



# 台股配對交易策略 – Cointegration & OU process

社員：王亭烜

## 目錄

1. 論文簡介
2. 理論說明
3. 交易設定&策略邏輯
4. 回測架構
5. 交易績效
6. 策略優化
7. 附錄

# 論文簡介

---

本篇報告主要參考L Calderia和GV Moura在2013所撰寫的論文，其主題為“ Selection of a Portfolio of Pairs Based on Cointegration: A Statistical Arbitrage Strategy”，我認為論文的重點如下：

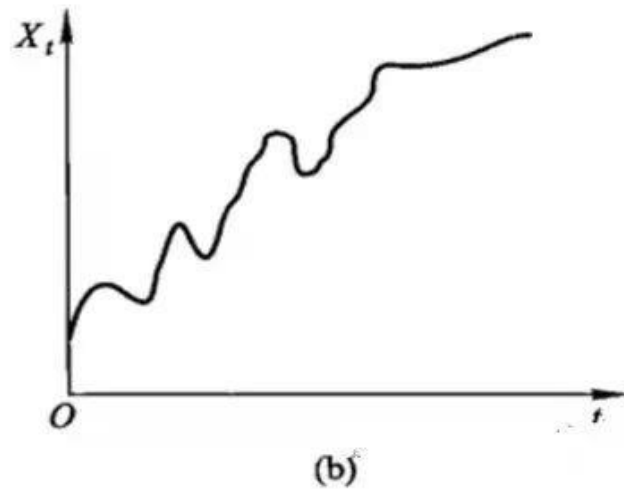
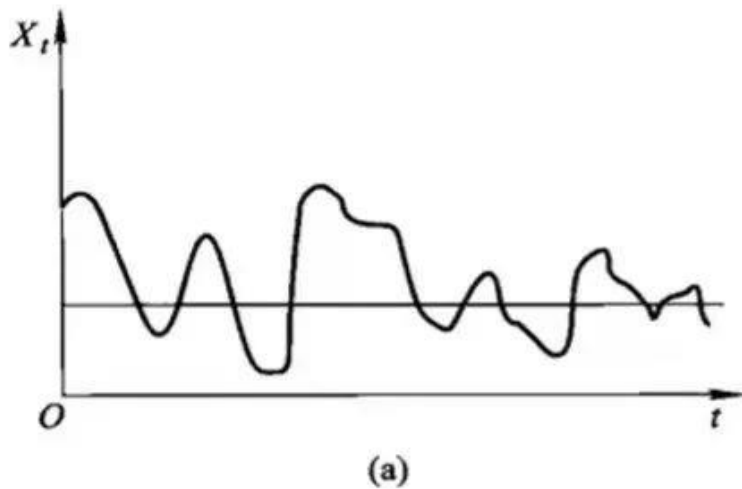
- 透過共整合(cointegration)篩選價差具有均值回歸特性的交易對
- 掌握價差偏離長期平均值的時機並藉此進行套利
- 同時交易多組交易對以達到分散風險的效果
- 定期篩選交易對以及調整參數避免市場結構改變

# 理論說明

## 〈定態時間序列〉

當以下三點被滿足時，我們可以稱一組時間序列為定態(具有平穩性)：

- 均數為常數
- 變異數為有限值
- 其自我共變異數為 $k$ 的函數，與 $t$ 無關，也就是 $\text{Cov}(x_t, x_{t-k}) = f(k)$



# 理論說明

## 〈共整合關係〉

前面說到定態時間序列，我們將其稱為零階整合(integrated of order zero)序列，簡稱 $I(o)$ 序列，並用 $y_t \sim I(o)$ 來代表 $y_t$ 為一個零階整合序列。那如果一個時間序列在經過一階差分之後為定態，我們便會稱其為一階整合序列，並用 $z_t \sim I(1)$ 表示。同理可推，一時間序列經過 $d$ 次差分之後為定態，則我們可以用 $I(d)$ 表示該序列。

