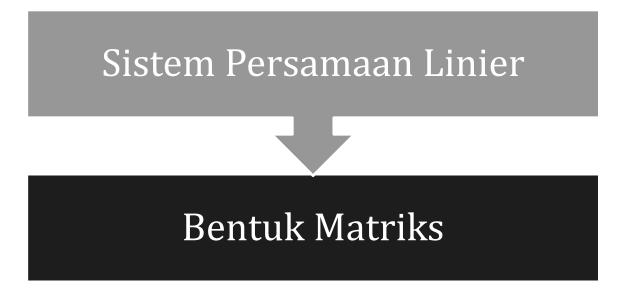
ALJABAR LINIER

Pemanfaatan Matriks dalam Sitem Persamaan Linier

Adevian Fairuz Pratama, S.ST., M.Eng

Konsep Matriks dalam Sistem Persamaan Linier



Mengubah SPL Menjadi Bentuk Matriks

Sistem persamaan dua variabel x dan y

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Sistem persamaan tiga variabel x, y, dan z

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

$$a_{1}x + b_{1}y + c_{1}z = d_{1}$$

$$a_{2}x + b_{2}y + c_{2}z = d_{2}$$

$$a_{2}x + b_{2}y + c_{2}z = d_{2}$$

$$a_{3}x + b_{3}y + c_{3}z = d_{3}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1} & b_{1} & c_{1} \\ a_{2} & b_{2} & c_{2} \\ a_{3} & b_{3} & c_{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1} \\ d_{2} \\ d_{3} \end{pmatrix}$$

Keterangan: Matriks awal (matriks koefisien) – Matriks variabel – Matriks hasil (matriks konstanta)

$$B = A^{-1}C$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 menentukan inversnya

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1.1 - 2.(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 mengalikan matriksnya

$$\binom{x}{y} = \frac{1}{3} \binom{3}{-3}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} \\ \frac{-3}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jadi, solusi SPLnya adalah x = 1 dan y = -1

Penerapan Determinan pada SPL

Penyelesaian SPL dua variabel dengan metode Cramer:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Solusi:
$$x = \frac{D_x}{D} \operatorname{dan} y = \frac{D_y}{D}$$

Keterangan:

D adalah determinan matriks awal $D = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

D_x adalah determinan matriks dengan mengganti kolom x dengan matriks hasil

$$D_{y}$$
 adalah determinan matriks dengan mengganti kolom y dengan matriks hasil

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$D_{y} = \begin{vmatrix} a_{1} & c_{1} \\ a_{2} & c_{2} \end{vmatrix}$$

Contoh Penerapan Determinan pada SPL

Contoh: Tent
$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - (-1).2 = 3$$

matriks (Cran $x - y = 2$
 $2x + y = 1$

Penyelesaian

 $D_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - (-1).1 = 3$

(2) Menentuki

 $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 2.1 = -3$

sep determinan

(3) Tentukan : Solusinya :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{dan } x = \frac{D_y}{D} = \frac{-3}{3} = -1$$

Jadi, solusi SPLnya adalah x = 1 dan y = -1

Tugas 2

1. Tentukan penyelesaian dari SPL berikut dengan konsep invers matriks!

$$SPL \begin{cases} 3y + 2z = 1\\ x + y = 2\\ 4x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

2. Tentukan nilai x dan y yang memenuhi SPL dengan menggunakan konsep determinan matriks (Cramer)!

$$SPL \begin{cases} x - y = 2\\ 2x + y = 1 \end{cases}$$







METODE GAUSS & GAUSS JORDAN

Adevian Fairuz Pratama, S.ST., M.Eng

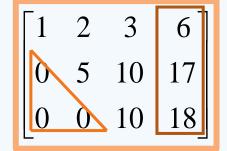
Program Studi Teknik Informatika Politeknik Negeri Malang

Perbedaan Gauss dan Gauss Jordan

<u>Matriks</u> <u>Sistem Persamaan</u>

 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 10 & 17 \\ 1 & 3 & 10 & 18 \end{bmatrix}$

Gauss



Gauss Jordan

1 0	0	6
0 1	0	17
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$	1	18

Operasi Baris Elementer (OBE)

