ALJABAR LINIER

Pemanfaatan Matriks dalam Sitem Persamaan Linier

Adevian Fairuz Pratama, S.ST., M.Eng

Konsep Matriks dalam Sistem Persamaan Linier

Sistem Persamaan Linier

Bentuk Matriks

Mengubah SPL Menjadi Bentuk Matriks

Sistem persamaan dua variabel *x* dan *y*

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Sistem persamaan tiga variabel *x, y,* dan *z*

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Keterangan: Matriks awal (matriks koefisien) – Matriks variabel – Matriks hasil (matriks konstanta)

$$B = A^{-1}C$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ menentukan inversnya

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{1.1 - 2.(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ mengalikan matriksnya

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} \\ \frac{-3}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jadi, solusi SPLnya adalah $x = 1$ dan $y = -1$

Penerapan Determinan pada SPL

Penyelesaian SPL dua variabel dengan metode Cramer:

$a_1x + b_1y = c_1$

$a_2x + b_2y = c_2$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Solusi: $x = \frac{D_x}{D}$ dan $y = \frac{D_y}{D}$

Keterangan:

D adalah determinan matriks awal $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

D_x adalah determinan matriks dengan mengganti kolom x dengan matriks hasil $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$

D_y adalah determinan matriks dengan mengganti kolom y dengan matriks hasil $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

Contoh Penerapan Determinan pada SPL

Contoh: Tent ... sep determinan matriks (Cram

$x - y = 2$

$2x + y = 1$

Penyelesaian

(2) Menentuk

(3) Tentukan

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - (-1).\,2 = 3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.1 - (-1).\,1 = 3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.1 - 2.\,1 = -3$$

Solusinya :

$x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{3}{3} = 1$ dan $x = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-3}{3} = -1$

Jadi, solusi SPLnya adalah $x = 1$ dan $y = -1$

Tugas 2

1. Tentukan penyelesaian dari SPL berikut dengan konsep invers matriks!

$$SPL\begin{cases} 3y + 2z = 1 \\ x + y = 2 \\ 4x - 2y - z = 3 \end{cases}$$

2. Tentukan nilai x dan y yang memenuhi SPL dengan menggunakan konsep determinan matriks (Cramer)!

$$SPL\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$


thank you
danke
謝謝
ngiyabonga
شكراً جزيلاً
teşekkür ederim
gracias
merci
obrigado
спасибо
Баярлалаа
рахмат
dziękuję
bedankt
sukriya
kop khun krap
go raibh maith agat
mochchakkeram
arigatô
grazie
dakujem
terima kasih
감사합니다
ありがとう
мерси
dank je
tapadh leat
hvala
takk
tack
mersi
barka
welalin
spas
vinaka
blagodaram
misaotra
matondo
paldies
grazzi
mahalo
хвала
asante
manana
obrigada
tenki
djiere dieuf
tau
mamnun
дякую
murakoze
chokrane
trugarez
shukriya
mercè
dhanyavadagalu
diolch
xièxie
ευχαριστώ
tanemirt
rahmet
sulpáy
taiku
chnorakaloutioun
gratias ago
gràcies
akun
dankon
aciu
faafetai lava
kiitos
dankie
dhanyavad
nanni
nandri
enkosi
bayarlalaa
gràçie
mauruuru
köszönöm
sobodi
děkuji
mèsi
sagolun
najis tuke
didi madloba
kam sah hamnida
rahmat
kia ora
спасибі

METODE GAUSS & GAUSS JORDAN

Adevian Fairuz Pratama, S.ST., M.Eng

Program Studi Teknik Informatika
Politeknik Negeri Malang

Perbedaan Gauss dan Gauss Jordan

Matriks Sistem Persamaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 10 & 17 \\ 1 & 3 & 10 & 18 \end{bmatrix}$$

Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 5 & 10 & 17 \\ 0 & 0 & 10 & 18 \end{bmatrix}$$

Gauss Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer (OBE)

Operasi Baris Elementer (OBE) sendiri adalah suatu operasional pengubahan nilai elemen matrik berdasarkan barisnya, dengan tidak mengubah matriknya. OBE pada baris ke-i+k dengan dasar baris ke i dapat diformulasikan dengan :

$$a_{i+k,j} = a_{i+k,j} - c.a_{i,j}$$

dimana :

c adalah konstanta pengali yang diperoleh dari perbandingan nilai elemen $a_{i,i}$ dan $a_{i+k,i}$

Proses eliminasi pada metode ini terdiri atas tiga operasi baris elementer

1. Pertukaran : urutan dua persamaan dapat ditukar karena pertukaran tersebut tidak berpengaruh pada solusi akhir.
2. Penskalaan : Persamaan dapat dikali dengan konstanta bukan nol, sebab perkalian tersebut tidak berpengaruh pada solusi akhir.
3. Penggantian : Persamaan bisa diganti dengan penjumlahan persamaan itu dengan penggandaan persamaan lain.

