

# Soluções numéricas para resolver a equação de advecção para o transporte de um poluente para diferentes condições iniciais de comprimento de onda

Alejandro H. D. Peralta\*

*Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo*

21 de setembro de 2022

## Resumo

O transporte dos poluentes na atmosfera acontece para diferentes níveis de escala temporal e espacial com impactos globais e locais, pelo que estudar este fenômeno é de interesse para achar soluções com modelos representativos. Este trabalho mostra as soluções numéricas relacionadas com o problema de transporte de um pulso inicial de poluição com vento constante, representado pela equação de advecção em 1D. A solução do exercício considerou condições iniciais e de fronteira para ondas tipo gaussiana e retângulo, todas elas representam três diferentes comprimentos de onda. Além da aplicação do esquema numérico, os resultados também foram acompanhados da solução analítica. Os experimentos mostraram diferenças com a solução analítica, algumas delas (ordem 1 e Matsuno) com maior atenuação da amplitude que outras (RK4, leapfrog, ordem 4 e Crank-Nicolson). Apesar de configurar os esquemas numéricos com valores de número de Courant  $< 1$ , os resultados para as ondas curtas mostraram a dispersão computacional que levam soluções numéricas espúrias com decréscimos na velocidade de fase. Em conclusão, a avaliação do esquema numérico para resolver uma aproximação da equação de advecção precisa de dois indicadores como a estabilidade do valor do CFL e a relação de dispersão. Este último indicador mostra se o esquema com uma resolução espacial específica vai experimentar oscilações espúrias (e.g., concentrações negativas de poluentes), não monotônicas, e que vão afetar o desempenho dos modelos eulerianos em resolver o transporte das concentrações indicadoras da qualidade do ar que sempre têm que ser positivas.

## 1. Introdução

O transporte das espécies químicas na atmosfera e as propriedades das massas de ar são afetadas pelo movimento na escala global, baixando até níveis de alta resolução em milímetros. A física deste fenômeno é de interesse para entender o impacto da natureza nas atividades humanas e vice-versa. A ideia é conseguir um modelo muito representativo da realidade que mostra como as propriedades conservativas são transportadas pelos ventos, conhecido como advecção. Atualmente, os modelos numéricos usam aproximações para resolver o escoamento, também assimilam observações das estações meteorológicas para forçar o modelo a representar condições reais, mas com altos custos computacionais. Os métodos numéricos usados nos modelos tentam aproximar as soluções das equações de derivadas parciais. A aplicação do método para resolver a advecção de alguma propriedade conservativa no espaço e tempo tem como objetivo nove considerações (Rasch e Williamson, 1990, citado em Brasseur e Jacob, 2017): 1) precisão, 2) estabilidade, 3) monotonicidade, 4) conservação, 5) transportabilidade, 6) localidade, 7) correlatividade, 8) flexibilidade e 9) eficiência.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U * \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Este trabalho apresenta as soluções numéricas relacionadas com o problema de transporte de um pulso inicial de poluição com vento constante, representado pela equação de advecção em 1D (eq. 1). Os clássicos esquemas numéricos

---

\*Estudante de doutorado, email [aperalta@usp.br](mailto:aperalta@usp.br)

usados no modelo foram de ordem 1, leapfrog de ordem 2 (espaço e tempo), leapfrog de 4a ordem, Matsuno (método iterativo), Crank-Nicolson (método implícito) e finalmente um Runge Kutta de 4a ordem no tempo com um esquema de 4a ordem no espaço. Para resolver a eq. 1 o modelo precisou de condições iniciais e de fronteira; as equações Gaussiana e Retângulo foram usadas para calcular a condição inicial. O esquema *leapfrog* usou três condições de fronteira de tipo fixa, radiacional e periódica. Os demais esquemas numéricos somente usaram a condição periódica na fronteira, como se fosse uma esfera; onde  $C(b, t) = C(a, t)$  considera que a onda entra na direita ( $x = b$ ) e volta pela esquerda ( $x = a$ ). Além da aplicação do esquema numérico, os resultados também são acompanhados da solução analítica ( $C(x, t) = G(x - Ut)$ ) que corresponde à translocação da função na direção  $x$  para uma velocidade  $U$ .

## 1.1 Esquemas numéricos usados

### Esquema de ordem 1

O método simples para resolver a eq. 1 para uma velocidade constante positiva é o esquema *Euler Forward*, ele aproxima a derivada do tempo com diferenças progressivas e no espaço com diferenças regressivas (FTBS, siglas em inglês). O esquema é regressivo no espaço devido à sinal positiva da velocidade  $U > 0$ , expressado:

$$\frac{C_j^{m+1} - C_j^m}{\Delta t} = -U \frac{C_j^m - C_{j-1}^m}{\Delta x} \quad (2)$$

A amplitude da onda pode diminuir conforme passa o tempo, fica igual à solução analítica quando o número de Courant ( $\alpha = \frac{U\Delta t}{\Delta x}$ ) é igual a 1. No entanto, se  $\alpha < 1$ , a solução apresenta difusão com atenuação da amplitude da onda. O método é monotônico (preserva o sinal), mas com pouca precisão por ser de ordem 1.

