

# Modelo de água rasa 2D aplicado a uma fonte oceanográfica de momentum zonal constante tipo gaussiana centrada no equador

Alejandro H. D. Peralta\*

*Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas  
Universidade de São Paulo*

8 de dezembro de 2022

## Resumo

Neste trabalho apresentamos a aplicação do modelo de água rasa 2D linearizado (exercício 4) e não linearizado (exercício 5), considerando o caso oceanográfico para uma grade de tipo C Arakawa. Antes de simular a propagação do vento zonal, os testes de uma fonte de massa foi aplicado para conferir o código implementado em Python e as condições radiacionais nas bordas do domínio do modelo. Os esquemas numéricos usados para aproximação numérica foram o Lax-Wendroff e Leap-frog. Posteriormente, os resultados mostram as propagações lineares e não lineares da fonte zonal constante localizado no centro da grade na região equatorial. Somente para o caso do modelo linear as propagações consideraram três casos de Coriolis ( $f = 0$ ,  $f$  constante para a latitude de  $20^{\circ}\text{S}$  e  $f$  no plano beta equatorial). Os resultados do modelo não linear correspondem somente ao caso de propagação no plano beta equatorial. Finalmente, também foram gerados mapas da divergência e vorticidade, como também a verificação da conservação de massa e energia.

**Palavras-chave:** Modelo de água rasa, 2D, fonte zonal constante.

---

## 1. Introdução

O modelo de água rasa considera equações para representar o ajuste geostrófico para o deslocamento das ondas de gravidade e iniciais considerando as propriedades conservativas de momentum e massa (Randall, 2021). O modelo é importante para representar fenômenos atmosféricos ou oceanográficos. Nos estudos de qualidade do ar pode representar a variação da camada de mistura ao longo do dia que impacta na concentração dos poluentes. O modelo também tem aplicações oceanográficas onde a fonte do vento zonal pode afetar o deslocamento das correntes como propagação de ondas com variação na altura do fluido, como é ilustrado na Fig. 1. Conforme com Döös et al. (2020), as ondas de gravidade no modelo

---

\*Estudante de doutorado, email [aperalta@usp.br](mailto:aperalta@usp.br).

1D pode-se propagar ao longo do eixo x em ambas direções com uma velocidade  $c = \sqrt{gH}$  sem depender do número de onda pelo que é considerado não dispersivo; onde  $g$  é a aceleração da gravidade e  $H$  a altura média do fluído.

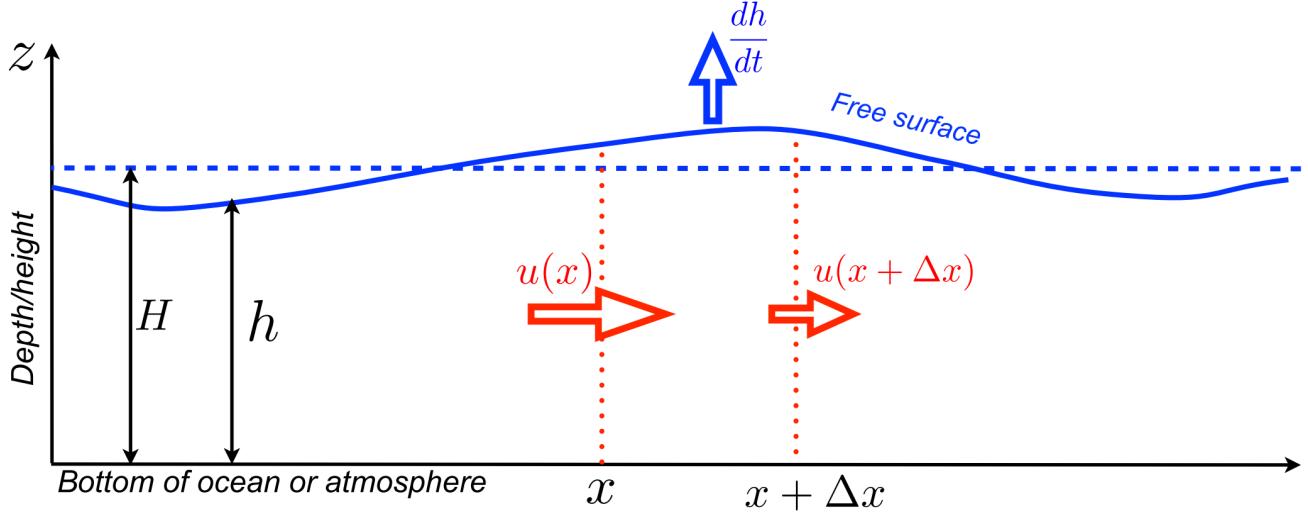


Figura 1: Modelo de água rasa 1D, extraído de Döös et al. (2020).

## 1.1 Modelo de água rasa 2D

O modelo de água rasa 2D (e.g., nos eixos “x” e “y”) presenta equações de variação zonal (eq. 1), meridional (eq. 2) e de altura (eq. 3). As equações tem como parâmetros o vento zonal ( $u$ ), meridional ( $v$ ), altura geopotencial ( $\phi$ ) e a aceleração de Coriolis  $f \equiv 2\Omega \sin \varphi$ , onde  $\Omega$  é a frequência angular da rotação da Terra ( $\Omega = \frac{2\pi}{86400} \text{ s}^{-1}$ ) e  $\varphi$  a latitude. As equações estão balanceadas com as fontes de momentum zonal ( $F_u$ ), meridional ( $F_v$ ) e de massa ( $F_\phi$ ).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = F_u \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_v \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + \phi \cdot \nabla(V) = F_\phi \quad (3)$$

Se as equações mostradas acima têm um campo básico nulo do vector horizontal  $\vec{V}$ , podemos obter as seguintes equações linearizadas balanceadas com as fontes de momentum:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + g \frac{\partial h}{\partial x} = F_u, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - fu + g \frac{\partial h}{\partial y} = F_v, \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F_\phi. \quad (6)$$

Onde  $H$  é altura média da coluna de água ou de ár e  $h$  a coluna de água que pode variar pela perturbação pela fonte zonal o de massa no domínio do modelo. O Coriolis ( $f$ ) no plano beta equatorial está definido como  $f = \beta y$ , onde  $\beta = \frac{2\Omega}{a}$  ( $a$  como rádio da terra equal a 6371000 m). As equações linearizadas podem ser discretizadas para diferentes tipos de grades chamadas de tipo Arakawa (Mesinger et al., 1976). Esta é a grade mais usada pelos modelos atmosféricos como o caso do modelo WRF-Chem. Se usamos o esquema leap-frog para discretizar as equações linearizadas podemos ter as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} &= -g \frac{h_{i+1,j}^n - h_{i,j}^n}{\Delta x} + \\ &\frac{f}{4}(v_{i,j}^n + v_{i+1,j}^n + v_{i+1,j-1}^n + v_{i,j-1}^n), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} &= -g \frac{h_{i,j+1}^n - h_{i,j}^n}{\Delta y} - \\ &\frac{f}{4}(u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i-1,j+1}^n + u_{i-1,j}^n), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = -H \left( \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n}{\Delta y} \right). \quad (9)$$

