

<sup>1</sup> Transporte pela advecção de uma fonte de pulso senoidal e aplicação  
<sup>2</sup> de filtros para a remoção do modo computacional

<sup>3</sup> Alejandro H. D. Peralta\*

*Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo*

<sup>4</sup> 5 de outubro de 2022

**Resumo**

A emissão de um poluente pode variar ao longo do tempo, como no caso de uma chaminé que emite o pulso senoidal no campo básico com velocidade do vento constante. Este trabalho mostra os cálculos para resultados analíticos e numéricos (Euler progressivo-regressivo, leapfrog (2<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> ordem) e implícito como o esquema Crank-Nicolson). Alguns métodos numéricos geraram oscilações do modo computacional pelo que foram filtrados. Outros experimentos foram considerados para o método implícito com a variação da resolução do tempo  $\Delta t$  para obter diferentes números de Courant (CFL) para valores de 1, 2 e 4. A aproximação da ordem 1 é um importante esquema que não precisa de filtros devido à simplicidade do método. No entanto, o esquema é difuso pelo que as concentrações são subestimadas se comparar com a solução analítica. Outros esquemas como leapfrog e Crank-Nicolson geram resultados com oscilações que contradizem o fenômeno físico, pelo que a aplicação de filtros é importante para preservar a monotonicidade. Os resultados dos experimentos são importantes a fim de representar a realidade do fenômeno do transporte dos poluentes na atmosfera, como no caso dos modelos de qualidade do ar.

**1. Introdução**

As fontes de emissão podem variar ao longo do tempo como acontecem em diferentes atividades humanas como industriais, residencial e transporte rodoviário. O exercício 2 considera analisar uma fonte de poluição pontual (p.e., chaminé) que emite em forma de pulso senoidal com o mesmo campo básico de velocidade do vento ( $U = 10 \text{ m/s}$ ) do exercício 1 (equação de advecção linearizada). Os cálculos consideram resultados da solução analítica e também dos métodos numéricos (Euler progressivo-regressivo, leapfrog 2<sup>a</sup> ordem, leapfrog 4<sup>a</sup> ordem no espaço e implícito como o esquema Crank-Nicolson). As condições iniciais do campo são nulas e somente a fonte pontual senoidal gera emissões na metade do domínio 1D. Alguns métodos numéricos geraram oscilações do modo computacional que foram filtradas. Outros experimentos foram considerados para o método implícito com a variação da resolução do tempo  $\Delta t$  para obter diferentes números de Courant (CFL) para valores de 1, 2 e 4. Os resultados dos experimentos são importantes para conhecer as aplicações dos filtros nos modelos eulerianos de qualidade do ar considerando que as unidades das concentrações dos poluentes sempre são positivas, pelo que é importante preservar a monotonicidade física do fenômeno.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} &= F(x = 101, t) \\ \frac{dt}{ds} = 1; \frac{dx}{ds} = U; \frac{dC}{ds} &= F(x = 101, t) \end{aligned} \quad (1)$$

A aplicação de equações diferenciais ordinárias (ODEs, siglas em inglês) que descreve a evolução do poluente no tempo é mostrado na eq. 1 que pode ser resolvido com a interpretação geométrica como mostra a eq. 4, (Brasseur e

\*Estudante de doutorado, email [aperalta@usp.br](mailto:aperalta@usp.br)

<sup>32</sup> Jacob, 2017). Além disso, o desenvolvimento do exercício 2 precisa das equações do movimento da onda ao longo do  
<sup>33</sup> tempo e espaço causado pela advecção desde a fonte. A forma geral para ondas transversais de propagação considera a  
<sup>34</sup>  $y = f(x - vt)$  onde  $v$  é a velocidade.

