



*Projet Analyse de Données/Calcul Scientifique*  
Compte-rendu de la séance-projet n°1  
**Application de l'ACP : les « Eigenfaces »**

Alice Devilder, Nicolas Catoni, Clément Delmaire-Sizes  
Groupe MN

25 mars 2022

# Table des matières

1 Les « Eigenfaces » . . . . .	2
2 L'ACP et la méthode de la puissance itérée . . . . .	8

## 1 Les « Eigenfaces »

### 1.1 Analyse en Composantes Principales

Dans cette première partie du projet de calcul scientifique et analyse de données, nous disposons seulement de 4 personnes (2 femmes et 2 hommes) sur 32 (16 hommes et 16 femmes) et 4 postures sur 6 sont sélectionnées pour faire partie de la base d'apprentissage (Figure 1).

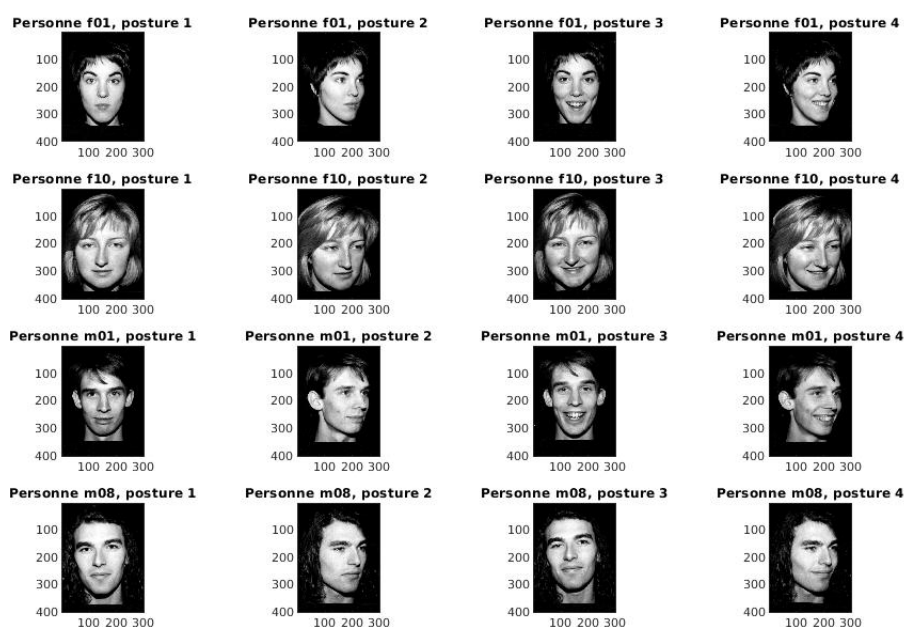


FIGURE 1 – La base de visages : 4 personnes avec 4 postures différentes

Voici ce que l'on obtient en calculant les axes principaux des images d'apprentissage, appelés eigenfaces, à partir des vecteurs propres associés aux 15 valeurs propres non nulles de la matrice de variance/covariance  $\Sigma$  des données.