### Método leapfrog

O esquema *leapfrog* está caracterizado por ser de segundo ordem no tempo, baseado na aproximação da equação de advecção centrada no tempo e espaço, expresado como segue:

$$\frac{C_j^{m+1} - C_j^{m-1}}{2\Delta t} = -U * \frac{C_{j+1}^m - C_{j-1}^m}{2\Delta x} \quad (3)$$

Em condições estáveis do número de Courant ( $\alpha < 1$ ), a aproximação mostra uma preservação da amplitude da onda ao longo do tempo, com  $\alpha = 1$  a solução é exata. No entanto, para ondas curtas pode gerar dispersão computacional como erros de fase com oscilações espúrias (Fig. 1). A análise de dispersão para diferentes comprimentos de onda ( $L$ ) explica este comportamento, assim temos que a função retângulo tem  $2\Delta x = L$  e as duas gaussianas com maiores  $L$  (entre  $10\Delta x$  e  $50\Delta x$ ). Se substituirmos a discretização do método *leapfrog* na solução da onda temos  $C_j^m = C_0 e^{ik(j\Delta x - C_D m \Delta t)}$ , obtemos  $C_D/c = \frac{1}{\alpha k \Delta x} \arcsin[\alpha \sin(k\Delta x)]$ , onde  $C_D$  é a velocidade de fase computacional em função do número de onda  $k$  que depende da resolução de  $\Delta x$ ; as diferenças finitas no espaço geram a dispersão computacional (Doos et al., 2020). Conforme os mesmos autores, também temos a velocidade de grupo  $C_{Dg}$  expressado em relação com a velocidade de fase ( $c$ ) que é mostrado na eq. 4

$$\frac{C_{Dg}}{c_g} = \frac{\cos(k\Delta x)}{\sqrt{1 - [\alpha \sin(k\Delta x)]^2}} \quad (4)$$

### Esquema de 4o ordem

O método *leapfrog* é de segundo ordem no tempo e espaço. Dele, consideramos a aproximação da derivada no tempo e modificamos a parte da derivada no espaço com uma aproximação de 4o ordem (Doos et al., 2020), então temos a eq. 5

$$\frac{C_j^{n+1} - C_j^{n-1}}{2\Delta t} + U \frac{C_{j-2}^n - 8C_{j-1}^n + 8C_{j+1}^n - C_{j+2}^n}{12\Delta x} = 0 \quad (5)$$

Se consideramos o análise de estabilidade de von Neumann, a discretização leva:

$$g(k) = -i \frac{\alpha}{6} [8\sin(k\Delta x) - \sin(2k\Delta x)] \pm \left\{ 1 - \left[ \frac{\alpha}{6} [8\sin(k\Delta x) - \sin(2k\Delta x)] \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (6)$$

Gaussiana e Retângulo (periódica),  $\Delta t = 250$  segundos,  $\Delta x = 5000$  metros, CFL = 0.5.

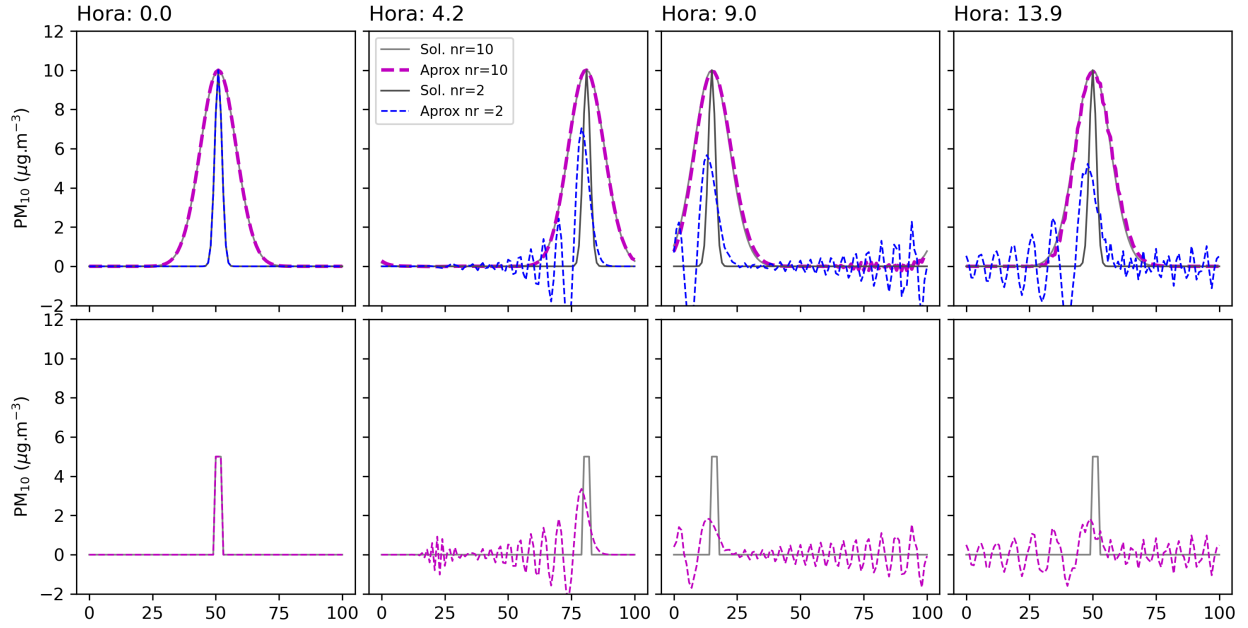


Figura 1: Oscilações espúrias para ondas curtas com o método *leapfrog*

onde  $i = \sqrt{-1}$  e  $k$  o número de onda. O esquema fica estável se

$$\alpha < \frac{6}{8\sin(k\Delta x) - \sin(2k\Delta x)} \quad (7)$$

para  $\alpha < 0,73$  (Doos et al., 2020) e instável para valores maiores como ilustra a Fig. 2.

