Algebra Lineal

Definiremos el vector x como el segmento orientado que une el origen de coordenadas con el punto x, así que a cada punto del espacio $\mathbb{R}^n$ se le puede asociar un vector. A los vectores donde todas sus coordenadas son iguales los representaremos por el valor y la flecha. Por ejemplo, $\mathit{1}$ es un vector con todas sus coordenadas iguales a 1.

Operaciones de vectores

La suma o diferencia de dos vectores **x**, **y** se define como

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Es trivial entonces que la suma de vectores es asociativa y conmutativa.

Operaciones de vectores

El producto de una constante por un vector se define como

$$k\mathbf{x} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix}$$

Llamaremos vector transpuesto $\mathbf{x}^t$ al mismo $\mathbf{x}$, pero escrito como un vector fila:

$$\mathbf{x}^t = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

El producto interno o producto escalar de dos vectores lo definimos como

$$\mathbf{x}^t\mathbf{y} = \mathbf{y}^t\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Se llamará norma de un vector **x** a la raíz cuadrada del producto escalar de él por si mismo

$$\| \mathbf{x} \| = \sqrt{\mathbf{x}^t\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Un conjunto de vectores $\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_p}$ es linealmente dependiente si existen escalares $c_1, \ldots, c_p$, no todos nulos, tales que:

$$c_1\mathbf{x_1} + \ldots + c_p\mathbf{x_p} = \mathbf{0}$$

Si un conjunto de vectores no es linealmente dependiente diremos que los vectores son linealmente independientes. En el espacio $\mathbb{R}^p$ el número máximo de vectores linealmente independientes es p.

Llamaremos matriz, $\mathbf{A}$, de dimensiones $(n \times p)$ a un conjunto de $n \times p$ números reales, ordenados en n filas y p columnas. Llamaremos matriz transpuesta, $\mathbf{A}^t$, a la matriz obtenida a partir de $\mathbf{A}$ intercambiando filas por columnas; y debe verificar que $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$.

Introducir matrices en R

```r
(A = matrix(c(1,1,0,2,1,1,3,2,2),ncol=3))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    3
## [2,]    1    1    2
## [3,]    0    1    2
```

```r
#La transpuesta de A
t(A)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    1    0
## [2,]    2    1    1
## [3,]    3    2    2
```

La suma de dos matrices se define sólo cuando ambas son de la misma dimensión:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

El producto matricial, representado por $\mathbf{AB}$ es sólo posible cuando el número de columnas de $\mathbf{A}$ es igual al número de filas de $\mathbf{B}$. Entonces, si $\mathbf{A}_{n \times p}$ y $\mathbf{B}_{p \times h}$, el producto es una matriz $\mathbf{C}_{n \times h}$ con términos

$$c_{ij} = \mathbf{a_i}^t \mathbf{b_j}$$

donde $\mathbf{a_i}^t$ es la i-ésima fila de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{b_j}$ es la j-ésima columna de $\mathbf{B}$. Es claro que este producto no es conmutativo.

Si tomamos la matriz anterior, la suma de ella y su transpuesta sería:

```
A + t(A)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    3    3
## [2,]    3    2    3
## [3,]    3    3    4
```

Si realizamos el producto entre ellas:

```
A*t(A)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    0
## [2,]    2    1    2
## [3,]    0    2    4
```

Es claro que R interpreta esta operación como un producto por posición.

Operaciones de matrices en R

Si definimos una nueva matriz B

```
B = matrix(c(1,0,2,1,1,2),ncol=2)
B%*%t(B)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    1    4
## [2,]    1    1    2
## [3,]    4    2    8
```

```
# Cuando colocamos '%*%' R realiza el producto matricial de filas por columnas
t(B)%*%B
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    5    5
## [2,]    5    6
```

Rango de una matriz

El rango indica el número máximo de vectores linealmente independientes que contiene la matriz. En general, si llamamos $\text{rg}(\mathbf{A})$ al rango de la matriz $\mathbf{A}$ se cumple que:

1. $\text{rg}(\mathbf{A}_{nxp}) \leq \min(n, p)$.
2. Si $\text{rg}(\mathbf{A}_{nxp}) = n < p$ o $\text{rg}(\mathbf{A}_{nxp}) = p < n$, se dice que $\mathbf{A}$ es de rango completo.
3. $\text{rg}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \text{rg}(\mathbf{A}) + \text{rg}(\mathbf{B})$.
4. $\text{rg}(\mathbf{AB}) \leq \min(\text{rg}(\mathbf{A}), \text{rg}(\mathbf{B}))$.
5. $\text{rg}(\mathbf{A}^t\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{AA}^t) = \text{rg}(\mathbf{A})$.

Una matriz es cuadrada si tiene igual número de filas que de columnas. Diremos que una matriz $\mathbf{A}$ es simétrica si $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$. Definimos la matriz identidad o unidad, $\mathbf{I}$ como una matriz con unos en su diagonal principal.

Para obtener el determinante utilizamos el concepto de menor. Llamaremos al menor del elemento a_{ij} de una matriz cuadrada de orden n, m_{ij}, al determinante de la matriz de orden $n-1$ que resulta al eliminar de la matriz original $\mathbf{A}$ la fila i y la columna j. El número $(-1)^{i+j}m_{ij}$ se conoce como adjunto de a_{ij}. Se puede demostrar que entonces el determinante, denotado $|\mathbf{A}|$, se puede calcular como

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}m_{ij}.$$

para cualquier fila i.

Los determinantes tienen las siguientes propiedades:

1. $|\lambda \mathbf{A}| = \lambda^n |\mathbf{A}|$.
2. $|\mathbf{A}^t| = |\mathbf{A}|$.
3. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas, $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.
4. Si permutamos dos filas o dos columnas entre sí, el determinante cambia sólo su signo.
5. Si una fila (o columna) de una matriz es combinación lineal de las restantes filas (o columnas), lo que supone que su rango es menor que n, la matriz es singular y el determinante de la matriz es cero.

Determinante en R

Para calcular determinantes en R se utiliza el comando det

```r
det(A)
```

```
## [1] -1
```

Traza de una matriz

La traza de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de la diagonal principal, es decir

$$\mathrm{tr}(\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}.$$

y tiene como propiedades:

1. $\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B})$.
2. $\mathrm{tr}(\lambda\mathbf{A}) = \lambda\mathrm{tr}(\mathbf{A})$.
3. $\mathrm{tr}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BCA}) = \mathrm{tr}(\mathbf{CAB})$, en el supuesto de que los productos estén definidos.
4. Si la matriz $\mathbf{C}$ es simétrica, $\mathrm{tr}(\mathbf{C}^2) = \mathrm{tr}(\mathbf{CC}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2$.

Traza en R

No existe una función directa que calcule la traza, sin embargo se puede usar en forma sencilla:

```
sum(diag(A))
```

```
## [1] 4
```

donde la función diag lo que hace es colocar los elementos de la diagonal de una matriz.

Dada una matriz $\mathbf{A}$ cuadrada de nxn, no singular, definimos su inversa, $\mathbf{A}^{-1}$, como una matriz nxn tal que

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

La inversa se puede calcular siguiendo las siguientes operaciones:

1. Se sustituye cada elemento por su adjunto.
2. Se transpone la matriz resultante. Es matriz se conocida como la adjunta de $\mathbf{A}$.
3. Se multiplica la matriz por el inverso multiplicativo de $|\mathbf{A}|$.

\end{frame}

La inversa tiene las siguientes propiedades:

1. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ para matrices cuadradas no singulares.
2. $(\mathbf{A}^t)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^t$.
3. $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$.
4. Si $\mathbf{A}$ es simétrica, $\mathbf{A}^{-1}$ también lo es.

Para calcular la inversa de una matriz en R se usa el comando solve

```
solve(A)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    1   -1
## [2,]    2   -2   -1
## [3,]   -1    1    1
```

Matriz ortogonal

Definimos una matriz ortogonal como una matriz que cumple que $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}^{-1}$. Los vectores de una matriz ortogonal de orden n forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, ya que son ortogonales y de norma uno.