共整合(協整)是指兩個或多個非平穩的變數序列在經過某個線性組合之後所得到的序列會具有平穩性，此時我們便會說這些序列具有協整關係存在。換句話說，共整合關係就是將一群 $I(1)$ 序列做某一線性組合後變成了一個新序列，而該新序列是一個 $I(o)$ 序列。

## 〈統計檢定〉

前面提到平穩性(Stationary)以及協整(Cointegration)，我們可以用以下的統計方式對時間序列進行檢驗：

統計特性	檢定方法
平穩性、定態	Augmented Dickey-Fuller Test(ADF)
協整關係、共整合關係	Engle Grangers 2-step approach Johansen test

# 交易設定&策略邏輯

---

## 〈交易設定〉

標的：台股台灣50指數成分股

週期：日

樣本內期間：2012/1/1 – 2018/12/31

樣本外期間：2019/1/1 – 2022/11

手續費：無

## 〈策略邏輯〉

- 計算價差 + 平滑處理
- 設定開倉、止盈、停損閾值
- 設定持有部位出場天數

# 交易設定&策略邏輯



# 回測架構

根據論文中的做法，我對台股市值前50大的股票進行滾動式的篩選以避免市場結構的改變。所謂滾動式篩選就是說我將訓練期設為1年，交易期設為6個月，在6個月的交易期結束之後再以交易期的起始點做為新的訓練期起始點進行股票交易對的篩選。當然，在篩選的過程我會先透過ADF檢定檢驗股價時間序列是否具平穩性，接著使用Engle Granger 2-stage approach對股票兩兩檢驗找出具有協整關係的股票做為接下來6個月交易期的交易標的。以下將回測架構以圖示說明：

