# Line and Curve Drawing Algorithms Examples (Part B: More Examples)

## 1. Digital Differential Analyzer (DDA) Algorithm

เงื่อนไขการพิจารณา

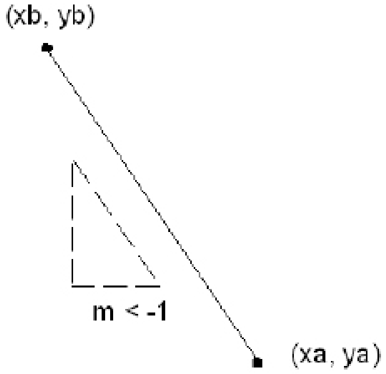
- จากสมการเส้นตรง $y = mx + b$ หาความชัน m
- พิจารณา ความชันของเส้นตรง และ จุดปลายเริ่มต้นของเส้นตรง เพื่อหาสมการ iterations ตัวอย่างเช่น

กรณีที่ ค่าความชันของเส้นตรงมีค่าเป็นบวก และ น้อยกว่าหรือเท่ากับ 1

$$x_{k+1} = x_k + 1$$
$$y_{k+1} = y_k + m$$

สำหรับกรณีอื่นๆ น.ศ. ทบทวนจากสไลด์ด้วยตนเอง

**Exercise 1** จงเขียนสมการ iterations ของ DDA Algorithm เมื่อกำหนดให้ลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด (xa, ya) ไปยังจุด (xb, yb) โดยที่เส้นตรงมีความชันน้อยกว่า -1 และ ya < yb




**ทดลองวาดรูปตามโจทย์**

จากรูปจะเห็นว่า m < -1 นั่นคือ

- |m| มีค่า > 1 ดังนั้น step ไปตามแกน y แล้วหาค่า x
- เส้นตรงมีความชันเป็นลบ แต่โจทย์กำหนดให้เพิ่มค่า y (ya ไป yb) ดังนั้น ค่า x **จะลดลง**

วิธีทำ จากข้อพิจารณาข้างต้น นำมาเขียนเป็นสมการ DDA ได้ดังนี้

$$y_{k+1} = y_k + 1$$
$$x_{k+1} = x_k - \left|\frac{1}{m}\right| = x_k + \frac{1}{m} \quad \text{where } (x_0, y_0) = (x_a, y_a)$$

สาเหตุที่ x ลดลงพิสูจน์ได้ดังนี้

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

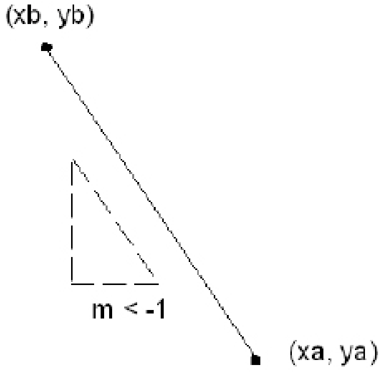
*นิยามของความชัน*

$$\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} < 0$$
$$y_b > y_a \rightarrow x_b < x_a$$

*ความชันของเส้นตรงน้อยกว่า 0*
*ทราบว่า yb > ya ดังนั้น xb < xa จากหลักอสมการ*

**Exercise 2** จากข้อ 1 จงใช้ DDA Algorithm วาดเส้นตรงในทิศทางตรงข้าม จุด (xb, yb) ไปยังจุด (xa, ya) พร้อมทั้งเขียน pseudo code ด้วย

**วิธีทำ**




**ทดลองวาดรูปตามโจทย์**

จากรูปจะเห็นว่า m < -1 นั่นคือ

- |m| มีค่า > 1 ดังนั้น step ไปตามแกน y แล้วหาค่า x
- เส้นตรงมีความชันเป็นลบ แต่โจทย์กำหนดให้ลดค่า y (yb ไป ya) ดังนั้น ค่า x **จะเพิ่มขึ้น**

วิธีทำ จากข้อพิจารณาข้างต้น นำมาเขียนเป็นสมการ DDA ได้ดังนี้

$$y_{k+1} = y_k - 1$$
$$x_{k+1} = x_k + \left|\frac{1}{m}\right| = x_k - \frac{1}{m} \quad \text{where}\,(x_0, y_0) = (x_a, y_a)$$

