Modelo de água rasa linear 2D aplicado a uma fonte oceanográfica de momentum zonal constante tipo gaussiana centrada no equador

Alejandro H. D. Peralta*

Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Universidade de São Paulo

21 de novembro de 2022

Resumo

Neste trabalho apresentamos a aplicação do modelo de água rasa 2D linearizado para o caso oceanográfico para uma grade tipo C Arakawa. No centro da grade tem-se uma fonte constante de momento zonal do vento na região equatorial para três casos de Coriolis ($f = 0$, f constante para a latitude de 20°S e f no plano beta equatorial). As condições de fronteira usadas foram radiacional (oeste, norte e sul) e de tipo rígida na fronteira leste. Os resultados mostram as integrações do tempo como o esquema Leap-frog com a geração de mapas da divergência e vorticidade, e verificação da conservação de massa e energia.

Palavras-chave: Modelo de água rasa, 2D, fonte zonal constante.

1. Introdução

O modelo de água rasa considera equações para representar o ajuste geostrófico para o deslocamento das ondas de gravidade e inerciais considerando as propriedades conservativas de momentum e massa (Randall, 2021). O modelo é importante para representar fenômenos atmosféricos ou oceanográficos. Nos estudos de qualidade do ar pode representar a variação da camada de mistura ao longo do dia que impacta na concentração dos poluentes. O modelo também tem aplicações oceanográficas onde a fonte do vento zonal pode afetar o deslocamento das correntes como propagação de ondas com variação na altura do fluído, como é ilustrado na Fig. 1. Conforme com Döös et al. (2020), as ondas de gravidade no modelo 1D pode-se propagar ao longo do eixo x em ambas direções com uma velocidade $c = \sqrt{gH}$ sem depender do número de onda pelo que é considerado não dispersivo; onde g é a aceleração da gravidade e H a altura média do fluído.

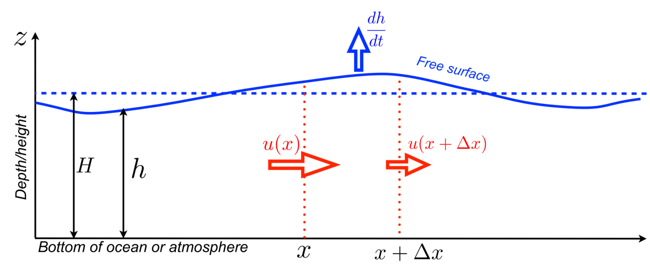

Figura 1: Modelo de água rasa 1D, extraído de Döös et al. (2020).

*Estudante de doutorado, email aperalta@usp.br.

1.1 Modelo de água rasa 2D linearizado

O modelo de água rasa 2D (e.g., nos eixos "x" e "y") presenta equações de variação zonal (eq. 1), meridional (eq. 2) e de altura (eq. 3). As equações tem como parâmetros o vento zonal (u), meridional (v), altura geopotencial (ϕ) e a aceleração de Coriolis $f \equiv 2\Omega \sin\varphi$, onde Ω é a frequência angular da rotação da Terra ($\Omega = \frac{2\pi}{86400}$ s^{-1}) e φ a latitude. As equações estão balanceadas com as fontes de momentum zonal (F_u), meridional (F_v) e de massa (F_ϕ).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = F_u \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_v \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + \phi.\nabla(V) = F_\phi \quad (3)$$

Se as equações mostradas acima têm um campo básico nulo do vector horizontal $\vec{V}$, podemos obter as seguintes equações linearizadas balanceadas com as fontes de momentum:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + g\frac{\partial h}{\partial x} = F_u, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - fu + g\frac{\partial h}{\partial y} = F_v, \quad (5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = F_\phi. \quad (6)$$

As equações linearizadas podem ser discretizadas para diferentes tipos de grades chamadas de tipo Arakawa (Mesinger et al., 1976). A grade mais usada pelos modelos atmosféricos como o caso do modelo WRF-Chem é do tipo C, ilustrado na Fig. 2. O Coriolis (f) no plano beta equatorial está definido como $f = \beta y$, onde $\beta = \frac{2\Omega}{a}$ (a como rádio da terra equal a 6371000 m). Se usamos o esquema leap-frog para discretizar as equações linearizadas podemos ter as seguintes aproximações:

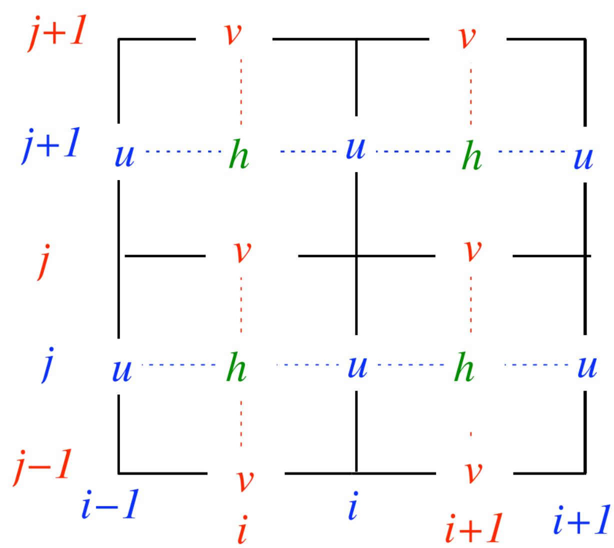

Figura 2: Grade C de Arakawa para o modelo de água rasa linear 2D, extraído de Döös et al. (2020).

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = -g\frac{h_{i+1,j}^n - h_{i,j}^n}{\Delta x} + \frac{f}{4}(v_{i,j}^n + v_{i+1,j}^n + v_{i+1,j-1}^n + v_{i,j-1}^n), \quad (7)$$

$$\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = -g\frac{h_{i,j+1}^n - h_{i,j}^n}{\Delta y} - \frac{f}{4}(u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i-1,j+1}^n + u_{i-1,j}^n), \quad (8)$$

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = -H\left(\frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + \frac{v_{i,j}^n - v_{i,j-1}^n}{\Delta y}\right). \quad (9)$$

Conforme com Döös et al. (2020), a analise de estabilidade, assumindo que $\Delta x = \Delta y$, satisfaz o critério para todas as longitudes de onda quando

$$\mu \equiv \frac{\sqrt{gH}\Delta t}{\Delta x} \leq 0.35$$

1.2 Condições de fronteira para o modelo linear 2D

Para as condições de fronteira no caso da grade C tipo Arakawa com Nx $\times$ Ny pontos para h, os componentes zonal (u) e meridional (v) são usados para representar a propagação radiacional devido que eles têm pontos adicionais nas direções Oeste-Leste (Nx+1) e Sul-Norte (Ny+1), respetivamente em comparação que h. Se consideramos f=0, a condição radiacional na fronteira oeste é definida como $\partial u_0/\partial t - c\,\partial u_0/\partial x = 0$ e discretizada como

$$u_{0,j}^{n+1} = u_{0,j}^{n} + c\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_{1,j}^{n} - u_{0,j}^{n}).$$

Na fronteira leste temos uma condição rígida constante conforme às condições estabelecidas pelo exercício 4, discretizado como $u_{Nx+1,j}^{n+1} = 0$. Na fronteira sul a condição radiacional é definida como $\partial v_0/\partial t - c\,\partial v_0/\partial y = 0$, discretizado como

$$v_{i,0}^{n+1} = v_{i,0}^{n} + c\frac{\Delta t}{\Delta y}(v_{i,1}^{n} - v_{i,0}^{n}).$$

Na fronteira norte a radiacional é $\partial v_{Ny+1}/\partial t + c\,\partial v_{Ny+1}/\partial y = 0$ que pode ser discretizado como

$$v_{i,Ny+1}^{n+1} = v_{i,Ny+1}^{n} - c\frac{\Delta t}{\Delta y}(v_{i,Ny+1}^{n} - v_{i,Ny}^{n}).$$

1.3 Divergência e vorticidade

As equações 10, 11 estão relacionadas com a equação de água rasa não linearizada. Neste exercício 4, os termos de divergência eq. 10 e vorticidade eq. 11 foram considerados para gerar os mapas respetivos para o caso da integração da fonte constante de vento zonal oceânico.