#### Método iterativo (esquema Matsuno)

Este método é iterativo com algoritmos explícito-implícito que tem precisão de primeiro ordem no tempo e de segundo ordem no espaço (Brasseur e Jacob, 2017; Doos et al., 2020). O primeiro passo é calcular o valor intermediário (nosso caso  $C_j^*$ ) de pulso de poluição transportada no seguinte tempo  $n + 1$  com o uso do esquema simple de aproximação *Euler forward* (FTCS ou *Forward Time Centred Space*). O valor calculado logo é inserido na aproximação da derivada do espaço, com isso encontramos a seguinte expressão:

$$C_j^{n+1} = C_j^n - \frac{\alpha}{2} (C_{j+1}^n - C_{j-1}^n) + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 (C_{j+2}^n - 2C_j^n + C_{j-2}^n) \quad (8)$$

#### Método implícito (esquema Crank-Nicolson)

O método implícito escolhido para aproximar a eq. 1 corresponde ao esquema Crank-Nicolson. Este método é semi-implícito desde que alguns termos na direita são avaliados no tempo  $n + 1$  e outros em  $n$ , a expressão da eq. 9 ilustra a característica semi-implícita do método (Jacobson, 2005),

$$C_j^{n+1} - C_j^n = -\frac{\alpha}{2} \left[ \frac{C_{j+1}^{n+1} - C_{j-1}^{n+1}}{2} + \frac{C_{j+1}^n - C_{j-1}^n}{2} \right] \quad (9)$$

dando forma podemos encontrar uma expressão de matrizes, como segue

$$-rC_{j-1}^{n+1} + C_j^{n+1} + rC_{j+1}^{n+1} = rC_{j-1}^n + C_j^n - rC_{j+1}^n \quad (10)$$

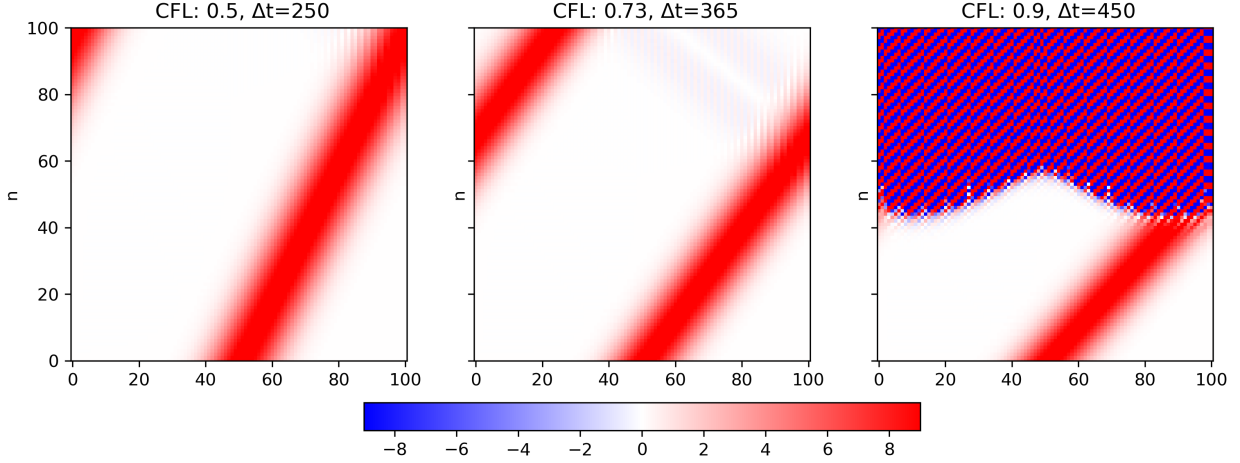


Figura 2: Variação da estabilidade do esquema de 4o ordem no espaço para diferentes números de Courant (CFL).

$$\begin{bmatrix} 1 & r & \dots & 0 \\ -r & 1 & r & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & -r & 1 & r \\ 0 & 1 & -r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \dots \\ C_{j-1} \\ C_j \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & -r & \dots & 0 \\ r & 1 & -r & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & r & 1 & -r \\ 0 & & r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \dots \\ C_{j-1} \\ C_j \end{bmatrix}^n$$

onde  $r = \frac{\alpha}{4}$  ( $\alpha$  como número de Courant) no sistema de matrizes da forma  $A.C^{n+1} = B.C^n$ ; este problema pode ser resolvido com os pacotes de `scipy.sparse` (e.g. `spsolve` e construído com `spdiags`) do programa Python.

### Método Runge Kutta de 4a ordem no tempo e espaço

O método clássico explícito *Runge-Kutta* de quarto ordem (RK4) tem como solução no tempo  $n + 1$  com a eq. 11, (Randall, 2021),

$$C^{n+1} = C^n + \frac{\Delta t}{6} [k_1 + k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (11)$$

onde  $k_1 = f(C^n, n\Delta t)$ ,  $k_2 = f(C^n + \frac{k_1\Delta t}{2}, (n + 1/2)\Delta t)$ ,  $k_3 = f(C^n + \frac{k_2\Delta t}{2}, (n + 1/2)\Delta t)$ ,  $k_4 = f(C^n + k_3\Delta t, (n + 1)\Delta t)$ . O método explícito RK4 é mais estável que o algoritmo *Euler progressivo*. Este método RK (ordem 3) é usado no modelo *Weather Research and Forecasting* (WRF) como aproximação da discretização do tempo; depois do último passo do tempo a microfísica é calculada para assegurar condições de saturação adequadas ao final do passo do tempo (Skamarock et al., 2019).

## 2. Descrição da metodologia

O desenvolvimento do exercício considera dois tipos de funções, chamados Gaussiana e Retângulo. A função gaussiana está centrada em  $j=51$ , com decaimento exponencial dado por  $nr$  (número de pontos) onde a amplitude da perturbação segue a expressão da eq. 12

$$C(x, 0) = C_{j,0} = C_0 \exp\left[-\frac{(j\Delta x - 51\Delta x)^2}{(nr * \Delta x)^2}\right], \quad (12)$$

a função retângulo também está centrada na grade unidimensional com amplitude  $2\Delta x$ , como é ilustrado na fig. 1 (abaixo para o tempo  $n=0$ ). A malha tem espaçamento uniforme  $x_j$  com  $\Delta x = 5000m$ ,  $x_j = j\Delta x$ , com  $j = 1$ ,  $Nx = 101$ . A velocidade  $U$  é constante e igual a 10 m/s. A integração para cada esquema considerou o tempo suficiente para que a perturbação inicial volte para a parte central da malha no caso da fronteira periódica; calculado em 14 horas aproximadamente.