กำหนดค่าเริ่มต้นให้พิกัดจุดแรก $k = 0 \quad y_k = y_b \quad x_k = x_b$
setpixel $(x_k, y_k)$

**while** $y_k < y_a$ **do**

$y_k \leftarrow y_k + 1$
$x_k \leftarrow x_k - \frac{1}{m} \quad /* \quad m < 0 \rightarrow -\frac{1}{m} > 0 \quad */$

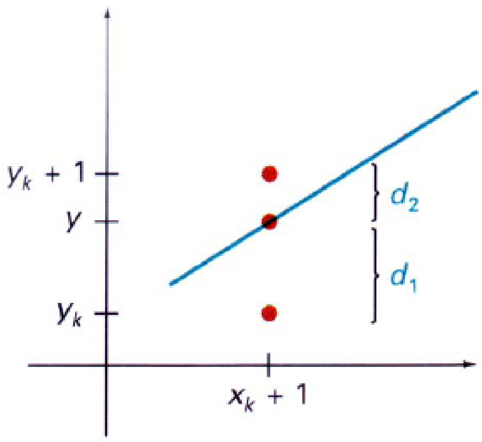
setpixel $(\lfloor x_k + 0.5 \rfloor, y_k)$ การปัดเศษคือการ +0.5 แล้วปัดลง
$k \leftarrow k + 1$ คำนวณพิสัยในแนวแกน $x$ รวม ณ ปัจจุบัน

**end while**

**สำหรับตัวอย่างทั้งสองข้อนี้ ชี้ให้เห็นว่า**

- เมื่อความชันเป็น **ลบ** การเปลี่ยนแปลงในแนวแกน x และ y จะเป็นไปในทิศทางตรงกันข้ามกัน
- ในกรณีที่เปลี่ยนค่า y (ทราบค่า y) แล้วต้องการหาค่า x โดยพิจารณาจากความชัน ให้ตรวจสอบดูจาก เศษส่วนกลับของค่าความชัน ด้วยว่า ให้ผลการเปลี่ยนแปลงของ x ตามที่ต้องการหรือไม่ (สมการใน lecture ใช้ได้เฉพาะกรณี วาดจากซ้ายไปขวา หรือบนลงล่างเท่านั้น)

## 2. Bresenham's Line Drawing Algorithm

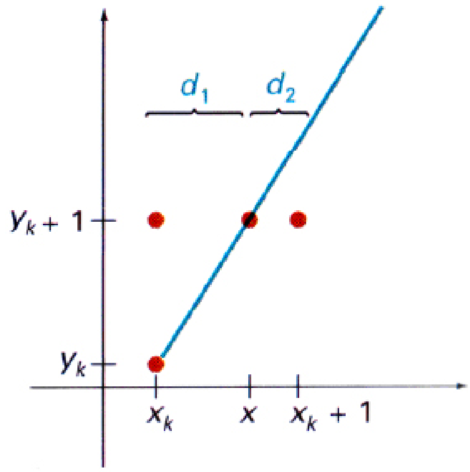



หลักการของ Bresenham Algorithm มีอยู่ว่า จากสมการของ องค์ประกอบเรขาคณิต (เช่น เส้นตรง)

หาค่าความแตกต่างระหว่างค่าพิกัดจริงที่ต้องการ กับ พิกัดซึ่งประมาณ ที่ตำแหน่งปัจจุบัน ($d_1$) และ กับ พิกัดซึ่งประมาณ ที่ตำแหน่งถัดไป ($d_2$)

ตำแหน่งถัดไปของพิกัดจุดในแต่ละแกนนั้นพิจารณา จากค่าความชันของเส้นตรง ณ ตำแหน่งนั้น

**Exercise 3** จงพิสูจน์หาสมการ ตัวแปรตัดสินใจ ของ Bresenham Algorithm สำหรับเส้นตรงที่มีความชัน **มากกว่า 1** และวาดจาก **ล่างขึ้นบน** ดังรูป




ในทำนองเดียวกันกับวิธี DDA ถ้าค่าสัมบูรณ์ของความชัน มีค่ามากกว่า 1 ให้เพิ่มหรือลดค่า y แล้วคำนวณหาค่า x