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{10}$$

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{11}$$

A vorticidade absoluta, conforme com Döös et al. (2020), está definida como

$$\xi \equiv (f + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\frac{1}{h}.$$

1.4 Verificação da conservação da massa e energia

Finalmente, a formulação do modelo preserva as propriedades conservativas e asseguram a estabilidade computacional do modelo. A conservação da massa ajuda em manter a pressão superficial dentro dos valores esperados realistas (Döös et al., 2020), definida como

$$M = \sum_{i=1}^{Nx}\sum_{j=1}^{Ny} h_{i,j}\Delta x\Delta y.$$

A conservação de energia (potencial e cinética) são definidas como segue,

$$E_P = \frac{g}{2}\sum_{i=1}^{Nx}\sum_{j=1}^{Ny}(h_{i,j})^2\Delta x\Delta y,$$

$$E_K = \frac{H}{2}\sum_{i=1}^{Nx}\sum_{j=1}^{Ny}[(u_{i,j}^{n})^2 + (v_{i,j}^{n})^2]\Delta x\Delta y.$$

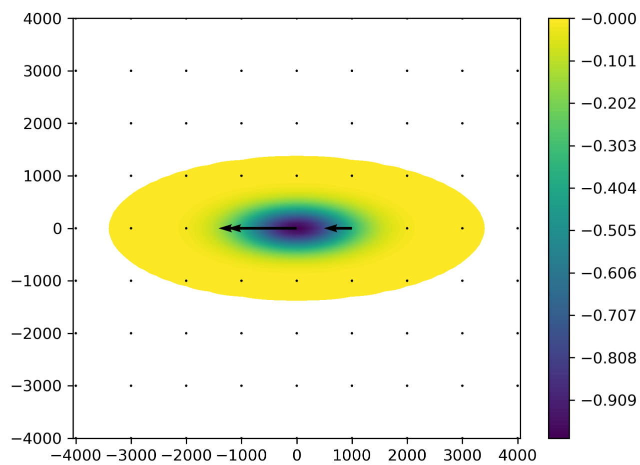

Figura 3: Fonte de momentum zonal F_u com sinal negativo, com alongamento de pontos de Nrx=10 e Nry=4.

2. Descrição da metodologia

O exercício considera três condições com variação do parâmetro Coriolis (f=0, f=f_0 na latitude 20°S e f=βy para o plano beta equatorial). A opção de fonte escolhida é de tipo oceanográfico de momentum zonal constante com ventos de leste, com gaussiana centrada no equador e alongada na direção zonal (Fig. 3), definida pela eq. 12.

$$Fu = -\frac{exp(\frac{-Xu^2}{(Nrx.\Delta x)^2} - \frac{Yu^2}{(Nry.\Delta y)^2})}{24 * 3600} \quad (12)$$

Onde Xu e Yu são os pontos na direção x e y da componente zonal (u), Nrx e Nry são pontos na direção x e y para definir o alongamento da fonte zonal Fu. Ela representa escoamentos dos ventos do leste no domínio em direção oeste. No processo de formação do El Niño-Southern Oscillation (ENSO) quando os ventos são do leste, temos um fenômeno conhecido como "La Niña" (período frio), como é ilustrado na Fig. 4.

O desenho da grade C no programa Python gerou três tipos de matrizes. O primeiro com o domínio de h de 81 $\times$ 81 pontos com variação espacial desde -4000 km até 4000 km. As duas seguintes apresentam matrizes para os componentes zonal e meridional com pontos adicionais nos eixos X e Y. No Apêndice A, mostramos a configuração do domínio como grade tipo C como base para calcular as aproximações das perturbações da fonte constante zonal do leste. As condições de fronteira escolhidas são radiacional no oeste, norte e sul, e uma condição rígida na fronteira leste. As variáveis escolhidas de H foram de 1 m; os primeiros testes foram conduzidos para um $H = 250$ m. A resolução espacial horizontal é de $\Delta x = \Delta y = 100$ km, com integração numérica para 240 dias com um $\Delta t = 3600$ segundos. O esquema usado é o leap-frog com resultados salvados para cada passo de tempo "n". Também foram calculados o volumem e energia total para cada passo de tempo. Finalmente, foram gerados mapas de divergência e vorticidade para o dia 120 que corresponde à metade do período.