### <sup>35</sup> 1.1 Filtro Robert-Asselin-Williams

<sup>36</sup> Os filtros de Robert-Asselin-Williams podem remover oscilações do modo computacional para os esquemas como o  
<sup>37</sup> método leapfrog (Doos et al., 2020). Neste trabalho foram considerados os filtros no espaço (eq. 2) e tempo (eq. 3).  
<sup>38</sup> Onde  $\gamma$  é o fator de filtro de Robert-Asselin que pode estar entre 0,01 e 0,1 conforme Doos et al. (2020). Outro autor  
<sup>39</sup> faz menção em usar  $\gamma = 0,5$  (Randall, 2021). Quando  $\alpha = 1$  o filtro tem forma de Robert-Asselin. O autor (Williams  
<sup>40</sup> (2009), citado em Doos et al., 2020) recomenda o valor de  $\alpha = 0,53$  para reduzir o impacto das oscilações espúrias.

$$Cff_j = Cf_j + \frac{\gamma\alpha}{2}(Cff_{j-1} - 2Cf_j + Cf_{j+1}) \quad (2)$$

$$Cf_{j+1} = Cf_{j+1} - \frac{\gamma(1-\alpha)}{2}(Cff_{j-1} - 2Cf_j + Cf_{j+1})$$

$$C^n = C^n + \frac{\gamma\alpha}{2}(C^{n-1} - 2C_f^n + C^{n+1}) \quad (3)$$

$$C_f^{n+1} = C^{n+1} - \frac{\gamma(1-\alpha)}{2}(C^{n-1} - 2C_f^n + C^{n+1})$$

## <sup>42</sup> 2. Descrição da metodologia

<sup>43</sup> O exercício 2 considera que a fonte tem um pulso senoidal de emissão na metade do campo de advecção, governado  
<sup>44</sup> pela equação  $\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = F$  onde  $F = F(x, t)$ , considerando  $F(i = 101, n\Delta t) = \sin(\omega.n\Delta t)$  para  $n = 0, \dots, N_{max}$   
<sup>45</sup> se  $\sin(\omega.n.\Delta t) > 0$  e  $F(i = 101, n\Delta t) = 0$  caso  $\sin(\omega.n\Delta t) < 0$  como  $\omega = \frac{2\pi}{1800} s^{-1}$ . A equação com derivadas  
<sup>46</sup> parciais foi transformada numa equação diferencial ordinária com solução geral (Brasseur e Jacob, 2017), com isso  
<sup>47</sup> podemos ter duas relações entre a fonte no espaço e tempo como é expresso no desenvolvimento das integrais das  
<sup>48</sup> equações 4, 5 somo segue,

$$C(t_{n+1}) = C(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(x = 101, t) dt \quad (4)$$

$$C(x_{101}) = C(x_{100}) + \int^{\Delta x} F(x = 101, t) dx. \quad (5)$$

<sup>50</sup> Com isso temos duas relações:

$$C^{n+1} = C^n - \frac{1}{\omega}[\cos(\omega t_{n+1}) - \cos(\omega t_n)]. \quad (6)$$

$$C_{x_{j+1}} = C_{x_j} - \frac{\Delta x}{U} \sin(\omega t). \quad (7)$$

<sup>51</sup> ou similar na forma discretizada:

$$U \frac{C_{x_{j+1}} - C_{x_j}}{\Delta x} = \sin(\omega t).$$

<sup>52</sup> Esta solução analítica pode ser propagada no espaço como  $f(x - Ut)$ ; para nosso caso a propagação acontece desde a  
<sup>53</sup> metade da grade. Os resultados negativos foram removidos e substituídos por zero para preservar a monotonicidade  
<sup>54</sup> do fenômeno físico. A seção Apêndice A mostra um resumo das principais partes do código escrito em Python para  
<sup>55</sup> resolver os diferentes esquemas numéricos. A discretização da fonte  $F(x = 101, t)$  segue uma aproximação tipo Euler  
<sup>56</sup> forward a partir da equação diferencial ordinária (Brasseur e Jacob, 2017),

$$\frac{dC}{dt} = F(C, t)$$

$$\frac{C^{n+1} - C^n}{\Delta t} = F(C^n, t_n)$$

57 onde  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  o passo de tempo no método numérico, então nós temos

$$C^{n+1} = C^n + \Delta t F^n.$$

58 Também temos como outra opção o esquema implícito trapezoidal como segue

$$C^{n+1} = C^n + \frac{\Delta t}{2} (F^{n+1} + F^n).$$

59 No esquema de segundo ordem como leapfrog, a discretização é a seguinte

$$C^{n+1} = C^{n-1} + 2 \Delta t F^n.$$

60 A fonte foi discretizada conforme a equação do Exercício 2. Os resultados da aproximação dos esquemas leapfrog (2<sup>a</sup> e  
61 4<sup>a</sup> ordem) e Crank-Nicolson foram filtrados no tempo e espaço com as equações 2, 3 para todo o domínio.