100 As soluções analíticas foram encontradas para acompanhar os resultados das aproximações numéricas para os diferentes  
 101 esquemas. As condições de fronteira usadas para cada esquema são mostradas na Tabela 1. O código usado para  
 102 desenvolver cada esquema de aproximação foi desenvolvido na linguagem de Python. As condições periódicas foram  
 103 um desafio para escrever o código em Python, sendo mais simples para o esquema de ordem 1 e complexas para os  
 104 demais. A seção [Apêndice A](#) mostra um resumo das principais partes do código escrito para resolver os diferentes  
 105 esquemas numéricos. O *script* completo está disponível no repositório de GitHub do autor, na pasta “Exercicio\_1” no  
 106 link a seguir [functions.py](#).

Tabela 1: Esquemas usados para os experimentos de aproximação da equação de advecção.

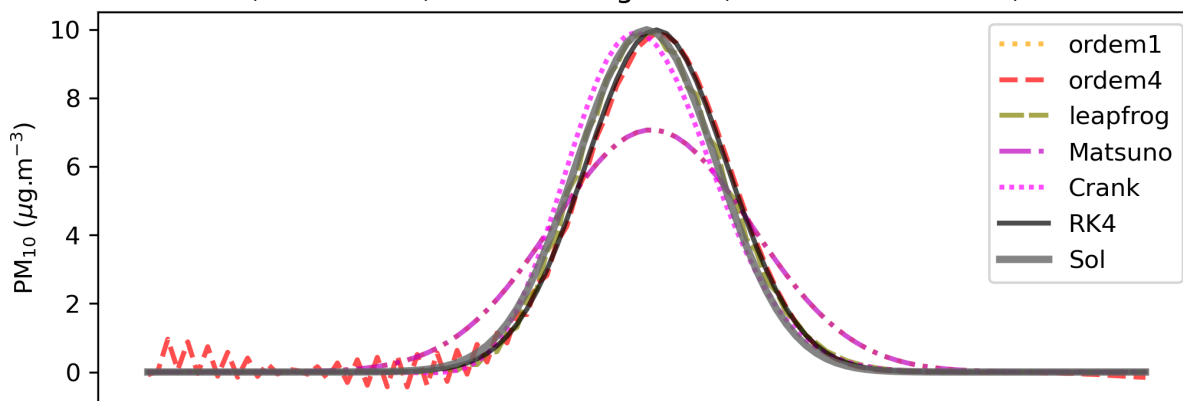
Esquema	Condição de fronteira
Ordem 1	Periódica
Leapfrog	Fixa, radiacional e periódica
Ordem 4	Periódica
Matsuno	Periódica
Crank-Nicolson	Periódica
RK4	Periódica

### 107 3. Resultados e discussão

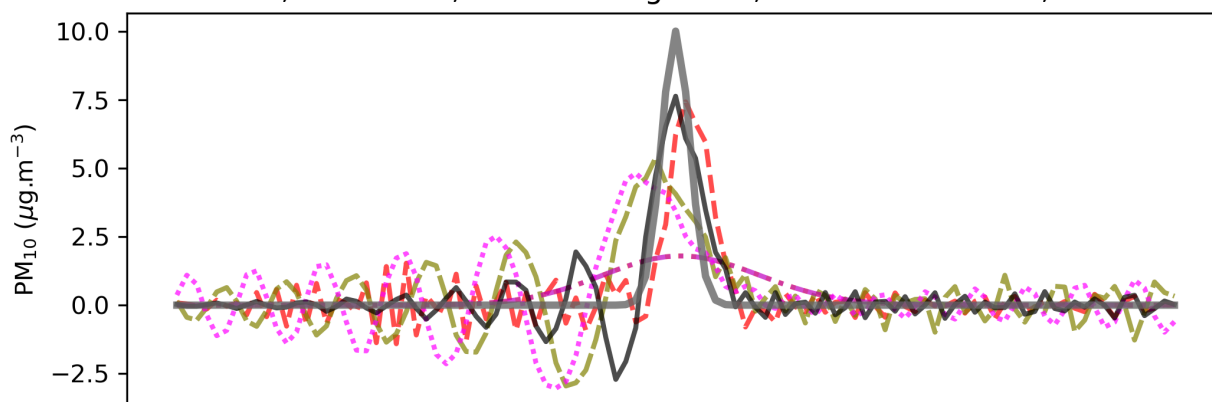
108 Os experimentos (1 até 6) mostram diferenças (fig. 3) com a solução analítica (em cinza), algumas delas (e.g., ordem 1  
 109 e Matsuno) com maior atenuação da amplitude que outras (RK4, leapfrog, ordem 4 e Crank-Nicolson). O esquema de  
 110 ordem 1 (experimento 1) e Matsuno (experimento 4) apresentaram o mesmo comportamento depois de 14 horas de  
 111 simulação da advecção com velocidade constante para a direita do domínio 1D. A aproximação do esquema de ordem 1  
 112 (marcados com pontos amarelos) mostra resultados diferentes com o esquema de leapfrog de ordem 2 (experimento 3).  
 113 Na direita da fig. 4 temos resultados da integração com o método leapfrog para diferentes condições de fronteira (e.g.,  
 114 radiacional, fixa e periódica). A condição fixa acumula erros ao longo do tempo para comprimentos de onda longa e  
 115 curta. Conforme o análise de estabilidade de von Neumann, o método leapfrog é não dissipativo; apesar de ter valores  
 116 de  $CFL < 1$ , acontece a dispersão computacional, principalmente para as ondas curtas que leva soluções numéricas  
 117 espúrias (mostrado no centro e abaixo da fig. 4), com decréscimos na velocidade de fase conforme à relação entre  
 118 longitude da onda e o espaçamento ( $\Delta x$ ) como é mostrado no análise da fig. 5. Um comprimento de onda  $L = 2\Delta x$   
 119 como a função retângulo vai apresentar valores negativos em  $C_{Dg}/c_g$  para diferentes números de Courant (CFL). Em  
 120 geral, o método leapfrog é caracterizado por ser estável quando o  $CFL < 1$  e dispersivo ([Brasseur e Jacob, 2017](#); [Doos et al., 2020](#)).  
 121