ในที่นี้โจทย์กำหนด **เพิ่มค่า y** (วาดจากล่างขึ้นบน)

เนื่องจากความชันมีค่าเป็นบวก ดังนั้น เมื่อ y เพิ่ม x จะเพิ่มด้วย นั่นคือ $x_{k+1}$ อยู่ทางขวาของ $x_k$ ตามรูป

(พิสูจน์จากสมการเมื่อความชันเป็น + คล้ายกับกรณีของ DDA)

a) กำหนดให้ $d_1$ เป็นระยะห่างจาก $x_k$ ไป $x = x - x_k$
b) กำหนดให้ $d_2$ เป็นระยะห่างจาก x ไป $x_{k+1} = x_{k+1} - x$
c) กำหนดให้ $m = \Delta y / \Delta x$ โดยที่ $\Delta y$ = พิกัด y ของจุดบน – พิกัด y ของจุดล่าง (มีค่าเป็นบวก) และ $\Delta x$ = พิกัด x ของจุดขวา – พิกัด x ของจุดซ้าย (มีค่าเป็นบวก)

**วิธีทำ** พิสูจน์หา Algorithm ในกรณีที่ $(m > 1)$

จากสมการเส้นตรง $y = mx + b \rightarrow x = \frac{1}{m} \cdot y - \left(\frac{b}{m}\right)$

เมื่อเส้นตรงมีความชันมากกว่า 1 และ plot จากล่างขึ้นบน $y_0 < y_1$ เราจะทำการ **เพิ่มค่า** y ทีละ 1 จุดภาพ ดังนั้นจุดถัดไปของพิกัด x (จำนวนจริง) สามารถเขียนในรูปของ y ที่ตำแหน่งถัดไป

$$x = m' \cdot (y_k + 1) + b' \quad m' = 1/m, \quad b' = -b/m$$

ดังนั้นเราสามารถคำนวณ ระยะห่าง

- ระหว่างพิกัด x ปัจจุบัน ($x_k$) กับเส้นตรงจริง ($d_1$) และ
- ระหว่าง พิกัด x ถัดไป ($x_k + 1$) กับเส้นตรงจริง ($d_2$) ได้ ดังนี้

$$p_{k+1} = \begin{cases} p_k + 2\cdot\Delta x - 2\cdot\Delta y & , p_k \ge 0 \\ p_k + 2\cdot\Delta x & , p_k < 0 \end{cases}$$

หาค่า $p_0$ โดยแทนค่า $(x_k, y_k)$ เท่ากับ $(x_0, y_0)$ ในสมการ $p_k$

$$p_0 = 2\cdot\Delta x\cdot(y_0+1) + \Delta y\cdot(2\cdot b' - 1) - 2\cdot\Delta y\cdot x_0$$

จากสมการเส้นตรงเราได้ว่า $x_0 = m'y_0 + b'$ แทนไปในสมการด้านบน

$$p_0 = 2\cdot\Delta x\cdot(y_0+1) + \Delta y\cdot(2\cdot b' - 1) - 2\cdot\Delta y\cdot\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}y_0 + b'\right)$$

$$= 2\cdot\Delta x - \Delta y$$

**หมายเหตุ**

สำหรับเส้นตรงใดๆ จะปรากฏอยู่ภายใน 1 ใน 8 octants (ดูความหมายของ octant ใน lecture ครั้งที่ 2) ซึ่งแต่ละ octant เราสามารถลากเส้นตรงได้ 2 วิธี คือ จากจุด a ไป b และในทิศทางตรงกันข้าม ดังนั้น Bresenham Algorithm จึงเป็นไปได้ทั้งหมด 2×8 = 16 กรณี ดังนั้น น.ศ. จึงไม่ควรจำรูปแบบ **แต่ควรหัดพิสูจน์สมการเอง**

**สรุปขั้นตอน สำหรับการวาดเส้นตรงด้วย Bresenham's Algorithm**

1. ตรวจสอบค่าสัมบูรณ์ของ ความชันเส้นตรง (m) จากสมการ หรือจากโจทย์กำหนด

   - ถ้าค่าสัมบูรณ์ของ **m มีค่า น้อยกว่าหรือเท่ากับ 1** ให้พิจารณา step (±1) **ตามแกน x**