Operasi Baris Elementer (OBE) sendiri adalah suatu operasional pengubahan nilai elemen matrik berdasarkan barisnya, dengan tidak mengubah matriknya. OBE pada baris ke-i+k dengan dasar baris ke i dapat diformulasikan dengan :

dimana:

$$a_{i+k,j} = a_{i+k,j} - c.a_{i,j}$$

c adalah konstanta pengali yang diperoleh dari perbandingan nilai elemen $a_{i,i}$ dan $a_{i+k,i}$

Proses eliminasi pada metode ini terdiri atas tiga operasi baris elementer

- 1. Pertukaran : urutan dua persamaan dapat ditukar karena pertukaran tersebut tidak berpengaruh pada solusi akhir.
- 2. Penskalaan : Persamaan dapat dikali dengan konstanta bukan nol, sebab perkalian tersebut tidak berpengaruh pada solusi akhir.
- 3. Penggantian : Persamaan bisa diganti dengan penjumlahan persamaan itu dengan penggandaan persamaan lain.

Langkah - Langkah Mengerjakan

$$x+2y+3z = 6$$
$$2x+5y+10z = 17$$
$$x+3y+10z = 18$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 10 & 17 \\ 1 & 3 & 10 & 18 \end{bmatrix} \quad B_2 = B_2 - 2B_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 12 \end{bmatrix} \quad B_3 = B_3 - B_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$3z = 7$$
$$z = \frac{7}{3}$$

$$3z = 7$$

$$z = \frac{7}{3}$$

$$y + 4z = 5$$

$$y = 5 - 4.7/3$$

$$x + 2y + 3z = 6$$

$$x = 6 - 2y - 3z$$

$$x+2y+3z=6$$
$$x=6-2y-3z$$

Langkah - Langkah Mengerjakan

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$x + 4y + 9z = 36$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \end{bmatrix} B_2 = B_2 - B_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \end{bmatrix} B_3 = B_3 - B_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 30 \end{bmatrix} B_3 = B_3 - 3B_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$2z = 6, z = 3$$

 $y + 2z = 8$
 $y = 8 - 2.3 = 2$
 $x + y + z = 6$
 $x = 6 - 2 - 3 = 1$
Sehingga x=1, y=2, z=3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$



$$B_{3} = \frac{1}{2}B_{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B_{1} = B_{1} - B_{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B_{1} = B_{1} + B_{3} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = B_2 - 2B_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}$$

Gauss Jordan

Latihan Cepat

Tentukan solusi dari sistem persamaan linear berikut:

$$x + y + 2z = 9$$

 $2x + 4y - 3z = 1$
 $3x + 6y - 5z = 0$

Tugas

Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan metode Gauss dan Gauss-Jordan

1.
$$2x + 3y - z = 5$$

 $3x + y + 2z = 11$
 $3x - 2y + 3z = 8$

2.
$$x + 2y + z = 6$$

 $x + 3y + 2z = 9$
 $2x + y + 2z = 12$

3.
$$x + 2y + 3z = 3$$

 $2x + 3y + 2z = 3$
 $2x + y + 2z = 5$



Operasi Matriks

PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA POLITEKNIK NEGERI MALANG SEMESTER GENAP 2023 / 2024

ADEVIAN FAIRUZ PRATAMA, S.ST., M.ENG

1. Penjumlahan



Dua matriks dapat dijumlahkan jika ordonya sama, yang dijumlahkan yaitu elemen-elemen yang seletak.

$$\begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

<u>Sifat-sifat penjumlahan matriks</u>:

1.
$$A + B = B + A$$

(bersifat komutatif)

2.
$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

(bersifat asosiatif)

3.
$$A + O = O + A = A$$

(bersifat identitas, dimana O adalah matriks nol)

4.
$$(A+B)^t = A^t + B^t$$



Contoh Soal

Jika diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+1 \\ 3+(-2) & 4+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$



2. Pengurangan

Dua matriks dapat dikurangkan jika ordonya sama, yang dikurangkan elemen-elemen yang seletak.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{bmatrix}$$

<u>Sifat-sifat Pengurangan matriks</u>:

- 1. Tidak komutatif $A B \neq B A$
- 2. A (B C) = (A B) C (asosiatif)
- 3. A A = O, dengan O adalah matriks nol
- 4. Identitas: A O = A
- 5. $(A B)^t = A^t B^t$