122 A derivada no espaço do experimento 2 (leapfrog) foi modificada para um esquema de 4a ordem (experimento 3), os  
 123 resultados mostram melhoras na amplitude da onda se comparar com a solução analítica e soluções com leapfrog para  
 124 ondas curtas do experimento 2. A desvantagem desta aproximação de 4a ordem foi mostrada na fig. 2 onde o  $CFL > 0,73$   
 125 gera soluções instáveis, resultados que são similares com o encontrado na Figura 4.10 de Doos et al. (2020). O método  
 126 implícito com o esquema Crank-Nicolson (experimento 5) mostra resultados estáveis para a gaussiana longa, mas tem  
 127 limitações para ondas curtas (gaussiana curta e retângulo) com soluções de atenuação da amplitude. Finalmente, o  
 128 método RK4 no tempo com um esquema de 4ª ordem no espaço (experimento 6) mostra resultados muito parecidos  
 129 com a solução analítica para ondas longas. As ondas curtas depois de 14 horas de integração mostram atenuação da  
 130 amplitude da onda. O esquema é estável e tem boa aproximação em conservar a amplitude da onda em comparação  
 131 com outros esquemas apresentados. A fig. 6 mostra que as ondas longas são conservadas mesmo que o CFL seja maior  
 132 que 1 (por exemplo  $CFL = 2$  na parte superior à direita da figura), não acontece com as ondas curtas onde as amplitudes  
 133 são atenuadas ao longo da integração no tempo.

Gaussiana, hora: 13.9,  $\Delta t = 250$  segundos,  $\Delta x = 5000$  metros, CFL = 0.5.



Gaussiana, hora: 13.9,  $\Delta t = 200$  segundos,  $\Delta x = 5000$  metros, CFL = 0.4.



Retângulo, hora: 14.2,  $\Delta t = 150$  segundos,  $\Delta x = 5000$  metros, CFL = 0.3.

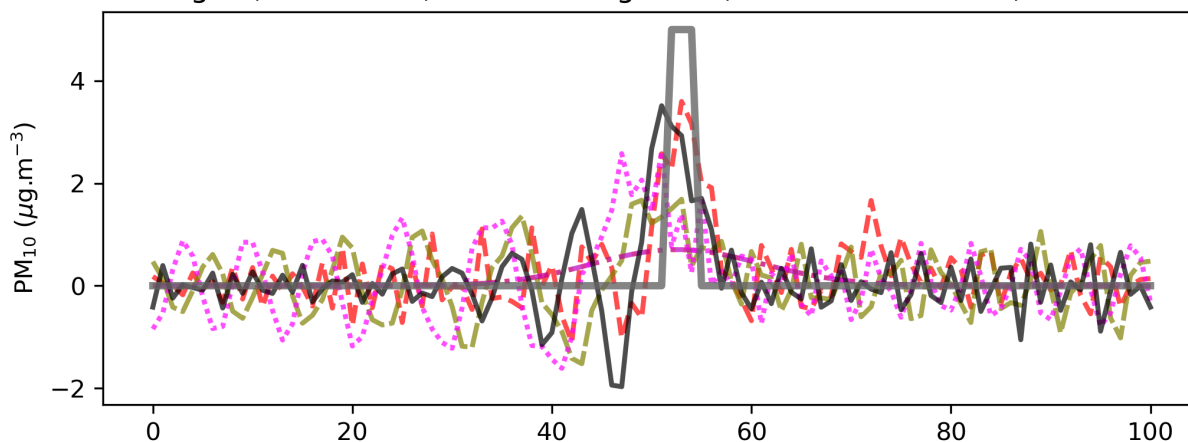


Figura 3: Aproximação até 14 horas para todos os experimentos em condições de fronteira de tipo periódica. A solução analítica está realçada em cinza. O número de Courant (CFL) varia para cada função. Acima, a função é Gaussiana com base maior que a figura do médio. A figura abaixo corresponde à função retângulo com amplitude de até 5 unidades.