### 62 3. Resultados

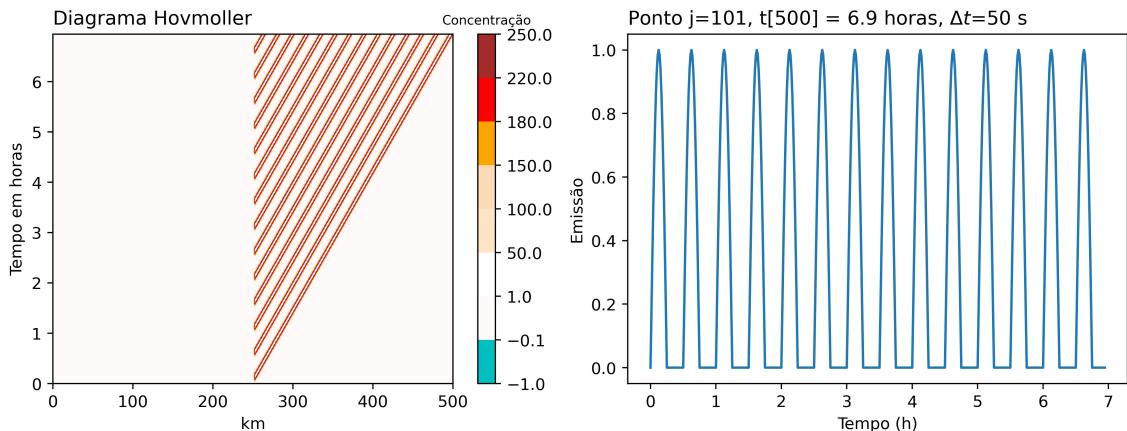


Figura 1: Diagrama Hovmoller da solução analítica (esquerda) e variação da fonte ao longo do tempo (direita).

63 A propagação da fonte como solução analítica é mostrada no diagrama Hovmoller da Fig. 1, onde também podemos  
64 notar (direita da figura) a variação senoidal da fonte pontual ao longo do tempo. A advecção do lado direito desde o  
65 centro do domínio da grade é devido à velocidade do vento constante de sinal positivo. A magnitude da concentração  
66 é explicada pela integração mostrada na equações 6, 7. A solução analítica foi comparada com as aproximações  
67 numéricas mostradas na Fig. 2. As perturbações dos esquemas podem sair do domínio sem que aconteça reflexão  
68 devido à implementação do esquema Euler forward-backward como condição de contorno para os dois pontos finais à  
69 direita da grade. O esquema de ordem 1 da figura mostra concentrações menores de propagação se comparar com a  
70 solução analítica, pelo que o método é difuso. Os demais esquemas apresentam oscilações traseiras desde o centro que  
71 é contraditório ao comportamento físico do fenômeno (advecção à direita quando a velocidade do vento é positiva).