Contoh Soal

Jika diketahui

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

maka tentukan:

a.
$$A - B$$
 b. $B - A$

b.
$$B - A$$

Jawab:

a.
$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$$

b.
$$B-A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$$



3. Perkalian

a. Perkalian dengan bilangan real (skalar)

Hasil perkalian skalar \mathbf{k} dengan sebuah matriks \mathbf{A} yang berordo $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ adalah sebuah matriks yang berordo $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$ dengan elemen-elemennya adalah hasil kali skalar \mathbf{k} dengan setiap elemen matriks \mathbf{A} .

$$k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$



Perkalian (2)

Sifat-sifat perkalian skalar k dengan suatu matriks:

1.
$$(k+m)A = k.A + m.A$$

2.
$$k(A+B) = k.A + k.B$$

3.
$$k(m.A) = (k.m)A$$

4.
$$(kA)^t = k \cdot A^t$$



Contoh Soal Perkalian Skalar

Jika
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$
 maka tentukan :

b.
$$-\frac{1}{2}A$$

Jawab:

a.
$$2A = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}$$

b.
$$-\frac{1}{2}A = \frac{-1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -3/2 & 5/2 \end{bmatrix}$$



b. Perkalian dua matriks

Dua matriks A dan B dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks A (matriks kiri) sama dengan jumlah baris matriks B (matriks kanan).

$$A_{mxn} \cdot B_{nxp} = C_{mxp}$$

Cara mengalikan matriks A dan B yaitu dengan menjumlahkan setiap perkalian elemen pada baris matriks A dengan elemen kolom matriks B dan hasilnya diletakkan sesuai dengan baris dan kolom pada matriks C (matriks hasil perkalian).

Misal:
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$
 dar

Misal:
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
 dan $B = \begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix}$ maka:



$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap + bq & ar + bs & at + bu \\ cp + dq & cr + ds & ct + du \end{bmatrix}$$

<u>Sifat-sifat perkalian matriks</u>:

- Umumnya tidak komutatif: $(AB \neq BA)$
- Asosiatif: (AB)C = A(BC)
- Distributif kiri : A(B + C) = AB + AC, Distributif kanan : (B + C)A = BA + CA
- Identitas : IA = AI = A
- k(AB) = (kA)B



Contoh Soal Perkalian Dua Matriks

Diketahui
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 7 & 9 \end{bmatrix} dan D = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$
, maka tentukan:

a. AB

b. AC

c. AD

Jawab:

a.
$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+12 \\ 5+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 29 \end{bmatrix}$$

b. AC tidak dapat dikalikan, karena banyaknya kolom matriks A tidak sama dengan banyaknya baris kolom C

c.
$$AD = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+14 & 18+16 \\ 5+28 & 6+32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 34 \\ 33 & 38 \end{bmatrix}$$



Latihan Soal

1. Jika
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
 dan $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ tentukan:

- a. A + B b. B + A c. B + C d. A + (B + C)

2.
$$[2 -1]-[3 -4]-[-5 -4]=$$

3. Tentukan a, b, c dan d dari:

a.
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a.
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
 b.
$$\begin{bmatrix} a+b & a \\ c & c-d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$



4. Jika
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

tentukan:

a.
$$2(A + B)$$

b.
$$2A + 2B$$

d. 6A

5. Tentukan nilai a, b, dan c jika

$$2\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & d \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & b \\ c & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$