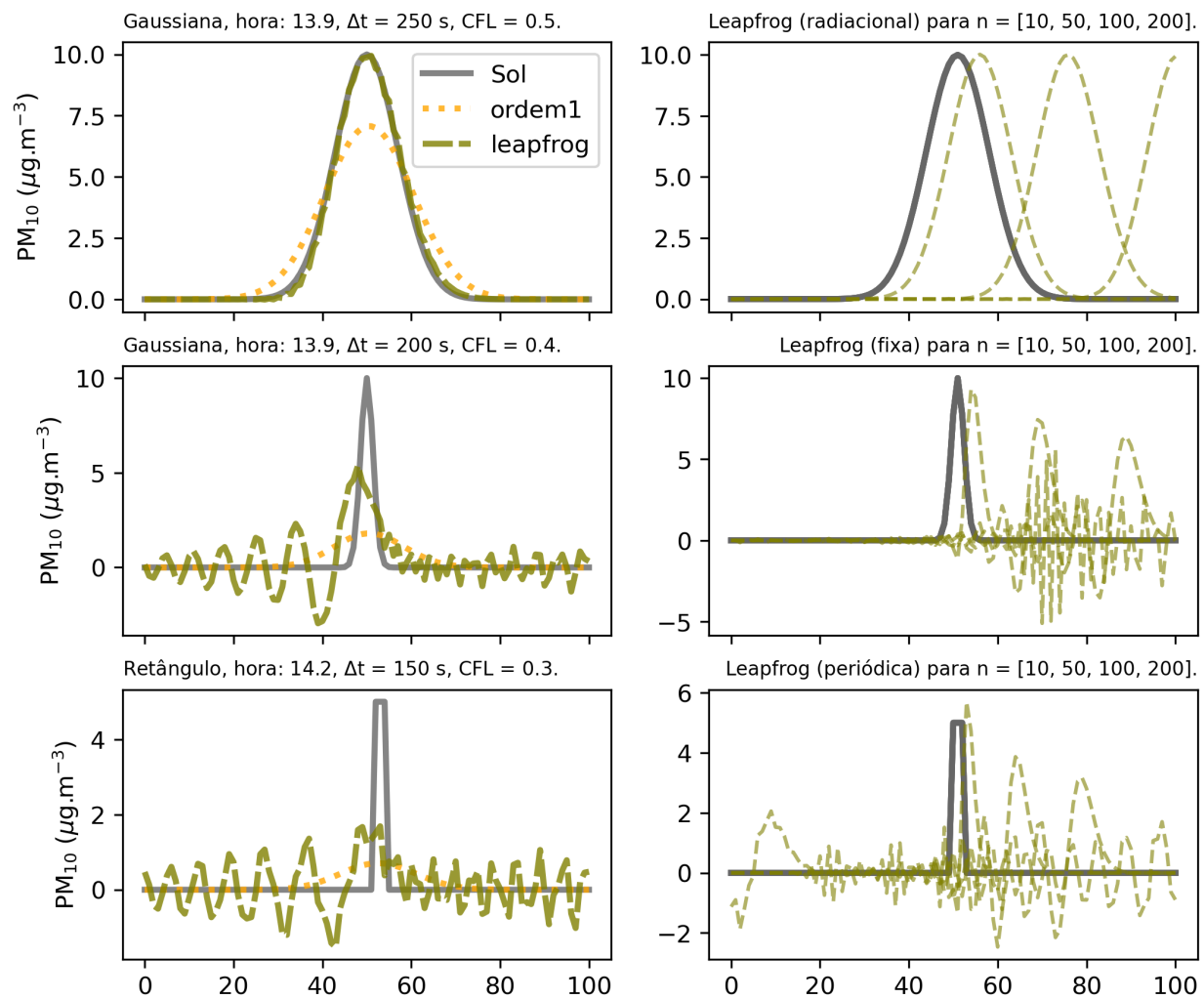


Figura 4: Direita: aproximação do esquema do ordem 1 comparado com leapfrog de ordem 2 para uma condição periódica. Esquerda: aproximação com leapfrog para diferentes fronteiras (radiacional, fixa e periódica). O 'Sol' é a solução analítica.

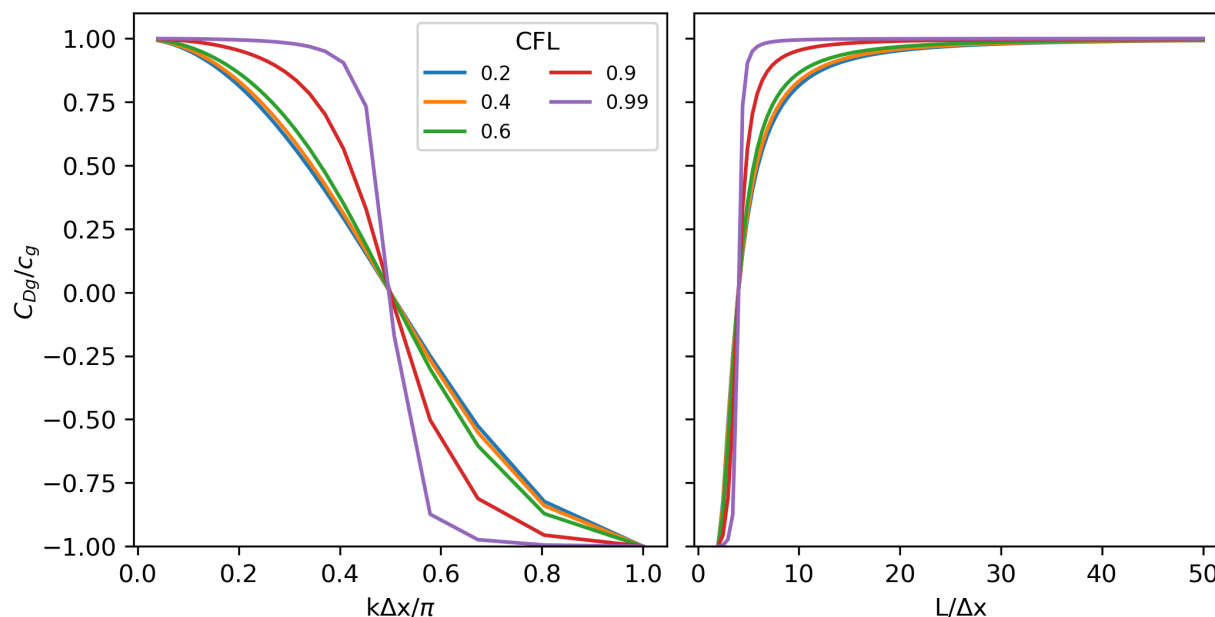


Figura 5: Análise de dispersão entre a velocidade de fase de grupo computacional e velocidade de fase para o esquema leapfrog, baseado em Doos et al. (2020).

## 4. Conclusões preliminares

Este trabalho mostrou as soluções numéricas relacionadas com o problema de transporte de um pulso inicial de poluição com vento constante, representado pela equação de advecção em 1D. Os esquemas numéricos usados precisam de condições iniciais e de fronteira; onde as equações gaussianas e retângulo foram aplicadas para gerar as condições iniciais e todos os esquemas apresentaram condições de fronteira de tipo periódica. Somente o esquema leapfrog mostrou resultados para condições de fronteira tipo fixa, periódica e radiacional. Além da aplicação do esquema numérico, os resultados também foram acompanhados da solução analítica.