Conforme com Döös et al. (2020), a analise de estabilidade, assumindo que  $\Delta x = \Delta y$ , satisfaz o critério para todas as longitudes de onda quando

$$\mu \equiv \frac{\sqrt{gH}\Delta t}{\Delta x} \leq 0.35$$

As equações do modelo de água rasa não linearizada podem ser expressadas em termos da vorticidade potencial absoluta ( $\xi \equiv (f + \partial v / \partial x - \partial u / \partial y) / h$ ) e  $B$  é a função de Bernoulli ( $B \equiv gh + 1/2(u^2 + v^2)$ ), apresentados na forma escalar (Döös et al., 2020),

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \xi hv = -\frac{\partial B}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \xi hu = -\frac{\partial B}{\partial y}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0, \quad (12)$$

Aqui  $h$  é altura total de coluna de água ou de ár, alias não temos apenas um termo  $H$ . O modelo durante a integração tem propriedades conservativas para massa, energia e enstrofia. Esta última propriedade está relacionada com a vorticidade e na dissipação da energia. A discretização das equações precisa das formulações detalhadas em Döös et al. (2020) e resumida nas seguintes equações,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \xi \bar{V}^{xy} + \frac{B_{i+1,j} - B_{i,j}}{\Delta x} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \xi \bar{U}^{yx} + \frac{B_{i,j+1} - B_{i,j}}{\Delta y} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta y} = 0. \quad (15)$$

Onde os fluxos  $U_{i,j}$  e  $V_{i,j}$  são definidos conforme as velocidades de  $u$  e  $v$ , como segue,

$$U_{i,j} \equiv u_{i,j} \frac{1}{2} (h_{i,j} + h_{i+1,j}), \quad (16)$$

$$V_{i,j} \equiv v_{i,j} \frac{1}{2} (h_{i,j} + h_{i,j+1}). \quad (17)$$

Finalmente, nos pontos interiores dentro do domínio do modelo 2D podemos discretizar para resolver a propagação em termos de  $\xi$ , como segue

$$\xi_{i,j} = \frac{f + (v_{i+1,j} - v_{i,j})/\Delta x - (u_{i,j+1} - u_{i,j})/\Delta y}{(h_{i,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j+1} + h_{i+1,j+1})/4}. \quad (18)$$

## 1.2 Condições de fronteira

Para as condições de fronteira no caso da grade C tipo Arakawa com  $N_x \times N_y$  pontos para  $h$ , os componentes zonal ( $u$ ) e meridional ( $v$ ) são usados para representar a propagação radiacional devido que eles têm pontos adicionais nas direções Oeste-Leste ( $N_x+1$ ) e Sul-Norte ( $N_y+1$ ), respectivamente em comparação que  $h$ . Se considerarmos  $f=0$ , a condição radiacional na fronteira oeste é definida como  $\partial u_0 / \partial t - c \partial u_0 / \partial x = 0$  e discretizada como

$$u_{0,j}^{n+1} = u_{0,j}^n + c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{1,j}^n - u_{0,j}^n).$$

Na fronteira leste temos uma condição rígida constante conforme às condições estabelecidas pelo exercício 4, discretizado como  $u_{N_x+1,j}^{n+1} = 0$ . Na fronteira sul a condição radiacional é definida como  $\partial v_0 / \partial t - c \partial v_0 / \partial y = 0$ , discretizado como

$$v_{i,0}^{n+1} = v_{i,0}^n + c \frac{\Delta t}{\Delta y} (v_{i,1}^n - v_{i,0}^n).$$

Na fronteira norte a radiacional é  $\partial v_{N_y+1} / \partial t + c \partial v_{N_y+1} / \partial y = 0$  que pode ser discretizado como

$$v_{i,N_y+1}^{n+1} = v_{i,N_y+1}^n - c \frac{\Delta t}{\Delta y} (v_{i,N_y+1}^n - v_{i,N_y}^n).$$

## 1.3 Divergência e vorticidade

As equações 19, 20 estão relacionadas com a equação de água rasa não linearizada. Neste exercício 4 e 5, os termos de divergência eq. 19 e vorticidade eq. 20 foram considerados para gerar os mapas respetivos para o caso da integração da fonte constante de vento zonal oceânico.

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (19)$$

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (20)$$

Uma divergência positiva mostra um campo vetorial espalhado em todas as direções a partir de um ponto de referência ou que o fluído vai para fora desse ponto. Por outro lado, se a sinal é negativa, o campo está se concentrando na região como uma sucção do fluído num determinado ponto. A vorticidade é uma medida da rotação ou de giro do fluido, sendo positiva quando é ciclônica e negativa se é anticiclônica. Temos dois tipos de vorticidade por curvatura e cisalhamento. A vorticidade absoluta é a soma relativa da rotação das massas do ar mais a terrestre.

A relação da divergência e vorticidade estabelece que la variação da primeira de uma massa de ar é proporcionalmente à divergência com sinal trocado. Nos níveis vertical e horizontal o comportamento da convergência horizontal (divergência negativa) acrescenta os fluxos verticais, em consequência a vorticidade é mais ciclônica (positiva).

## 1.4 Verificação da conservação da massa e energia

Finalmente, a formulação do modelo preserva as propriedades conservativas e asseguram a estabilidade computacional do modelo. A conservação da massa ajuda em manter a pressão superficial dentro dos valores esperados realistas (Döös et al., 2020), definida como

$$M = \sum_{i=1}^{Nx} \sum_{j=1}^{Ny} h_{i,j} \Delta x \Delta y.$$

A conservação de energia (potencial e cinética) são definidas como segue,

$$E_P = \frac{g}{2} \sum_{i=1}^{Nx} \sum_{j=1}^{Ny} (h_{i,j})^2 \Delta x \Delta y,$$

$$E_K = \frac{H}{2} \sum_{i=1}^{Nx} \sum_{j=1}^{Ny} [(u_{i,j}^n)^2 + (v_{i,j}^n)^2] \Delta x \Delta y.$$