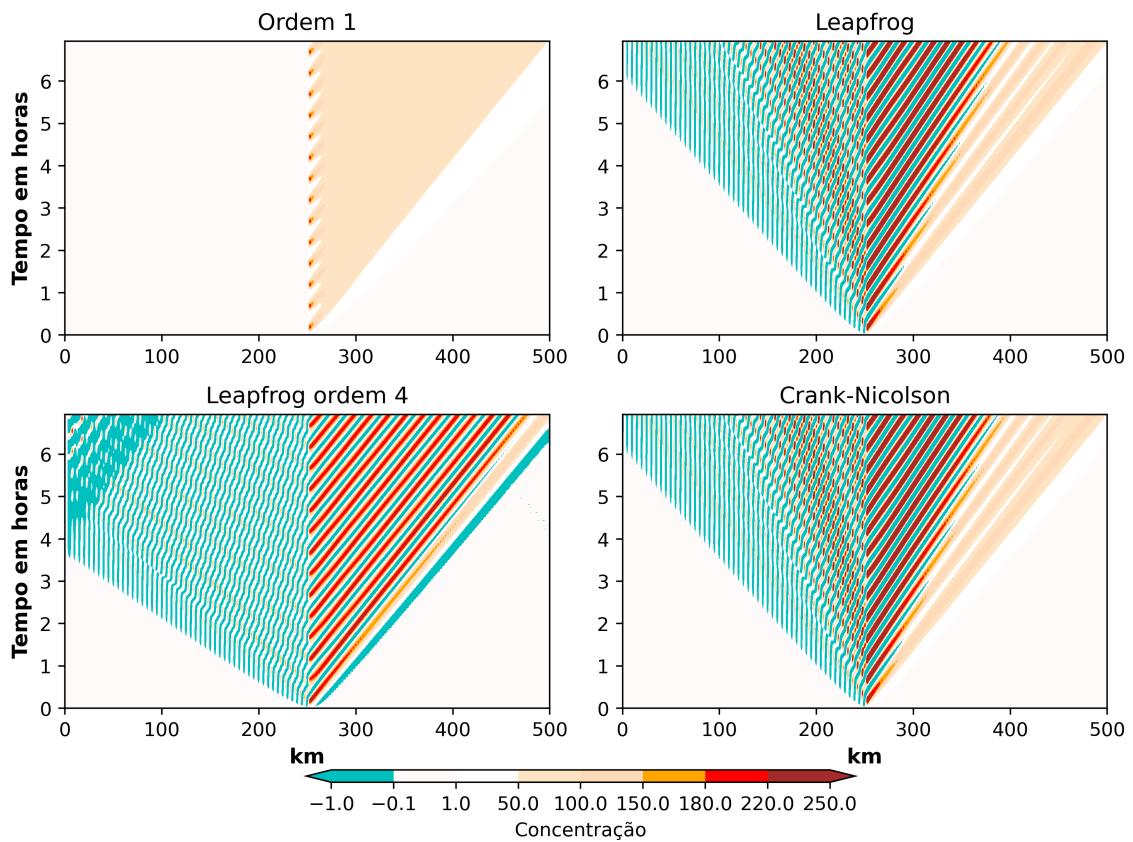


Figura 2: Soluções numéricas com diferentes esquemas para  $CFL = 0,2$ ;  $\Delta t = 50$  s.

72 Podemos notar que os resultados dos esquemas, sem filtragem, de leapfrog e Crank-Nicolson tem semelhanças no modo  
 73 da propagação.

74 As aproximações do esquema de 4<sup>a</sup> ordem mostram valores mais aproximados à solução analítica, no entanto com  
 75 oscilações numéricas negativas. Portanto, para tornar o resultado mais realista, os filtros no tempo e espaço com as  
 76 equações 2, 3 de Robert-Asselin-Williams foram aplicados para todo o domínio. Os resultados da aproximação leapfrog  
 77 (2<sup>a</sup> ordem) também foram filtrados, primeiro só no espaço, depois o tempo e finalmente os dois, como mostra a Fig. 3  
 78 ((a) sem filtragem , (b) espaço, (c) tempo e (d) espaço-tempo). Para outros esquemas numéricicos, os resultados filtrados  
 79 são mostrados na Fig. 4. Além disso, os resultados de Crank-Nicolson também foram filtrados mudando os parâmetros  
 80  $\alpha$  e  $\gamma$ , considerando um  $\alpha = 1$  para transformar o filtro tipo Robert-Asselin, como é ilustrado na Fig. 5. O fator de  
 81 filtrado  $\gamma$  foi de 0,5 (maior que o recomendado de 0,1 conforme com Doos et al. (2020)) porque com valores menores  
 82 os resultados filtrados estavam atenuados.

83 Os resultados dos experimentos com o esquema Crank-Nicolson consideraram diferentes níveis de CFL  $\geq 1$  (Fig. 6).  
 84 Aproximações com CFL = 1 têm um comportamento estável ao longo da integração. No entanto, a partir de CFL  $\geq 2$ ,  
 85 as aproximações apresentam instabilidades depois de 20 horas de simulação como é o caso das aproximações com CFL  
 86 = 4. A aplicação de filtros para remover as oscilações foi eficaz para CFL menores que 2; os resultados com CFL = 4  
 87 depois da aplicação dos filtros continuaram com as oscilações negativas.