Conforme com as sugestões de Döös et al. (2020), primeiro as condições iniciais foram estabelecidas para $n = 0$ para todos os indices i e j numa grade tipo C: $u^{n=0}_{i+1,j}$ = 0, $v^{n=0}_{i,j+1}$ = 0, $h^{n=0}_{i,j}$ = 0. Depois, a integração das equações do modelo de água rasa considerou o esquema *Euler-forward* para o primeiro passo de tempo ($n = 1$). Os seguintes passos de tempo seguiram com uma integração das equações com o esquema leap-frog. A programação da discretização das equações foi escrita em código de Python, disponível no GitHub "Modelagem", Exercício 4, functions.py.

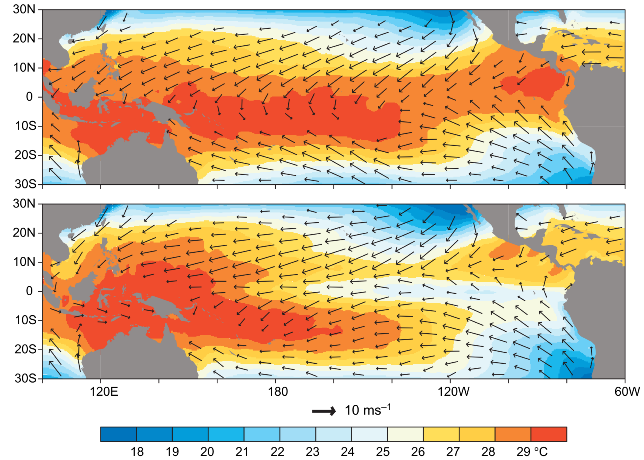

Figura 4: Representação do ciclo ENSO (anos 1997-1998, acima) para a temperatura superficial do mar e ventos de superfície comparado com novembro-abril de período frio (1998-1999, abaixo). Figura extraída de Wallace e Hobbs (2006).

3. Resultados

Os resultados de variação de 'h' e os ventos para o caso da fonte de momentum zonal constante (vento forçante de leste, como mostra a Fig. 3) são mostrados na Fig. 5 para diferentes valores de Coriolis (f = 0, f constante para a latitude 20°S e variação de f no plano beta equatorial). Os mapas de divergência e vorticidade são apresentados na Fig. 6.

A Fig. 7 mostra o volume e energia total dos resultados de simulação para cada cenário.