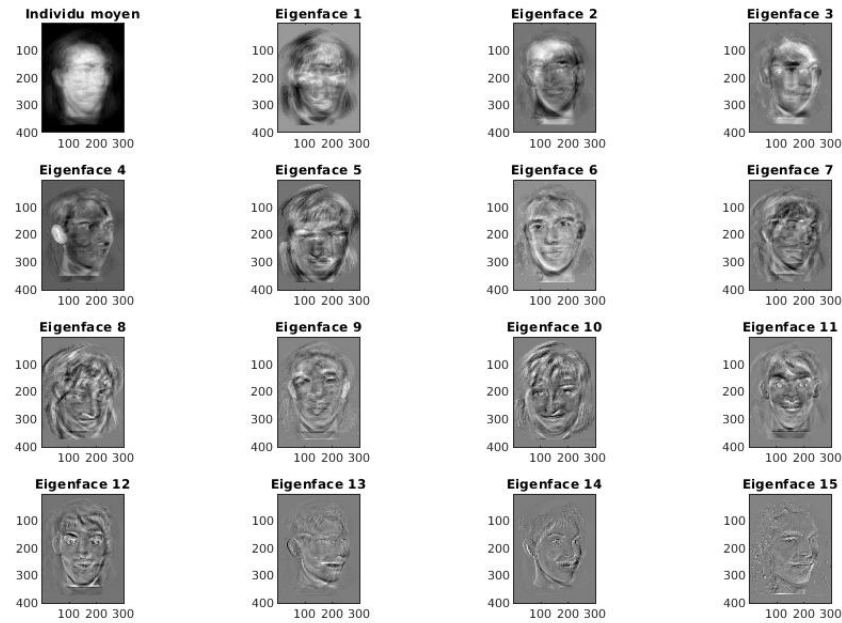


FIGURE 2 – Les eigenfaces de la base de visages

## 1.2 Projection des images sur les eigenfaces

Maintenant que nous connaissons les 16 eigenfaces, nous pouvons calculer les composantes principales. Ainsi nous avons pu afficher les images d'apprentissage reconstruites à l'aide des  $q$  premières eigenfaces et des  $q$  premières composantes principales, pour  $q \in [0, 15]$  ( $q = 0$  correspond à l'individu moyen).



FIGURE 3 – Reconstruction des images à l'aide des eigenfaces et de l'ACP

Nous avons ensuite affiché l'évolution, en fonction de  $q$ , de la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (Root Mean Square Error, ou RMSE) entre les images originales et les images ainsi reconstruites.

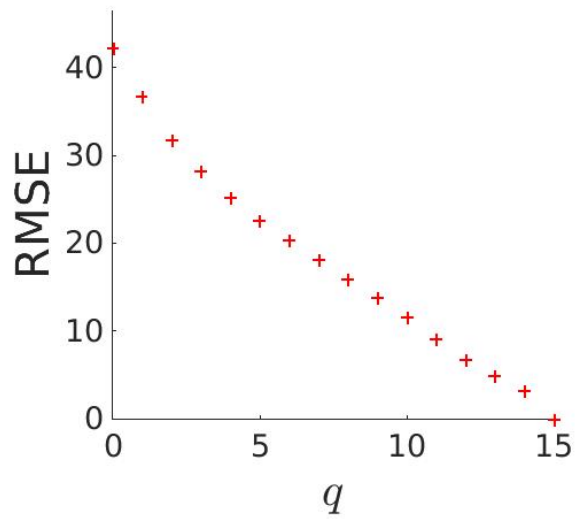


FIGURE 4 – Evolution du RMSE en fonction de  $q$

### 1.3 Travail sur les visages masqués

Désormais la moitié des visages des précédents individus est cachée. Cette opération de cacher le visage s'apparente à un domaine en traitement d'images et de vidéos appelé "inpainting". En effet, les pixels correspondant à la zone du masque (modélisé par un rectangle) sont mis à 0. Et les eigenfaces permettent, entre autres, de restaurer la zone dégradée.