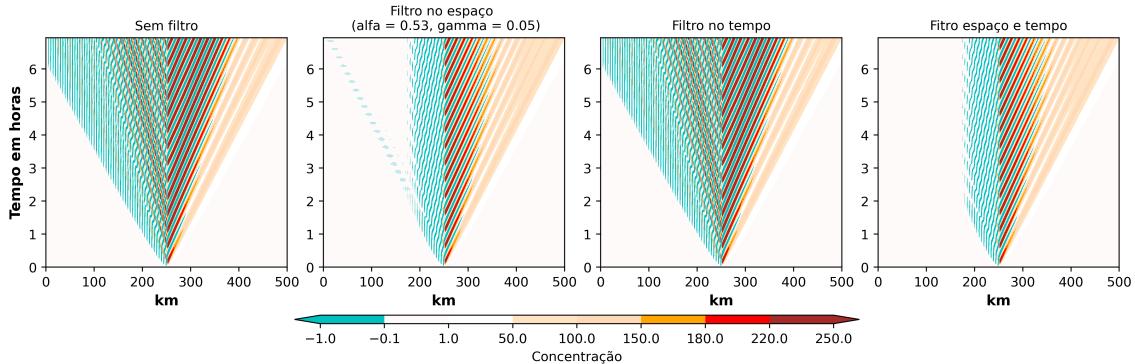


Figura 3: Comparação de resultados de leapfrog (2<sup>a</sup> ordem) sem e com filtragem.

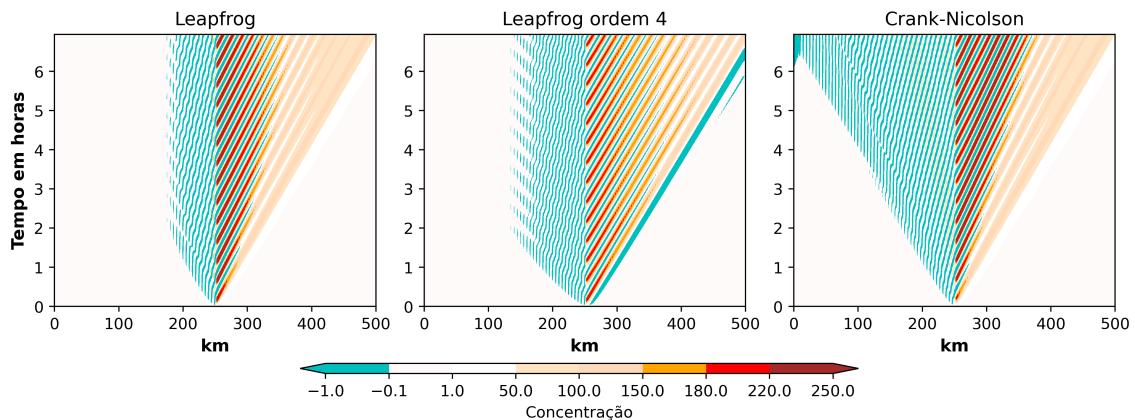


Figura 4: Soluções numéricas com aplicação de filtro no espaço e tempo aplicado para todo o domínio com fatores de  
 filtragem  $\alpha = 0,53$  e  $\gamma = 0,05$ .