樣本內

樣本外

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

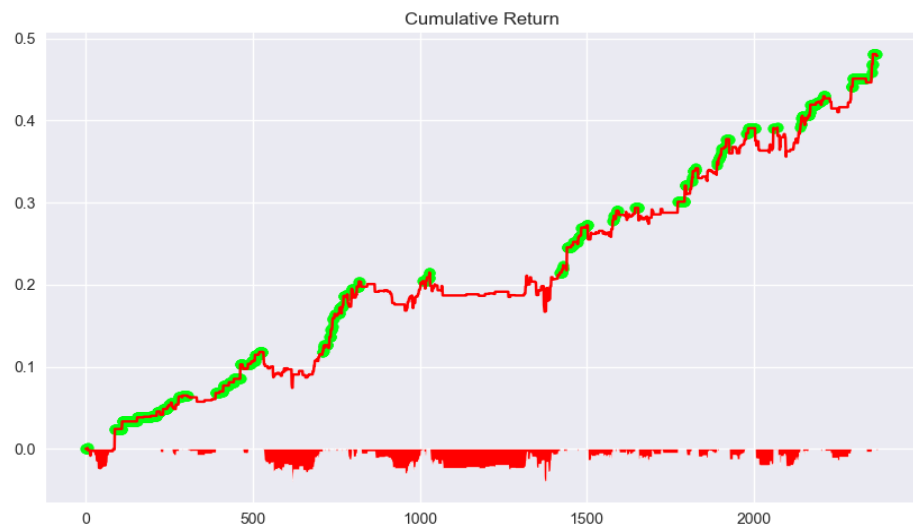
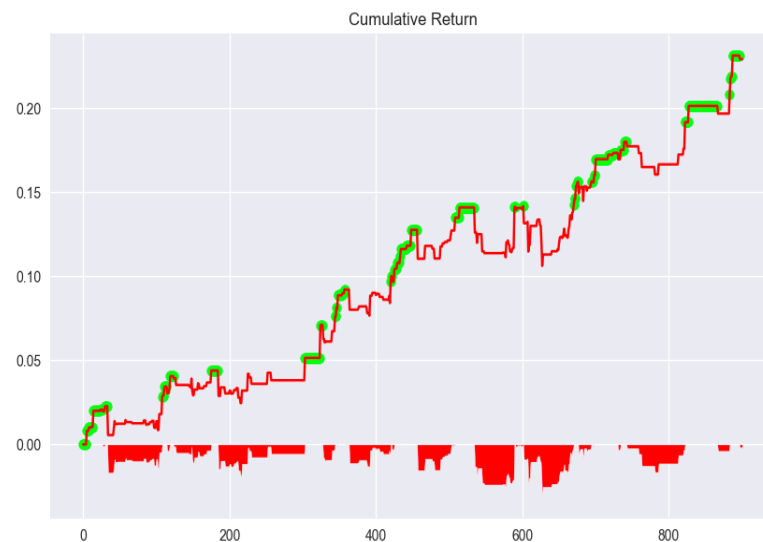
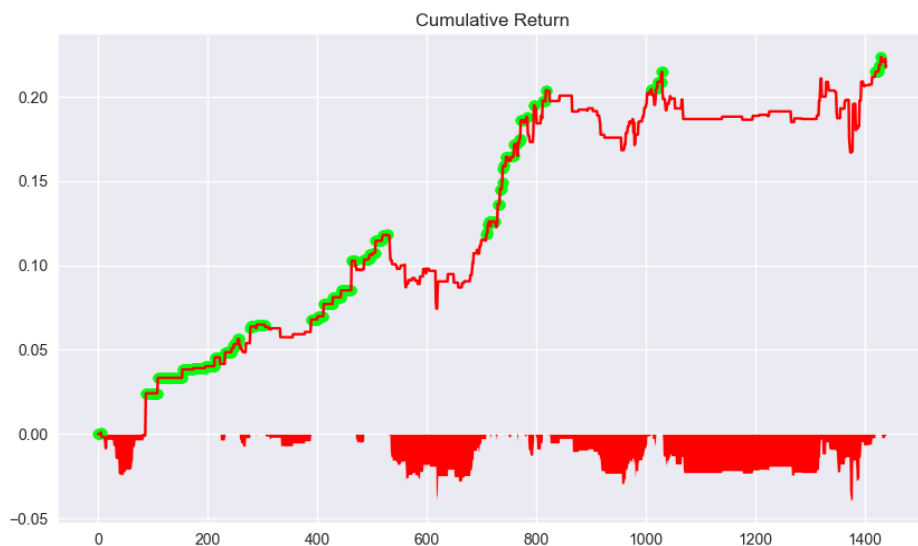
樣本內

樣本外

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----



# 交易績效



交易期間	CAGR	MDD
樣本內	3.72%	3.9%
樣本外	5.54%	3.1%
全樣本	4.8%	3.9%

# 策略優化

---

從前面的回測結果可以看到其實用這種傳統的配對交易策略在市場上要獲利並不是一件容易的事。我認為從以下幾個面向或許可以優化我們的配對交易策略：

- 將交易周期縮小，使用小時k或甚至分k來替代日k
- 對於每一個交易對設定不同的開倉平倉閾值
- 停損改以%數設定

---

根據優化方向第二點，我參考了“ Pairs trading: optimal thresholds and profitability” (2014) 這篇論文。以下將會對論文簡介以及應用做簡單說明：

## 〈論文簡介〉

不同於過去的配對交易策略以價差均值和標準差做為進出場的依據，本篇論文希望能透過數學模型的推導來找出最佳的閾值。透過每筆交易期間長短和每筆交易的獲利之間的關係進而帶出一個最大化的數學問題，藉由尋找這個最佳化問題的解我們便可以在理論上求導出最大之每單位時間預期獲利(Expected profit per unit of time)。