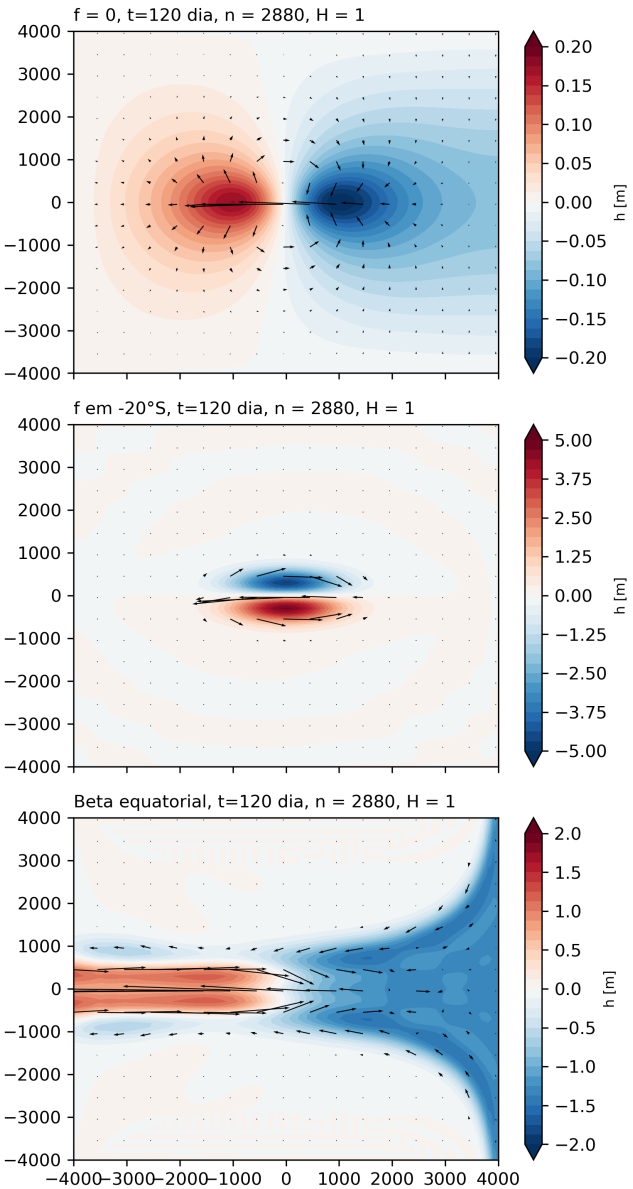

Figura 5: Variação de h com fonte de momentum zonal para diferentes valores de Coriolis (f).

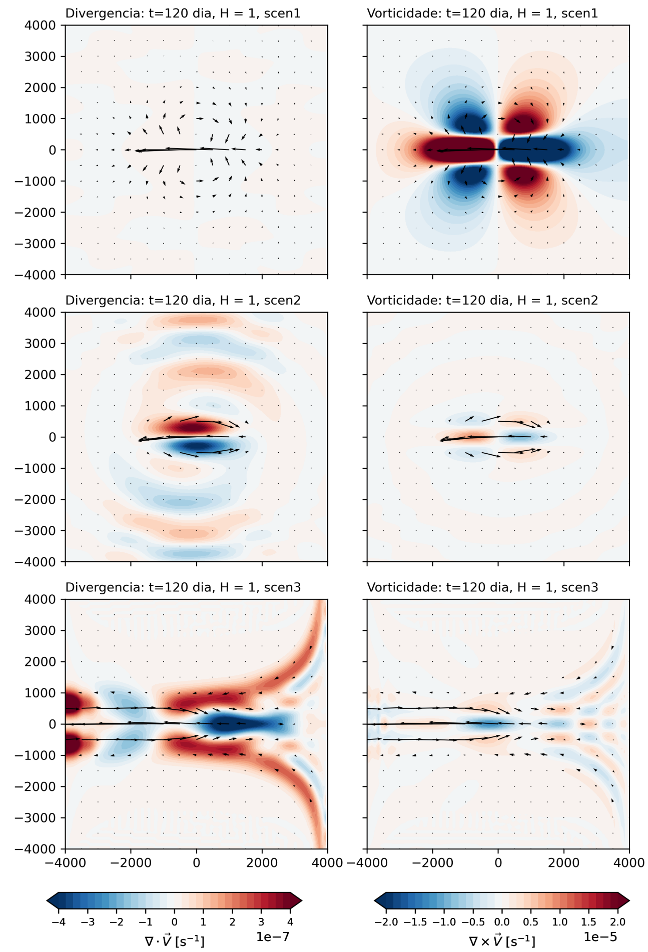

Figura 6: Mapas da divergência e vorticidade para os diferentes cenários: 'scen1' (f = 0), 'scen2' (f constante na latitude -20°S) e 'scen3' (plano beta equatorial).