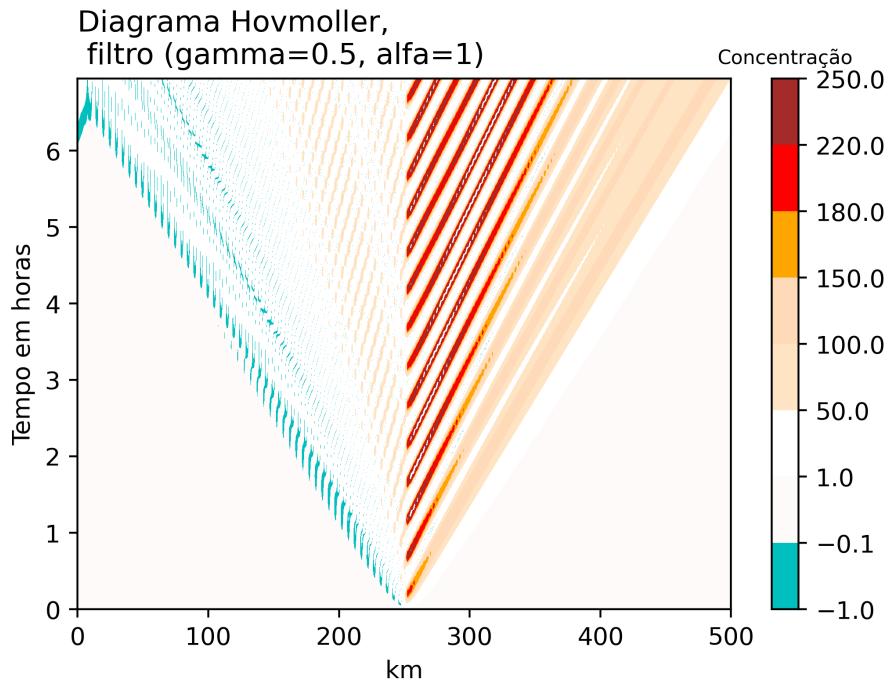


Figura 5: Aplicação de filtro para os resultados de Crank-Nicolson com  $\alpha = 1$  para ter o filtro tipo Robert-Asselin.

#### 88 4. Discussão dos resultados

89 A fonte sempre gera emissões instantâneas que são acumulativas se consideramos um  $\Delta t$ . O vento com magnitude  
90 positiva apresenta uma advecção da fonte da direção direita desde o centro do domínio. A discretização da fonte foi  
91 considerada em cada método numérico onde é multiplicado por  $\Delta t$  se é de primeiro ordem no tempo ou por  $2\Delta t$  se é  
92 de segunda ordem como no caso de leapfrog. A aproximação do ordem 1 progressivo no tempo e regressivo no espaço  
93 é um importante esquema que não precisa de filtros devido à simplicidade do método. No entanto, o esquema é difuso  
94 pelo que as concentrações são subestimadas se comparar com a solução analítica. Outros esquemas como leapfrog (2<sup>a</sup> e  
95 4<sup>a</sup> ordem) e Crank-Nicolson geram resultados com oscilações que contradizem o fenômeno físico da solução analítica,  
96 pelo que a aplicação do filtros no espaço e tempo é importante para preservar a monotonicidade. No entanto, acontece  
97 atenuação das ondas se a filtragem acontece para todas as aproximações localizadas em todos os pontos do domínio.  
98 Em conclusão, a filtragem impacta a aproximação física, mas se somente é aplicada para as oscilações computacionais  
99 é efetiva em removê-los.

#### 100 Bibliografia

- 101 Brasseur, G.P., Jacob, D.J. (2017). Modeling of Atmospheric Chemistry, First. ed. Cambridge University Press.
- 102 <https://doi.org/10.1017/9781316544754>
- 103 Doos, K., Lundberg, P., Campino, A.A. (2020). Basic Numerical Methods in Meteorology and Oceanography, 1.<sup>a</sup> ed.
- 104 Department of Meteorology, Stockholm University, Stockholm.
- 105 Randall, D.A. (2021). An Introduction to Numerical Modeling of the Atmosphere.