6. Hitunglah:

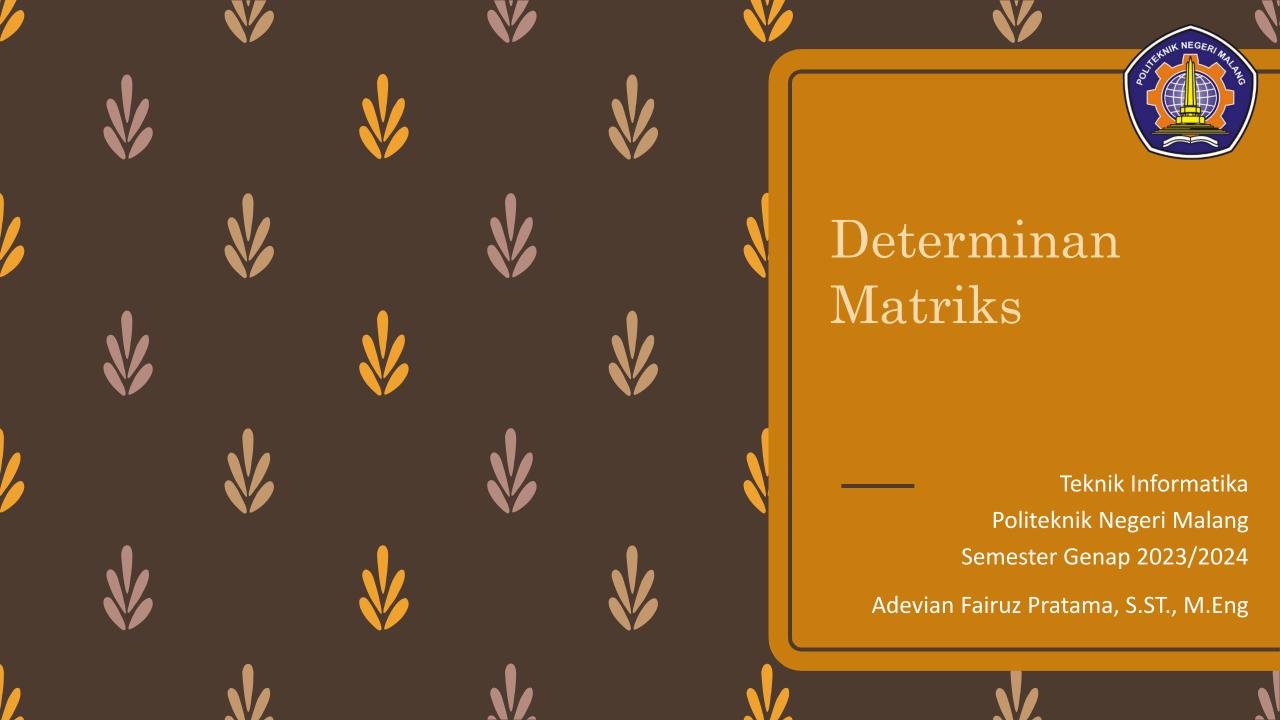
a.
$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a.
$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$
 b. $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -8 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

C.
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

d.
$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

7. Tentukan a jika
$$\begin{bmatrix} -1 & d \\ -b & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2c & 1 \\ c & a+1 \end{bmatrix}$$

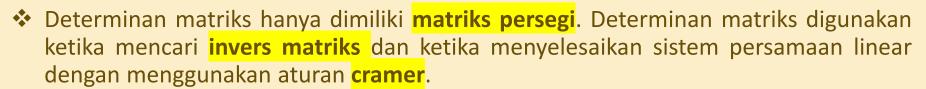






DETERMINAN MATRIKS







Determinan dari matriks A dapat ditulis sebagai det(A) atau |A|. Jika diketahui komponen matriksnya, bisa juga ditulis dalam bentuk susunan persegi komponen matriks tersebut, tetapi tidak diapit oleh tanda kurung atau kurung siku, melainkan diapit oleh tanda |...|.



$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks A dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$





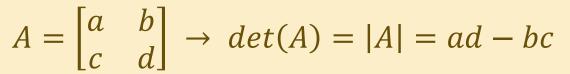




MATRIKS ORDO 2x2



Determinan matriks berordo 2x2 adalah sebagai berikut





Contoh:



Tentukan determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$



$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 1.5 = 6 - 5 = 1$$







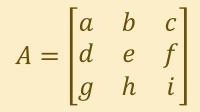


MATRIKS ORDO 3x3



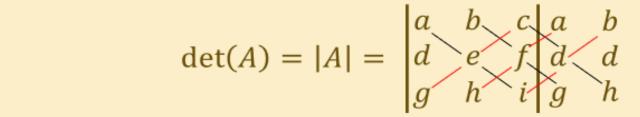








Maka determinan matriks tersebut dengan metode sarrus adalah :





Sehingga diperoleh



$$det(A) = |A| = aei + bfg + cdh - bdi - afh - ceg$$





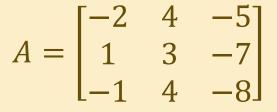
Contoh





Tentukan determinan dari matriks berikut!