   **เหตุผล** ค่า y เปลี่ยนด้วยอัตราช้ากว่า x ดังนั้นการเปลี่ยนพิกัด x 1 จุดภาพ ทำให้ y เปลี่ยนน้อยกว่า 1 จุดภาพ ซึ่งทำให้ค่าจำนวนเต็มของ y (หลังปัดเศษ) ต่อเนื่อง

   - ถ้าค่าสัมบูรณ์ของ **m มีค่า มากกว่า 1** ให้พิจารณา step (±1) **ตามแกน y**

   **เหตุผล** ค่า x เปลี่ยนด้วยอัตราช้ากว่า y ดังนั้นการเปลี่ยนพิกัด y 1 จุดภาพ ทำให้ x เปลี่ยนน้อยกว่า 1 จุดภาพ ซึ่งทำให้ค่าจำนวนเต็มของ x (หลังปัดเศษ) ต่อเนื่อง

2. ทิศทางในการ step พิกัด x (หรือ y) ให้พิจารณาจากโจทย์ ถ้าโจทย์ไม่กำหนด เพื่อความสะดวก ให้วาดจากซ้ายไปขวา (สำหรับการเปลี่ยนพิกัด x, $x_{k+1} = x_k + 1$) หรือ ล่างขึ้นบน (สำหรับการเปลี่ยนพิกัด y, $y_{k+1} = y_k + 1$)

3. วาดรูปแสดงจุดภาพ ตำแหน่งปัจจุบัน (k) และตำแหน่งถัดไป (k+1) แล้วนิยาม d1 และ d2

   - สำหรับการ **step ตามแกน x** ให้วาดพิกัด $x_{k+1}$ และ พิจารณา $y_k$, $y = m(x_{k+1}) + b$ และ $y_{k+1}$, กำหนด d1 และ d2 แทนระยะระหว่าง y (เส้นตรงจริง) กับ $y_k$ และ $y_{k+1}$ (จุดที่ต้องการคำนวณ) ตามลำดับ

   - สำหรับการ **step ตามแกน y** ให้วาดพิกัด $y_{k+1}$ และ พิจารณา $x_k$, $x = m'(y_{k+1}) + b'$ และ $x_{k+1}$ กำหนด d1 และ d2 แทนระยะระหว่าง x (เส้นตรงจริง) กับ $x_k$ และ $x_{k+1}$ (จุดที่ต้องการคำนวณ) ตามลำดับ

4. หาผลต่างระหว่าง d1 และ d2 แล้วนำไปคูณกับค่าที่เป็นบวก เพื่อแปลงความชัน m (หรือ m′) เป็นเลขจำนวนเต็ม ผลลัพธ์ที่ได้คือ ตัวแปรตัดสินใจ $p_k$

   - สำหรับการ **step ตามแกน x** จะได้ว่า m ในสมการคือ $\Delta y/\Delta \mathbf{x}$ ดังนั้นทำให้เป็นจำนวนเต็มโดยการคูณ $\Delta x$ ทั้งสองข้างของสมการ (เมื่อ $\Delta x$ คือผลต่างระหว่างจุดปลายสองจุดในแนวแกน x

   - สำหรับการ **step ตามแกน y** จะได้ว่า m′ ในสมการคือ $\Delta x/\Delta \mathbf{y}$ ดังนั้นทำให้เป็นจำนวนเต็มโดยการคูณ $\Delta y$ ทั้งสองข้างของสมการ (เมื่อ $\Delta y$ คือผลต่างระหว่างจุดปลายสองจุดในแนวแกน y

   (ในที่นี้ควรระบุลำดับของจุดปลาย ที่ให้ค่า $\Delta$ เป็นบวก)

5. เขียน $p_k$ ในรูปของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด: $p_{k+1} = p_k + F(\Delta x, \Delta y, x_k, y_k)$

6. พิจารณาเครื่องหมายของ $p_k$ จากความสัมพันธ์ของ d1 และ d2 เพื่อหาว่าจุดที่ต้องการวาดในแกนที่ไม่ทราบพิกัด เป็น จุดปัจจุบัน (k) หรือ จุดถัดไป (k+1)