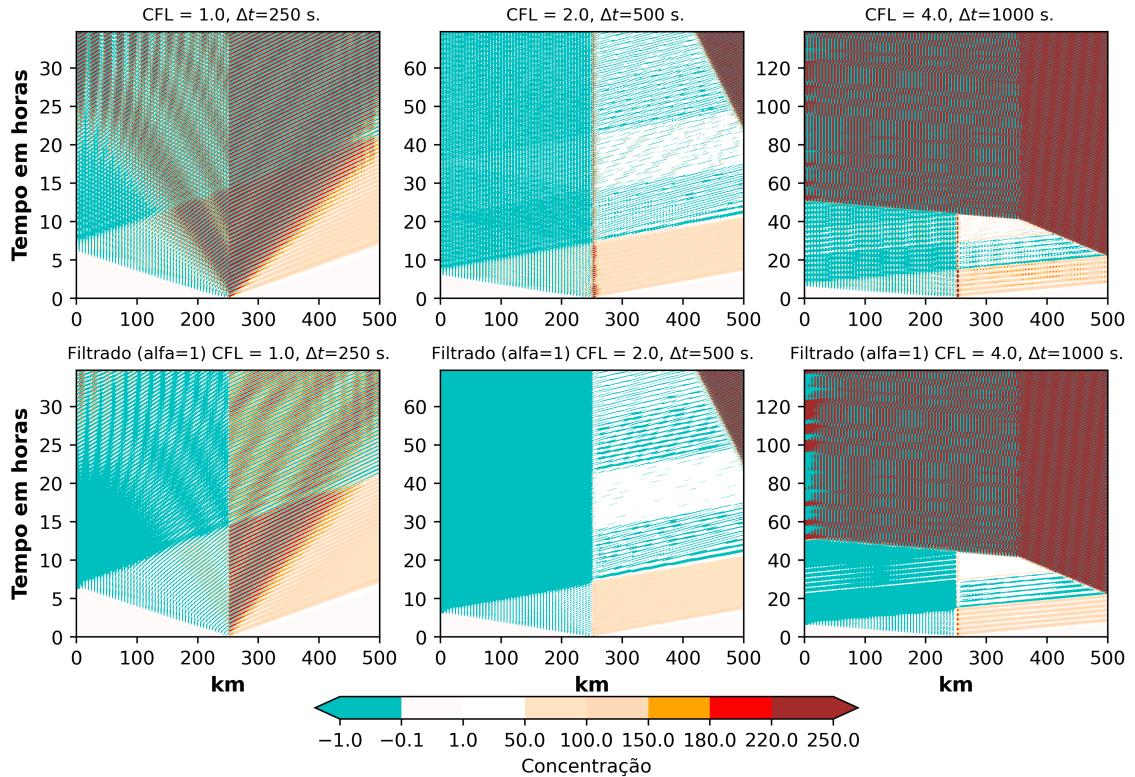


Figura 6: Variação do CFL  $\geq 1$  para o método implícito Crank-Nicolson. Os resultados sem filtragem são mostrados na parte superior da figura.

## 106 Apêndice A

107 A solução analítica considerou a aplicação das equações desenvolvidas na metodologia (equações 6, 7), representado  
108 como

$$C_{101}^{n+1} = C_{100}^{n-1} - \frac{1}{\omega} [\cos(-x k + \omega t_n) - \cos(-x k + \omega t_{n-1})] + \frac{\Delta x}{U} \sin(\omega t_n).$$

109 A equação está inserida no seguinte código em Python:

```
Nx, dx, Nt, dt, U = 201, 2500, 501, 50, 10,
x, _ = np.linspace(0, (Nx-1)*dx, Nx, retstep = True)
t, _ = np.linspace(0, (Nt-1)*dt, Nt, retstep = True)
CFL = U*dt/dx
C_s = np.zeros((Nx, Nt))
F = C_s.copy()
w = int(dx/(dt*U))
T, X = np.meshgrid(t, x)
# ----

for n in range(1, Nt-w):
    om=2*np.pi/1800
    k= om/U
    F[101, n] = wave(t, n)
    # outra solução
    C_s[101, n+1] = C_s[100, n] + 1/om*(-np.cos(om*t[n+1])) \
                    + np.cos(om*t[n])) + np.sin(om*t[n])*dx/U
    C_s[1:, n+w] = C_s[:-1, n]

C_s[C_s <= 0] = 0
```

110 A função do Euler progressivo no tempo e regressivo no espaço é mostrado em Python a continuação

```
C = np.zeros((Nx, Nt))
F = C.copy()

def euler_back(C, Nt, F, t, dt, CFL, Nx):
    for n in range(1, Nt-1):
        F[101, n] = 1/2*(wave(t, n)+wave(t, n-1)) # Fonte
        # advecção ordem 1
        for i in range(1, Nx-1):
            C[i, n+1] = C[i, n] + F[i, n]*dt - CFL*(C[i, n]- C[i-1, n])
        # radiacional
        C[-1, n+1] = C[-1, n] - CFL*(C[-1, n]- C[-2, n])
    return C
```

111 para C como matriz de Nx e Nt pontos de grade no espaço e tempo, respectivamente. O exercício 1 considerou uma  
112 resolução espacial  $\Delta x = 5000$ ; mas para representar o comprimento de onda, a resolução mudou para  $\Delta x = 2500$  e um  
113  $\Delta t = 50$  segundos. A função leapfrog considera para o primer passo de tempo o esquema Euler progressivo-regressivo,  
114 depois o código considera o modo radiacional:

```
def leap2(C, F, t, dt, CFL, Nt, Nx, gamma, alfa, f_space, f_time):
    for n in range(1, Nt-1):
        F[101, n] = 1/2*(wave(t, n)+wave(t, n-1)) # Fonte

        if n == 1: # Euler
            for i in range(1, Nx-1):
                C[i, n+1] = C[i, n] + F[i, n]*dt - CFL*(C[i, n]- C[i-1, n])
```

```

    if n > 1: # leapfrog
        for i in range(1, Nx-1):
            C[i, n+1] = C[i, n-1] + F[i, n]*2*dt - CFL*(C[i+1, n]- C[i-1, n])

    # radiacional
    C[-1, n+1] = C[-1, n] - CFL*(C[-1, n]- C[-2, n])

    # Robert-Asselin-Williams filter
    C = filter(C, gamma, alfa, n, Nx, f_space, f_time)
    return C