Langkah- Langkah Mengerjakan

$$x+2y+3z=6$$
$$2x+5y+10z=17$$
$$x+3y+10z=18$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 10 & 17 \\ 1 & 3 & 10 & 18 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} B_2 = B_2 - 2B_1 \\ B_3 = B_3 - B_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 12 \end{bmatrix} \quad B_3 = B_3 - B_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Gauss

$$\boxed{\begin{aligned} 3z &= 7 \\ z &= \frac{7}{3} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} y+4z &= 5 \\ y &= 5-4.7/3 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} x+2y+3z &= 6 \\ x &= 6-2y-3z \end{aligned}}$$

Langkah- Langkah Mengerjakan

$$\begin{aligned} x+y+z&=6\\ x+2y+3z&=14\\ x+4y+9z&=36 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&6\\1&2&3&14\\1&4&9&36\end{bmatrix} \quad B_2=B_2-B_1 \quad \begin{bmatrix}1&1&1&6\\0&1&2&8\\1&4&9&36\end{bmatrix} \quad B_3=B_3-B_1 \quad \begin{bmatrix}1&1&1&6\\0&1&2&8\\0&3&8&30\end{bmatrix} \quad B_3=B_3-3B_2 \quad \begin{bmatrix}1&1&1&6\\0&1&2&8\\0&0&2&6\end{bmatrix}$$

Gauss

$2z=6, z=3$

$y+2z=8$

$y=8-2.3=2$

$x+y+z=6$

$x=6-2-3=1$

Sehingga x=1, y=2, z=3

$$B_3=\frac{1}{2}B_3 \quad \begin{bmatrix}1&1&1&6\\0&1&2&8\\0&0&1&3\end{bmatrix} \quad B_1=B_1-B_2 \quad \begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&8\\0&0&1&3\end{bmatrix} \quad B_1=B_1+B_3 \quad \begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&2&8\\0&0&1&3\end{bmatrix}$$

$$B_2=B_2-2B_3 \quad \begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{bmatrix}$$

$x=1$

$y=2$

$z=3$

Gauss Jordan

Latihan Cepat

Tentukan solusi dari sistem persamaan linear berikut :

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z &= 9 \\
2x + 4y - 3z &= 1 \\
3x + 6y - 5z &= 0
\end{aligned}
$$

Tugas

Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan metode Gauss dan Gauss-Jordan

1. $2x + 3y - z = 5$
   $3x + y + 2z = 11$
   $3x - 2y + 3z = 8$

2. $x + 2y + z = 6$
   $x + 3y + 2z = 9$
   $2x + y + 2z = 12$

3. $x + 2y + 3z = 3$
   $2x + 3y + 2z = 3$
   $2x + y + 2z = 5$

Operasi Matriks

PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA
POLITEKNIK NEGERI MALANG
SEMESTER GENAP 2023 / 2024

ADEVIAN FAIRUZ PRATAMA, S.ST., M.ENG

1. Penjumlahan

Dua matriks dapat dijumlahkan jika **ordonya sama,** yang dijumlahkan yaitu elemen-elemen yang seletak.

$$\begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat penjumlahan matriks :

1. A + B = B + A (bersifat **komutatif**)
2. A + (B + C) = (A + B) + C (bersifat **asosiatif**)
3. A + O = O + A = A (bersifat **identitas**, dimana O adalah matriks nol)
4. $(A+B)^t = A^t + B^t$

Contoh Soal

Jika diketahui

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

Maka

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2 & 2+1\\ 3+(-2) & 4+(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

2. Pengurangan

Dua matriks dapat dikurangkan jika **ordonya sama**, yang dikurangkan elemen-elemen yang seletak.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-p & b-q \\ c-r & d-s \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat Pengurangan matriks :

1. **Tidak komutatif** $A - B \neq B - A$
2. A – (B – C) = (A – B) – C (**asosiatif**)
3. A − A = O, dengan O adalah matriks nol
4. Identitas : A − O = A
5. $(A - B)^t = A^t - B^t$