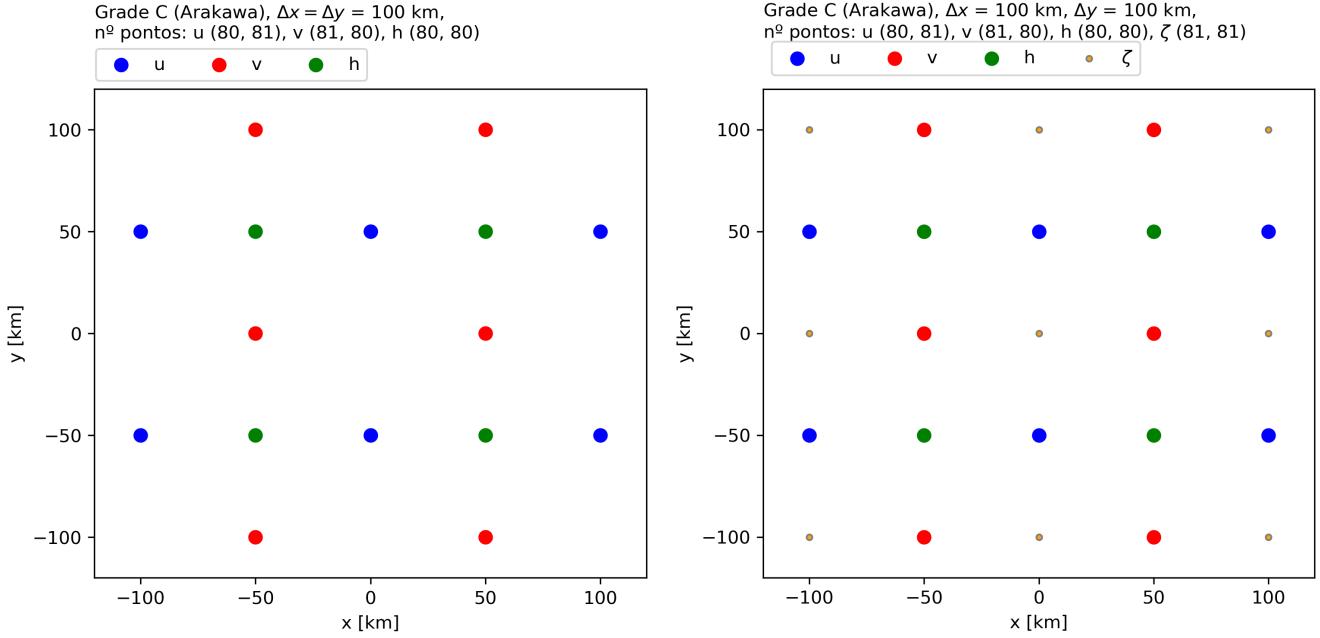


Figura 2: Configuração da grade C tipo Arakawa usados para os experimentos dos exercícios 4 e 5, respectivamente.

## 2. Descrição da metodologia

O exercício considera três condições no parâmetro de Coriolis ( $f=0$  como cenário ‘scen1’,  $f=f_0$  na latitude 20°S como cenário ‘scen2’ e  $f=\beta y$  para o plano beta equatorial como cenário ‘scen3’). O desenho da grade C foi feito no programa Python e gerou três tipos de matrizes que estão distribuídos espacialmente como mostra a Fig. 2, usados para os experimentos dos exercícios 4 e 5. Esta grade é muito utilizada nos modelos numéricos atmosféricos e é chamada assim porque os pontos da grade são distribuídos espacialmente na forma da letra “C”. Nela podemos ter a matrix  $h$  com  $80 \times 80$  pontos com variação espacial desde -4000 km até 4000 km. As duas seguintes apresentam matrizes para os componentes zonal (u) e meridional (v) com pontos adicionais nos eixos X e Y, respectivamente. A opção de fonte escolhida é de tipo oceanográfico de momentum zonal constante com ventos de leste, com gaussiana centrada no equador e alongada na direção zonal (Fig. 3 (b)), definida pela eq. 21. Para o exercício 5 também temos assinações para as condições iniciais (Fig. 3 (c) e (d)).

$$Fu = \exp \left( \frac{-Xu^2}{(Nrx.\Delta x)^2} - \frac{Yu^2}{(Nry.\Delta y)^2} \right) \frac{1}{24 * 3600} \quad (21)$$

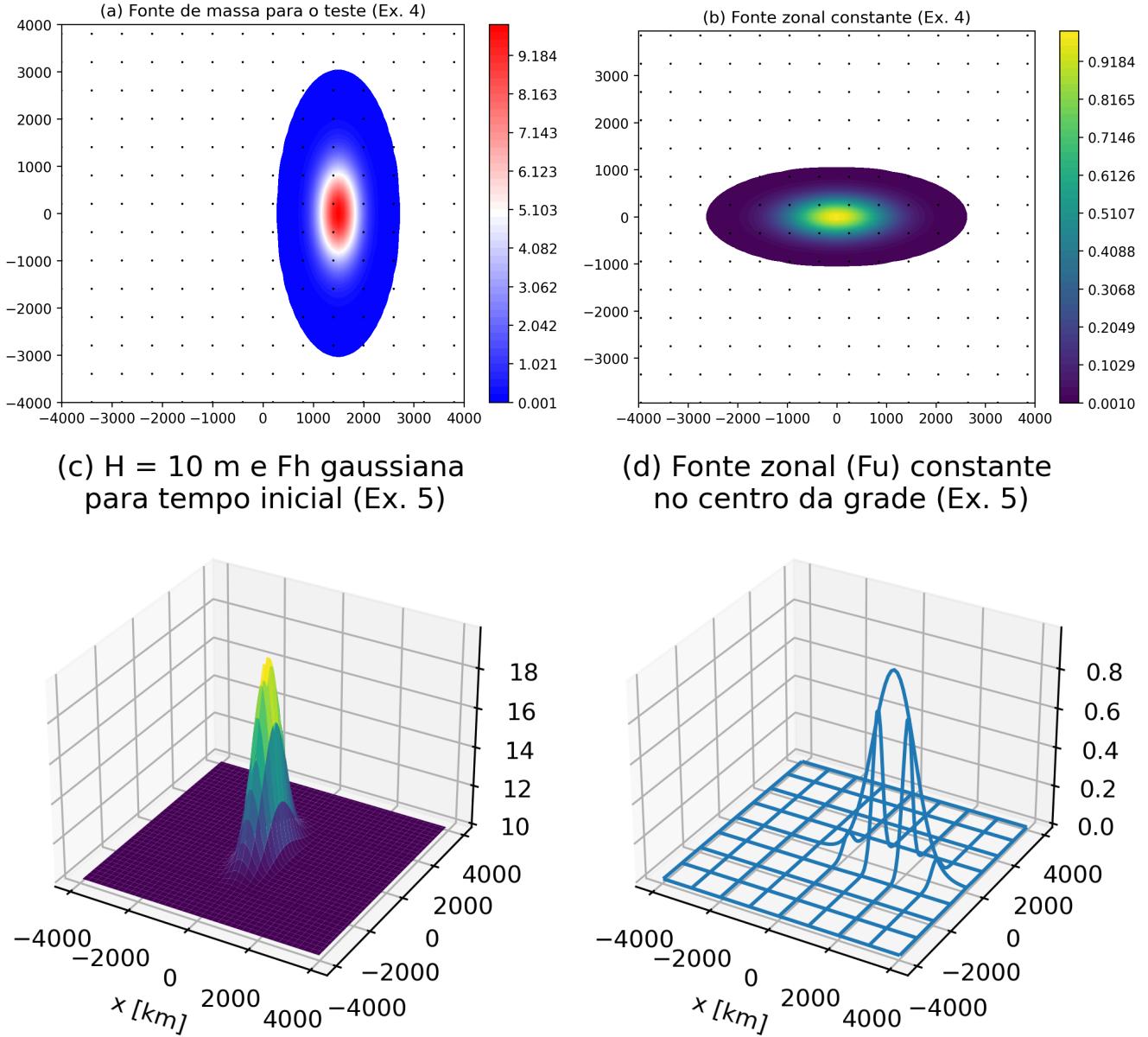


Figura 3: Fontes de massa e zonal consideradas para a integração no modelo de água rasa. (a) Fonte de massa ( $F_h$ ) como condição inicial para o teste de simetria do (Ex. 4), (b) Fonte zonal constante para o caso oceanográfico (Ex 4), (c) Fonte de massa gaussiana e elevação ( $F_h + H$ ) e (d) fonte zonal constante no centro da grade (Ex. 5).

