$$E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\Pi_n(x)$$

$$= f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\left(\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right)$$

$$= f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\left[(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right]$$

<u>Demostración</u>

Se supone un $x \in [a,b]$ cualquiera. Pueden presentarse 2 casos:

1) Si $x = x_i$ para algún $i \in \{0,1,2,\dots,n\}$ entonces:

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\underbrace{\left[(x-x_0)(x-x_1)\dots\overset{0}{(x-x_i)}\dots(x-x_n)\right]}_{=0}$$

$$\Rightarrow f(x) - P_n(x) = 0 \quad \Rightarrow f(x) = P_n(x)$$

2) Si $x \neq x_i \;\; \forall i \in \{0,1,\dots,n\}$ entonces:

Se definen:
$$\begin{cases} w(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - x_j) \\ \lambda = \dfrac{f(x) - P_n(x)}{w(x)} \\ \phi(t) = f(t) - P_n(t) - \lambda w(t) \end{cases}$$

como $x \neq x_i$ se tiene que $w(x) \neq 0$

donde:
- f es de clase $C^{n+1}[a,b]$
- $\underbrace{P_n \text{ y } w}$ son de clase $C^{\infty}[a,b]$
  - Polinomios → continuamente diferenciables
- ϕ es de clase $C^{n+1}[a,b]$

La función $\phi(t)$ tiene al menos $n+1$ ceros en los puntos x_i y en el punto x. La función $\phi'(t)$ tiene por tanto al menos n ceros repartidos entre los ceros de $\phi(t)$. Consecuentemente, $\phi(t)$ tiene al menos $n-1$ ceros y así sucesivamente hasta llegar a $\phi^{(n+1)}(t)$ que tiene al menos 1 cero. Lo anterior, por el teorema de Rolle.

<u>Teorema generalizado de Rolle</u>. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^n[a,b]$ que se anula en algunos $n+1$ puntos del intervalo $[a,b]$. Entonces existe un número ξ en (a,b) tal que $f^{(n)}(\xi)=0$.

Continuando, si se llama ξ_x al cero de $\phi^{(n+1)}(t)$, se obtiene:

$$\phi^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - P_n^{(n+1)}(\xi_x) - \lambda w^{(n+1)}(\xi_x)$$

$$= f^{(n+1)}(\xi_x) - 0 - \lambda (n+1)!$$

↳ Porque P_n es polinomio de grado n

Despejando λ:

$$\lambda(n+1)! = f^{(n+1)}(\xi_x)$$

$$\lambda = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$, reemplazando λ.

Cambiando variable:

$$\frac{f(x)-P_n(x)}{\prod_{i=0}(x-x_i)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$$

$$f(x)-P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_0)$$ //