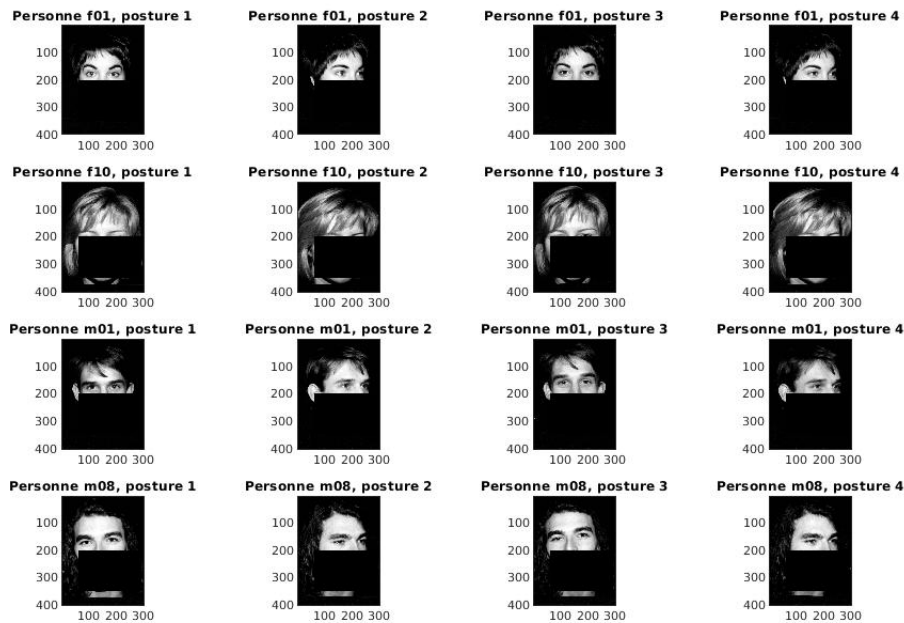


FIGURE 5 – La base de visages avec masque : 4 personnes masquées avec 4 postures différentes

Comme précédemment, nous avons calculé les eigenfaces des images d'apprentissage.

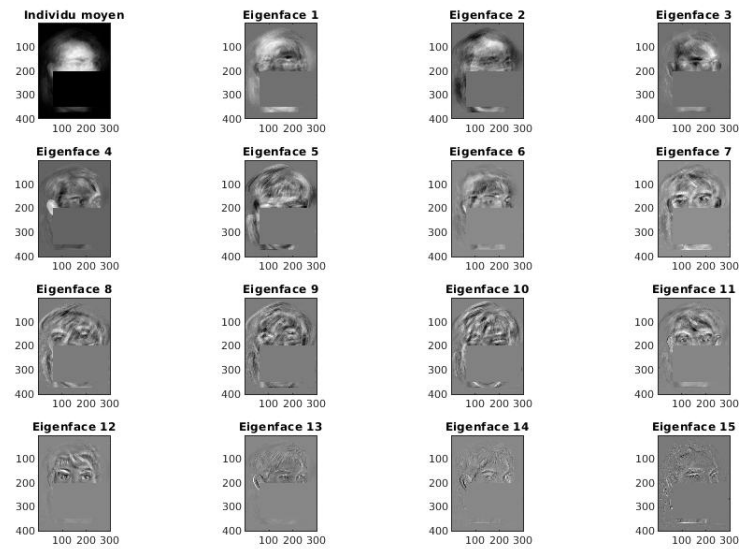


FIGURE 6 – Les eigenfaces de la base de visages avec masque

Ainsi, nous avons affiché les images d'apprentissage reconstruites grâce aux eigenfaces et aux premières composantes principales.

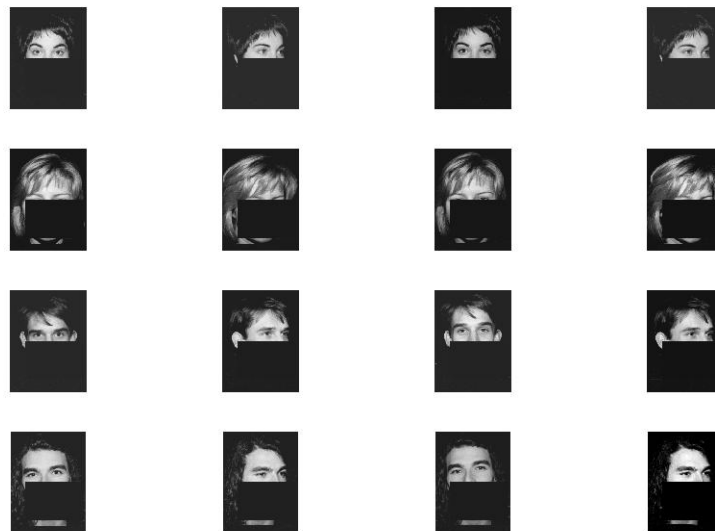


FIGURE 7 – Reconstruction des images à l'aide des eigenfaces et de l'ACP

De même, voici l'évolution de la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne entre les images originales et les images ainsi reconstruites.