Contoh Soal

Jika diketahui

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & -5\end{bmatrix}$$

maka tentukan :

a. A – B   b. B – A

Jawab :

a. $$A-B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -4 & 9\end{bmatrix}$$

b. $$B-A=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & -5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 4 & -9\end{bmatrix}$$

3. Perkalian

a. Perkalian dengan bilangan real (skalar)

Hasil perkalian skalar **k** dengan sebuah matriks **A** yang berordo ***m x n*** adalah sebuah matriks yang berordo ***m x n*** dengan elemen-elemennya adalah hasil kali skalar **k** dengan setiap elemen matriks **A**.

$$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

Perkalian (2)

Sifat-sifat perkalian skalar k dengan suatu matriks :

1. $(k+m)A = k.A + m.A$
2. $k(A+B) = k.A + k.B$
3. $k(m.A) = (k.m)A$
4. $(kA)^t = k \cdot A^t$

b.

=

...

Contoh Soal Perkalian Skalar

Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ maka tentukan :

a. 2A   b. $-\frac{1}{2}A$

Jawab :

a. $$2A = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}$$

b. $$-\frac{1}{2}A = \frac{-1}{2}.\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -3/2 & 5/2 \end{bmatrix}$$

b. Perkalian dua matriks

Dua matriks **A** dan **B** dapat dikalikan jika jumlah **kolom matriks A (matriks kiri) sama dengan jumlah baris matriks B (matriks kanan)**.

$$\boxed{A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}}$$

Cara mengalikan matriks A dan B yaitu dengan menjumlahkan setiap perkalian elemen pada baris matriks A dengan elemen kolom matriks B dan hasilnya diletakkan sesuai dengan baris dan kolom pada matriks C (matriks hasil perkalian).

Misal : $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix}$ maka:

$$AB=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & r & t \\ q & s & u \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ap+bq & ar+bs & at+bu \\ cp+dq & cr+ds & ct+du \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat perkalian matriks:

1. Umumnya tidak komutatif: $(AB \neq BA)$
2. Asosiatif : (AB)C = A(BC)
3. Distributif kiri : A(B + C) = AB + AC, Distributif kanan : (B + C)A = BA + CA
4. Identitas : IA = AI = A
5. k(AB) = (kA)B

Contoh Soal Perkalian Dua Matriks

Diketahui $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5\\ 6\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}7 & 9\end{bmatrix} dan D=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$, maka tentukan:

a. AB b. AC c. AD

Jawab :

a. $$AB=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15+12\\ 5+24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27\\ 29\end{bmatrix}$$

b. AC tidak dapat dikalikan, karena banyaknya kolom matriks A tidak sama dengan banyaknya baris kolom C

c. $$AD=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15+14 & 18+16\\ 5+28 & 6+32\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29 & 34\\ 33 & 38\end{bmatrix}$$

Latihan Soal

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ tentukan :

a. A + B b. B + A c. B + C d. A + (B + C)

2. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -4 \end{bmatrix} =$

3. Tentukan a, b, c dan d dari :

a. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} a+b & a \\ c & c-d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

4. Jika $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ tentukan:

a. 2(A + B)   b. 2A + 2B   c. 2(3A)   d. 6A

5. Tentukan nilai a, b, dan c jika

$$2\begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & d \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 & b \\ c & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

6. Hitunglah :

a. $\begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -8 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 6 & -3 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

7. Tentukan a jika $\begin{bmatrix} -1 & d \\ -b & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2c & 1 \\ c & a+1 \end{bmatrix}$

Determinan Matriks

Teknik Informatika
Politeknik Negeri Malang
Semester Genap 2023/2024

Adevian Fairuz Pratama, S.ST., M.Eng

DETERMINAN MATRIKS

- Determinan matriks hanya dimiliki **matriks persegi**. Determinan matriks digunakan ketika mencari **invers matriks** dan ketika menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan aturan **cramer**.
- Notasi Determinan:

Determinan dari matriks A dapat ditulis sebagai det(A) atau |A|. Jika diketahui komponen matriksnya, bisa juga ditulis dalam bentuk susunan persegi komponen matriks tersebut, tetapi tidak diapit oleh tanda kurung atau kurung siku, melainkan diapit oleh tanda |…|.