Ejemplo

Dada la matriz rectangular $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, calcular la matriz $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ y su determinante y traza. Hacer lo mismo para $\mathbf{A}\mathbf{A}^t$.

En R

```r
A = matrix(c(1,0,2,1,1,2),ncol=2)
(MA = t(A)%*%A)
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    5    5
## [2,]    5    6
```

```r
det(MA)
```

```
## [1] 5
```

```r
sum(diag(MA))
```

```
## [1] 11
```

En R

```r
A = matrix(c(1,0,2,1,1,2),ncol=2)
(MA2 = A%*%t(A))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    1    4
## [2,]    1    1    2
## [3,]    4    2    8
```

```r
det(MA2)
```

```
## [1] 0
```

```r
sum(diag(MA2))
```

```
## [1] 11
```

Ejemplo

Halle la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

En R

```r
Mat = matrix(c(1,1,0,2,1,1,3,2,2),ncol=3)
solve(Mat)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    1   -1
## [2,]    2   -2   -1
## [3,]   -1    1    1
```

Si para una matriz $\mathbf{A}$ se tiene un vector $\mathbf{u}$ tal que:

$$\mathbf{Au} = \lambda \mathbf{u}$$

entonces $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ es un vector propio de la matriz $\mathbf{A}$, asociado al escalar λ, denominado valor propio. Si $\mathbf{u}$ es un vector propio de $\mathbf{A}$ y se multiplica por cualquier $a \neq 0$, entonces $a\mathbf{u}$ también será un vector propio de $\mathbf{A}$.

Para calcular el vector propio podemos escribir la ecuación anterior como:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0},$$

y este es un sistema homogéneo de ecuaciones que tendrá solución nula si y solo si la matriz del sistema es singular. Por lo tanto, este sistema tiene solución no nula si se verifica que

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0.$$

Esta ecuación se denomina la ecuación característica de la matriz. Es una ecuación polinómica en λ de orden n y sus raíces son los valores propios de $\mathbf{A}$.

Cuando la matriz tiene n valores propios distintos, a cada valor propio le podemos asociar un vector propio bien definido y se demuestra que el conjunto de los n vectores propios es linealmente independiente.

Propiedades de los valores propios

1. Si λ es un valor propio de $\mathbf{A}$, λ^r es un valor propio de $\mathbf{A}^r$.
2. Los valores propios de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^t$ son los mismos.
3. $\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum \lambda_i$.
4. $|\mathbf{A}| = \prod \lambda_i$.
5. $\mathbf{A}$ y $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ tienen los mismos valores propios.
6. $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A} \pm \mathbf{I}$ tienen los mismos vectores propios, y si λ es un valor propio de $\mathbf{A}$, $\lambda \pm 1$ es un valor propio de $\mathbf{A} \pm \mathbf{I}$.
7. Las matrices cuadradas $\mathbf{ABC}$, $\mathbf{BCA}$ y $\mathbf{CAB}$, tienen los mismos valores propios no nulos.
8. Si $\mathbf{A}$ es triangular, los valores propios son los elementos diagonales.

Valores y vectores propios en matrices simétricas

Cuando la matriz **A** es simétrica, se cumple que:

(a) los valores propios son siempre reales.

(b) los vectores propios son ortogonales.

Valores y vectores propios en R

Con el comando eigen se calculan los autovalores y autovectores de una matrix.

```
eigen(Mat)
```

```
## $values
## [1]  3.6510934  0.7261094 -0.3772029
##
## $vectors
##           [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] 0.7763000  0.7139029  0.4428710
## [2,] 0.5391815  0.5508072 -0.8264401
## [3,] 0.3265603 -0.4323819  0.3476523
```

Ejemplo

Calcular los vectores y valores propios de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

En R

```r
C = matrix(c(2,1,1,2),ncol=2)
eigen(C)
```

```
## $values
## [1] 3 1
##
## $vectors
##           [,1]       [,2]
## [1,] 0.7071068 -0.7071068
## [2,] 0.7071068  0.7071068
```