7. จากทิศทางของการ step ของพิกัดที่ทราบค่า ในแต่กรณีจากข้อ 2 พิจารณาว่าพิกัดอีกแกนหนึ่งจะเปลี่ยนไปในทิศทางใด (จุดถัดไป) โดยดูจากความชัน

   - ถ้าความชันเป็น **บวก** พิกัดอีกแกนหนึ่ง เปลี่ยนไปใน **ทิศทางเดียวกัน** (+/+), (-/-)
   - ถ้าความชันเป็น **ลบ** พิกัดอีกแกนหนึ่ง เปลี่ยนไปใน **ทิศทางตรงข้าม** (+/-), (-/+)

8. แทนค่าตัวแปรของจุดถัดไป สำหรับ กรณีที่ $p_k$ เป็นบวก และ ลบ จากเงื่อนไขที่ได้จากข้อ 7 แล้วปรับรูปสมการ ซึ่งควรจะอยู่ในรูปของ $p_{k+1} = p_k + F(\Delta x, \Delta y)$ แล้วหาค่า $p_0$ โดยแทนค่า $(x_k, y_k)$ ด้วย $(x_0, y_0)$ ในสมการ $p_k = F(\Delta x, \Delta y, x_k, y_k)$

9. เขียนสรุป algorithm ด้วย pseudo code

## 3. Midpoint Drawing Algorithm

**สรุปขั้นตอน สำหรับการวาดเส้นโค้งด้วย Midpoint Algorithm**

**ขั้นที่ 1** จากสมการเส้นโค้ง y = g (x) หา Implicit Function โดยย้ายตัวแปรทั้งหมดมาอยู่ด้านหนึ่งของสมการ Implicit Function ที่ได้จะอยู่ในรูปของ f (x, y) = y – g (x) ซึ่งที่พิกัด (x, y) ใดๆ มีคุณสมบัติดังนี้

$$f(x,y)\begin{cases} >0 & \text{over the curve} \\ =0 & \text{on the curve} \\ <0 & \text{under the curve} \end{cases}$$

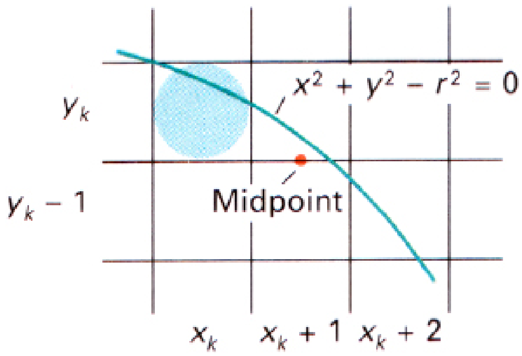
**ขั้นที่ 2** คำนวณความชันของเส้นโค้ง m เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x โดยการหาอนุพันธ์

m (x) = dy / dx

**ขั้นที่ 3** พิจารณาช่วงที่ **|m|** มีค่ามากกว่า 1 และ **|m|** น้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 โดยแทนค่า **m** ในสมการในขั้นที่ 2 แล้วหา **ช่วงของค่า x** ที่ตรงกับเงื่อนไขที่กำหนด

**ขั้นที่ 4** แบ่งพิจารณา **Midpoint Algorithm** แยกกัน สำหรับแต่ละกรณี

ขั้นตอนที่ 1 ถึง 4 สรุปได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้




จากรูปเส้นโค้งแสดงส่วนของวงกลม ซึ่งมีฟังก์ชัน implicit เป็น $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ สำหรับเส้นโค้งส่วนนี้ เมื่ออนุพันธ์ของ dy/dy สามารถหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ y &= \sqrt{r^2 - x^2} = \left(r^2 - x^2\right)^{1/2} \\ dy &= \frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right)^{-1/2} d\left(r^2 - x^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right)^{-1/2}(-2x)dx \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \end{aligned}$$

ซึ่งค่า x ในช่วงนี้มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง r ดังนั้น

$$m(0) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\Big|_{x=0} = 0$$

$$m(r) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=r} = -\frac{r}{\sqrt{r^2 - r^2}}\Big|_{x=0} = \infty$$