Maka determinan matriks A, yaitu:

$$\det(A) = (-2)(3)(-8) + (4)(-7)(-1) + (-5)(1)(4) - ((-5)(3)(-1) + (-2)(-7)(4) + (4)(1)(-8))$$



$$det(A) = (48 + 28 - 20) - (15 + 56 - 32) = 56 - 39 = 17$$

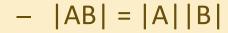






Sifat-sifat Determinan Matriks





$$- |A^T| = |A|$$

$$- |A^{-1}| = 1/|A|$$



Jika tiga elemen nol dalam satu baris, maka nilai determinan = 0.

 Nilai determinan dari matriks segitiga atas atau bawah adalah hasil kali dari elemen-elemen diagonal saja.









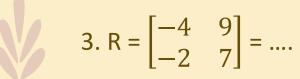
Latihan Soal





1.
$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \dots$$

2.
$$Q = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \dots$$



4. Jika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$



maka Det (AB + C) = ...







Latihan Soal



Tentukan determinan matriks:



$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



$$2. \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



3.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$





INVERS MATRIKS

Teknik Informatika Politeknik Negeri Malang Genap 2023/2024

Adevian Fairuz Pratama, S.ST., M.Eng



Definisi Invers Matriks

Misalnya matriks A dan B masing-masing adalah matriks persegi, sehingga AB = BA = I, maka matriks B adalah invers matriks A dan ditulis $B = A^{-1}$ dan matriks A adalah invers matriks B dan ditulis $A = B^{-1}$. Matriks A dan B adalah matriks yang saling invers.

Tidak semua matriks memiliki invers, hanya matriks persegi dengan determinan tidak sama dengan nol yang memiliki invers.



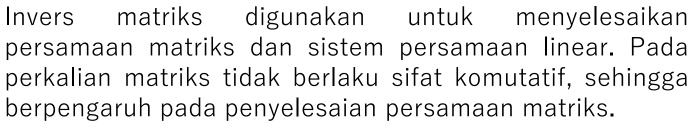
Invers Matriks

Secara umum, invers dari matriks persegi A atau ditulis A⁻¹ adalah sebagai berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

Dengan det(A) adalah determinan matriks A dan Adj(A) adalah adjoin matriks A. Adjoin matriks A adalah transpose dari matriks kofaktor A.





$$AX = B$$

Untuk mencari matriks X adalah sebagai berikut

$$X = A^{-1}B$$

Sedangkan untuk persamaan

$$XA = B$$

Untuk mencari matriks X adalah sebagai berikut

$$X = B A^{-1}$$

Penyelesaian persamaan matriks di atas tergantung dari letak matriks A pada ruas kiri.



Sifat-Sifat Invers

Sifat-sifat invers matriks:

$$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$AI = A = IA$$



Invers Matriks Ordo 2x2

Untuk matriks A yang berordo 2x2 inversnya adalah sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Contoh:

Tentukan invers dari matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$A^{-1} = \frac{1}{4-6} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



Invers Matriks Ordo 3x3

Invers matriks ordo 3x3

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

Determinan matriks A dapat dicari dengan metode sarrus ataupun kofaktor, sedangkan adjoin merupakan hasil transpose dari kofaktor matriks.



Contoh:

Contoh soal

Misal matriks A=
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ adj A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 5 = 40 + 6 + 0 - 15 - 0 - 32 = -1 \\ 1 & 0 & 8 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



Lanjutan

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 0 = 40$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -(16 - 3) = -13$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 15 = -9$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5 = -5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -(16 - 0) = -16$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$



Lanjutan

Kofaktor Matriks A yaitu:

$$\begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dan adjoin matriks A adalah:

$$\begin{bmatrix} 40 & -16 & 9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi invers matriks A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A dj(A) = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 40 & -16 & 9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & -9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal

Tentukan invers matriks-matriks berikut:



1.
$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

3.
$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

4.
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5. Diketahui matriks
$$F = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$
 dan $H = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ memenuhi $FX = H$. Tentukan matriks X .