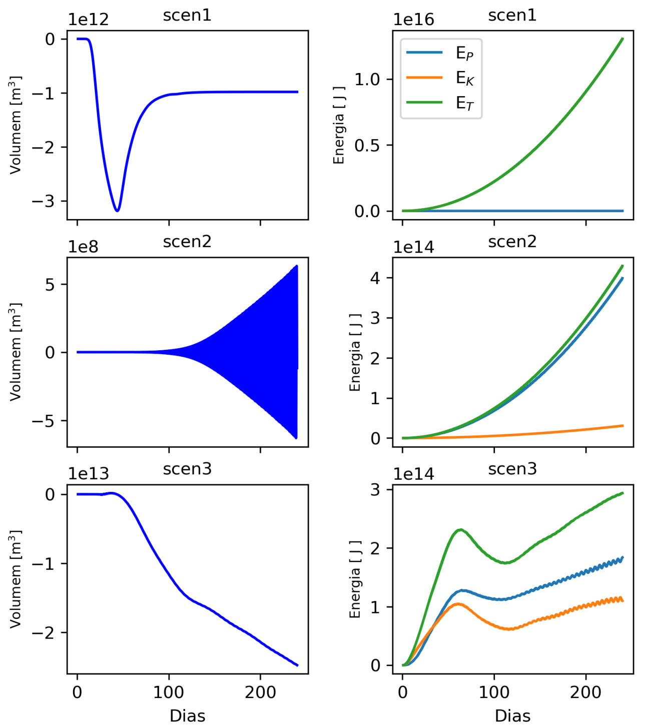

Figura 7: Volume e energia total para cada cenário. E$_P$ = energia potencial, E$_K$ = energia cinética e E$_T$ = E$_P$ + E$_K$.

4. Discussão dos resultados

Bibliografia

Döös, K., Lundberg, P., Campino, A.A. (2020). Basic Numerical Methods in Meteorology and Oceanography, 1.ª ed. Department of Meteorology, Stockholm University, Stockholm.

Mesinger, F., Arakawa, A., Committee, G.A.R.Programme.J.O., Scientific Unions, I.C. of, Organization, W.M. (1976). Numerical Methods Used in Atmospheric Models. World Meteorological Organization, International Council of Scientific Unions.

Randall, D.A. (2021). An Introduction to Numerical Modeling of the Atmosphere.

Wallace, J.M., Hobbs, P.V. (2006). Atmospheric Science An Introductory Survey, ELSEVIER. ed. University of Washington, London.

Apêndice A

A Fig. 8 mostra o domínio usado para simular os três experimentos.

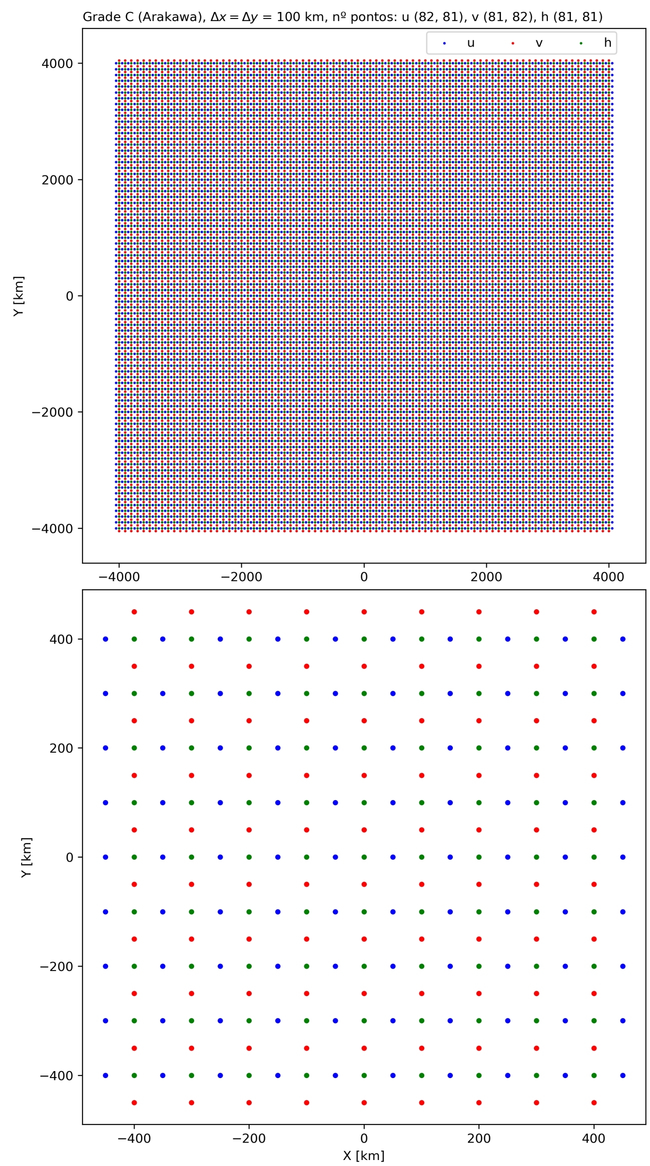

Figura 8: Configuração da grade C tipo Arakawa para os três experimentos. Acima está o domínio e abaixo um acercamento na parte central do dominio