Onde  $X_u$  e  $Y_u$  são os pontos na direção x e y da componente zonal ( $u$ ),  $Nrx$  e  $Nry$  são pontos na direção x e y para definir o alongamento da fonte zonal  $F_u$ . Ela representa escoamentos dos ventos do oeste no domínio em direção leste. Na simulação de água rasa não linearizada considera-se uma diminuição da forçante cada 24 horas até o dia 100. Antes de iniciar as integrações, três testes de simetria foram conduzidas para avaliar o código implementado em Python e as condições radiacionais nas bordas norte, sul e oeste. O teste de simetria considera somente uma fonte de massa no tempo inicial com  $H = 250$  m para 5 dias de simulação. A resolução espacial horizontal é de  $\Delta x = \Delta y = 100$  km.

Posteriormente ao teste de simetria, a simulação do caso oceanográfico para os três cenários considerou o período de 10 dias para o Ex. 4 e 100 dias para o Ex. 5, com um  $\Delta t = 60$  segundos. Os esquemas numéricos usados foram o Leap-frog e Lax-Wendroff. Os passos para rodar os experimentos foram baseados nas sugestões de Döös et al. (2020):

- As condições iniciais (CI) foram estabelecidas para  $n = 0$  para todos os indices  $i$  e  $j$  numa grade tipo C:  $u_{i+1,j}^{n=0} = 0$ ,  $v_{i,j+1}^{n=0} = 0$ ,  $h_{i,j}^{n=0} = 0$ . No caso do código em Python, a programação foi feito com o módulo numpy. O chamado dos indexes neste módulo é diferente no estilo `un[j, i]` onde  $i$  é a variação no eixo X (filas) e  $j$  no eixo Y (colunas).
- O código em Python para a construção do modelo de água rasa foram definidos variáveis seguintes: passo de tempo anterior “n-1” (`unm1, vnm1, hnm1`), passo atual “n” (`un, vn, hn`) e passo futuro “n+1” (`unp1, vnp1, hnp1`).
- O primeiro passo de tempo ( $n = 1$ ) foi integrado com o esquema “Euler-forward”, os demais passos de tempo foram aplicados com Leapfrog ou Lax-Wendroff.
- Os resultados da integração foram salvados cada 60 segundos para o Ex. 4 e cada 1 dia para o Ex. 5.
- Também foram calculados o volumem, energia total e vorticidade ao quadrado para cada passo de tempo.
- Finalmente, foram gerados mapas de divergência e vorticidade.

A programação da discretização das equações foi escrita em código de Python, disponível no GitHub “Modelagem” do autor, Exercício 4 e 5, [functions.py](#).

## 2.1 Teste de simetria e do radiacional nas fronteiras sul, norte e oeste

O teste de simetria considerou simular uma fonte de massa inicial definida na eq. 22,

$$Fh = 10 * \exp \left( \frac{-(Xh - 15\Delta x)^2}{(4\Delta x)^2} - \frac{Yh^2}{(10 \Delta y)^2} \right), \quad (22)$$

onde a borda leste é rígida e se comporta como uma parede, enquanto as demais são abertas ou radiacionais que permitem o passo das ondas com pequenas reflexões de ondas curtas. Podemos observar na Fig. 4 que na integração no dia 1 (esquerda), existe uma reflexão na parte leste, depois no dia 2 a primeira onda saiu fora do domínio oeste com reflexões de ondas curtas no sentido na direção leste, muito mais visível para o cenário ‘scen1’ com  $f = 0$ .

Ao longo da integração, também foram salvados os dados de massa e energia para os três cenários como podemos observar na Fig. 5. A massa diminui até antes do final do primeiro dia para o primeiro cenário, com aumentos no segundo dia quando a primeira onda sai fora do domínio oeste e com reflexões para o sentido leste. O cenário 2 ‘scen2’ ( $f$  em  $-20^\circ S$ ) mantém a quantidade de massa com decréscimos e acréscimos que pode estar relacionado com a presença da massa formada com vorticidade gerada. O cenário 3 ‘scen3’ também tem um comportamento parecido com decréscimos e acréscimos na massa com tendência na diminuição até terminar a integração. A energia cinética também diminui até valores de zero para todos os cenários, começando desde o final do dia 2 até o fim da integração.

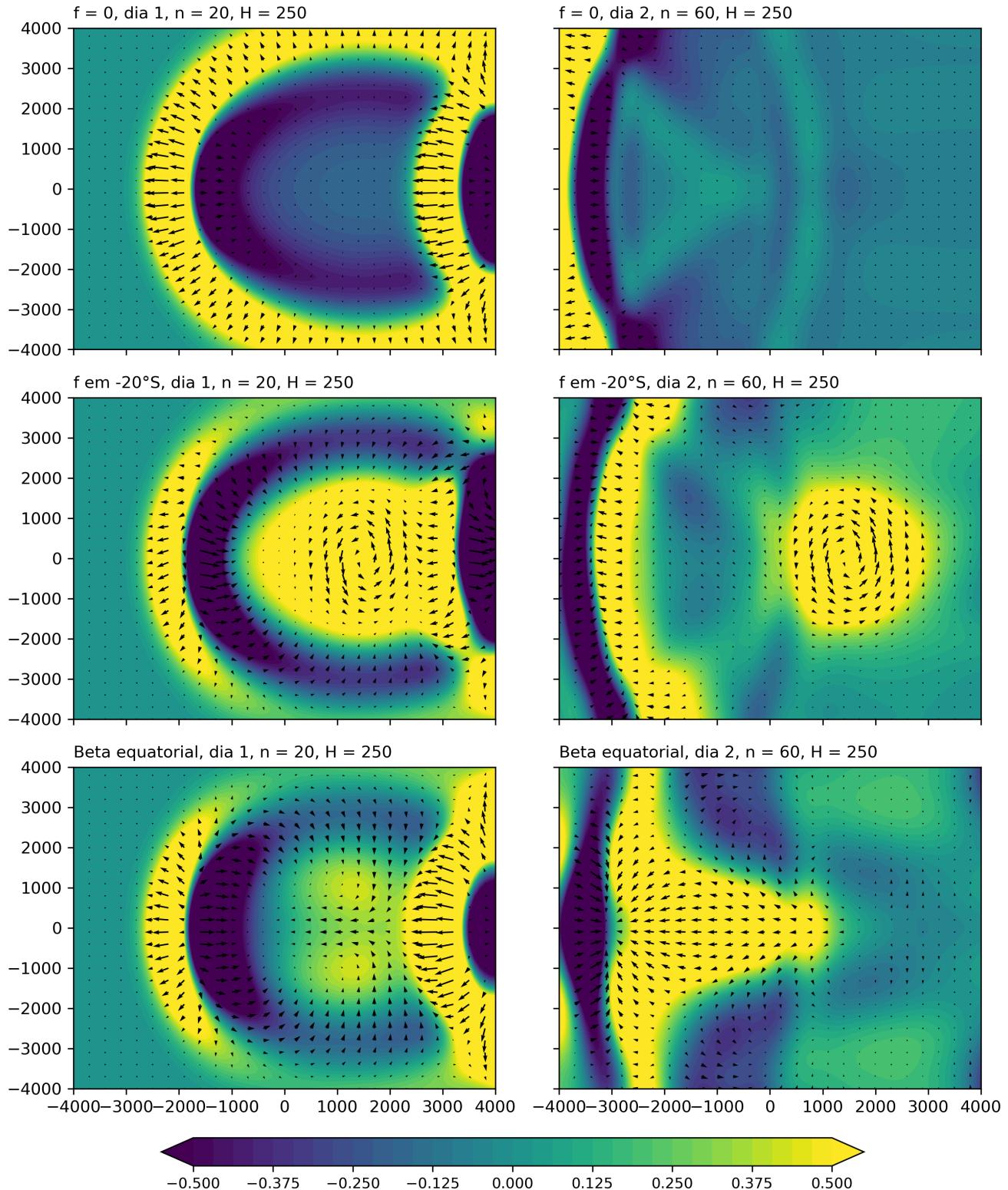


Figura 4: Teste de simetria e das bordas com condição radiacional (norte, sul, oeste) e rígida (leste) para os diferentes valores de Coriolis ( $f = 0$  como ‘scen1’ e  $f$  em  $-20^\circ\text{S}$  como ‘scen2’) e no plano beta equatorial (‘scen3’).