Perhatikan contoh penulisan notasi dari matriks A berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks A dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

MATRIKS ORDO 2x2

– Determinan matriks berordo 2x2 adalah sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \ det(A) = |A| = ad - bc$$

Contoh :

Tentukan determinan matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 \ - \ 1.5 = 6 \ - 5 = 1$$

MATRIKS ORDO 3x3

– Misalkan diberikan matriks A berordo 3x3 sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Maka determinan matriks tersebut dengan **metode sarrus** adalah :

$$\det(A) = |A| = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & d \\ g & h \end{matrix}$$

Sehingga diperoleh

det(A) = |A| = aei + bfg + cdh – bdi – afh – ceg

Contoh

Tentukan determinan dari matriks berikut!

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -7 \\ -1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Maka determinan matriks A, yaitu:

det(A) = (-2)(3)(-8) + (4)(-7)(-1) + (-5)(1)(4) – ((-5)(3)(-1) + (-2)(-7)(4) + (4)(1)(-8))

det(A) = (48 + 28 – 20) – (15 + 56 -32) = 56 – 39 = 17

Sifat-sifat Determinan Matriks

- $|AB| = |A||B|$
- $|A^T| = |A|$
- $|A^{-1}| = 1/|A|$
- Jika tiga elemen nol dalam satu baris,maka nilai determinan = 0.
- Nilai determinan dari matriks segitiga atas atau bawah adalah hasil kali dari elemen-elemen diagonal saja.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1.6.2) = 12$$

Latihan Soal

Tentukan determinan matriks :

1. P = $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ = ...

2. Q = $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ = ...

3. R = $\begin{bmatrix} -4 & 9 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ = ...

4. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

maka Det (AB + C) = ...

Latihan Soal

Tentukan determinan matriks :

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

INVERS MATRIKS

Teknik Informatika
Politeknik Negeri Malang
Genap 2023/2024

Adevian Fairuz Pratama,S.ST., M.Eng

Definisi Invers Matriks

Misalnya matriks A dan B masing-masing adalah matriks persegi, sehingga AB = BA = I, maka matriks B adalah invers matriks A dan ditulis $B = A^{-1}$ dan matriks A adalah invers matriks B dan ditulis $A = B^{-1}$. Matriks A dan B adalah matriks yang saling invers.

Tidak semua matriks memiliki invers, **hanya matriks persegi dengan determinan tidak sama dengan nol yang memiliki invers**.

Invers Matriks

Secara umum, invers dari matriks persegi A atau ditulis A^{-1} adalah sebagai berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

Dengan det(A) adalah determinan matriks A dan Adj(A) adalah adjoin matriks A. Adjoin matriks A adalah transpose dari matriks kofaktor A.

Invers matriks digunakan untuk menyelesaikan persamaan matriks dan sistem persamaan linear. Pada perkalian matriks tidak berlaku sifat komutatif, sehingga berpengaruh pada penyelesaian persamaan matriks.

$AX = B$

Untuk mencari matriks X adalah sebagai berikut

$X = A^{-1}B$

Sedangkan untuk persamaan

$XA = B$

Untuk mencari matriks X adalah sebagai berikut

$X = B\,A^{-1}$

Penyelesaian persamaan matriks di atas tergantung dari letak matriks A pada ruas kiri.

Sifat-Sifat Invers

Sifat-sifat invers matriks:

- $A \, . \, A^{-1} = I = A^{-1} . \, A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} . \, A^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $AI = A = IA$

Invers Matriks Ordo 2x2

Untuk matriks A yang berordo 2x2 inversnya adalah sebagai berikut.

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Contoh:

Tentukan invers dari matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$A^{-1} = \frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Invers Matriks Ordo 3x3

Invers matriks ordo 3x3

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)$$

Determinan matriks A dapat dicari dengan metode sarrus ataupun kofaktor, sedangkan adjoin merupakan hasil transpose dari kofaktor matriks.

Contoh soal

Contoh:

Misal matriks A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ adj A

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ = 40+6+0-15-0-32=-1

Lanjutan .....

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 0 = 40$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -(16-3) = -13$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5 = -5$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -(16-0) = -16$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 15 = -9$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3-6) = 3$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

Lanjutan ....

Kofaktor Matriks A yaitu:

$$\begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dan adjoin matriks A adalah:

$$\begin{bmatrix} 40 & -16 & 9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi invers matriks A adalah:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A) = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 40 & -16 & 9 \\ -13 & 5 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & -9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal

Tentukan invers matriks-matriks berikut:

1. $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
2. $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$
3. $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$
4. $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
5. Diketahui matriks $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan $\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ memenuhi FX = H. Tentukan matriks X.