```

115 A continuação a função de leapfrog 4<sup>a</sup> ordem mostra os modos radiacionais com aplicação de Euler no primeiro passo  
116 de tempo:

```

def ordem4(C, F, t, dt, CFL, Nt, Nx, gamma, alfa, f_space, f_time):
    for n in range(1, Nt-1):
        # Aprox leapfrog 4a ordem
        # -----
        F[101, n] = 1/2*(wave(t, n)+wave(t, n-1)) # Fonte
        if n == 1:
            # Euler
            C = euler_back(C, Nt, F, t, dt,CFL, Nx)

        elif n > 1:

            C[2:-2, n+1] = C[2:-2,n-1] + F[2:-2,n]*2*dt - \
                            CFL/6*(C[:-4,n] - 8*C[1:-3,n] + 8*C[3:-1,n] - C[4:,n])

            # radiacional
            C[-2, n+1] = C[-2, n] + F[-2,n]*dt - CFL*(C[-2, n] - C[-3, n])
            C[-1, n+1] = C[-1, n] + F[-1,n]*dt - CFL*(C[-1, n] - C[-2, n])

    # Robert-Asselin-Williams filter
    C = filter(C, gamma, alfa, n, Nx, f_space, f_time)

    return C

```

117 Finalmente, o método implícito escolhido é o esquema Crank-Nicolson com as funções abaixo. Com o fim de preservar  
118 a função de resolução do esquema Crank-Nicolson, a fonte discretizada foi somada ao campo nulo, escrito em Python  
119 como segue:

```

def crank_matrix(CFL, x, uc=0.5):
    import scipy.sparse as sp
    uns = np.ones(len(x))
    r = uns*CFL/2
    diags = (-1, 0, 1) # -1 low diagonal, 0 main diagonal, 1 upper diagonal
    A = sp.spdiags([-uc*r, uns, uc*r], diags, len(x), len(x) )
    A = (sp.lil_matrix(A)).tocsr()
    B = sp.spdiags([(1-uc)*r, uns, -(1-uc)*r], diags, len(x), len(x) )
    B = (sp.lil_matrix(B)).tocsr()

    return A, B

def crank(A, B, C, F, t, dt, n, Nx, CFL, gamma, alfa, f_space=False, f_time = False):
    F[101, n] = 1/2*(wave(t, n) + wave(t, n-1)) # Fonte
    C[:, n+1] = spsolve(A, B*C[:, n]) + F[:,n]*dt

```

```

C[-1, n+1] = C[-1, n] + F[-1,n]*dt - CFL*(C[-1, n] - C[-2, n])

# Robert-Asselin-Williams filter
C = filter(C, gamma, alfa, n, Nx, f_space, f_time)

return C

```

120 Finalmente, o seguinte código em Python mostram os filtros Robert-Asselin-Williams que removem o modo computacional. O filtro foi aplicado para todo o domínio.

```

def filter(C, gamma, alfa, n, Nx, f_space, f_time):
    """Filtro Robert-Asselin-Williams para remover o modo computacional
    gamma = 0.1 ou 0.01
    alfa = 0.53
    """

    for i in range(1, Nx-1):
        if f_time == True:
            C[i, n] = C[i, n] + gamma*alfa/2*(C[i, n+1] - 2*C[i, n] + C[i, n-1])
            C[i, n+1] = C[i, n+1] - gamma*(1-alfa)/2*(C[i, n+1] - 2*C[i, n] + C[i, n-1])

        elif f_space == True:
            C[i, n] = C[i, n] + gamma*alfa/2*(C[i+1, n] - 2*C[i, n] + C[i-1, n])
            C[i+1, n] = C[i+1, n] - gamma*(1-alfa)/2*(C[i+1, n] - 2*C[i, n] + C[i-1, n])

    return C

```