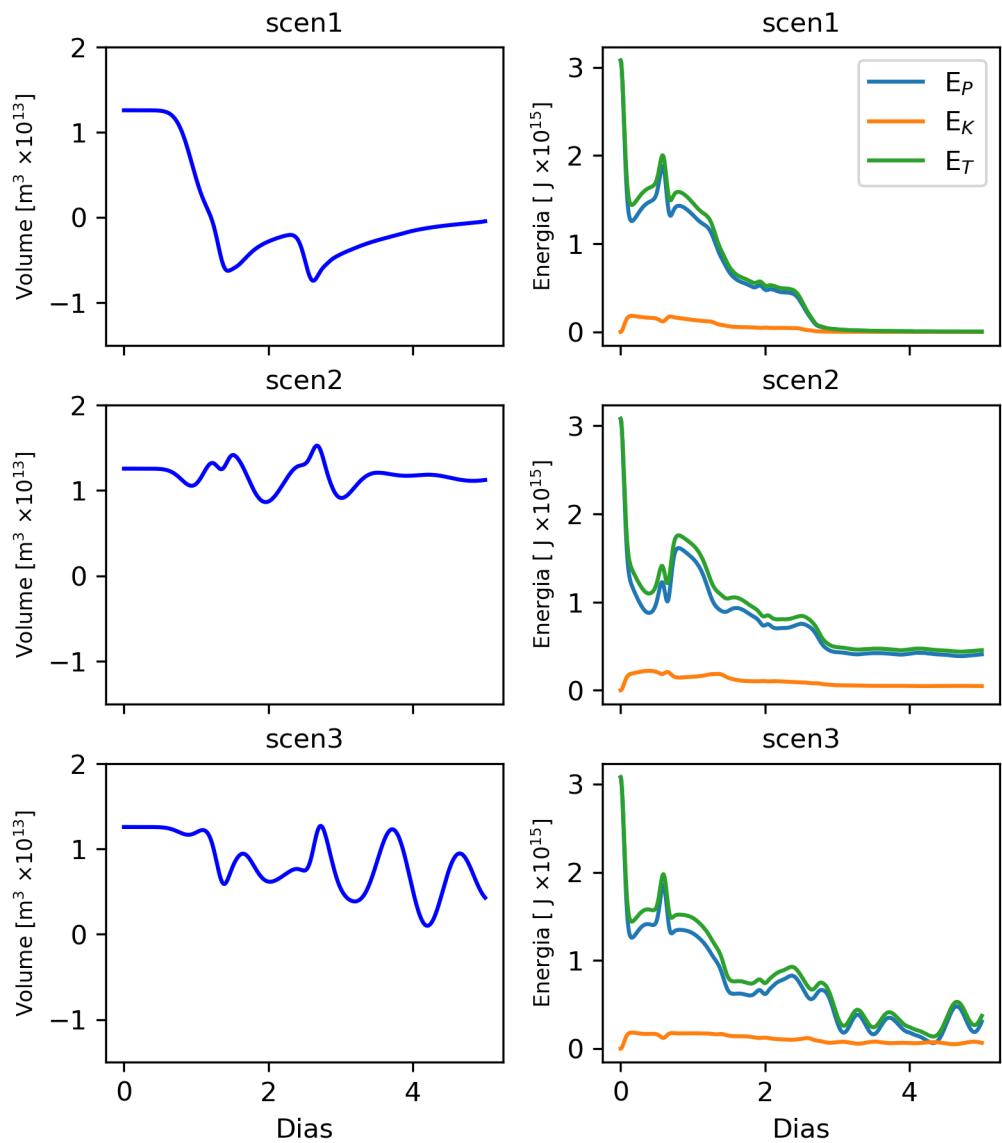


Figura 5: Teste de conservação de massa e energia (potencial e cinética).  $E_P$  = energia potencial,  $E_K$  = energia cinética,  $E_T$  =  $E_P + E_K$ , definido como energia total.

## 3. Resultados

### 3.1 Modelo de água rasa linearizado (Ex. 4)

Os resultados de variação de ‘h’ e os ventos para o caso da fonte de momentum zonal constante são mostrados na Fig. 6 para diferentes valores de Coriolis ( $f = 0$ ,  $f$  constante para a latitude  $20^{\circ}\text{S}$  e variação de  $f$  no plano beta equatorial) para os dias 2 e 8. Os mapas de divergência e vorticidade são apresentados na Fig. 7 para o dia 6 e cenário. No equador podemos notar que os valores são nulos. No cenário 2 ‘scen2’ ( $f$  para  $-20^{\circ}\text{S}$ ) a variação dos valores divergentes e de vorticidade são complementários no domínio todo. A Fig. 8 mostra o volume e energia total dos resultados de simulação para cada cenário. O volume apresenta um comportamento constante ao longo do tempo com exceção do cenário 1 com acréscimos depois do dia 5. A energia potencial ( $E_P$ ) aumenta devido à fonte zonal ( $F_u$ ) constante que acrescenta as variações positivas de ‘h’ na direção leste. A energia cinética ( $E_K$ ) tem valores de zero ao longo da integração do tempo.

que incrementa a magnitude das velocidades do vento zonal e meridional ao longo do tempo da integração.

### 3.2 Modelo de água rasa não linearizado (Ex. 5)

A Fig. 9 Fig. 10

A Fig. 11

## 4. Discussão dos resultados

## Bibliografia

- Döös, K., Lundberg, P., Campino, A.A. (2020). Basic Numerical Methods in Meteorology and Oceanography, 1.<sup>a</sup> ed. Department of Meteorology, Stockholm University, Stockholm.
- Mesinger, F., Arakawa, A., Committee, G.A.R.Programme.J.O., Scientific Unions, I.C. of, Organization, W.M. (1976). [Numerical Methods Used in Atmospheric Models](#). World Meteorological Organization, International Council of Scientific Unions.
- Randall, D.A. (2021). An Introduction to Numerical Modeling of the Atmosphere.