สังเกตว่าค่า m เป็นค่าจำนวนจริงบวกใดๆ แต่เมื่อ m $\rightarrow \infty$ เราจะคำนวณไม่ได้ ดังนั้นเลือกพิจารณาเฉพาะช่วง สำหรับวงกลม (โดยหลักการสมมาตร) เราสามารถพิจารณาช่วง **x = 0** ถึง x = y (ที่มุม 45 องศา) ได้ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=y} = -\frac{y}{\sqrt{r^2 - y^2}}\Big|_{x=y}$$

$$m(y) = -\frac{y}{x}\Big|_{x=y} = -1$$

ดังนั้น สำหรับช่วงดังกล่าว ($0 \le x \le y$) ความชันจะมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง -1 สำหรับช่วงอื่นๆ สามารถใช้หลักการสมมาตรของวงกลม ในการวาดเส้นโค้งที่เหลือได้

**ขั้นที่ 5** ดำเนินการวาดเส้นโค้งโดยการเลือก **step** ในแกนหนึ่ง แล้ว คำนวณหาค่าตัวแปรตัดสินใจ สำหรับอีกแกนหนึ่ง คล้ายกับ Bresenham Algorithm **แต่มีข้อแตกต่างที่**

ค่าตัวแปรตัดสินใจ $p_k$ ได้จากการแทนค่าตัวแปรใน Implicit Function ด้วยเงื่อนไขดังนี้

- กรณีที่ **|m| ≤ 1 step** ในแกน **x** ค่า m เป็นไปได้สองกรณี

  **m < 0 →** $p_k = f\left(x_k \pm 1, y_k \mp \frac{1}{2}\right)$ (step ในทิศทางตรงกันข้าม)

  **m > 0 →** $p_k = f\left(x_k \pm 1, y_k \pm \frac{1}{2}\right)$ (step ในทิศทางเดียวกัน)

- กรณีที่ **|m| > 1 step** ในแกน **y** ค่า m เป็นไปได้สองกรณี

  **m < 0 →** $p_k = f\left(x_k \mp \frac{1}{2}, y_k \pm 1\right)$ (step ในทิศทางตรงกันข้าม)

  **m > 0 →** $p_k = f\left(x_k \pm \frac{1}{2}, y_k \pm 1\right)$ (step ในทิศทางเดียวกัน)

**ขั้นที่ 6** เขียนค่าตัวแปรตัดสินใจในรูปความสัมพันธ์เวียนบังเกิด $p_{k+1}$ = pk + F ($x_k$, $y_k$)

**ขั้นที่ 7** พิจารณาเครื่องหมายของ $p_k$ โดยที่ ถ้าน้อยกว่า 0 จุดถัดไป **อยู่ใต้** (ซ้ายมือ) เส้นโค้ง มิฉะนั้น จุดถัดไป **อยู่บน** (ขวามือ) เส้นโค้ง

**หมายเหตุ** ในขั้นตอนนี้ ต้องวาดรูปดู (คล้ายกับกรณีพิจารณา d1 - d2 ของการวาดเส้นตรง)

- เมื่อ **step** ในแกน **y**

  จุดที่ อยู่ด้านซ้ายเส้นโค้ง คือจุด $\mathbf{x_k-1}$ เมื่อเทียบกับ $\mathbf{x_k}$ (ด้านขวาคิดกลับกัน)
  จุดที่ อยู่ด้านซ้ายเส้นโค้ง คือจุด $\mathbf{x_k}$ เมื่อเทียบกับ $\mathbf{x_k+1}$ (ด้านขวาคิดกลับกัน)

- เมื่อ **step** ในแกน **x**

  จุดที่ อยู่ใต้เส้นโค้ง คือจุด $\mathbf{y_k-1}$ เมื่อเทียบกับ $\mathbf{y_k}$ (ด้านบนคิดกลับกัน)
  จุดที่ อยู่ใต้เส้นโค้ง คือจุด $\mathbf{y_k}$ เมื่อเทียบกับ $\mathbf{y_k+1}$ (ด้านบนคิดกลับกัน)