DETERMINAN DENGAN KOFAKTOR

Teknik Informatika
Politeknik Negeri Malang
Genap 2023/2024

Adevian Fairuz Pratama,S.ST.,M.Eng

MINOR

Untuk mencari nilai kofaktor terlebih dahulu kita harus mencari nilai minor dari setiap elemen matrik. Untuk memudahkan, selanjutnya minor kita beri simbol dengan huruf M dan minor untuk setiap elemen matrik akan kita beri simbol dengan Mij dimana i adalah letak baris dan j adalah letak kolom dari setiap elemen matrik.

CONTOH MINOR

Diketahui matriks A sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

maka minor elemen 2 yang terletak pada baris ke 1 kolom ke 1 diberi simbol dengan M11. Untuk mencari harga minornya dapat kita lakukan dengan mencoret atau menghilangkan baris ke 1 dan kolom ke 1 sehingga didapatkan: $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$

jadi minor elemen 2 (M11) adalah : $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 24 = -24$

- Serupa dengan cara di atas , minor elemen 3 (M12) adalah :

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6$$

Untuk nilai M13, M21, M22, M23, M31, M32 dan M33 didapatkan hasil sebagai berikut:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (16 - 1) = 15$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 20) = -20$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 5) = -5$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (8 - 3) = 5$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = (18 - 5) = 13$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (12 - 20) = -8$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (2 - 12) = -10$$

KOFAKTOR

Setelah mendapatkan harga minor dari masing-masing elemen matriks kita dapat menentukan nilai atau harga dari kofaktor. Cara mencarinya adalah dengan mengalikan masing-masing nilai minor di atas dengan tanda tempat masing-masing elemen. Adapun tanda tempatnya dapat dilihat pada gambar berikut:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Jadi berdasarkan tanda tempat di atas kita dapat mencari nilai kofakto dari masing-masing elemen matriks.

Untuk selanjutnya kita akan berikan simbol untuk nilai kofaktor masing-masing elemen dengan Cij, dimana i menandakan baris dan j menandakan kolom. jadi untuk setiap elemen di atas kita dapatkan harga kofaktornya sebagai berikut:

$$C_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = +(0-24) = -24$$

$$C_{12} = + \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-6) = 6$$

$$C_{13} = + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +(16-1) = 15$$

$$C_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -(0-20) = 20$$

$$C_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +(0-5) = -5$$

$$C_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8-3) = -5$$

$$C_{31} = + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = +(18-5) = 13$$

$$C_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -(12-20) = 8$$

$$C_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = +(2-12) = -10$$

DETERMINAN DENGAN KOFAKTOR

Kofaktor merupakan salah satu langkah yang biasanya kita lakukan dalam mencari determinan suatu matriks. Kofaktor memiliki kelebihan dibandingkan dengan mencari determinan matriks dengan metode sarrus. Jika pada **metode sarrus**, kita hanya bisa mencari determinan suatu matriks sampai pada **ordo 3 x 3**, tetapi kalau menggunakan **metode kofaktor**, kita bisa mencari determinan suatu matriks sampai **ordo n x n**.

- Determinan matriks A yang berukuran n x n dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri dalam suatu baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil kali yang dihasilkan, yakni untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$, maka
- Ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i:

$$\det(A) = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + a_{i3}c_{i3} + \dots + a_{in}c_{in}$$

- Ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j:

$$\det(A) = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + a_{3j}c_{3j} + \dots + a_{nj}c_{nj}$$

CONTOH

Tentukanlah determinan dari matriks A yang elemennya sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Jawab :

Dengan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-1

$\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$

$= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 6(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2(-1)^2\ (15 – 2) + 4(-1)^3\ (5 – 4) + 6(-1)^4\ (1 – 6)$

$= 2.1.13 + 4(-1).1 + 6.1.(-5)$

$= 26 – 4 – 30 = -8$

Dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-2:

$\det(A) = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$

$= 4(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 4(-1)^{3}\ (5 - 4) + 3(-1)^{4}\ (10 - 12) + 1(-1)^{5}\ (4 - 6)$

$= 4.(-1).1 + 3.1.(-2) + 1.(-1).(-2)$

$= -4 - 6 + 2 = -8$

LATIHAN SOAL

Tentukan determinan matriks berikut:

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

3. $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -7 \\ -1 & 4 & -8 \end{bmatrix}$