## Apêndice A: Material suplementar

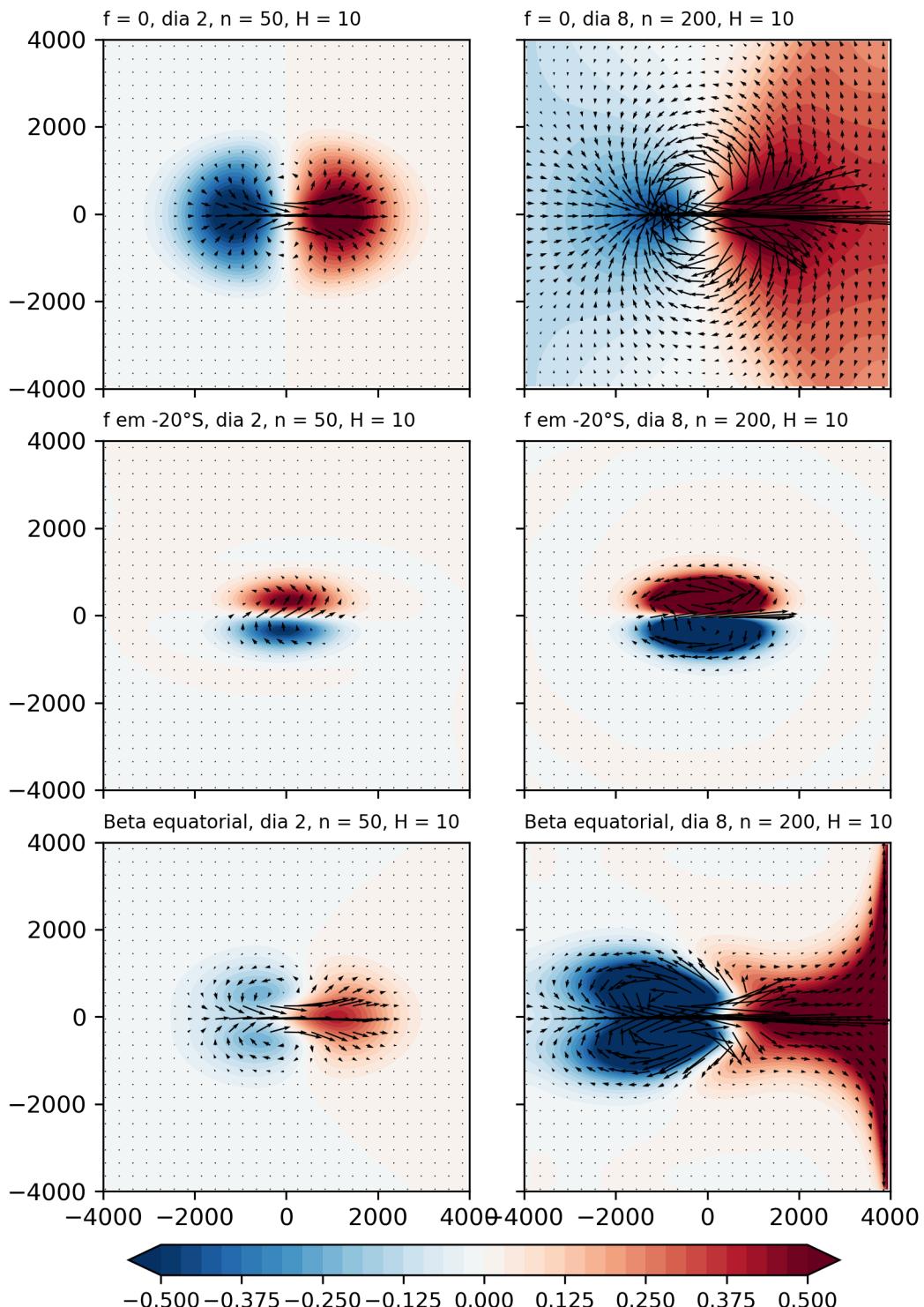


Figura 6: Modelo de água rasa linear: Variação de  $h$  com fonte de momentum zonal ( $F_u$ ) para diferentes valores de Coriolis ( $f$ ).

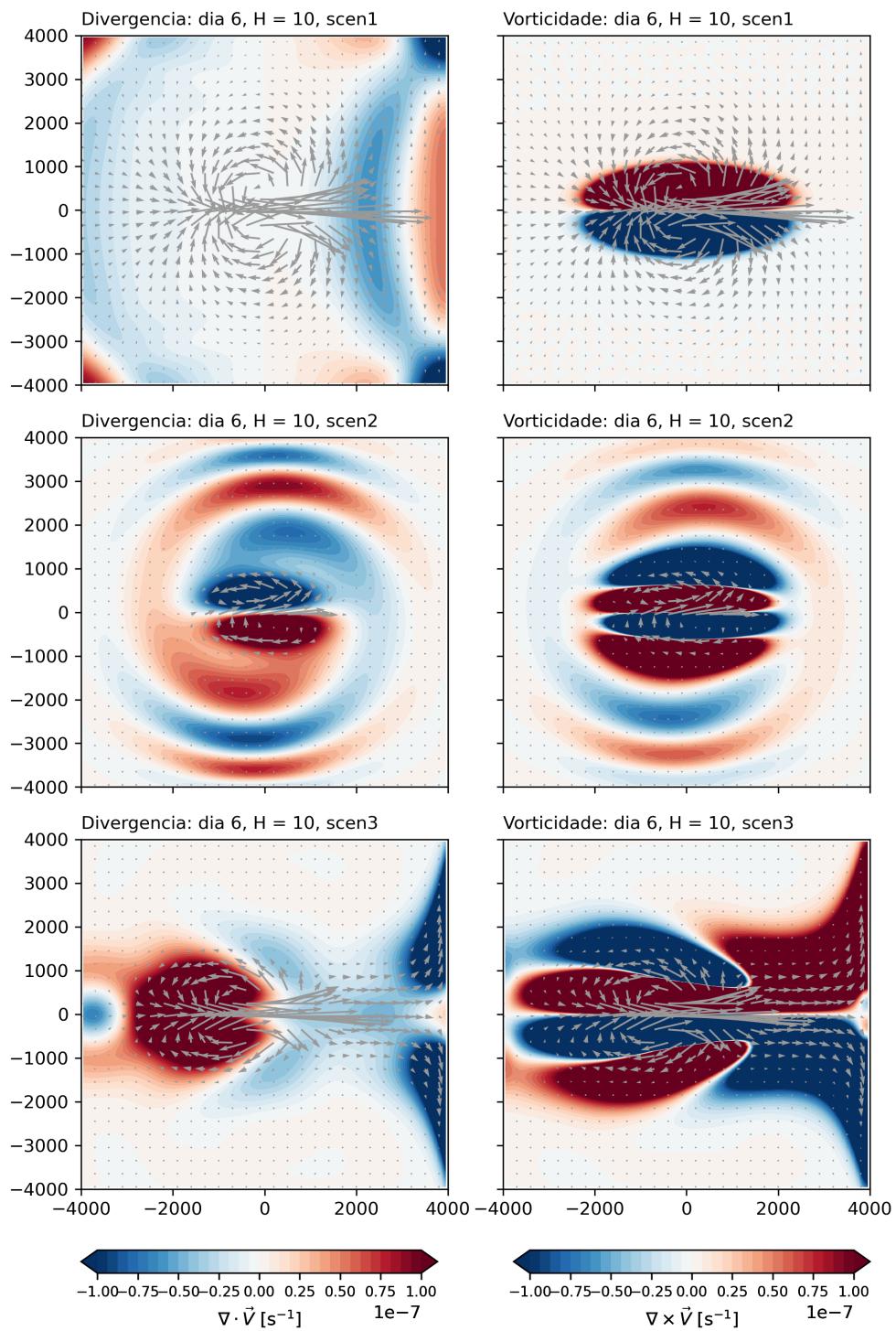


Figura 7: Modelo de água rasa linear: Mapas da divergência e vorticidade para os diferentes cenários: 'scen1' ( $f = 0$ ), 'scen2' ( $f$  constante na latitude  $-20^\circ\text{S}$ ) e 'scen3' (plano beta equatorial).