**ขั้นที่ 8** คำนวณค่า $p_0$ โดยแทนค่า $(x_k, y_k) = (x_0, y_0)$ ในสมการ $p_k$

**ขั้นที่ 9** เขียน pseudo code สรุป algorithm

**หมายเหตุ**

ควรระวังในการคำนวณค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และ กำหนดช่วงของ x, y ที่จุดความชัน m = 1

**Exercise 4.** จงใช้ midpoint algorithm วาดเส้นโค้ง $y= x^3$ ซึ่ง $x$ อยู่ในช่วง 0 ถึง 10

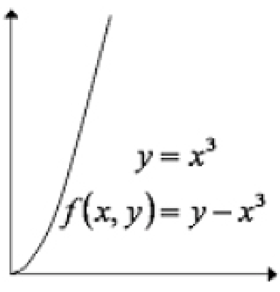
**วิธีทำ**

**ขั้นที่ 1** หา Implicit Function ของเส้นโค้ง ในรูปของฟังก์ชันตัวแปร x, y

$$f(x,y) = y - x^3 \quad 0 \le x \le 10$$

โดยที่

$$f(x,y)\begin{cases} >0 & \text{over the curve} \\ =0 & \text{on the curve} \\ <0 & \text{under the curve} \end{cases}$$




**ขั้นที่ 2** คำนวณฟังก์ชันอนุพันธ์ของเส้นโค้ง

$$\begin{aligned} dy &= d\left(x^3\right) \\ &= 3x^2 dx \\ m(x) &= 3x^2 \end{aligned}$$

แทนค่า x = 0 ถึง 10 จะได้ว่าความชัน m (x) มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 100 (m มีค่าเป็นบวก)

**ขั้นที่ 3** พิจารณา ช่วงที่ m เปลี่ยนจาก m ≤ 1 เป็น m > 1 แทนค่า m = 1 ในสมการจะได้ว่า

$$1 = 3x^2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{1/3}$$

**ขั้นที่ 4** เนื่องจากเราทำงานบน raster device จุดดังกล่าวไม่มีจริง ดังนั้นจุดถัดไปทางด้านขวาตั้งแต่จุด (1, 1) เป็นต้นไปจะมีความชันมากกว่า 1

**ขั้นที่ 5** ดังนั้นสองจุดแรกที่เราทราบคือ (0, 0) และ (1, 1) สำหรับจุดถัดไปพิจารณากรณีที่ m > 1 (step ทางแกน y แล้วคำนวณค่า x) จากต้นแบบการคิด เราทราบว่า กรณีที่ **|m| > 1** และ **m > 0** → $p_k = f\left(x_k \pm \frac{1}{2}, y_k \pm 1\right)$ (step ในทิศทางเดียวกัน) ในที่นี้ **y** เพิ่มค่าทีละ 1 (วาดจากล่างขึ้นบน) ดังนั้น x เพิ่มในทิศทางเดียวกัน จะได้

$$p_k = f\left(x_k + \frac{1}{2}, y_k + 1\right) = (y_k + 1) - \left(x_k + \frac{1}{2}\right)^3$$

**ขั้นที่ 6** เขียนตัวแปรตัดสินใจในรูปความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= f\left(x_{k+1} + \frac{1}{2}, y_{k+1} + 1\right) \\ &= (y_{k+1} + 1) - \left(x_{k+1} + \frac{1}{2}\right)^3 \end{aligned}$$

เราทราบว่า $y_{k+1} = y_k + 1$

$$p_{k+1} = (y_k + 1 + 1) - \left(x_{k+1} + \frac{1}{2}\right)^3$$

แทนค่า $p_{k+1}$ ในรูปของ $p_k$

$$p_{k+1} - p_k = 1 + \left(x_k + \frac{1}{2}\right)^3 - \left(x_{k+1} + \frac{1}{2}\right)^3$$

$$p_{k+1} = p_k + 1 + \left(x_k + \frac{1}{2}\right)^3 - \left(x_{k+1} + \frac{1}{2}\right)^3$$

**ขั้นที่ 7** พิจารณาเครื่องหมายของความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

- $p_k$ เป็นลบ จุดอยู่ด้านซ้ายเส้นโค้งให้ เลือกวาด ที่พิกัด $x_{k+1} = x_k$ และ $y_{k+1} = y_k+1$
- $p_k$ เป็นบวก จุดอยู่ด้านขวาเส้นโค้งให้ เลือกวาด ที่พิกัด $x_{k+1} = x_k+1$ และ $y_{k+1} = y_k+1$