# 策略優化

## 〈策略應用〉

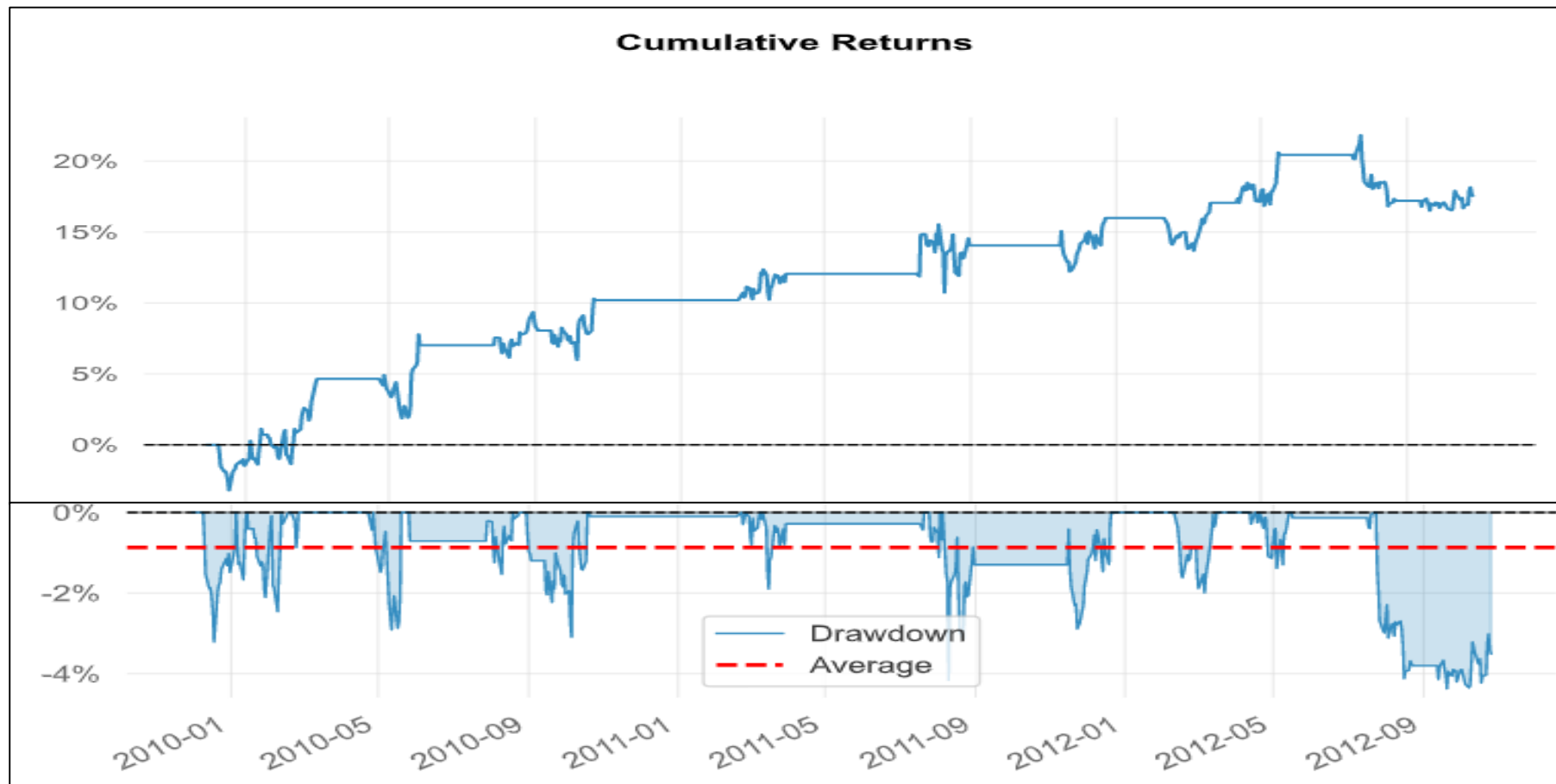
1. 使用ADF test以及Engle Granger 2-stage approach找出具有協整關係的交易對
2. 對 $\ln(P_t)$ 以及 $\ln(Q_t)$ 進行回歸分析，可以得到 $\ln(P_t) - \beta \ln(Q_t) = X_t$
3. 假設步驟2中的 $X_t$ 服從OU Process  $dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$ ，透過Hu and Long(2007)論文中推導出的likelihood function進行最大概似估計法，得到 $\mu, \theta, \sigma$
4. 設定交易成本 $c$ 並將其轉換到dimensionless system，透過解方程式得到最適閾值 $a^*$ 和 $b^*$
5. 透過 $a^{\sim*} = a^* \sqrt{\sigma^2 \theta} + \mu$ 以及 $b^{\sim*} = b^* \sqrt{\sigma^2 \theta} + \mu$ 將 $a^*$ 和 $b^*$ 轉至real system得到我們要的交易閾值
6. 建構交易訊號