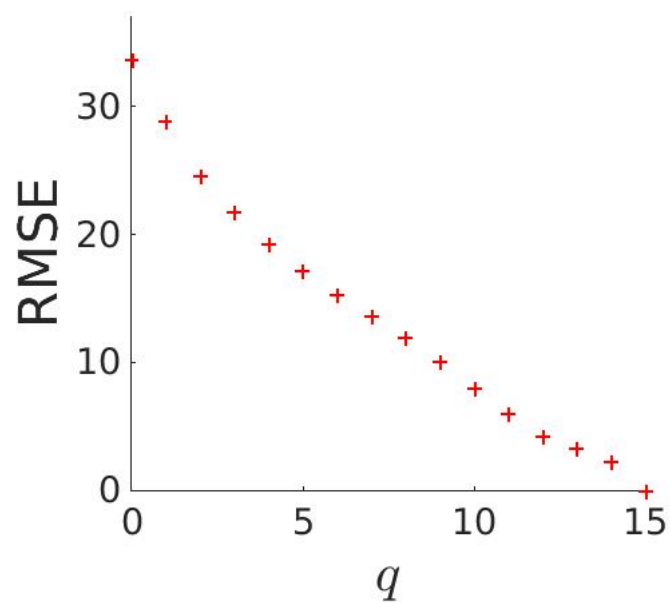


FIGURE 8 – Evolution du RMSE en fonction de  $q$

## 2 L'ACP et la méthode de la puissance itérée

### 2.1 Question 4 :

Soit  $x$  vecteur propre de  $H^T H$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .  
 $H^T H x = \lambda x \implies H H^T (H x) = \lambda (H x)$   
D'où  $\lambda$  valeur propre de  $H H^T$  et  $H x$  vecteur propre de  $H H^T$ .  
Ainsi, toute valeur propre de  $H^T H$  est valeur propre de  $H H^T$ .

De même, soit  $x$  vecteur propre de  $H H^T$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .  
 $H H^T x = \lambda x \implies H^T H (H^T x) = \lambda (H^T x)$ .  
D'où  $\lambda$  valeur propre de  $H^T H$  et  $H^T x$  vecteur propre de  $H^T H$ .  
Ainsi, toute valeur propre de  $H H^T$  est valeur propre de  $H^T H$ .

Les valeurs propres de  $H H^T$  et celles de  $H^T H$  sont donc identiques. De plus, les vecteurs propres de  $H^T H$  permettent de déduire celles de  $H H^T$  (en les multipliant par  $H$ ).

### 2.2 Question 5 :

Les résultats d'exécution du programme de puissance\_iterree.m sont les suivants :

Erreur pour la methode avec la grande matrice = 9.136e-07  
Erreur pour la methode avec la petite matrice = 9.090e-07  
Ecart relatif entre les deux valeurs propres trouvees = 4.97e-03

Temps pour une ite avec la grande matrice = 6.263e-03  
Temps pour une ite avec la petite matrice = 1.550e-04  
Différence de temps entre méthode eig et puissance itérée = 3.190e+00

Valeur propre dominante (methode avec la grande matrice) = 9.172e+04  
Valeur propre dominante (methode avec la petite matrice) = 9.172e+04  
Valeur propre dominante (fonction eig) = 9.172e+04

### 2.3 Question 6 :

Afin d'effectuer une ACP, il est nécessaire de déterminer la valeur propre dominante de la matrice  $H$ , ce qui nous est fourni par la méthode des puissances itérées. Or, d'après nos essais, cette méthode est entre 10 et 30 fois plus rapide que de calculer toutes les valeurs propres à l'aide de la fonction eig puis de garder la plus grande.



## 2.4 Question 7 :

Pour calculer les éléments propres de  $\Sigma$  en utilisant la méthode de la puissance itérée avec déflation, il est préférable d'utiliser la plus petite des matrices entre  $H^T H$  et  $H H^T$  car le temps d'exécution et la mémoire nécessaire sont plus faibles.