Em geral, as funções que representam ondas curtas como condições iniciais mostraram resultados com oscilações espúrias, o que mostra a importância da resolução do modelo devido que a relação da dispersão numérica pode ocorrer através da influência da discretização no tempo e no espaço. A resolução do modelo como o  $\Delta x$  é muito importante para resolver os fenômenos meteorológicos que podem representar comprimentos de onda diferentes (e.g., 20 km e 100 km); como foi conversado na aula, se o modelo tem uma resolução espacial  $\Delta x = 5$  km, pode resolver e representar fenômenos de 100 km, mas se o comprimento da onda do fenômeno é  $4\Delta x$  o modelo vai experimentar problemas. Além disso, os valores de número de Courant  $< 1$  (definido como CFL ou  $\alpha$  neste trabalho) podem evitar problemas de instabilidade numérica como acontece com o esquema de ordem 4 que precisa de CFL menores. Em conclusão, a avaliação do esquema para resolver uma aproximação de advecção precisa de dois indicadores como a estabilidade do valor de CFL e a relação de dispersão. Este último indicador mostra se o esquema com uma resolução espacial específica vai experimentar oscilações espúrias (e.g., concentrações negativas de poluentes), não monotônicas, e que vão afetar o desempenho dos modelos eulerianos em resolver o transporte das concentrações indicadoras da qualidade do ar.

## Bibliografia

- Brasseur, G.P., Jacob, D.J. (2017). Modeling of Atmospheric Chemistry, First. ed. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781316544754>
- Doos, K., Lundberg, P., Campino, A.A. (2020). Basic Numerical Methods in Meteorology and Oceanography, 1.ª ed. Department of Meteorology, Stockholm University, Stockholm.
- Jacobson, M.Z. (2005). Fundamentals of Atmospheric Modeling. Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/9780521854226>



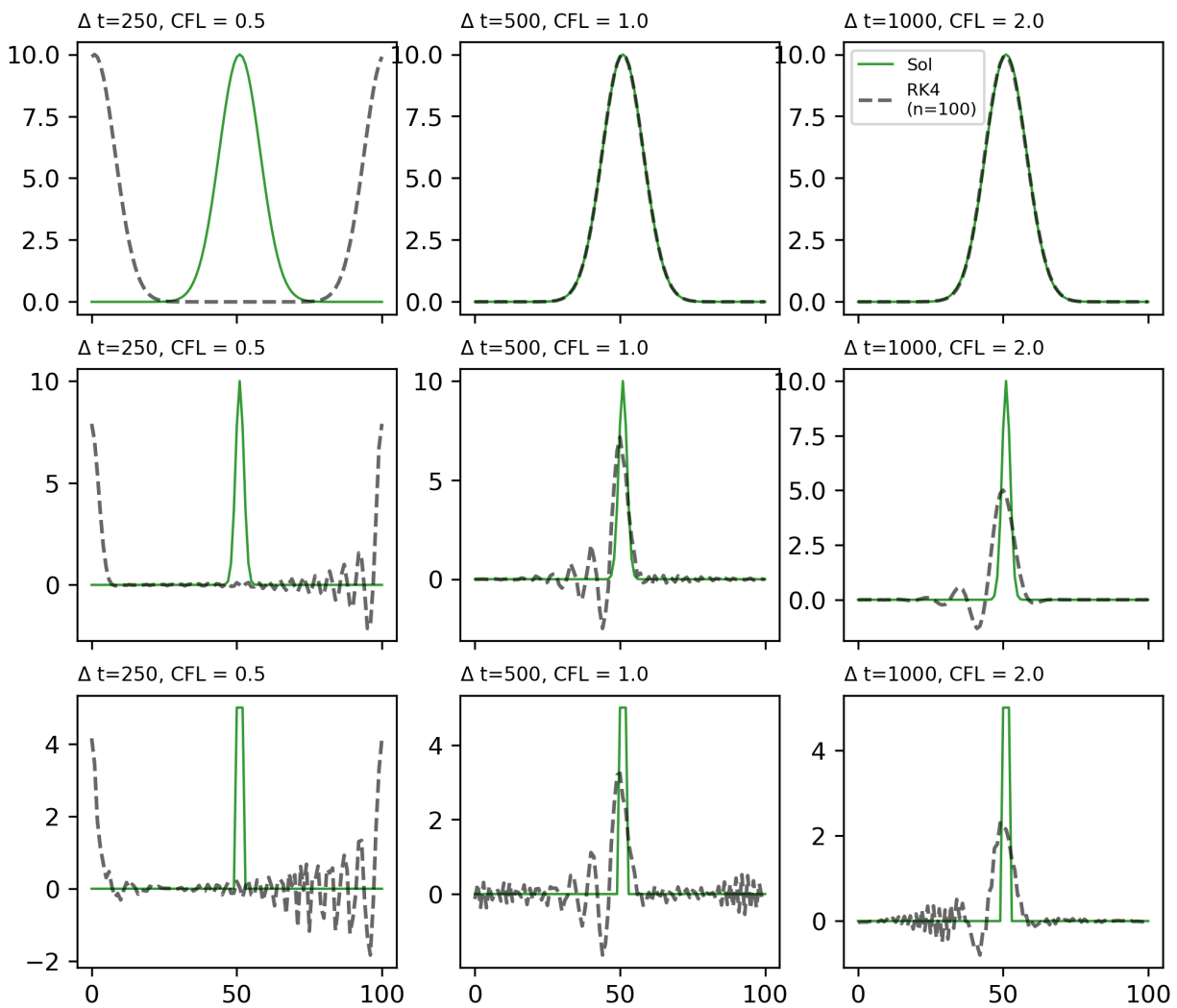


Figura 6: Aproximação de RK4 para diferentes CFL (nro de Courant) para 101 passos de tempo. Sol é a solução analítica.