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= \begin{cases} p_k + 1 & p_k < 0 \\ p_k + 1 + \left(x_k + \frac{1}{2}\right)^3 - \left(x_k + 1 + \frac{1}{2}\right)^3 & p_k > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} p_k + 1 & p_k < 0 \\ p_k + 1 + \left(x_k + \frac{1}{2}\right)^3 - \left(x_k + \frac{3}{2}\right)^3 & p_k > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ **ดังนั้นกรณีที่ $p_k$ เป็นบวก**

$$
\begin{aligned}
p_{k+1} &= p_k + 1 + \left(x_k + \frac{1}{2}\right)^3 - \left(x_k + \frac{3}{2}\right)^3 \\
&= p_k + 1 + \left(x_k^3 + 3x_k^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 3x_k\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) - \left(x_k^3 + 3x_k^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 3x_k\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3\right) \\
&= p_k - 3x_k^2 - 6x_k - \frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

ดังนั้นสมการเวียนบังเกิดของตัวแปรตัดสินใจเขียนได้เป็น

$$
p_{k+1} = \begin{cases} p_k + 1 & p_k < 0 \\ p_k - 3x_k^2 - 6x_k - \frac{9}{4} & p_k > 0 \end{cases}
$$

**ขั้นที่ 8** หาค่าตัวแปรตัดสินใจที่จุดเริ่มต้น $(x_0, y_0) = (1, 1)$

$$
p_k = f\left(x_k + \frac{1}{2}, y_k + 1\right) \; p_0 = f\left(1 + \frac{1}{2}, 1 + 1\right) = f\left(\frac{3}{2}, 2\right) = 2 - \frac{27}{8} = -\frac{11}{8}
$$

**ขั้นที่ 9** เขียน pseudo code สรุปการทำงานของ algorithm (หน้าถัดไป)

**หมายเหตุ**

- การเขียน pseudo code เป็นการสรุปขั้นตอนวิธีแบบ midpoint สำหรับเส้นโค้งใดๆ โดยที่ผลลัพธ์สุดท้าย พิจารณาลำดับขั้นตอนดำเนินการ และ ความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆ

- ถ้ามีช่วงใดช่วงหนึ่งประกอบด้วยจำนวนจุดน้อยๆ เราสามารถวาดจุดนั้นๆ ไปเลยได้ ดังตัวอย่าง เพื่อไม่ให้เสียเวลาในการประมวล คำสั่งเงื่อนไขอีก และ ลดจำนวนการวนรอบอีกด้วย

**แบบฝึกหัดเพิ่มเติม**

- จงใช้ midpoint algorithm แสดงวิธีการ วาดเส้นโค้ง $f(x,y) = y - \sin(x)$ ซึ่ง x อยู่ในช่วง 0 ถึง $\pi/2$ โดยนำหลักการสมมาตรมาช่วย

- จงใช้ midpoint algorithm วาดเส้นโค้งจากสมการในแบบฝึกหัดที่ 5 แต่วาดจาดจุด x = 10 มายังจุด x = 1

**procedure** วาดเส้นโค้งกำลัง 3

plot (0, 0)    จุดแรกทราบค่า

$k \leftarrow 0, \quad x_k \leftarrow 1, \quad y_k \leftarrow 1 \quad p_0 \leftarrow 0$

plot ($x_k$, $y_k$)    จุดที่สองทราบค่า

**while** ( $y_k < 1000$ ) **do** ใช้จุดสุดท้ายเป็นเงื่อนไขหยุด

$y_{k+1} \leftarrow y_k + 1$

**if** ( $p_k < 0$ ) **then**

$x_{k+1} \leftarrow x_k$

$p_{k+1} \leftarrow p_k + 1$

**else**

$x_{k+1} \leftarrow x_k + 1$

$p_{k+1} \leftarrow p_k - 3x_k^2 - 6x_k - \frac{9}{4}$

**end if**

$k \leftarrow k + 1$

plot ($x_k$, $y_k$)

**end while**