km, °C, $, etc.)
- Une estimation du point fixe visé ou du bassin d'attraction.

Puisqu'on ne connait pas exactement la nature du point fixe, son bassin d'attraction, ou le comportement de la méthode, il est essentiel d'avoir

• de bon critère de convergence/divergence.

• de comprendre et savoir analyser les résultats obtenus.