MINOR

Untuk mencari nilai kofaktor terlebih dahulu kita harus mencari nilai minor dari setiap elemen matrik. Untuk memudahkan, selanjutnya minor kita beri simbol dengan huruf M dan minor untuk setiap elemen matrik akan kita beri simbol dengan Mij dimana i adalah letak baris dan j adalah letak kolom dari setiap elemen matrik.



CONTOH MINOR

Diketahui matriks A sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

maka minor elemen 2 yang terletak pada baris ke 1 kolom ke 1 diberi simbol dengan M11. Untuk mencari harga minornya dapat kita lakukan dengan mencoret atau menghilangkan baris ke 1 dan kolom ke 1 sehingga didapatkan:

jadi minor elemen 2 (M11) adalah :
$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 24 = -24$$



Serupa dengan cara di atas, minor elemen 3 (M12) adalah:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6$$

Untuk nilai M13, M21, M22, M23, M31, M32 dan M33 didapatkan hasil sebagai berikut:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (16 - 1) = 15$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = (18 - 5) = 13$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 20) = -20$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (12 - 20) = -8$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 5) = -5$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 12) = -10$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (8 - 3) = 5$$

KOFAKTOR



Setelah mendapatkan harga minor dari masing-masing elemen matriks kita dapat menentukan nilai atau harga dari kofaktor. Cara mencarinya adalah dengan mengalikan masing-masing nilai minor di atas dengan tanda tempat masing-masing elemen. Adapun tanda tempatnya dapat dilihat pada gambar berikut:

Jadi berdasarkan tanda tempat di atas kita dapat mencari nilai kofakto dari masingmasing elemen matriks.



Untuk selanjutnya kita akan berikan simbol untuk nilai kofaktor masing-masing elemen dengan Cij, dimana i menandakan baris dan j menandakan kolom. jadi untuk setiap elemen di atas kita dapatkan harga kofaktornya sebagai berikut:

$$C_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = + (0 - 24) = -24 \qquad C_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = - (8 - 3) = -5$$

$$C_{12} = + \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = - (0 - 6) = 6 \qquad C_{31} = + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = + (18 - 5) = 13$$

$$C_{13} = + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = + (16 - 1) = 15 \qquad C_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = - (12 - 20) = 8$$

$$C_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = - (0 - 20) = 20 \qquad C_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = + (2 - 12) = -10$$

$$C_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = + (0 - 5) = -5$$



DETERMINAN DENGAN KOFAKTOR

Kofaktor merupakan salah satu langkah yang biasanya kita lakukan dalam mencari determinan suatu matriks. Kofaktor memiliki kelebihan dibandingkan dengan mencari determinan matriks dengan metode sarrus. Jika pada **metode sarrus**, kita hanya bisa mencari determinan suatu matriks sampai pada **ordo 3 x 3**, tetapi kalau menggunakan metode kofaktor, kita bisa mencari determinan suatu matriks sampai **ordo n x n**.



- Determinan matriks A yang berukuran n x n dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil kali yang dihasilkan, yakni untuk setiap $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$, maka
- Ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i:

$$det(A) = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + a_{i3}c_{i3} + ... + a_{in}c_{in}$$

• Ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j:

$$det(A) = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + a_{3j}c_{3j} + ... + a_{nj}c_{nj}$$



CONTOH

Tentukanlah determinan dari matriks A yang elemennya sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-1

$$\begin{aligned} \det(\mathsf{A}) &= \mathsf{a}_{11}\mathsf{c}_{11} + \mathsf{a}_{12}\mathsf{c}_{12} + \mathsf{a}_{13}\mathsf{c}_{13} \\ &= 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 6(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(-1)^2 \left(15 - 2\right) + 4(-1)^3 \left(5 - 4\right) + 6(-1)^4 \left(1 - 6\right) \\ &= 2.1.13 + 4(-1).1 + 6.1.(-5) \\ &= 26 - 4 - 30 = -8 \end{aligned}$$



Dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-2:

$$\det(A) = a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{32}c_{32}$$

$$= 4(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1)^3 (5 - 4) + 3(-1)^4 (10 - 12) + 1(-1)^5 (4 - 6)$$

$$= 4 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot (-2)$$

$$= -4 - 6 + 2 = -8$$



LATIHAN SOAL

Tentukan determinan matriks berikut:

$$1. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

3.
$$C = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -7 \\ -1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$