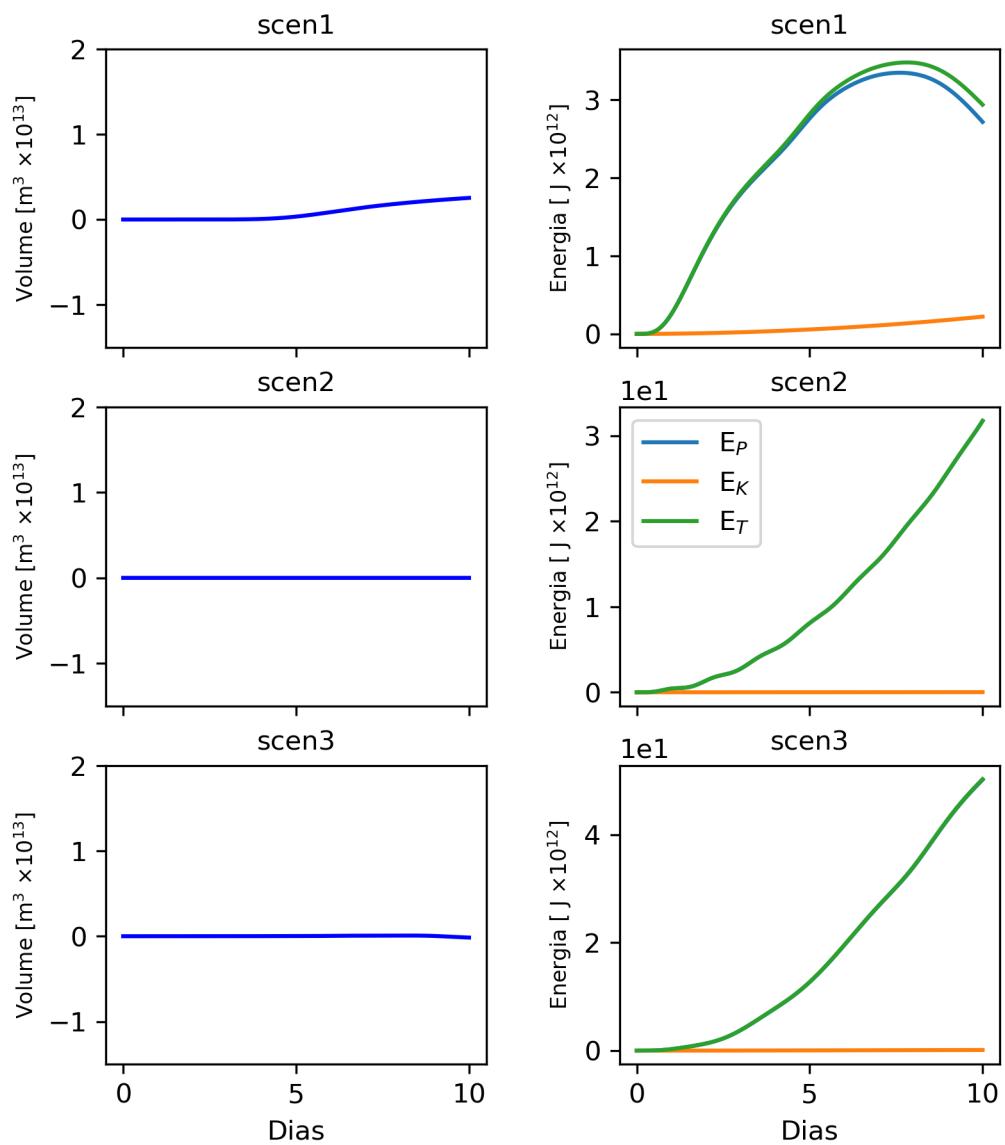


Figura 8: Modelo de água rasa linear: Volume e energia total para cada cenário.  $E_P$  = energia potencial,  $E_K$  = energia cinética e  $E_T = E_P + E_K$  como a energia total.