[//doi.org/10.1017/CBO9781139165389](https://doi.org/10.1017/CBO9781139165389)

Randall, D.A. (2021). An Introduction to Numerical Modeling of the Atmosphere.

Skamarock, W.C., Klemp, J.B., Dudhia, J., Gill, D.O., Zhiquan, L., Berner, J., Wang, W., Powers, J.G., Duda, M.G.,

Barker, D.M., Huang, X.-Y. (2019). A Description of the Advanced Research WRF Model Version 4 NCAR

Technical Note. National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado. <https://doi.org/10.5065/1dfh-6p97>

## Apêndice A

Esta seção mostra algumas partes do código escrito em Python, disponibilizados no arquivo **functions.py** no *GitHub* do autor.

```
# ordem 1
C[0, n] = C[-1, n-1]

# leapfrog
C[-1, n] = C[99, n-1]
C[0, n] = C[-1, n-1]

# ordem 4
C[-2, n] = C[-2, n-2] - CFL*(C[-1, n-1] - C[-3, n-1])
C[1, n] = C[1, n-1] - CFL*(C[1, n-1] - C[0, n-1])
C[-1, n] = C[99, n-2] - CFL/6*(8*(C[100, n-1] - C[98, n-1]) - (C[1, n] - C[97, n-1]))
C[0, n] = C[100, n-2] - CFL*(C[1, n] - C[99, n-1])

# Matsuno
u[-1, n] = C[-1, n-1] - CFL*(C[-1, n-1] - C[-2, n-1])
C[-1, n] = C[-1, n-1] - CFL*(u[-1, n-1] - u[-2, n-1])
u[0, n] = u[-1, n-1]
C[0, n] = C[-1, n-1]

# Crank
def crank_matrix(x, CFL, uc):
    """
    Return matrices A and B for advection equations
    -----
    x      : linear space with Nx points
    r      : CFL/2
    uc     : is a Crank-Nicolson parameter equals to 1/2
    """
    import scipy.sparse as sp
    uns = np.ones(len(x))
    r = uns*CFL/2
    diags = (-1, 0, 1) # -1 low diagonal, 0 main diagonal, 1 upper diagonal
    A = sp.spdiags([-uc*r, uns, uc*r], diags, len(x), len(x))
    A = sp.lil_matrix(A)
    B = sp.spdiags([(1-uc)*r, uns, -(1-uc)*r], diags, len(x), len(x))
    B = sp.lil_matrix(B)

    # periodic
    A[0, -1] = -CFL/4
    A[-1, 0] = CFL/4
    B[0, -1] = CFL/4
    B[-1, 0] = -CFL/4
    return A.tocsr(), B.tocsr() # A.toarray()
```

```

# Runge-Kutta 4o ordem no espaço
def deriv(c,U,dx):
    """
    Derivada RK4
    """
    dc = np.zeros(len(c))
    p = U/(2*dx)
    dc[2:-2] = -(U/(12*dx))*(8*(c[3:-1]-c[1:-3]) - (c[4:] - c[:-4]))
    dc[1] = -p*(c[2] - c[-1])
    dc[-2] = -p*(c[-1]- c[-3])
    dc[0] = -p*(c[1] - c[-2])
    dc[-1] = -p*(c[1] - c[-2])
    return dc

# Aproximações numéricas
# -----
for n in range(1, Nt):
    if aprox == "ordem1":
        C[1:, n] = C[1:, n-1] - CFL*(C[1:, n-1]- C[:-1, n-1])

    elif aprox == "leapfrog": # ok
        if n == 1: # Euler 2d order scheme for the first time step
            C[1:-1,n] = C[1:-1,n-1] - CFL/2*(C[2:,n-1] - C[:-2,n-1])
        elif n > 1:
            C[1:-1, n] = C[1:-1, n-2] - CFL*(C[2:, n-1] - C[:-2, n-1])
# Condição de fronteira
# -----
        if cond_front == 'fixa':
            C[[0,-1], n] = [0,0]
        elif cond_front == 'periódica':
            C[-1, n] = C[ 99, n-1]
            C[ 0, n] = C[-1, n-1]
        elif cond_front == 'radiacional':
            C[-1, n] = C[-1, n-1] - CFL*(C[-1, n-1]- C[-2, n-1])

    elif aprox == "ordem4":
        if n == 1: # Euler 2d order scheme for the first time step
            C[1:-1,n] = C[1:-1,n-1] - CFL/2*(C[2:,n-1] - C[:-2,n-1])
            C[0,n] = C[-1,n-1]
        elif n > 1:
            C[2:-2, n] = C[2:-2,n-2] - \
                CFL/6*(8*(C[3:-1,n-1]-C[1:-3,n-1])-(C[4:,n-1]-C[:-4,n-1]))

    elif aprox == "Matsuno":
        # Start with Euler forward
        u[1:-1,n] = C[1:-1, n-1] - CFL*(C[1:-1, n-1] - C[0:-2, n-1])
        C[1:-1,n] = C[1:-1, n-1] - CFL*(u[1:-1, n-1] - u[0:-2, n-1])

    elif aprox == "Crank":
        # spsolve: solve the sparse linear system Ax=B
        # A*C[:,n] = B*C[:, n-1]
        C[:, n] = spsolve(A, B*C[:, n-1])

```

```

elif aprox == "RK4":
    """
    Runge-Kutta scheme
    -----
    """
    k1 = deriv(c, U, dx)
    k2 = deriv(c + dt*0.5*k1, U, dx)
    k3 = deriv(c + dt*0.5*k2, U, dx)
    k4 = deriv(c + dt*k3, U, dx)

    C[:,n] = c = c + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)*dt/6

```