$$L(x|u, \theta, \sigma) = -\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-2\theta(t_i - t_{i-1})}) - \frac{\theta}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{X_{t_i} - \mu - (X_{t_i} - \mu)e^{-\theta(t_i - t_{i-1})}}{1 - e^{-2\theta(t_i - t_{i-1})}}$$
$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2a})^{2n+1}}{(2n+1)!} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = (a - c) \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2a})^{2n}}{(2n)!} \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)$$

# 策略優化



# 策略優化



(PEP/KO)

# 附錄

經過篩選後，樣本內加樣本外總共有將近140個交易對涉及，其中涵蓋48支股票：

訓練期間	交易對
2012/1-2012/12	1301/1303,2382/1101, 2891/1402, 2308/3045, 2303/3231, 1102/2301, 1101/2301, 2801/1722
2012/6-2013/6	2308/2105
2013/1-2013/12	1301/1402, 2382/2886, 2891/2884, 3711/1102
2013/6-2014/6	3045/4904, 4904/3481
2014/1-2014/12	2882/2801,2357/4904,3711/2912,1216/1102,2880/2801,2883/3481,5880/2801
2014/6-2015/6	2330/3045,1326/2882,2412/3711,3711/9904,4938/9904
2015/1-2015/12	2002/3045,2882/2881,2881/4938,2382/3045,2357/3045,2357/4904,2891/2886,3711/1216,3711/2324,1216/2301,3045/2105,3045/1101,3045/2409.3045/2884,3045/2301,2912/4904,4904/2884
2015/6-2016/6	2498/2303,2357/3481,2308/2884
2016/1-2016/12	2330/2354,1303/2882,2002/2885,2454/1102,2881/6505,2357/2474,2891/2884,2308/2409,2885/3481,1101/2884,2912/4904,2880/2884

# 附錄

訓練期間	交易對
2016/6-2017/6	2412/6505
2017/1-2017/12	1101/2801
2017/6-2018/6	1301/1303,1303/2890,1326/2883,2881/6505,2891/6505,2891/2887,2891,2883,2308/1402,6505/2887,6505/2883,2324/2880,2354/5880,2354/2890,1101/2801,2880/4904
2018/1-2018/12	1303/2883,2882/2357,2354/2105,2105/4938
2018/6-2019/6	2317/2357,2317/2354,2317/4938,1301/2887,1303/1402,2412/4904,2357/2354,2357/4938,2886/4904,2354/4938,2105/2883,1402,2887
2019/1-2019/12	6505/2301,1101/2890
2019/6-2020/6	1301/1303,1301/2002,1301/3711,1301/5876,1301/2887,1301/9904,1303/3711,1303/2887,1303/2880,2881/2880,3045/4904,2912/1102
2020/1-2020/12	2882/1402,1216/2474,2912/4904
2020/6-2021/6	2317/4938,2412/2002,2412/2882,2412/2881,2412/2891,2412/2885,2412/1101,2412/1402,2412/2409,2412/2887,2412/2883,2412/2301,2412/2890,2882/2883,2382,2324,2891/1402,2303/4938,1216/2886,2892/5880,2883/2890,4904/5880
2021/1-2021/12	2891/2886,1402/1102
2021/6-2022/6	2317/2887,2303/3045,1402/2395



**感謝聆聽，敬請指教**