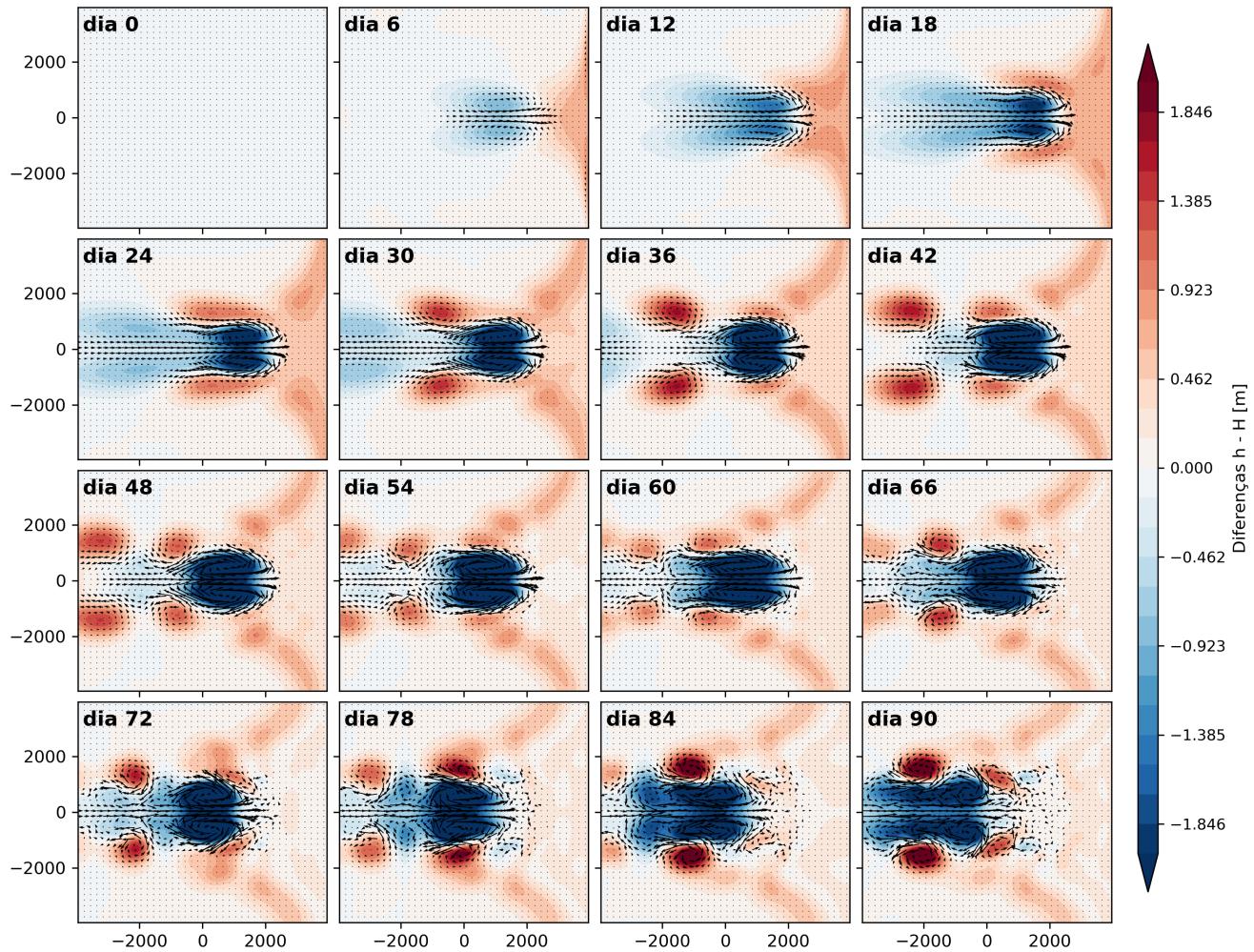


Figura 9: Modelo de água rasa não linear: Variação de  $h - H$  com fonte de momentum zonal ( $F_u$ ) para o cenário 'scen3' (plano beta equatorial). Onde  $H = 10$  m para um tempo de integração de 100 dias e tempo de resolução  $\Delta t = 60$  s.

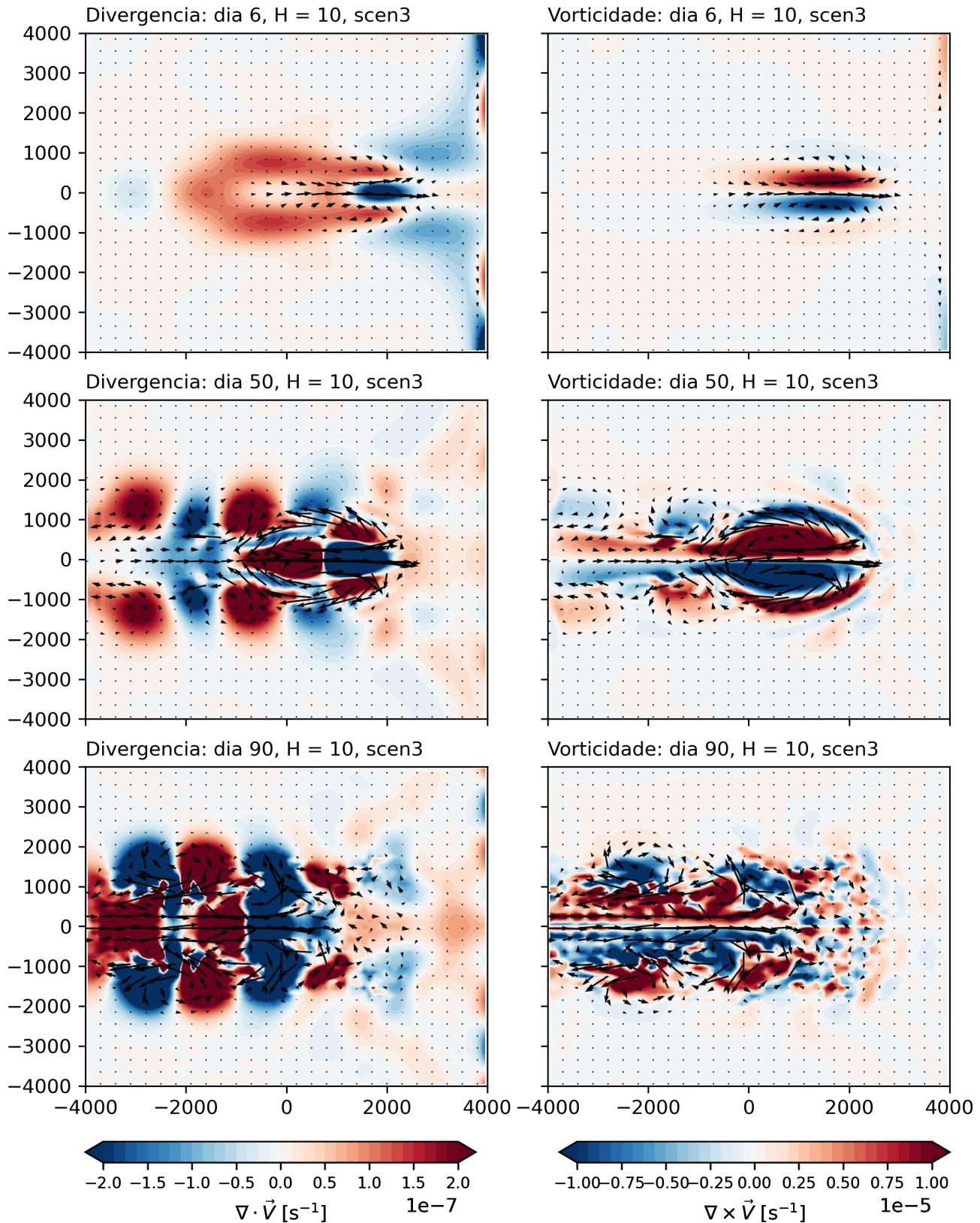


Figura 10: Modelo de água rasa não linear: Mapas da divergência e vorticidade para os diferentes cenários para o 'scen3' (plano beta equatorial).

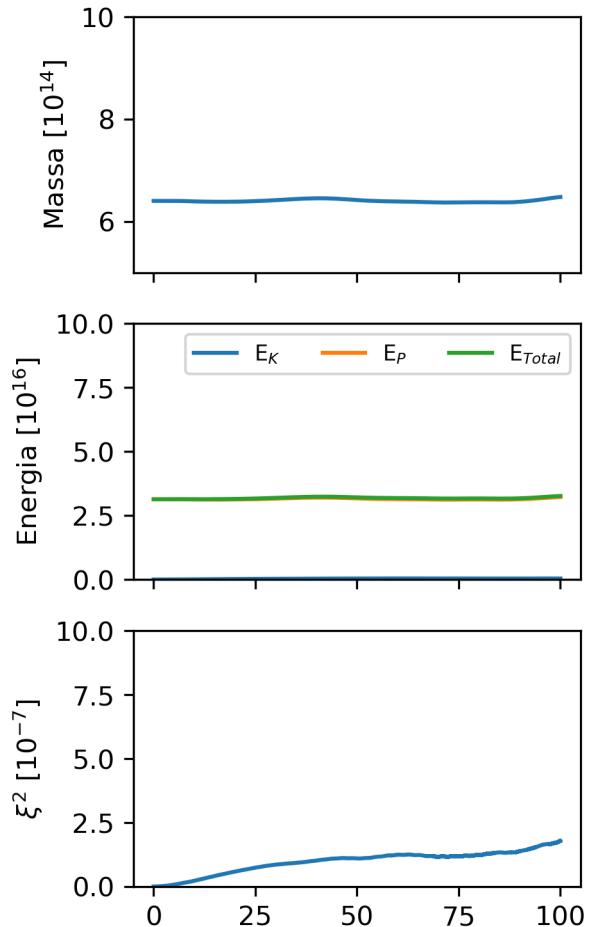


Figura 11: Modelo de água rasa não linear: Variação temporal de massa, energia e enstrofia